UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Magistrsko delo

Igra Craps - med mitom in realnostjo zlate roke

(The Game of Craps - Between the Myth and Reality of the Golden Arm)

Ime in priimek: *Tilen Sabadin*
Študijski program: *Matematične znanosti, 2. stopnja*
Mentor: *izr. prof. dr. Marko Orel*

Koper, avgust 2021

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Tilen SABADIN

Naslov magistrskega dela: Igra Craps - med mitom in realnostjo zlate roke

Kraj: Koper
Leto: 2021

Število listov: 95 Število slik: 18 Število tabel: 11
Število referenc: 7
Mentor: izr. prof. dr. Marko Orel

UDK: 519.2
Ključne besede: igra Craps, martingali, čas ustavljanja, markovske verige, dolžina igre, prednost hiše, martingalov sistem, kontrola kock
Math. Subj. Class. (2010): 60G40

Izvleček:
V nalogi analiziramo kazino igro Craps in pogledamo (ne)mogoče načine oz. sisteme, s katerimi bi lahko prednost hiše spremenili v prednost igralca. Dolžina igre Craps, v kateri zaporedoma mečemo dve kocki, je naključna. Z verjetnostnimi orodji opišemo dolžino igre. Pri izračunih uporabimo pogojno pričakovano vrednost, teorijo martingalov in markovskih verig. Pričakovana dolžina igre oz. metalčeve roke je približno 8.5 metov, kjer pri izračunu uporabimo Waldovo identiteto. Pričakovana dolžina posamezne runde oz. pass-line odločitve znaša $3.3\overline{75}$ metov. Definiramo prednost hiše, tj. dolgoročno razmerje igralčeve izgube na stavljeno enoto. Izračunamo prednost hiše v stavah igre Craps. Predstavimo martingalov sistem in pokažemo, da ne deluje kot posledica izreka o optimalnem času ustavljanja. Na koncu predstavimo teorijo kontrole kock - gre za tehniko meta, s katero poštene kocke vržemo kot nepoštene. Glede na izbrano strategijo in nivo kontrole metalca, vplivamo na verjetnost vsote padlih pik. Posledično vplivamo na verjetnost zmage in prednost hiše v stavah. Ta vpliv najprej opišemo s teoretičinm modelom. Nato se še sami preizkusimo v veščini kontrole kock in s statističnimi testi preverimo svojo uspešnost. Ugotovimo, da kock nismo uspeli statistično značilno kontrolirati. Možno pa je, da obstajajo bolj talentirani metalci od nas.

Key document information

Name and SURNAME: Tilen SABADIN
Title of the thesis: The Game of Craps - Between the Myth and Reality of the Golden Arm

Place: Koper
Year: 2021

Number of pages: 95 Number of figures: 18 Number of tables: 11
Number of references: 7
Mentor: Assoc. Prof. Marko Orel, PhD

UDC: 519.2
Keywords: the game of Craps, martingales, stopping time, Markov chains, game's length, martingale system, dice control
Math. Subj. Class. (2010): 60G40
Abstract:
In the master thesis we present the casino game of Craps and we look at (un)possible systems, that transform the house advantage into player's advantage. The length of the game in which we repeatedly throw a pair of dice is random. We give the probability description of game length. We use conditional probability, martingales and Markov chains for our calculations. Expected length of the shooter's hand (number of throws in a game) is approximately 8.5. We apply the Wald's identity to get this result. The length of a pass-line decision (a single round in the shooter's hand) is $3.\overline{375}$ throws. We define a house advantage as a long term ratio between gambler's loss and amount bet. We calculate the house advantage for bets in the game of Craps. We present the martingale system and we show, that it does not work as a consequence of the optimal stopping theorem. At the end we define and present the theory of dice control. It is a technique of throwing fair dice as unfair ones. Based on the strategy of control and shooter's control level, we have the influence on the probability of fallen sums. Consequently we influence the probability of wining and house advantage in bets. We describe dice control with the theoretical model. Then we test our own skill of dice control. We show that the result obtained, does not significantly differ from random. However, more skilled shooters might exist.

Kazalo vsebine

Kazalo preglednic

Kazalo slik in grafikonov

Seznam kratic

t.i.	tako imenovan
tj.	to je
npr.	na primer
oz.	oziroma

Zahvala

Rad bi se zahvalil izr. prof. dr. Marku Orlu za mentorstvo, predlagan širši nabor tem za to nalogo glede na moje želje in za številne uporabne nasvete tekom nastajanja tega magistrskega dela. Zahvalil bi se tudi bratoma Janvitu in Jerneju, ter staršema za podporo.

1 UVOD

V nalogi predstavimo in analiziramo kazino igro Craps. Igra se odvija v diskretnem času, saj vse dogodke definiramo na osnovi zaporednih metov dveh poštenih kock, ki predstavljajo naš osnovni izvor naključnosti. Opišemo potek in pravila igre, ter obvezne in neobvezne stave z verjetnostmi zmag. Definiramo in izračunamo prednost hiše v posameznih stavah. Izračunamo pričakovano dolžino posamezne runde v igri in pričakovano dolžino celotne igre. Zadnje poglavje namenimo razpravi o sistemih, ki jih igralci uporabljajo z namenom, da izničijo prednost hiše. Predstavimo martingalov sistem in pokažemo zakaj ne deluje. Drugi sistem je zanimiv koncept kontrole kock, veščina, s katero vplivamo na vsoto padlih pik. Je kontrola kock mogoča? Predstavimo hipotetičen vpliv kontrole kock na igro in se sami preizkusimo v veščini kontrole kock, ter s statističnimi testi preverimo našo uspešnost. Kaj je zlata roka in ali gre le za mit? Tudi na to poskusimo odgovoriti v zadnjem poglavju.

V uvodnem poglavju vpeljemo potrebno teorijo. Povdarek je na verjetnostnih orodjih, kot so pogojna pričakovana vrednost in martingali, omenimo pa še markovske verige. Za več informacij o obravnavanih pojmih v prvem poglavju, si lahko bralec za podrobnosti ogleda knjigi [3, 5]. Predvsem knjiga [5] nam je v oporo tudi v veliko drugih poglavjih in razdelkih.

1.1 VERJETNOST IN KOMBINATORIKA

V magistrski nalogi večkrat obravnavamo izjave oblike: “Verjetnost dogodka A je p.” S postavljanjem takih izjav se ukvarja matematična disciplina verjetnost. Da lahko tako izjavo razumemo, moramo najprej uvesti nekaj pojmov in definicij.

Vse se začne z **naključnim eksperimentom** oz. **poskusom**. Rezultat takega eksperimenta imenujemo **izid**. Eksperiment je naključen, zato izida ne moremo z gotovostjo napovedati. Lahko pa navedemo nabor, oz **množico vseh možnih izidov**, ki jo bomo označevali z Ω. Posamezne elemente (izide) iz Ω bomo označili z ω. **Dogodek**, ki ga zapišemo z velikimi tiskanimi črkami, npr. $\mathbf{A}, \mathbf{B}, ...$ je podmnožica Ω, ki je sestavljen iz enega ali več izidov. Pravimo, da se **dogodek zgodi**, če je izid naključnega eksperimenta element dogodka. V nasprotnem pravimo, da se dogodek ne zgodi. Po opravljenem eksperimentu točno vemo, ali se je dogodek zgodil ali ne. Preden opravimo naključni eksperiment, pa ne moremo z gotovostjo trditi, ali se bo dogodek zgodil, ali ne. Zato uvedemo pojem verjetnosti, ki nam pove v kakšnem deležu izvajanj poskusa, se dogodek zgodi. Verjetnost zavzame vrednosti p iz intervala $[0, 1]$.

Vprašati se moramo še, kako določiti parameter p (glej knjigo [3]). Določimo ga na podlagi opazavanj večkrat izvajanega slučajnega eksperimenta, pri čemer opazujemo pojavnost dogodka A. Predpostavimo, da poskus opravimo N-krat, kjer začetne pogoje ohranjamo kar se da enake. Z $N(A)$ označimo število pojavitev dogodka A. Iz izkušenj vemo, da razmerje $N(A)/N$ konvergira h konstantni vrednosti p, ko se N povečuje. Tej limiti pravimo **verjetnost** dogodka A (verjetnost, da se bo dogodek zgodil pri kateremkoli poskusu). V nadljevanju bomo verjetnost dogodka A označevali s $P(A)$, kjer bo P preslikava imenovana **verjetnostna mera**. Prvi trije odstavki služijo kot motivacija definicijam in izrekom v nadaljevanju.

Naj bosta A in B dogodka. Ker so dogodki množice, lahko govorimo tudi o dogodkih: $A \cup B := \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ ali } \omega \in B\}$ (zgodi se dogodek A ali B), $A \cap B := \{\omega \in A \text{ in } \omega \in B\}$ (A in B) in $A^C = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$ (ne A oz. Ω brez A). Dogodka sta disjunktna, če $A \cap B = \emptyset$.

Definicija 1.1. Družini podmnožic $\mathcal{F}$ množice Ω pravimo σ-algebra, če velja:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. Če $A \in \mathcal{F}$, potem $A^C \in \mathcal{F}$
3. Če $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, potem $\cup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Elementom družine $\mathcal{F}$ pravimo dogodki.

Sledi definicija verjetnostne mere.

Definicija 1.2. Naj bo $\mathcal{F}$ družina dogodkov (σ-algebra) na Ω. *Verjetnostna mera* $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ je preslikava, ki zadošča naslednjim lastostim:

1. $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
2. Če so dogodki $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ disjunktni, t.j. $A_i \cap A_j = \emptyset$ za vsak $i \neq j$, potem

$$P\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i)$$

Trojici $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pravimo *verjetnostni prostor.*

Trditev 1.3. *Naj velja $\{\omega\} \in \mathcal{F}$ za vsak $\omega \in \Omega$. Potem lahko verjetnost končnega dogodka iz $\mathcal{F}$, zapišemo z vsoto verjetnosti izidov, ki ga sestavljajo. T.j., če je $A = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \subseteq \Omega$ dogodek, potem je $P(A) = \sum_{i \in \{1,\ldots,n\}} P(\{\omega_i\})$ verjetnost dogodka A.*

Pri izvjanju naključnega eksperimenta, večkrat opazujemo obnašanje različnih objektov/predmetov (npr. kock, kovancev, itd.). Pravimo, da je objekt *pošten*, če generira enako verjetne izide. Sledi izrek, ki nam poda verjetnost dogodka, ko so vsi izidi enako verjetni.

Izrek 1.4 (glej izrek 1.1.1., knjigo [5])**.** *Naj bo* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *verjetnostni prostor, tako da velja* $|\Omega| < \infty$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ *je potenčna množica množice* Ω *in so vsi izidi iz* Ω *enako verjetni. Naj bo* $A \subseteq \Omega$ *dogodek. Potem je* $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ *verjetnost dogodka* A*, kjer je* $|A|$ *oz.* $|\Omega|$ *moč (število elementov) množic* A *oz* Ω*.*

V primeru, ko Ω sestavljajo enako verjetni izidi (kot v izreku 1.4), si pri štetju vseh izidov v A in Ω pomagamo z uporabo kombinatorike.

Izrek 1.5 (Pravilo produkta, glej izrek 1.1.2., knjigo [5])**.** *Predpostavimo, da imamo nalogo, ki zahteva, da rešimo* k *neodvisnih podnalog. Če obstaja* n_1 *načinov, na katere lahko rešimo prvo podnalogo, obstaja* n_2 *načinov, na katere lahko rešimo drugo podnalogo, obstaja* n_3 *načinov, na katere lahko rešimo tretjo podnalogo,..., obstaja* n_k *načinov, na katere lahko rešimo* k*-to podnalogo, potem je vseh načinov, na katere lahko rešimo nalogo natanko* $n_1 n_2 \cdots n_k$*.*

Izrek 1.6 (glej izrek 1.1.8., knjigo [5])**.** *Število načinov, na katere lahko* n *neločljivih žogic razvrstimo v* k *različnih škatel, je* $\binom{n+k-1}{n}$ *oz.* $\binom{n+k-1}{k-1}$*.*

Nadaljujmo s pojmi neodvisnih dogodkov in pogojno verjetnostjo.

Definicija 1.7. Pravimo, da sta dogodka A in B *neodvisna*, če velja:
$P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
Naj bo I končna ali števno neskončna množica. Pravimo, da je družina dogodkov $\{A_i : i \in I\}$ neodvisna, če velja:

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i),$$

za vse končne množice $J \subseteq I$.

Definicija 1.8. Verjetnosti, da se zgodi dogodek A, pri pogoju, da se zgodi dogodek B, za katerega velja $P(B) > 0$, pravimo *pogojna verjetnost dogodka* A glede na dogodek B. Definirana je kot

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

V primeru, ko sta dogodka A in B neodvisna, je pogojna verjetnost dogodka A glede na dogodek B kar $P(A)$.

Sledita *izrek o pogojni verjetnosti* in *Bayesov izrek*.

Izrek 1.9 (glej lemo 1.4.4, knjigo [3] ali izrek 1.2.6., knjigo [5])**.** *Naj bo A dogodek na množici izidov Ω. Naj bo $\{B_i \mid i \in I\}$ končna ali števno neskončna particija množice izidov Ω. Če je $P(B_i) > 0$ za vsak i, potem velja $P(A) = \sum_{i\in I} P(B_i)P(A \mid B_i)$.*

Izrek 1.10 (Bayesov izrek, glej izrek 1.2.7., knjigo [5])**.** *Naj bosta A, B dogodka na Ω za katera velja $P(A) > 0$ in $P(B) > 0$. Potem velja:*

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)}.$$

1.2 SLUČAJNE SPREMENLJIVKE

Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verjetnostni prostor. Slučajna spremenljivka X je taka funkcija iz Ω v $\mathbb{R}$, za katero velja $X^{-1}(U) \in \mathcal{F}$ za vsako odprto množico U v $\mathbb{R}$. Vsakemu izidu ω priredi neko številsko vrednost x. Slučajna spremenljivka X ni nujno injektivna, več izidov lahko zavzame isto vrednost x. Vsi tej izidi tvorijo dogodek $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$. V nadaljevanju bomo tak dogodek pisali kot $\{X = x\}$ (ali kar $X = x$). Po končanem eksperimentu, poznamo izid, in poznamo vrednost x, katero mu dodeli funkcija X. A tako kot pred izvajanjem eksperimenta ne vemo kateri izid se bo zgodil, ne vemo niti, katero vrednost x bo zavzela slučajna spremeljivka X. Zato govorimo o verjetnosti, da slučajna spremenljivka X zavzame vrednost x: $P(X = x)$. To pa je ravno verjetnost dogodka, sestavljenega iz izidov, ki jih X slika v x: $P(X = x) := P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\})$.

Obstajata dva pomembna razreda slučajnih spremenljivk; diskretne slučajne spremenljivke in zvezne slučajne spremenljivke. Diskretne so oblike $X : \Omega \to D \subset \mathbb{R}$, kjer je D števna množica. V magistrski nalogi bomo imeli opravka zgolj z diskretnimi slučajnimi spremenljivkami, v kolikor ne bo povdarjeno drugače. Za slučajno spremenljivko X velja, da je $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq c\} = \{X \leq c\} \in \mathcal{F}$ dogodek za vsak $c \in \mathbb{R}$, ne glede na to, ali je $c \in D$ ali $c \notin D$.

Kot opombo dodajmo, da v primeru, ko je X zvezna, raje kot o verjetnosti $P(X = x)$, govorimo o verjetnosti, da X zavzame vrednost iz neke množice $A \subseteq \mathbb{R}$, tj. $P(X \in A) := P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\})$.

Primer 1.11. Zaporedoma dvakrat vržemo pošteno šeststrano kocko, kjer sta a_1 in a_2 rezultata prvega oz. drugega meta. Množica vseh izidov tega eksperimenta je $\Omega = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. Naj bo X vsota padlih pik obeh metov; tj. X je slučajna spremenljivka, ki vsakemu izidu $\omega = (a_1, a_2)$ priredi vsoto prve in druge koordinate: $X : \Omega \to \{1, 2, \ldots 12\}$, $X : \omega \mapsto a_1 + a_2$. Kakšna je verjetnost, da je vsota obeh metov 4?

$$P(X = 4) = P(\{(a_1, a_2) \in \Omega \mid a_1 + a_2 = 4\}) = P(\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}) = \frac{3}{6 \cdot 6} = \frac{1}{12}.$$

Za tretjo enakost smo uporabili dejstvo, da je kocka poštena ter izreka 1.4 in 1.5. ◻

1.2.1 Porazdelitvene funkcije

S primerom 1.11 smo pokazali verjetnost, da slučajna spremenljivka X zavzame neko konkretno vrednost. Pogosto pa želimo prikazati verjetnost, da X zavzame neko poljubno vrednost x, v ta namen definiramo porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Definicija 1.12. Porazdelitev diskretne slučajne spremenljivke X je funkcija $f_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$, kjer

$$f_X(x) := P(X = x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Opomba 1.13.

- Porazdelitev diskretne slučajne spremenljivke X lahko zapišemo kot PDF_X.
- Naj bo $D = \text{Im } X$. Potem velja $f_X(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus D$. V primeru, ko je $D = \{x_1, x_2 \ldots x_n\}$ končna, lahko funkcijo f_X predstavimo v obliki dvovrstičnega matričnega zapisa: $X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$, kjer $p_i = P(X = x_i)$.
- $\sum_{x\in\mathbb{R}} f_X(x) = \sum_{x\in \text{Im}X} f_X(x) = 1$.
- Pri navajnju funkcije f_X ponavadi navedemo le vrednosti $f_X(x)$, ki so neničelne.

Drugi način prikaza porazdelitve slučajne spremenljivke X je z uporabo *porazdelitvene funkcije*, ki jo označimo z F_X ali CDF_X.

Definicija 1.14. *Porazdelitvena funkcija* slučajne spremenljivke X je preslikava $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$, definirana kot $F_X(x) := P(X \leq x)$.

Lema 1.15. *Če je X diskretna slučajna spremenljivka, relacijo med CDF_X in PDF_X opišemo kot:*

$$F_X(x) = \sum_{\substack{x_i \leq x, \\ x_i \in ImX}} f_X(x_i).$$

Dokaz. Dogodek $X \leq x$ lahko zapišemo kot:

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} = \bigcup_{\substack{x_i \in \text{Im } X \\ x_i \leq x}} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\} = \bigcup_{\substack{x_i \in \text{Im } X \\ x_i \leq x}} \{X_i = x_i\},$$

kjer so $\{X_i = x_i\}$ disjunktni dogodki (saj X vsakemu izidu ω priredi natanko eno vrednost x). Uporabimo 2. lastnost iz definicije 1.2 in dobimo željeno enakost. □

Lastnosti funkcije CDF_X povzamemo z naslednjo lemo, glej lemo 2.1.6., knjigo [3].

Lema 1.16. *Za porazdelitveno funkcijo veljajo naslednje lastonosti:*

1. $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0,\ \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$;
2. *Če je $x \leq y$, potem je $F_X(x) \leq F_X(y)$;*
3. *F_X je desno zvezna, tj.:* $\lim_{h\downarrow 0} F_X(x + h) = F_X(x)$.

1.2.2 Nekatere znane diskretne porazdelitve

V tem poglavju definiramo nekatere znane tipe diskretnih slučajnih spremenljivk. Najpreprostejša je indikatorska slučajna spremenljivka.

Definicija 1.17. Naj bo A nek dogodek, ki se zgodi z verjetnostjo p. Slučajnemu eksperimentu, pri katerem opazujemo pojavnost dogodka A, pravimo *Bernoullijev poskus*. Če se dogodek A zgodi, pravimo rezultatu poskusa *uspeh*, če se A ne zgodi, pa *neuspeh*. Bernoullijev poskus opišemo s t.i. *bernoullijevo* ali *indikatorsko slučajno spremenljivko* $1_A : \Omega \to \{0,1\}$, ki zavzame le dve vrednosti; 1, če se dogodek A zgodi in 0 sicer:

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{če } \omega \in A^C, \\ 1 & \text{če } \omega \in A. \end{cases}$$

Bernoullijeva porazdelitev s parametrom p (pišemo $1_A \sim \text{Bernoulli}(p)$) je

$$f_{1_A}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} P(A^C) & \text{če } x = 0, \\ P(A) & \text{če } x = 1, \\ 0 & \text{sicer}, \end{array} \right\} = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & x \in \{0,1\}, \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

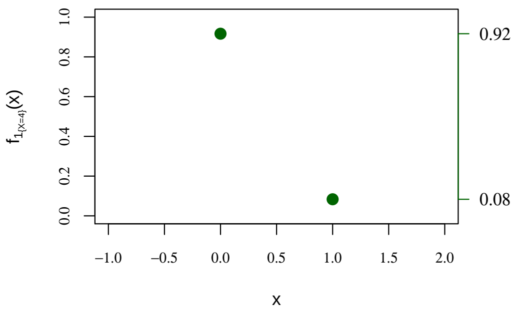
Njena porazdelitvena funkcija je:

$$F_{1_A}(x) = \begin{cases} 0 & \text{če } x < 0, \\ 1-p & \text{če } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{če } x \geq 1. \end{cases}$$

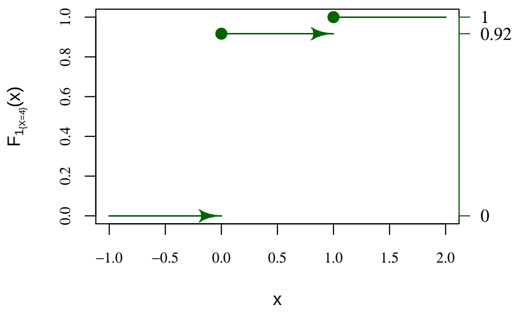
Primer 1.18. Nadaljujemo primer 1.11. Izvajamo isti eksperiment, le opazujemo ga kot Bernoullijev poskus. Zaporedoma vržemo dve kocki. V primeru 1.11 nas je zanimala verjetnost dogodka, da je vsota padlih pik X obeh metov 4, tj.: $\{X = 4\}$. Sedaj pa opazujemo pojavnost oz. indikatorsko slučajno spremenljivko tega dogodka $1_{\{X=4\}}$. Njena porazdelitev je $1_{\{X=4\}} \sim \text{Bernoulli}(1/12)$. Porazdelitev in porazdelitveno funkcijo prikažemo še grafično na slikah 1 in 2.

Definicija 1.19. Naj bo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ zaporedje neodvisnih dogodkov, kjer se vsak zgodi z verjetnostjo p. Zaporedoma n-krat izvajamo Bernoullijeve poskuse, kjer pri i-tem poskusu opazujemo pojavnost dogodka A_i, za vsak $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Naj bo X slučajna spremenljivka, ki prešteje uspehe teh poskusov: $X = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}$. Potem pravimo, da ima X *binomsko porazdelitev* s parametroma n in p (pišemo $X \sim \text{Bin}(n,p)$), ki je definirana kot: $f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},\ x \in \{0,1,\ldots,n\}$.

Bernoullijeva porazdelitev je poseben primer binomske (porazdelitvi Bernoulli(p) in Bin($1,p$) sta enaki).

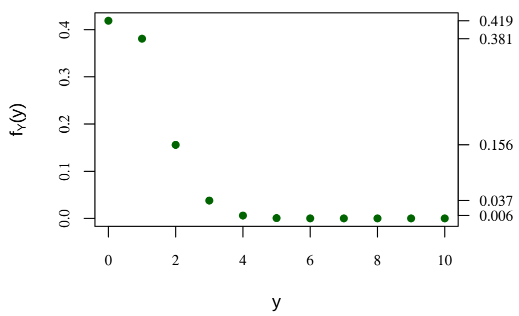


Slika 1: $\mathrm{PDF}_{1_{\{X=4\}}}(x)$.

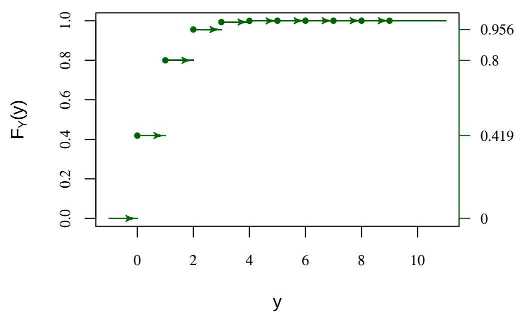


Slika 2: $\mathrm{CDF}_{1_{\{X=4\}}}(x)$.

Primer 1.20. Nadaljujemo primera 1.11 in 1.18. Izvajamo isti Bernoullijev poskus kot v primeru 1.18, a 10-krat, pri čemer so izvedbe neodvisne. Za porazdelitev slučajne spremenljivke $Y = \sum_{i=1}^{10} 1_{\{X=4\}}$ velja $Y \sim Bin(10, 1/12)$. Na slikah 3 in 4 prikažemo porazdelitev in porazdelitveno funckijo slučajne spremenljivke Y še grafično. Vidimo, da je največja verjetnost - več kot 40%, da se dogodek $X = 4$ ne bo zgodil niti enkrat. Iz grafa porazdelitve vidimo, da je $P(Y \leq 3)$ skoraj 1.



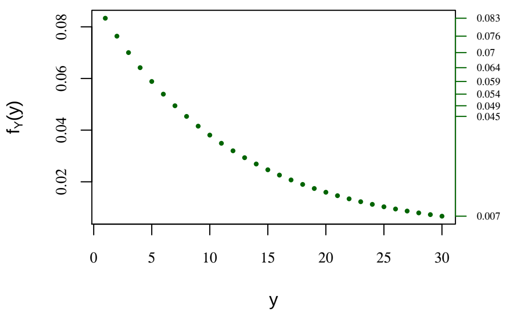
Slika 3: Binomska $\mathrm{PDF}_Y(y)$.



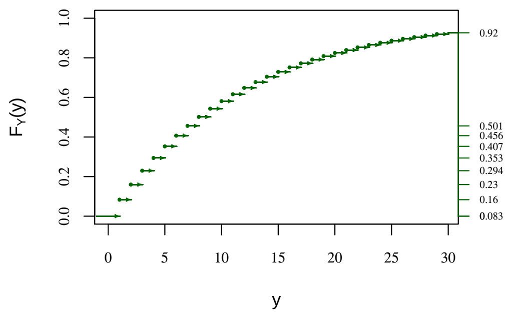
Slika 4: Binomska $\mathrm{CDF}_Y(y)$.

Definicija 1.21. Pravimo, da ima slučajna spremenljivka X *geometrijsko porazdelitev* s parametrom p (pišemo $X \sim Geom(p)$), če prešteje dolžino zaporedja samih neuspešnih, neodvisnih Bernoullijevih poskusov, do vključno prvega uspeha (p je verjetnost uspeha). Porazdelitev slučajne spremenljivke X je $f_X(x) = (1-p)^{x-1}p$, $x \in \mathbb{N}$.

Primer 1.22. Nadaljujemo primera 1.11 in 1.18. Izvajamo isti Bernoullijev poskus kot v primeru 1.18, a ga izvajamo večkrat - dokler ne dobimo prvega uspeha (tj. prvič dobimo vsoto obeh metov $X = 4$). Naj bo Y število izvajanj tega poskusa. Potem velja $Y \sim Geom(1/12)$. Iz grafa porazdelitve na sliki 5 vidimo, da je največja verjetnost, da bomo prvi uspeh videli že v prvem poskusu. Iz grafa na sliki 6 vidimo, da je verjetnost, da dosežemo prvi uspeh prej kot v osmih poskusih približno 50%.



Slika 5: Geometrijska $\mathrm{PDF}_Y(y)$.



Slika 6: Geometrijska $\mathrm{CDF}_Y(y)$.

Definicija 1.23. Slučajna spremenljivka X, ki ima končno zalogo vrednosti, ima *enakomerno porazdelitev*, če velja $f_X(x) = \frac{1}{|\mathrm{Im}X|} = p$, za vsak $x \in \mathrm{Im}X$. Pišemo $X \sim \mathrm{Uniform}(p)$.

Primer 1.24. Enkrat vržemo pošteno šeststrano kocko. Naj bo X število padlih pik. Potem je $X \sim \mathrm{Uniform}(1/6)$.

1.2.3 Slučajni vektorji

Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verjetnostni prostor. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ slučajne spremenljivke, definirane na istem prostoru izidov Ω in se torej nanašajo na isti slučajni eksperiment. *Slučajni vektor* $\mathbf{X} := (X_1, \ldots, X_n)$ je funkcija iz Ω v $\mathbb{R}^n$, ki vsakemu izidu ω priredi vektor $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n)$. Pri tem mora veljati $\mathbf{X}^{-1}(U) \in \mathcal{F}$ za vsako odprto množico U v $\mathbb{R}^n$. Slučajni vektor $\mathbf{X}$ ni nujno injektivna funkcija, več izidov se lahko preslika v isti vektor $\mathbf{x}$. Vsi taki izidi tvorijo dogodek:

$$\begin{aligned}
\{\omega \in \Omega \mid \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{x}\} &= \{\omega \in \Omega \mid (X_1, \ldots, X_n)(\omega) = (x_1, \ldots, x_n)\} \\
&= \{\omega \in \Omega \mid (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) = (x_1, \ldots, x_n)\} \\
&= \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) = x_1, \ldots, X_n(\omega) = x_n\} \\
&= \{X_1 = x_1\} \cap \ldots \cap \{X_n = x_n\} \\
&= \bigcap_{i=i}^{n} \{X_i = x_i\}.
\end{aligned}$$

Tak dogodek bomo na kratko pisali kot $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ (oz. $(X_1, \ldots, X_n) = (x_1, \ldots, x_n)$ ali $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$). Po končanem eksperimentu vemo, kateri izid se je zgodil, in katere vrednosti $x_1, \ldots, x_n$ so zavzele slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$. Ko poznamo zavzete vrednosti, poznamo tudi dogodek $\mathbf{X} = \mathbf{x}$. Preden izvedemo eksperiment, pa lahko govorimo le o verjetnosti, da se bo dogodek $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ zgodil, tj. $P(\mathbf{X} = \mathbf{x})$.

Če je $X_1, \ldots, X_n$ zaporedje diskretnih slučajnih spremenljivk, potem je $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *diskretni slučajni vektor.* V magistrski nalogi bomo delali z diskretnimi slučajnimi vektorji.

Definicija 1.25. *Skupna porazdelitev* slučajnih spremenljivk $X_1, \ldots, X_n$ (oz. *porazdelitev slučajnega vektorja* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$), definiranih na istem verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, je funkcija $f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$,

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_1,\ldots,X_n}((x_1, \ldots, x_n)) := P((X_1, \ldots, X_n) = (x_1, \ldots, x_n)).$$

Definicija 1.26. Naj bo $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, kjer je $n \geq 2$, slučajni vektor na Ω. *Robna porazdelitev* slučajne spremelnjivke $X_i,\ i \in \{1, \ldots, n\}$ glede na skupno porazdelitev $X_1, \ldots, X_n$ je definirana kot:

$$f_{X_i}(x) = P(X_i = x_i) = \sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-1}} P((X_1, \ldots, X_n) = (x_1, \ldots, x_n)).$$

V posebnem, ko je $n = 2$, lahko verjetnosti posameznih parov skupne porazdelitve slučajnih spremenljivk X_1 in X_2 prikažemo v dvodimenziolni tabeli. Vsota vrstic predstavlja robno porazdelitev za X_2 in vsota stolpcev predstavlja robno porazdelitev za X_1.

Definicija 1.27. *Skupna porazdelitvena funkcija* slučanih spremenljivk $X_1, \ldots, X_n$, je funkcija $F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, definirana kot:

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) := P(X_1 \leq x, \ldots, X_n \leq x).$$

Lema 1.28. *Za diskreten slučajni vektor* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *velja:*

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{x'_1 \leq x_1,\ldots,x'_n \leq x_n \\ x'_1 \in Im\ X_1,\ldots,x'_n \in Im\ X_n}} f_{\mathbf{X}}(x'_1, \ldots, x'_n).$$

Dokaz. Dogodek $\{X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n\}$ lahko zapišemo kot:

$$\begin{aligned}\{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) \leq x_1, \ldots, X_n(\omega) \leq x_n\} &= \bigcup_{\substack{x'_1 \in \mathrm{Im}\ X_1,\ldots,x'_n \in \mathrm{Im}\ X_n \\ x'_i \leq x_i,\ldots,x_n \leq x_n}} \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) = x'_i, \ldots, X_n(\omega) = x'_n\} \\ &= \bigcup_{\substack{x'_1 \in \mathrm{Im}\ X_1,\ldots,x'_n \in \mathrm{Im}\ X_n \\ x'_i \leq x_i,\ldots,x'_n \leq x_n}} \{X_1 = x'_1, \ldots, X_n = x'_n\}.\end{aligned}$$

Pokazati moramo, da so $\{X_1 = x'_1, \ldots, X_n = x'_n\}$ v zgornji uniji disjunktni dogodki. Naj bo $k \in \{1, \ldots, n\}$ poljuben in $x'_k,\ x''_k \in \text{Im } X_k$, $x'_k \neq x''_k$ poljubna. Potem

$$\{X_1 = x'_1, X_2 = x'_2, \ldots, X_k = x'_k, \ldots, X_n = x'_n\} \cap \{X_1 = x'_1, X_2 = x'_2, \ldots, X_k = x''_k, \ldots X_n = x'_n\}$$
$$= \Big(\bigcap_{\substack{x'_i \,\in\, \text{Im} X_i, \\ i \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{k\}}} \{X_i = x'_i\} \cap \{X_k = x'_k\} \Big) \bigcap \Big(\bigcap_{\substack{x'_i \in \text{Im} X_i, \\ i \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{k\}}} \{X_i = x'_i\} \cap \{X_k = x''_k\} \Big) = \emptyset.$$

Zadnja enakost sledi iz dejstva, da sta $X_k = x'_k$ in $X_k = x''_k$ disjunktna dogodka. Uporabimo 2. lastnost iz definicije verjetnostne mere 1.2 in dobimo željeno enakost. □

Lastnosti skupne porazdelitvene funkcije povzamemo z naslednjo lemo, ki je posplošitev leme 2.5.5 iz knjige [3].

Lema 1.29. *Za* $CDF_{\mathbf{X}} = CDF_{X_1,\ldots,X_n}$*, kjer je* $\mathbf{X}$ *slučajni vektor na* Ω*, veljajo naslednje lastonosti:*

1. $\lim_{x_1,\ldots,x_n \to -\infty} F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = 0,\ \lim_{x_1,\ldots,x_n \to \infty} F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = 1$

2. *Naj bosta* $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ *in* $(x_1, \ldots, x'_i, \ldots, x_n)$ *slučajna vektorja, ki se razlikujeta le v i-ti koordinati, kjer je* $i = 1, \ldots, n$ *poljuben. Če* $x_i \leq x'_i$*, potem* $F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \leq F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x'_i, \ldots, x_n)$

3. $F_{\mathbf{X}}$ *je desno zvezna, tj.:* $\lim_{h \downarrow 0} F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1{+}h, \ldots, x_n{+}h) = F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$

Definicija 1.30. Slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ so *neodvisne* natanko tedaj, ko je njihova skupna porazdelitev enaka produktu robnih porazdelitev, tj.:
$f_{X_1,\ldots,X_n}(x) = f_{X_1}(x) \cdots f_{X_n}(x)$.

Drugače povedano: slučajne spremeljivke $X_1, \ldots, X_n$ so neodvisne, če so dogodki $\{X_1 = x_1\}, \ldots, \{X_n = x_n\}$ neodvisni za vse $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Primer 1.31. Dvakrat vržemo šeststrano pošteno kocko. Verjetnosti prostor za ta eksperiment je $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\},\ \mathcal{P}(\Omega),\ P)$, kjer je $P(\omega) = 1/36$ za vsak $\omega \in \Omega$. Definirajmo slučajni spremenljivki X in Y na tem prostoru kot $X = max(a_1, a_2)$, $Y = gcd(a_1, a_2)$, kjer $X, Y : \Omega \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Skupno porazdelitev $f_{X,Y}$ vidimo v notranjosti tabele 1, na spodjem in desnem robu te tabele pa vidimo robni porazdelitvi za Y in X (kot vsote vrstic oz. stolpcev). V notranjosti tabele 2 vidimo še skupno porazdelitveno funkcijo $F_{X,Y}$ slučajnih spremenljivk X in Y.

Na sliki 7 in v splošnem, ponavadi prikažemo porazdelitev samo tistih vektorjev (v našem primeru parov (x, y)), ki imajo neničelno verjetnost. Vsi ostali pari (x, y); $x, y \in \mathbb{R}$, ki "nimajo pikice" na sliki, imajo verjetnost 0. Najverjetnejša je kombinacija metov, katerih največji skupni delitelj bo 1 in največje število padlih pik 5.

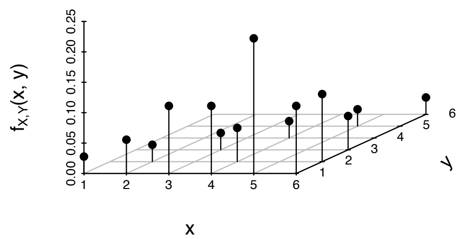
Na sliki 8 vidimo nekatere lastnosti porazdelitvene funkcije. Je odsekoma konstantna, v našem primeru na pravokotnikih $x_i x_{i+1} y_{i+1} y_i$, kjer sta $x_i,\ x_{i+1}$ in $y_i,\ y_{i+1}$

Tabela 1: Skupna porazdelitev za X in Y, $f_{X,Y}$, ter robni porazdelitvi za X in Y.

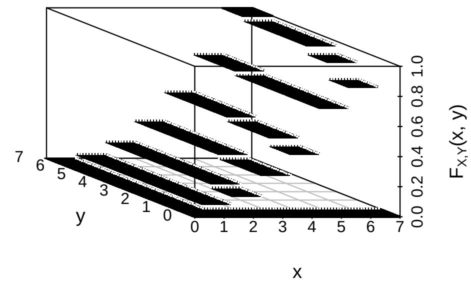
X \ Y	1	2	3	4	5	6	f_X
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	2/36	1/36	0	0	0	0	3/36
3	4/36	0	1/36	0	0	0	5/36
4	4/36	2/36	0	1/36	0	0	7/36
5	8/36	0	0	0	1/36	0	9/36
6	4/36	4/36	2/36	0	0	1/36	11/36
f_Y	23/36	7/36	3/36	1/36	1/36	1/36	

Tabela 2: Skupna porazdelitvena funkcija $F_{X,Y}$ slučajnih spremenljivk X in Y.

X \ Y	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	3/36	4/36	4/36	4/36	4/36	4/36
3	8/36	8/36	9/36	9/36	9/36	9/36
4	13/36	15/36	15/36	16/36	16/36	16/36
5	24/36	24/36	24/36	24/36	25/36	25/36
6	29/36	33/36	35/36	35/36	35/36	36/36



Slika 7: Skupna porazdelitev $f_{X,Y}(x, y)$ prikazana grafično.



Slika 8: Skupna porazdelitvena funkcija $F_{X,Y}(x, y)$ prikazana grafično.

zaporedna para vrednosti iz Im X oz. Im Y (tj. ne obstaja nek x' oz. y' iz Im X oz. Im Y, da bi veljalo: $x_i \leq x' \leq x_{i+1}$ oz. $y_i \leq y' \leq y_{i+1}$). Porazdelitvena funkcija $F_{X,Y}$ je naraščujoča funkcija parametrov x in y in ima "stopničaste skoke" iz pravokotnika na pravokotnik. Vsak pravokotnik je zvezen v dveh robovih, v našem primeru tistih, ki sta bližje izhodišču $(0, 0)$. Ne pa tudi v bolj oddaljenih dveh robovih (tj. $F_{X,Y}$ je desno zvezna).

Slučajni spremenljivki X in Y nista neodvisni, saj velja npr. $f_{X,Y}(4, 2) = 2/36$, kar ni enako kot $f_X(4)f_Y(2) = (\frac{7}{36})^2 = \frac{49}{1296}$.

1.3 PRIČAKOVANA VREDNOST TER MERE RAZPRŠENOSTI IN KORELIRANOSTI SLUČAJNIH SPREMENLJIVK

Denimo, da želimo nekaj povedati o obnašanju izidov slučajnega eksperimenta na dolgi rok. Če eksperiment, ki ga opazujemo z diskretno slučajno spremenljivko X večktat ponavljamo - npr. N-krat - in pri tem opazujemo zavzete vrednosti, ki jih X zavzame: $x_1, \ldots, x_N$, potem je povprečje teh poskusov definirano kot: $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i$. S tem lahko opišemo, kakšen je "povrečen dogodek," ki se je zgodil.

Preden izvajamo eksperiment, lahko povemo kakšno pričakujemo, da bo povprečje. To opišemo s pričakovano vrednostjo. Preden jo formalno definiramo, dodajmo še nekaj motivacije. Predpostavimo kot zgoraj, da bomo N-krat opazovali obnašanje slučajne spremenljivke X pri izvajanju nekega eksperimetna, zavzete vrednosti slučajne spremenljivke X pa bomo oznalčili z $x_1, \ldots, x_N$. Naj bo f_X porazdelitev za X. Potem lahko za poljuben $x \in \mathbb{R}$ pričakujemo, da se bo zgodil približno $N \cdot f_X(x)$-krat. Povprečje bo torej približno enako $\frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot N f_X(x) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x f_X(x)$.

Definicija 1.32. *Pričakovana vrednost* diskrtetne slučajne spremenljivke X je definirana kot:

$$E[X] := \sum_{x \in \mathbb{R}} x f_X(x) = \sum_{x \in \mathrm{Im}\ X} x f_X(x),$$

kadar vrsta absolutno konvergira (tj. $\sum_{x \in \mathrm{Im}\ X} |x| f_X(x) < \infty$).

Definicija 1.33. Pričakovana vrednost slučajnega vektorja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ je definirana kot: $E[\mathbf{X}] = (E[X_1], \ldots, E[X_n])$.

Primer 1.34. Naj bo A dogodek in $1_A \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$. Potem je
$E[1_A] = 0 \cdot f_{1_A}(0) + 1 \cdot f_{1_A}(1) = f_{1_A}(1) = P(1_A = 1) = P(A) = p$.

Trditev 1.35. *Naj bo X nenegativna celoštevilska diskretna slučajna spremenljivka. Potem velja: $E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} P(X \geq x)$.*

Primer 1.36. Naj bo $X \sim \mathrm{Geom}(p)$. Tedaj je njena pričakovana vrednost enaka

$$E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} P(X \geq x) = \sum_{x=1}^{\infty} (\sum_{k=x}^{\infty} (1-p)^{k-1} p) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(1-p)^{x-1} p}{1-(1-p)} = \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} = \frac{1}{p}.$$

Lema 1.37 (glej izrek 1.4.4., knjigo [5])**.** *Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka in $g : Im\ X \to \mathbb{R}$ funkcija. Potem je tudi $g(X)$ slučajna spremenljivka in velja*

$$E[g(X)] = \sum_{x \in ImX} g(x) f_X(x),$$

če je vrsta absolutno konvergenta (tj.: $\sum_{x \in Im\ X} |g(x)| f_X(x) < \infty$).

Lema 1.38 (glej izrek 1.4.10., knjigo [5])**.** *Naj bo $\mathbf{X}$ diskreten slučajni vektor in g : $Im\ \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ funkcija. Potem je $g(\mathbf{X})$ slučajna spremenljivka in velja*

$$E[g(\mathbf{X})] = \sum_{\mathbf{x} \in Im\ \mathbf{X}} g(\mathbf{X}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}),$$

če je vrsta absolutno konvergentna (tj.: $\sum_{\mathbf{x} \in Im\ \mathbf{X}} |g(\mathbf{x})| f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) < \infty$).

Trditev 1.39. *Naj bodo $X_1, \dots, X_n$ in X diskretne slučajne spremenljivke s končno pričakovano vrednostjo absolutne vrednosti. Naj bo $a \in \mathbb{R}$. Potem velja linearnost pričakovane vrednosti:*

1. $E[aX] = aE[X]$;
2. $E[X_1 + \cdots + X_n] = E[X_1] + \cdots E[X_n]$.

Primer 1.40. Slučajno spremenljivko $X \sim \text{Bin}(n, p)$ lahko zapišemo kot $X = 1_{A_1} + \cdots + 1_{A_n}$, kjer je A_i dogodek, da uspeh dočakamo v i-tem poskusu. Velja

$$E[X] = E[1_{A_1} + \cdots + 1_{A_n}] = E[1_{A_1}] + \cdots + E[1_{A_n}] = p + \cdots + p = np.$$

Za izračun smo uporabili linearnost pričakovane vrednosti (trditev 1.39) in primer 1.34.

Definicija 1.41. Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka. Če je $k \in \mathbb{N}$, potem vrednosti $E[X^k]$ pravimo k-ti moment slučajne spremenljivke X.

Definicija 1.42. Naj bo $k \in \mathbb{Z}^+$. V magistrskem delu bomo rekli, da ima diskretna slučajna spremenljivka X končni k-ti moment, kadar velja $E[|X|^k] < \infty$.

S pričakovano vrednostjo napovemo torej, kakšno vrednost pričakujemo, da bo X zavzela. Seveda pa v realnosti lahko pride do odstopanj in X zavzame kako drugo vrednost v okolici pričakovane. Zato vpeljemo posebno funkcijo, varianco, ki nam meri kvadrat pričakovanega odstopanja slučajne spremenljivke od njene pričakovane vrednosti. Bolj intuitiven je standardni odklon, ki je koren variance in v grobem meri pričakovano oddaljenost X od $E[X]$.

Definicija 1.43. *Varianca* diskretne slučajne spremenljivke X s končnim drugim momentom je definirana kot

$$\text{Var}(X) := E[(X - E[X])^2].$$

Standardni odklon od X je definiran kot

$$SD(X) := \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

Definicija 1.44. Pravimo, da ima slučajna spremenljivka X končno pričakovano vrednost, kadar ima končen prvi moment, tj.: $E[|X|] < \infty$. Pravimo, da ima slučajna spremenljivka X končno varianco, ko ima končen drugi moment, tj.: $E[X^2] < \infty$

Izrek 1.45 (glej izrek 1.4.6., knjigo [5])**.** *Naj bo X diskretna slučajna spremenljivka s končnim drugim momentom. Potem velja: Var(X) $= E[X^2] - E[X]^2$.*

Primer 1.46. Naj bo A dogodek, izračunajmo varianco za $1_A \sim \text{Bernoulli}(p)$. Izračunali smo že $E[1_A] = p$ (glej primer 1.34).

$$E[1_A^2] = 0^2 \cdot f_{1_A}(0) + 1^2 \cdot f_{1_A}(1) = f_{1_A}(1) = p,$$

$$\text{Var}(1_A) = E[1_A^2] - E[1_A]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

Za izračun drugega momenta smo uporabili izrek 1.37.

Primer 1.47. Izračunajmo varianco za $X \sim \text{Geom}(p)$. Prvi moment smo že izračunali: $E[X] = \frac{1}{p}$ (glej primer 1.36). Izračunajmo še drugi moment za X.

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sum_{x=1}^{\infty} x^2(1-p)^{x-1}p = \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1)(1-p)^{x-1}p + \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}p \\ &= p(1-p)\frac{\partial^2}{\partial^2 p}\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^x + E[X] \ = \ p(1-p)\frac{\partial^2}{\partial^2 p}\frac{1-p}{p} + \frac{1}{p} \\ &= p(1-p)\frac{\partial^2}{\partial^2 p}\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 2\frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}. \end{aligned}$$

Varianca je torej $\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$.

Izrek 1.48 (glej izrek 1.4.14., knjigo [5])**.** *Naj bodo $X_1, \ldots, X_n$ neodvisne diskretne slučajne spremenljivke s končno pričakovano vrednostjo. Potem ima tudi $X_1 \cdots X_n$ končno pričakovano vrednost in velja: $E[X_1 \cdots X_n] = E[X_1] \cdots E[X_n]$.*

Nekaj smo že povedali o odvisnosti oz. neodvisnosti slučajnih spremenljivk. Nič pa nismo povedali, o vplivu ene slučajne spremenljivke na drugo, v primeru odvisnosti. V ta namen definiramo kovarianco, funkcijo dveh slučajnih spremenljivk, ki nam pove, na kakšen način sta "povezani"(kako kovarirata - se skupno spreminjata). Če je kovarianca negativna, povečanje ene slučajne spremenljivke teži k zmanjšanju druge. Če pa je pozitivna, potem povečanje ene teži k povečanju druge. Kovarianca ni omejena in lahko zasede vrednosti vse od $-\infty$ pa do ∞.

Definicija 1.49. Naj bosta X in Y diskretni slučajni spremenljivki s končno varianco. *Kovarianca* slučajnih spremenljivk X in Y je definirana kot:

$$\text{Cov}(X, Y) := E[(X - E[X])(Y - E[Y])].$$

Izrek 1.50 (glej izrek 1.4.16., knjigo [5])**.** *Naj bosta X in Y skupno porzdeljeni diskretni slučajni spremenljivki s končno varianco. Potem velja: $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$.*

Opomba 1.51. Če velja $\text{Cov}(X, Y) = 0$ potem pravimo, da sta slučajni spremenljivki X in Y nekorelirani.

V naslednjem izreku, izpeljemo ga iz izrekov 3.3.11 in 1.4.17. iz knjig [3] in [5], pokažemo, kaj je varianca konstante in povzamemo lastnosti variance vsote slučajnih spremenljivk.

Izrek 1.52. *Naj bodo $X_1, \dots, X_n$ in X slučajne spremenljivke s končnim drugim momentom in naj bo $a \in \mathbb{R}$. Potem velja*

1. $Var\ (a) = 0$,
2. $Var\ (aX) = a^2\, Var(X)$,
3. $Var\ (X_1 + \dots + X_n) = Var\ (X_1) + \dots + Var\ (X_n)$, *če so* $X_1, \dots, X_n$ *nekorelirane,*
4. $Var\ (X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var\ (X_i) + 2 \sum \sum_{1 \le i < j \le n} Cov\ (X_i, X_j)$.

Primer 1.53. Naj bo $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Potem lahko X zapišemo kot $X = 1_{A_1} + \dots + 1_{A_n}$, kjer je A_i dogodek, da uspeh dočakamo v i-tem poskusu. Zaradi neodvisnosti velja

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(1_{A_1}) + \dots + \mathrm{Var}(1_{A_n}) = p(1-p) + \cdots p(1-p) = np(1-p).$$

Pri izračunu smo za prvo enakost uporabili izrek 1.52, za drugo pa primer 1.46. ◻

Izrek 1.54 (glej izrek 1.4.17., knjigo [5])**.** *Naj bodo X in $X_1, \dots, X_n$ ter Y in $Y_1, \dots, Y_m$ skupno porazdeljene slučajne spremenljivke s končno varianco in $a, b \in \mathbb{R}$ konstanti. Potem velja*

1. $Cov\ (aX, bY) = ab Cov\ (X, Y)$,
2. $Cov\ (\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} Cov\ (X_i, Y_j)$.

Naslednja mera odvisnosti je korelacijski koeficient. Da nam podobno informacijo o vplivu ene slučajne spremenljivke na drugo kot kovarianca; a pove nam tudi več - kako močno sta slučajni spremenljivki korelirani. Korelacijski koeficient zavzame vrednosti na intervalu $[-1, 1]$. Vrednost 1 pomeni maksimalno linearno koreliranost, tj., ko se ena spremenljivka poveča, se tudi druga poveča za konstanten faktor. Vrednost -1 pomeni obratno, ko se ena poveča, se druga zmanjša za konstantni faktor. Vrednosti iz intervala $(0, 1)$ (iz intervala $(-1, 0)$) pomenijo, da lahko moč vpliva spremebe ene slučajne spremenljivke na pričakovano vrednost druge slučajne spremenljivke le približno opišemo s premico pozitivnega (negativnega) naklona. Vrednost 0 pomeni, da sta spremenljivki nekorelirani.

Definicija 1.55. Naj bosta X in Y diskretni slučajni spremenljivki s končno, neničelno varianco. Korelacijski koeficient slučajnih spremenljivk X in Y je definiran kot:

$$\mathrm{Corr(X,\ Y)} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{SD}(X)\ \mathrm{SD}(Y)}.$$

Opazimo, da sta obe obravnavani meri za pričakovano razpršenost vrednosti slučajne spremenljivke X, $\mathrm{Var}(X)$ in $\mathrm{SD}(X)$, definirani na osnovi pričakovane vrednosti. Enako velja za meri medsebojne povezanosti slučajnih spremenljivk X in Y, $\mathrm{Cov}(X,Y)$ in $\mathrm{Corr}(X,Y)$.

Včasih pa pričakovana vrednost ni najboljši opis za obnašanje slučajne spremenljivke. Denimo, da $\mathrm{Im}\, X$ zavzame relativno majhne vrednosti, vsako z relativno majhno verjetnostjo in le nekaj zelo velikih vrednosti, vsako z veliko verjetnostjo. Z drugimi besedami, ko imamo zelo asimetrične porazdelitve, je boljša napovedna vrednost "središčnosti" slučajne spremenljivke mediana.

Definicija 1.56. *Mediana* slučajne spremenljivke X, $\mathrm{median}(X)$, je tista vrednost m, za katero velja $P(X \leq m) \geq 1/2$ in $P(X \geq m) \geq 1/2$.

Opomba 1.57. Mediana ni vedno enolično določena. Pri metu poštene kocke na primer, vse vrednosti iz intervala $[3,4]$ ustrezajo zgornji definiciji. V takem primeru bomo v tej nalogi za mediano vzeli kar sredino intervala, tj. 3.5 v primeru meta poštene kocke.

Primer 1.58. Izračnajmo mediano za $X \sim \mathrm{Geom}(p)$ in njeno zgornjo mejo. Velja

$$\begin{aligned}
P(X \leq m) \geq \frac{1}{2} &\iff \sum_{x=1}^{m}(1-p)^{x-1}p \geq \frac{1}{2} \\
&\iff \sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x-1}p - \sum_{x=m+1}^{\infty}(1-p)^{x-1}p \geq \frac{1}{2} \\
&\iff 1 - \frac{(1-p)^m p}{p} \geq \frac{1}{2} \\
&\iff (1-p)^m \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
P(X \geq m) \geq \frac{1}{2} &\iff \sum_{x=m}^{\infty}(1-p)^{x-1}p \geq \frac{1}{2} \\
&\iff (1-p)^{m-1} \geq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Posledično je

$$\begin{aligned}
\mathrm{Median}(X) = m &\iff (1-p)^m \leq \frac{1}{2} \leq (1-p)^{m-1} \\
&\iff \frac{\ln 2}{|\ln(1-p)|} \leq m \leq \frac{\ln 2}{|\ln(1-p)|} + 1.
\end{aligned}$$

Če zahtevamo, da $m \in \mathbb{Z}$, sledi:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Median}(X) &= \left\lceil \frac{\ln 2}{|\ln(1-p)|} \right\rceil = \left\lceil \frac{\ln 2}{|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} p^k|} \right\rceil = \left\lceil \frac{\ln 2}{|0 - p - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{3}p^3 - \cdots|} \right\rceil \\
&\leq \left\lceil \frac{\ln 2}{p} \right\rceil,
\end{aligned}$$

kjer smo za drugo enakost uporabili Taylorjev razvoj funkcije $\ln(1-p) = f(p)$ okoli točke 0. Poglejmo še razmerje $\text{Median}(X) : E[X] \leq \ln 2 : 1 \approx 0.69$ (za izračun $E[X]$ glej primer 1.36).

1.4 POGOJNA PRIČAKOVANA VREDNOST

1.4.1 Pogojevanje glede na slučajno spremenljivko

V poglavju 1.1 smo definirali pogojno verjetnost dogodka A glede na dogodek B. (glej definicijo 1.8). Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verjetnostni prostor, ter X in Y diskretni slučajni spremenljivki na njem. Bolj v splošnem, lahko definiramo pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke Y, glede na vrednost x neke druge slučajne spremenljivk X.

Definicija 1.59. *Pogojna porazdelitev* slučajne spremenkjive Y glede na dogodek $X = x$ je funkcija $f_{Y|X}(\,\cdot \mid x)$, ki je definirana kot

$$f_{Y|X}(y|x) = P(Y = y \mid X = x)$$

za vsak x, za katerega je $P(X = x) > 0$. Če $P(X = x) = 0$, $f_{Y|X}$ za ta x ni definirana.

Pogojno porazdelitev si lahko predstavljamo kot $f_{X,Y}/f_X$. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni, natanko tedaj ko velja $f_{Y|X} = f_Y$.

Definicija 1.60. Naj bo $X = x$ tak dogodek, da velja $P(X = x) > 0$. Potem je *pogojna pričakovana vrednost* slučajne spremenljivke Y glede na dogodek $X = x$ definirana kot:

$$\gamma(x) = E[Y|X = x] = \sum_{y \in \mathrm{Im} Y} y f_{Y|X}(y|x).$$

To je pričakovana vrednost porazdelitve $f_{Y|X}(y|x)$ (ki je funkcija od y), glede na dogodek $X = x$. Zato na pogojno pričakovano vrednost gledamo kot na funkcijo od x.

Slučajni spremenljivki $\gamma(X) = E[Y|X]$ pa pravimo *pogojna pričakovana vrednost slučajne spremenljivke Y glede na X.*

Izrek 1.61. *Za pogojno pričakovano vrednost $\gamma(X) = E[Y|X]$ velja $E[\gamma(X)] = E[Y]$.*

Dokaz. Iz leme 1.37 sledi

$$\begin{aligned}
E[\gamma(X)] &= \sum_{x \in \mathrm{Im} X} \gamma(x) f_X(x) = \sum_{x \in \mathrm{Im} X} E[Y|X = x] f_X(x) = \\
&= \sum_{x \in \mathrm{Im} X} \sum_{y \in \mathrm{Im} Y} y f_{Y|X}(y|x) f_X(x) = \sum_{x \in \mathrm{Im} X} \sum_{y \in \mathrm{Im} Y} y \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} f_X(x) = \\
&= \sum_{x \in \mathrm{Im} X} \sum_{y \in \mathrm{Im} Y} y f_{X,Y}(x,y) = \sum_{y \in \mathrm{Im} Y} y f_Y(y) = E[Y].
\end{aligned}$$

□

Posledica 1.62. *Naj bosta Y in X slučajni spremenljivki in $E[Y \mid X = x]$ pogojna pričakovana vrednost Y glede na dogodek $X = x$. Potem velja*

$$E[Y] = \sum_{x \in ImX} E[Y \mid X = x] P(X = x).$$

Definicija 1.63. *Pogojna porazdelitvena funkcija* slučajne spremenljivke Y glede na dogodek $X = x$ je funkcija $F_{Y|X}(\,\cdot \mid x)$, ki je definirana kot

$$F_{Y|X}(y|x) = P(Y \leq y \mid X = x)$$

za vsak x, za katerega velja $P(X = x) > 0$. Če $P(X = x) = 0$, $F_{Y|X}$ za ta x ni definirana.

1.4.2 Pogojevanje glede na slučajni vektor

Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verjetnostni prostor. Naj bo Y slučajna spremenljivka, $\mathbf{X}$ pa slučajni vektor na tem prostoru.

Podobno kot v prejšnjem podrazdelku definiramo pogojni porazdelitvi slučajne spremenljivke Y glede na dogodek $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ (tj. dogodek $(X_1, \ldots, X_n) = (x_1, \ldots, x_n)$) ter pogojno pričakovano vrednost slučajne spremenljivke Y glede na dogodek $\mathbf{X} = \mathbf{x}$.

Definicija 1.64. *Pogojna porazdelitev* slučajne spremenkjive Y glede na dogodek $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ je funkcija $f_{Y|\mathbf{X}}(\cdot \mid \mathbf{x})$, ki je definirana kot

$$f_{Y|\mathbf{X}}(y \mid \mathbf{x}) = P(Y = y \mid \mathbf{X} = \mathbf{x})$$

za vsak $\mathbf{x}$, za katerega je $P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) > 0$. Če $P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = 0$, $f_{Y|\mathbf{X}}$ za ta $\mathbf{x}$ ni definirana.

Definicija 1.65. *Pogojna porazdelitvena funkcija* slučajne spremenljivke Y glede na dogodek $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ je funkcija $F_{Y|\mathbf{X}}(\,\cdot \mid \mathbf{x})$, ki je definirana kot

$$F_{Y|\mathbf{X}}(y|\mathbf{x}) = P(Y \leq y \mid \mathbf{X} = \mathbf{x})$$

za vsak $\mathbf{x}$, za katerega velja $P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) > 0$. Če $P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = 0$, $F_{Y|\mathbf{X}}$ za ta $\mathbf{x}$ ni definirana.

Velja $f_{Y|\mathbf{X}} = f_{\mathbf{X},Y}/f_{\mathbf{X}}$. Slučajni vektor $\mathbf{X}$ in slučajna spremenljivka Y sta neodvisna natanko takrat, ko velja $f_{Y|\mathbf{X}} = f_Y$. Sledi definicija pogojne pričakovane vrednosti.

Definicija 1.66. Pogojna pričakovana vrednost slučajne spremenljivke Y glede na dogodek $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, je definirana kot

$$\gamma(\mathbf{x}) = E[Y|\mathbf{X} = \mathbf{x}] = \sum_{y \in \mathrm{Im}Y} y f_{Y|\mathbf{X}}(y|\mathbf{x}).$$

Pogojna pričakovana vrednost $E[Y|\mathbf{X} = \mathbf{x}]$ je odvisna od dogodka $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, zato nanjo gledamo kot funkcijo od $\mathbf{x}$. Slučajni spremenljivki $\gamma(\mathbf{X}) = E[Y|\mathbf{X}]$ pa pravimo pogojna pričakovana vrednost slučajne spremenljivke Y glede na slučajni vektor $\mathbf{X}$.

Izrek 1.67. *Naj bo $\gamma(\mathbf{X}) = E[Y|\mathbf{X}]$. Potem velja $E[\gamma(\mathbf{X})] = E[Y]$.*

Dokaz. Velja

$$\begin{aligned}E\big[E[Y|\mathbf{X}]\big] &= \sum_{\mathbf{x}\in\mathrm{Im}\mathbf{X}} E[Y|\mathbf{X}=\mathbf{x}]f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}\in\mathrm{Im}\mathbf{X}} \frac{E[Y1_{\{\mathbf{X}=\mathbf{x}\}}]}{P(1_{\{\mathbf{X}=\mathbf{x}\}}=1)} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{\mathbf{x}\in\mathrm{Im}\mathbf{X}} E[Y1_{\{\mathbf{X}=\mathbf{x}\}}] = E[Y].\end{aligned}$$

□

Posledica 1.68. *Naj bosta $\mathbf{X}$ in Y slučajni vektor in slučajna spremenljivka. Velja*

$$E[Y] = \sum_{\mathbf{x}\in Im\mathbf{X}} E[Y|\mathbf{X}=\mathbf{x}]P(\mathbf{X}=\mathbf{x}).$$

Izrek 1.69. *Naj bodo $\mathbf{X}$, Y, Z in $Y_1,\ldots,Y_n$ diskretni skupno porazdeljeni slučajni vektor in slučajne spremenljivke s končno pričakovano vrednostjo. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ in $f : Im\,\mathbf{X} \to \mathbb{R}$ funkcija. Naj bo $\mathbf{f} : Im\,\mathbf{X} \to \mathbb{R}^n$ preslikava in $\mathbf{Y} := \mathbf{f}(\mathbf{X})$. Potem velja*

1. $E[aY \mid \mathbf{X}] = aE[Y \mid \mathbf{X}]$;
2. $E[Y_1 + \cdots + Y_n \mid \mathbf{X}] = E[Y_1 \mid \mathbf{X}] + \cdots + E[Y_n \mid \mathbf{X}]$;
3. $E[f(\mathbf{X})Y \mid \mathbf{X}] = f(\mathbf{X})E[Y \mid \mathbf{X}]$;
4. $E\big[E[Z \mid \mathbf{X}] \mid \mathbf{Y}\big] = E\big[Z \mid \mathbf{Y}\big]$.

Dokaz.

1. Naj bo $\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\,\mathbf{X}$ poljuben. Potem velja

$$E[aY|\mathbf{X}=\mathbf{x}] = \sum_{y\in\mathrm{Im}Y} ayf_{Y|\mathbf{X}}(y|\mathbf{x}) = a\sum_{y\in\mathrm{Im}Y} yf_{Y|\mathbf{X}}(y|\mathbf{x}) = aE[Y|\mathbf{X}=\mathbf{x}].$$

2. Naj bo $\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\,\mathbf{X}$ poljuben. Potem velja

$$\begin{aligned}E[Y_1+\cdots+Y_n|\mathbf{X}=\mathbf{x}] &= \frac{E[(Y_1+\cdots+Y_n)1_{\{\mathbf{X}=\mathbf{x}\}}]}{P(1_{\{\mathbf{X}=\mathbf{x}\}}=1)} = \frac{E[Y_1 1_{\{\mathbf{X}=\mathbf{x}\}}+\cdots+Y_n 1_{\{\mathbf{X}=\mathbf{x}\}}]}{P(1_{\{\mathbf{X}=\mathbf{x}\}}=1)} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{E[Y_i 1_{\{\mathbf{X}=\mathbf{x}\}}]}{P(\mathbf{X}=\mathbf{x})} = E[Y_1|\mathbf{X}=\mathbf{x}]+\cdots+E[Y_n|\mathbf{X}=\mathbf{x}].\end{aligned}$$

3. Naj bo $\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\,\mathbf{X}$ poljuben. Potem velja

$$E[f(\mathbf{x})Y|\mathbf{X}=\mathbf{x}] = f(\mathbf{x})E[Y|\mathbf{X}=\mathbf{x}].$$

Za dokaz točke 3. smo uporabili točko 1. tega izreka.

4. Naj bo $\mathbf{y} \in \operatorname{Im} \mathbf{Y}$ poljuben. Potem velja $\mathbf{Y} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{X} \in \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$ in

$$\begin{aligned} E\big[E[Z \mid \mathbf{X}] \mid \mathbf{Y} = \mathbf{y}\big] &= E\big[E[Z \mid \mathbf{X} \in \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})] \mid \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{y}\big] = E[Z \mid \mathbf{X} \in \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})] \\ &= E[Z \mid \mathbf{Y} = \mathbf{y}]. \end{aligned}$$

Za drugo enakost smo uporabili prvo točko tega izreka 1.69. □

Opomba 1.70. V posebnem, ko za Y iz izreka 1.69 velja $Y = 1$, lahko 3. točko izreka preoblikujemo v $E[f(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X}] = f(\mathbf{X})$.

Sledi definicija pogojne variance slučajne spremenljivke Y glede na slučajni vektor $\mathbf{X}$.

Definicija 1.71. Naj bosta slučajna spremenljivka Y s končno varianco in slučajni vektor $\mathbf{X}$ skupno porazdeljena. *Pogojna varianca slučajne spremenljivke Y glede na slučajni vektor* $\mathbf{X}$ je definirana kot:

$$\operatorname{Var}(Y|\mathbf{X}) := E[(Y - E[Y|\mathbf{X}])^2|\mathbf{X}].$$

Izrek 1.72. *Naj bosta Y in $\mathbf{X}$ skupno porazdeljena slučajna spremenljivka (s končno varianco) in slučajni vektor. Potem velja Var $(Y|\mathbf{X}) = E[Y^2|\mathbf{X}] - E[Y|\mathbf{X}]^2$.*

Dokaz. Velja

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(Y|\mathbf{X}) &= E\big[(Y - E[Y|\mathbf{X}])^2 \mid \mathbf{X}\big] \\ &= E\big[Y^2 - 2YE[Y|\mathbf{X}] + E[Y|\mathbf{X}]^2 \mid \mathbf{X}\big] \\ &= E\big[Y^2|\mathbf{X}\big] - 2E\big[YE[Y|\mathbf{X}] \mid \mathbf{X}\big] + E\big[E[Y|\mathbf{X}]^2 \mid \mathbf{X}\big] \\ &= E\big[Y^2|\mathbf{X}\big] - 2E\big[Y|\mathbf{X}\big] \cdot E\big[Y|\mathbf{X}\big] + E[Y|\mathbf{X}]^2 \cdot E\big[1|\mathbf{X}\big] \\ &= E\big[Y^2|\mathbf{X}\big] - 2E\big[Y|\mathbf{X}\big]^2 + E\big[Y \mid \mathbf{X}\big]^2 \\ &= E[Y^2|\mathbf{X}] - E[Y|\mathbf{X}]^2. \end{aligned}$$

Za tretjo enakost smo uporabili 1. točko izreka 1.69, za četrto enakost pa 3. točko. □

Izrek 1.73 (Pogojni zakon varianc)**.** *Naj bosta Y in $\mathbf{X}$ skupno porazdeljena slučajna spremenljivka (s končno varianco) in slučajni vektor. Potem velja*

$$Var\ (Y) = E[Var\ (Y \mid \mathbf{X})] + Var\ (E[Y \mid \mathbf{X}]).$$

Dokaz. Velja

$$\begin{aligned} E[\operatorname{Var}(Y|\mathbf{X})] + \operatorname{Var}(E[Y|\mathbf{X}]) &= E\big[E[Y^2|\mathbf{X}]\big] - E\big[E[Y|\mathbf{X}]^2\big] \\ &\quad + E\big[E[Y|\mathbf{X}]^2\big] - E\big[E[Y|\mathbf{X}]\big]^2 = E[Y^2] - E[Y]^2 = \operatorname{Var}(Y). \end{aligned}$$

Za prvo enakost uporabimo izrek 1.69 točko 1. in izrek 1.72. Za tretjo enakost uporabimo izrek 1.45. Za drugo enakost uporabimo izrek 1.67. □

1.5 RODOVNE FUNKCIJE

Definicija 1.74. Rodovna funkcija nenegativne celoštevilske slučaje spremenljivkje X je definirana kot $G(z) := E[z^X]$, kjer je z poljubno kompleksno število za katerega vrsta $\sum_{x=0}^{\infty} z^i P(X = x)$ konvergira.

Rodovno funkcijo nenegativne celoštevilske slučajne spremenljivke X lahko označimo tudi kot G_X, vrsta pa konvergira vsaj za tiste z, za katere velja $|z| < 1$.

Trditev 1.75. *Naj bo X nenegativna celoštevilska slučajna spremenljivka. Tedaj velja*

$$E[X] = \lim_{s\uparrow 1} G'_X(s) \text{ in } E[X^2] - E[X] = \lim_{s\uparrow 1} G''_X(s).$$

Če je konvergenčni radij vrste $G_X(s)$ večji od 1, potem velja

$$E[X] = G'_X(1) \text{ in } E[X^2] - E[X] = G''_X(1).$$

Posledica 1.76. *Naj bo X nenegativna celoštevilska slučajna spremenljivka. Tedaj velja*

$$Var(X) = \lim_{s\uparrow 1} G''_X(s) + \lim_{s\uparrow 1} G'_X(s) - \lim_{s\uparrow 1} G'_X(s)^2.$$

Če je konvergenčni radij vrste $G_X(s)$ večji od 1, potem velja

$$Var(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2.$$

1.6 MARTINGALI

Martingal je zaporedje diskretnih slučajnih spremenljivk, indeksiranih glede na časovni parameter, z lastnostjo, da je pričakovana vrednost prihodnjega člena z ozirom na predhodnje in sedanji člen, sedanji člen (glej knjigo [5]).

Definicija 1.77 (glej knjigo [5])**.** Naj bo $\{X_n\}_{n\geq 0}$ zaporedje skupno porazdeljenih diskretnih slučajnih spremeljivk, indeksiranih s časovnim parametrom. Pravimo mu *filtracija* in je naš osnovni izvor naključnosti. Pravimo, da je zaporedje diskretnih slučajnih spremenljivk $\{M_n\}_{n\geq 0}$ *martingal* z ozirom na filtracijo $\{X_n\}_{n\geq 0}$, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

1. Obstaja neko zaporedje nenaključnih funkcij $\{f_n\}_{n\geq 0}$, tako da velja: $M_n := f_n(X_0, \ldots, X_n)$,
2. $E[|M_n|] < \infty$,
3. $E[M_{n+1} \mid X_0, \ldots, X_n] = M_n$.

Opomba 1.78.

- Člen X_0 v filtraciji $\{X_n\}_{n\geq 0}$ velikokrat smatramo kot konstanto.
- Če v 3. točki definicije 1.77 "=" zamenjamo z "$\leq$", potem pravimo, da je $\{M_n\}_{n\geq 0}$ *supermartingal*.
- Če v 3. točki definicije 1.77 "=" zamenjamo z "$\geq$", potem pravimo, da je $\{M_n\}_{n\geq 0}$ *submartingal*.
- Iz 3. točke definicije 1.77 in izreku 1.67 sledi, da je $E[M_n] = E[M_{n+1}]$ v primeru, ko je $\{M_n\}_{n\geq 0}$ martingal, $E[M_n] \geq E[M_{n+1}]$ v primeru, ko je $\{M_n\}_{n\geq 0}$ supermartingal in $E[M_n] \leq E[M_{n+1}]$ v primeru, ko je $\{M_n\}_{n\geq 0}$ submartingal.

V kazino igri z več rundami, lahko z martingalom definiramo zaporedje igralčevega kapitala po posameznih rundah. Več o tem predstavimo v razdelku 4.1.

Trditev 1.79. *Če je $\{M_n\}_{n\geq 0}$ martingal glede na filtracijo $\{X_n\}_{n\geq 0}$, potem je $\{M_n\}_{n\geq 0}$ martingal glede na $\{M_n\}_{n\geq 0}$.*

Dokaz. Naj bo $\{X_n\}_{n\geq 0}$ tako zaporedje slučajnih spremenljivk in $\{f_n\}_{n\geq 0}$ zaporedje funkcij, da velja $M_n = f_n(X_0, \ldots, X_n)$, za vsak $n \in \mathbb{N}_0$. Naj bo $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, funkcija, definirana kot

$$\mathbf{f}_n(X_0, X_1, \ldots, X_n) = (f_0(X_0), f_1(X_0, X_1), \ldots, f_n(X_0, \ldots, X_n))$$

za vsak $n \in \mathbb{N}_0$. Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ definirajmo slučajno spremenljivko Z in slučajna vektorja $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ kot $Z = M_{n+1}$, $\mathbf{X} = (X_0, \ldots, X_n)$, $\mathbf{Y} = \mathbf{f}_n(\mathbf{X})$. Iz točk 3. in 4. izreka 1.69 sledi

$$\begin{aligned} M_n &= E\big[M_n \mid M_0, \ldots, M_n\big] = E\big[E[M_{n+1} \mid X_0, \ldots, X_n] \mid M_0, \ldots, M_n\big] \\ &= E\big[E[Z \mid \mathbf{X}] \mid \mathbf{Y}\big] = E\big[Z \mid \mathbf{Y}\big] = E\big[M_{n+1} \mid M_0, \ldots, M_n\big]. \end{aligned}$$

□

Opomba 1.80. Dejstvo, da je $\{M_n\}_{n\geq 0}$ martingal tudi glede na filtracijo $\{M_n\}_{n\geq 0}$, lahko uporabimo tako, da rečemo samo, da je $\{M_n\}_{n\geq 0}$ martingal. To storimo, ko filtracija $\{X_n\}_{n\geq 0}$ ni bistvenega pomena. Izrek 1.79 velja tudi, ko je M_n submartingal ali supermartingal.

Definicija 1.81. Naj bo $\{X_n\}_{n\geq 0}$ filtracija. Pravimo, da je slučajna spremenljivka N, $\operatorname{Im} N = \mathbb{N}$, *čas ustavljanja* z ozirom na filtracijo $\{X_n\}_{n\geq 0}$, če obstaja zaporedje $\{g_n\}_{n\geq 0}$ nenaključnih funkcij, tako da velja

$$1_{\{N\leq n\}} = g_n(X_0, \ldots, X_n), \text{ za vse } n \geq 0.$$

Definicija 1.81 nam pove, da je pojavnost dogodka $\{N \leq n\}$ določena s slučajnimi spremenljivkami $X_0, \ldots, X_n$.

Sledi izrek o optimalnem času ustavljanja. Da nam pogoje, ki nam zagotovijo, da velja $E[M_N] \leq E[M_0]$, ko je $\{M_n\}_{n\geq 0}$ supermartingal in N čas ustavljanja, glede na filtracijo $\{X_n\}_{n\geq 0}$. V igralniškem jeziku to pomeni, da ne obstaja igralniška strategija, ki bi zaporedje ničnih ali negativnih pričakovanih dobičkov iz stav, spremenila v pozitivne pričakovane dobičke, ko je zadoščeno pogojem izreka.

Izrek 1.82 (Izrek o optimalnem času ustavljanja, glej izrek 3.2.2., knjiga [5])**.** *Naj bosta $\{M_n\}_{n\geq 0}$ supermartingal in N čas ustavljanja glede na filtracijo $\{X_n\}_{n\geq 0}$. Če velja ena izmed naslednjih predpostavk:*

1. $P(N < \infty) = 1$ *in* $M_n \geq 0$ *za vse* $n \geq 0$,
2. $P(N < \infty) = 1$, $E[|M_N|] < \infty$ *in* $\lim_{n\to\infty} E[|M_n| 1_{\{N\geq n+1\}}] = 0$,
3. $E[N] < \infty$ *in obstaja konstanta* C, *da velja* $E\big[|M_{n+1} - M_n| \bigm| X_0, \ldots, X_n\big] \leq C$ *na* $\{N \geq n+1\}$ *za vsak* $n \geq 0$,

potem je $E[|M_N|] < \infty$ *in velja* $E[M_N] \leq E[M_0]$.

Opomba 1.83. Izrek 1.82 velja pod pogojema 2. ali 3. tudi, ko je $\{M_n\}_{n\geq 0}$ submartingal ali martingal, v tem primeru je "$\leq$" v zaključku izreka: "$E[M_N] \leq E[M_0]$", zamenjana z "$\geq$" oz. z "$=$".

Naslednja posledica izreka o optimalnem času ustavljanja je znana kot t.i. Waldova identiteta (ki smo jo nekoliko modificirali in dodali zaporedje slučajnih spremenljivk $Y_1, Y_2, \ldots$ zaradi potreb v nadaljevanju).

Posledica 1.84 (glej knjigo [5])**.** *Naj bo $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih vektorjev in naj velja $E[|X_1|] < \infty$. Naj bo $S_0 := 0$ in $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Naj bo N čas ustavljanja z ozirom na $\{(X_n, Y_n)\}_{n\geq 1}$ in $E[|N|] < \infty$. Potem je $E[|S_N|] < \infty$ in velja $E[S_N] = E[N]E[X_1]$.*

Dokaz. Naj bo $M_n := S_0 + \sum_{i=1}^{n} (X_i - E[X_i]) = S_n - nE[X_1]$ za vsak $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potem trdimo, da je $\{M_n\}_{n\geq 0}$ martingal z ozirom na $\{(X_n, Y_n)\}_{n\geq 0}$, ki zadošča 3. predpostavki izreka 1.82 o optimalnem zaustavljanju. Apliciramo izrek 1.82 in dobimo $E[M_N] = E[M_0] = 0$. Sledi, $E[M_N] = E[S_N] - E[N]E[X_1] = 0$, iz tega pa posledica.

Da bomo povsem korektni pokažimo še, da velja naša trditev. Slučajna spremenljivka M_{n+1} je martingal, saj

$$\begin{aligned} E[M_{n+1} \mid (X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)] &= E[X_{n+1} - E[X_{n+1}] + M_n \mid (X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)] \\ &= M_n. \end{aligned}$$

Za drugo enakost uporabimo linearnost pogojne pričakovane vrednosti in izrek 1.69, točko 3.

Zadoščeno je tudi pogojem točke 3 izreka 1.82, saj po predpostavki te posledice velja $E[N] < \infty$ in

$$\begin{aligned} E\big[|M_{n+1} - M_n| \bigm| (X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)\big] &= E\big[|X_{n+1} - E[X_{n+1}]| \bigm| (X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)\big] \\ &= E\big[\big|X_{n+1} - E[X_{n+1}]\big|\big] \\ &= E\big[\big|X_1 - E[X_1]\big|\big] \\ &\leq 2E[|X_1|], \ n \geq 0. \end{aligned}$$

Za drugo enakost smo uporabili predpostavko o neodvisnoti vektorjev $(X_i, Y_i), (X_j, Y_j)$, za vsak par $i \neq j$. □

1.7 MARKOVSKE VERIGE

Markovska veriga je naključnen proces - tj. zaporedje diskretnih slučajnih spremenljivk indeksiranih s časovnim parametrom - z lastnostjo, da je verjetnost prihodnjega dogodka, pogojno na podano trenutno stanje in zgodovino, neodvisna od zgodovine.

Teorija za ta razdelek izhaja iz knjig [5], [3], [6].

Definicija 1.85 (Markovska veriga)**.** Naj bo $\{X_n\}_{n\geq 0}$ časovno indeksirano zaporedje diskretnih slučajnih spremenljivk, ki zavzamejo vrednosti iz neke števne množice S. Množici S pravimo *prostor stanj*. Pravimo, da je zaporedje $\{X_n\}_{n\geq 0}$ *markovska veriga*, če zanjo velja *markovska lastnost*, tj.

$$P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n),$$

za vse $n \geq 0$ in vse $j, i_0, \ldots, i_n \in S$.

Opomba 1.86. Če razmišljamo o času n kot o sedanjosti, potem nam markovska lastnost v definiciji 1.85 pove, da je pogojna verjetnost stanja en korak v prihodnost, ko imamo podano sedanjo stanje in preteklost, neodvisna od preteklosti. Markovski verigi iz definicije 1.85 pravimo tudi diskretna Markovska veriga, saj je indeksirana glede na diskreten časovni parameter (tj. slučajne spremenljivke si sledijo v števnem zaporedju). Množica stanj S je lahko tudi neskončna. To, da slučajna spremenljivka X_n zavzame vrednosti iz S pomeni, da je v ozadju verjetnosti prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, in so $X_n : \Omega \to S$ $\mathcal{F}$-merljive funkcije. Množica stanj S ni nujno podmnožica $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.87. *Časovna homogenost* markovske verige $\{X_n\}_{n\geq 0}$ s prostorom stanj S, je lastnost

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i), \text{ za vse } i, j \in S \text{ in vse } n \geq 0.$$

Naša pozornost bo usmerjena na časovno homogene markovske verige.

Definicija 1.88. Naj bo $\{X_n\}_{n\geq 0}$ markovska veriga s prostorom stanj S. *Prehodna verjetnost* je število $P_{ij} := P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$, ki je definirano za vse $i, j \in S$ in $n \geq 0$.
Prehodna matrika $\mathbf{P}$ je $|S| \times |S|$ matrika prehodnih verjetnosti, $\mathbf{P} = (P_{ij})_{i,j\in S}$, ki ima vrstice in stolpce indeksirane z elementi iz množice stanj S.

Opomba 1.89. Časovna homogenost nam pove, da so prehodne verjetnosti neodvisne od časa n.

Lema 1.90. *Za prehodno matriko veljata naslednji lastnosti*

1. $P_{ij} \geq 0$ *za vsak* n *in* $i, j \in S$,
2. $\sum_{j\in S} P_{ij} = 1$ *za* $i \in S$.

Porazdelitvi X_0 pravimo *začetna porazdelitev*, tj. porazdelitev $P(X_0 = i)$, $i \in S$. Markovsko verigo lahko opišemo s prostorom stanj, prehodno matriko in z začetno porazdelitvijo. Začetna porazdelitev pogosto ne igra bistvene vloge.

Lema 1.91. *Naj bo* $\{X_n\}_{n\geq 0}$ *markovska veriga v prostoru stanj* S *s prehodno matriko* $\mathbf{P}$. *Naj bo* $P(X_n = i_0) > 0$. *Potem za vsak* $n \geq 0$, $m \geq 1$ *in* $i_0, i_1, \ldots, i_n \in S$ *velja*

$$P(X_{n+m} = i_m \mid X_n = i_0) = \sum_{i_1\in S} \cdots \sum_{i_{m-1}\in S} P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_{m-1} i_m}.$$

Dokaz. Naj bo $\{X_n\}_{n\geq 0}$ markovska veriga, ki zadošča predpostavkam leme 1.91. Potem velja

$$\begin{aligned}
&P(X_{n+1} = i_1, \ldots, X_{n+m} = i_m \mid X_n = i_0) = \\
&= P(X_{n+1} = i_1 \mid X_n = i_0) P(X_{n+2} = i_2 \mid X_n = i_0, X_{n+1} = i_1) \cdots \\
&\cdots P(X_{n+m} = i_m \mid X_n = i_0, X_{n+1} = i_1, \ldots, X_{n+m-1} = i_{m-1}) \\
&= P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_{m-1} i_m},
\end{aligned}$$

Če je katera izmed pogojnih verjetnosti nedoločena, je lahko definirana poljubno. Sledi, da je

$$\begin{aligned}
&P(X_{n+m} = i_m \mid X_n = i_0) \\
&= \sum_{i_1\in S} \cdots \sum_{i_{m-1}\in S} P(X_{n+1} = i_1, \ldots, X_{n+m-1} = i_{m-1}, X_{n+m} = i_m \mid X_n = i_0) \\
&= \sum_{i_1\in S} \cdots \sum_{i_{m-1}\in S} P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_{m-1} i_m}.
\end{aligned}$$

□

Sledi definicija prehodne verjetnosti/matrike n-tega koraka.

Definicija 1.92. Naj bo $\{X_n\}_{n\geq 0}$ markovska veriga s prostorom stanj S. Za $m \in \mathbb{N}$ definiramo *prehodno verjetnost m-tega koraka*, označimo jo s $P_{ij}^{(m)}$, kot verjetnost $P_{ij}^{(m)} := P(X_{n+m} = j \mid X_n = i)$, za vse $i, j \in S$ in $n \geq 0$.
Prehodna matrika m-tega koraka $\mathbf{P}^{(m)}$ je $|S| \times |S|$ matrika prehodnih verjetnosti m-tega koraka, $\mathbf{P}^{(m)} = (P_{ij}^{(m)})_{i,j\in S}$, ki ima vrstice in stolpce indeksirane z elementi iz množice stanj S.

Izrek 1.93. *Naj bo $\{X_n\}_{n\geq 0}$ markovska veriga v prostoru stanj S. Naj bosta $i, j \in S$. Potem velja*

$$P_{ij}^{(m)} = \sum_{k\in S} P_{ik} P_{kj}^{(m-1)},$$

kjer definiramo $P_{ij}^{(0)} = \delta_{i,j}$, in je $\delta_{i,j}$ Kronackerjev delta.

Dokaz. Velja

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(m)} &= P(X_{n+m} = j \mid X_n = i) \\
&= \sum_{k\in S} P(X_{n+m} = j, X_{n+1} = k \mid X_n = i) \\
&= \sum_{k\in S} P(X_{n+1} = k \mid X_n = i) P(X_{n+m} = j \mid X_n = i, X_{n+1} = k) \\
&= \sum_{k\in S} P(X_{n+1} = k \mid X_n = i) P(X_{n+m} = j \mid X_{n+1} = k) \\
&= \sum_{k\in S} P_{ik} P_{kj}^{(m-1)}.
\end{aligned}$$

□

Posledica 1.94. *Prehodno matriko m-tega koraka lahko zapišemo kot m-to potenco prehodne matrike enega koraka, tj.* $\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P}^m$

Dokaz. Iz teorije matrik, lahko na formulo za $P_{ij}^{(m)}$ iz izreka 1.93 gledamo kot množenje i-te vrstice matrike $\mathbf{P}$ in j-tega stolpca matike $\mathbf{P}^{(m-1)}$. Zato lahko zapišemo $\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{(m-1)}$. Z iteracijo te formule, dobimo $\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P} \cdot \dots \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^m$. □

Z drugimi besedami, posledica 1.94 pove, da so prehodne verjetnosti m-tega koraka $P_{ij}^{(m)}$ elemeti matrike $\mathbf{P}^m$, tj. $[\mathbf{P}^{(m)}]_{ij} = [\mathbf{P}^m]_{ij} = P_{ij}^{(m)}$ za vsak $i, j \in S$.

1.8 OSTALE DEFINICIJE

Definicija 1.95. Naj bo X poljubna množica, Y linearno urejena množica in $f : X \to Y$ neka funkcija. Potem je $\arg\max$ funkcije f na množici X definiran kot

$$\arg\max_{x\in X} f(x) := \{x \in X \ : \ f(s) \leq f(x) \text{ za vse } s \in X\}.$$

Naslednja definicija je povzeta iz knjige [1].

Definicija 1.96 (Digraf)**.** *Digraf* ali *usmerjen graf* D sestoji iz para množic, $D = (V, A)$, kjer velja $A \subseteq V \times V$. Množici V, pišemo tudi $V(D)$, pravimo množica vozlišč. Množici A, pišemo tudi $A(D)$, pravimo množica *usmerjenih povezav.* Vozlišči iz usmerjeni povezave $(u, v) \in A(D)$ poimenujemo *rep* (vozlišče u) in *glava* (vozlišče v); usmerjeni povezavi (u, v) pa lahko rečemo tudi povezava od u do v.

Definicija 1.97. Naj bo $X_1, X_2, \ldots$ zaporedje skupno porazdeljenih diskretne slučajnih spremenljivk, ki so skupno porazdeljene s slučajno spremenljivko X. Pravimo, da X_n *konvergira skoraj gotovo* proti X, pišemo $X_n \to X$ s.g., če velja $P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$.

Izrek 1.98 (Zakon velikih števil, glej izrek 1.5.5. v knjigi [5])**.** *Naj bo $X_1, X_2, \ldots$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, ki imajo končno pričakovano vrednost. Naj bo $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ za vsak $n \geq 1$ in definirajmo $\mu := E[X]$. Potem velja $S_n/n \to \mu$ skoraj gotovo.*

2 PRAVILA IGRE IN OPIS STAV

Craps je igra pri kateri igralec zaporedoma meče dve kocke hkrati, ki sta običajno identični. Pri vsakem metu nas zanima vsota padlih pik obeh kock.

2.1 MET POŠTENIH KOCK

Eksperiment sočasnega meta dveh poštenih šestrstranih kock lahko opišemo s slučajnim vektorjem iz $\mathbb{R}^2$. Izvedemo lahko dva različna eksperimenta: met različnih ali met dveh identičnih kock. V prvem primeru kocki ločimo med seboj, v drugem pa ne.

Met dveh različnih kock, npr. modre in rdeče, opišemo s slučajnim vektorjem (I, J) na $(\Omega', \mathcal{F}', Q)$, kjer slučajna spremenljivka I predstavlja število padlih pik rdeče, J pa modre kocke. Vseh možnih izidov $(a, b) \in \Omega'$ je po izreku 1.5 toliko, kot je različnih načinov (št. padlih pik), da vržemo prvo kocko in neodvisno od tega še drugo, tj. $|\Omega'| = 6 \cdot 6 = 36$. Pri tem so vsi izidi enako verjetni, torej po izreku 1.4 je verjetnost vsakega izida (a, b) enaka $Q((I, J) = (a, b)) = 1/36$. Verjetnostni prostor tega eksperimenta $(\Omega', \mathcal{F}', Q)$ je torej enak $(\{(a, b) \mid a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\},\ \mathcal{P}(\Omega'),\ Q)$. Z $f_{I,J}(a, b) = Q((I, J) = (a, b))$ označimo skupno porazdelitev za I in J. Potrebno pa je nekaj previdnosti: naš verjetnostni prostor smo definirali na osnovi predpostavke izreka 1.5, ki predvideva, da kocki vržemo zaporedoma in da sta torej slučajni spremenljivki I in J neodvisni. Naš eksperiment pa je sočasen met dveh kock. Prepričati se moramo, da smo verjetnostni prostor $(\Omega', \mathcal{F}', Q)$ dobro definirali oz., da neodvisnost med I in J res velja za naš eksperiment.

Primer 2.1 (Odvisnost slučajnih spremenljivk I in J)**.** Definirali smo verjetnosti prostor meta dveh različnih kock in ugotovili, da je skupna porazdelitev za I in J enaka $f_{I,J}(a, b) = 1/36$ za vsak $(a, b) \in \Omega'$. Zanimata nas še robni porazdelitvi za I in J, f_I in f_J. Naj bo $a \in \mathrm{Im}\ I$. Potem $f_I(a) = \sum_{b \in \mathrm{Im}\ J} f_{I,J}(a, b) = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$. Podobno za vsak $b \in \mathrm{Im}J$ dobimo $f_J(b) = \frac{1}{6}$ (glej definicijo 1.26). Torej res velja neodvisnost, saj je $f_{I,J} = f_I f_J$.

Met dveh identičnih kock, npr. dveh rdečih, opišemo s slučajnim vektorjem (I_0, J_0) na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kjer slučajna spremenljivka I_0 predstavlja $\min\{a, b\}$, J_0 pa $\max\{a, b\}$ za vsak par padlih vrednosti $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ko kock ne ločimo med seboj, iz izreka 1.6 sledi, da je vseh možnih izidov toliko, kot je različnih načinov, da dve kocki razvrstimo v šest škatel, tj. $|\Omega| = \binom{2+6-1}{2} = \binom{7}{2} = 21$. A tu posamezni izidi niso enako verjetni (uporaba izreka 1.4 ne pride v upoštev). Poljuben izid $(x, y) \in \Omega$ se zgodi na natanko $2 - \delta_{x,y}$ načinov, pri čemer so vsi načini enako verjetni. Izmed vseh 21 izidov, je natanko 6 takih, kjer je $x = y$. Število načinov, na katere se zgodi vseh 21 izidov, je torej

$$\sum_{\substack{x,y \in \{1,2,3,4,5,6\} \\ x \leq y}} (2 - \delta_{x,y}) = (21 - 6) \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 36.$$

Verjetnost izida $(x, y) \in \Omega$ lahko zapišemo kot $P((I_0, J_0) = (x, y)) = \frac{2-\delta_{x,y}}{36}$.
Verjetnostni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tega eksperimetna je torej $(\{(\min\{a, b\}, \max\{a, b\}) \mid a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\},\ \mathcal{P}(\Omega),\ P)$. Označimo s $f_{I_0,J_0}(x, y) = P(I_0 = x, J_0 = y)$ skupno porazdelitev za I_0 in J_0.

Primer 2.2 (Koreliranost slučajnih spremenljivk I_0 in J_0)**.** Definirali smo verjetnostni prostor meta dveh identičnih kock. Pokažimo, da sta I_0 in J_0 odvisni in izračunajmo koreliranost.

Skupna porazdelitev spremenljivk je $f_{I_0,J_0}(x, y) = \frac{2-\delta_{x,y}}{36}$. Robni porazdelitvi f_{I_0} in f_{J_0} za I_0 in J_0 dobimo z uporabo definicije 1.26 in ju prikažemo v spodnjih tabelah

$$I_0 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 11/36 & 9/36 & 7/36 & 5/36 & 3/36 & 1/36 \end{pmatrix},\ J_0 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/36 & 3/36 & 5/36 & 7/36 & 9/36 & 11/36 \end{pmatrix}.$$

Porazdelitev produkta je

$$I_0J_0 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 9 & 10 & 12 & 15 & 16 & 18 & 20 & 24 & 25 & 30 & 36 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{4}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{4}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{2}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Neodvisnost: I_0 in J_0 očitno nista neodvisni. Naj bo npr. $I_0 = 1$ in $J_0 = 4$, potem velja $P(I_0 = 1, J_0 = 4) = \frac{2-\delta_{1,4}}{36} = \frac{2}{36} < \frac{77}{1296} = \frac{11}{36}\frac{7}{36} = P(I_0 = 1)P(J_0 = 4)$.
Izračunajmo še kovarianco $\mathrm{Cov}(I_0, J_0)$ in korelacijski koeficient $\mathrm{Corr}(I_0, J_0)$:
$E[I_0] = 1\frac{11}{36} + 2\frac{9}{36} + 3\frac{7}{36} + 4\frac{5}{36} + 5\frac{3}{36} + 6\frac{1}{36} = \frac{91}{36}$,
$E[J_0] = 1\frac{1}{36} + 2\frac{3}{36} + 3\frac{5}{36} + 4\frac{7}{36} + 5\frac{9}{36} + 6\frac{11}{36} = \frac{161}{36}$,
$E[I_0^2] = 1^2\frac{11}{36} + 2^2\frac{9}{36} + 3^2\frac{7}{36} + 4^2\frac{5}{36} + 5^2\frac{3}{36} + 6^2\frac{1}{36} = \frac{301}{36}$,
$E[J_0^2] = 1^2\frac{1}{36} + 2^2\frac{3}{36} + 3^2\frac{5}{36} + 4^2\frac{7}{36} + 5^2\frac{9}{36} + 6^2\frac{11}{36} = \frac{791}{36}$.
Vrednost $E[I_0J_0]$ lahko izračunamo na več načinov.
1. način: Iz definicije pričakovane vrednosti sledi

$$\begin{aligned} E[I_0J_0] = &\sum_{x \in \mathrm{Im} I_0J_0} xP(I_0J_0 = x) = \\ &= (1 + 9 + 16 + 25 + 36)\tfrac{1}{36} + (2 + 3 + 5 + 8 + 10 + 15 + 18 + 20 + 24 + 30)\tfrac{2}{36} + 4\tfrac{3}{36} + (6 + 12)\tfrac{4}{36} \\ &= \tfrac{87}{36} + \tfrac{270}{36} + \tfrac{12}{36} + \tfrac{72}{36} = \tfrac{441}{36}. \end{aligned}$$

2. način: Opazimo, da lahko produkt I_0J_0 zapišemo s pomočjo Bernoullijevih slučajnih

spremenljivk

$$E[I_0J_0] = E\Big[\sum_{\substack{a\in \mathrm{Im} I_0,\\ b\in \mathrm{Im} J_0}} ab1_{\{I_0=a\}\cap\{J_0=b\}}\Big] = \sum_{\substack{a\in \mathrm{Im} I_0,\\ b\in \mathrm{Im} J_0}} abP(I_0=a, J_0=b) = \sum_{\substack{a=1\\ a\le b}}^{6}\sum_{b=1}^{6} ab f_{I_0,J_0}(a,b)$$

$$= (1+4+9+16+25+36)\tfrac{1}{36} + (2+3+4+5+2\cdot 6+8+10+2\cdot 12+15+18+20+24+30)\tfrac{2}{36}$$

$$= \tfrac{91}{36}+\tfrac{350}{36}=\tfrac{441}{36}.$$

3.način:
Naj bo $g : (I_0, J_0) \to \mathbb{R}$, $g((a, b)) = ab$ funkcija. Iz leme 1.38 sledi

$$E[I_0J_0] = E[g(I_0,J_0)] = \sum_{a\in \mathrm{Im} I_0}\sum_{b\in \mathrm{Im} J_0} g(a,b)P(I_0=a, J_0=b) = \sum_{\substack{a=1\\ a\le b}}^{6}\sum_{b=1}^{6} ab f_{I_0,J_0}(a,b),$$

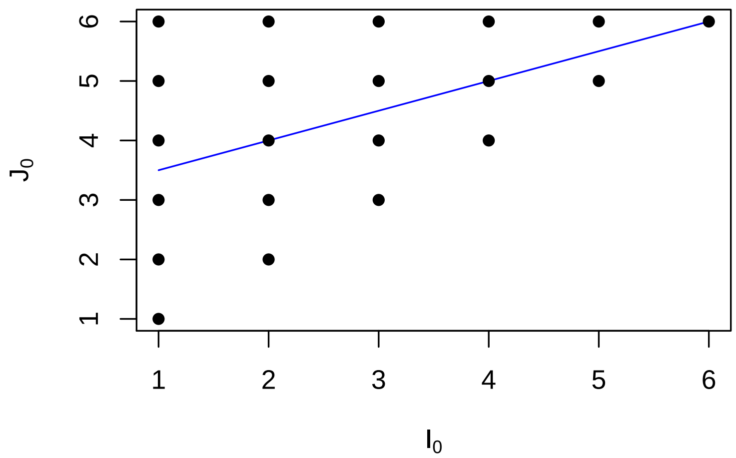
kar je enako kot zgoraj.
Kovarianca slučajnih spremenljivk I_0 in J_0 je enaka

$$\mathrm{Cov}(I_0,J_0) = E[I_0J_0] - E[I_0]E[J_0] = \frac{441}{36} - \frac{91}{36}\frac{161}{36} = \frac{15876-14651}{1296} = \frac{1225}{1296}.$$

Korelacijski koeficient pa znaša

$$\mathrm{Corr}(I_0,J_0) = \frac{\mathrm{Cov}(I_0,J_0)}{\mathrm{SD}(I_0)\mathrm{SD}(J_0)} = \frac{\mathrm{Cov}(I_0,J_0)}{\sqrt{E[I_0^2]-E[I_0]^2}\sqrt{E[J_0^2]-E[J_0]^2}} = \frac{35}{73} \approx 0.48.$$

Vidimo, da gre za neko srednje močno korelacijo. V primeru, ko je minimum padlih pik 6, je maksimum enolično določen, ko pa je minimum 1, o maksimumu ne vemo ničesar. Na sliki 9 prikažemo vse izide meta identičnih kock in premico najboljšega prileganja tem izidom (tj. regresijska premica $J_0 = \frac{1}{2}I_0 + 3$).



Slika 9: Premica najboljšega prileganja množici izidov Ω.

Ugotovili smo, da sta slučajni spremenljivki I in J, ki opisujeta met različnih kock neodvisni. Slučajni spremenljivki I_0 in J_0, s katerima opišemo met identičnih kock pa sta odvisni, s korelacijskim koeficientom 0.48.

V kazinojih je pogostejša praksa uporaba dveh identičnih kock, zato bomo v nadaljevanju uporabljali model meta identičnih kock. Sicer pa bo pri analizi igre Craps za nas pomembna predvsem vsota padlih pik obeh kock, ki pa ni odvisna od seta kock, ki ju uporabljamo. Ne glede na to, ali uporabljamo različni ali identični kocki, je porazdelitev vsote padlih pik enaka, kar pokažemo z naslednjo trditvijo.

Trditev 2.3. *Porazdelitev vsote padlih pik pri metu dveh različnih kock je enaka porazdelitvi vsote padlih pik pri metu dveh identičnih kock.*

Dokaz. V dokazu uporabljamo oznake, kot smo jih uvedli tekom tega podpoglavja.
Eksperiment: met dveh kock. Izid: padeta števili $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Če sta kocki različni, je vsota padlih pik $I + J = a + b$.
Če sta kocki identični, je vsota padlih pik $I_0 + J_0 = \min\{a, b\} + \max\{a, b\} = a + b$.
Zato velja $\mathrm{Im}(I + J) = \mathrm{Im}(I_0 + J_0) = \{2, 3, \ldots, 12\}$.
Ampak množici izidov Ω' in Ω sta različni, kot tudi verjetnostni meri Q in P. Zato moramo pokazati še enakost $Q(I+J = x) = P(I_0+J_0 = x)$ za vsak $x \in \{2, 3, \ldots, 12\}$. To storimo spodaj.

Velja

$$
\begin{aligned}
Q(I+J=x) &= \sum_{i\in\mathrm{Im}I} Q(I=i, J=x-i) = \sum_{i\in\mathrm{Im}I} Q(I=i)Q(J=x-i)\\
&= \frac{1}{6}\sum_{i\in\mathrm{Im}I} Q(J=x-i) = \frac{1}{6}\cdot\frac{\left|\left\{i\in\{1,2,\ldots,6\} \mid x-i\geq 1 \text{ in } x-i\leq 6\right\}\right|}{6}\\
&= \frac{6-|x-7|}{36},
\end{aligned}
$$

ter

$$
\begin{aligned}
P(I_0+J_0=x) &= \sum_{i\in\mathrm{Im}I} P(I_0=i, J_0=x-i) = \sum_{\substack{i\in\mathrm{Im}I\\ i\leq x-i\leq 6}} \frac{2-\delta_{i,x-i}}{36} =\\
&= \frac{2\cdot\left|\left\{i\in\mathrm{Im}\ I\ :\ i\leq x-i \text{ in } x-i\leq 6\right\}\right| - \left|\left\{i\in\mathrm{Im}\ I\ :\ i=x-i \text{ in } x-i\leq 6\right\}\right|}{36}\\
&= \frac{2(3-\lfloor|\frac{x-7}{2}|\rfloor) - (\lceil\frac{x+1}{2}\rceil - \lfloor\frac{x+1}{2}\rfloor)}{36} = \frac{(6-2\lfloor|\frac{x-7}{2}|\rfloor) - (x+1 \pmod 2)}{36}\\
&= \left\{\begin{array}{ll} \frac{6-|x-7|-0}{36} & \text{če je x lih,}\\ \frac{(6-2(\frac{|x-7|}{2}-\frac{1}{2})-1}{36} & \text{če je x sod} \end{array}\right\} = \frac{6-|x-7|}{36}.
\end{aligned}
$$

□

V tabeli 3 prikažemo vse možne izide meta dveh različnih in dveh identičnih kock, ter porazdelitev vsote padlih pik.

Tabela 3: Vsi možni izidi ter porazdelitev vsote padlih pik dveh različnih in dveh identičnih kock.

$(a,b) \in \Omega'$	$(a,b) \in \Omega$	$a+b$	$P(I_0 + J_0 = a+b)$ $Q(I+J=a+b)$
$(1,1)$	$(1,1)$	2	1/36
$(1,2),(2,1)$	$(1,2)$	3	2/36
$(1,3),(2,2),(3,1)$	$(1,3),(2,2)$	4	3/36
$(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$	$(1,4),(2,3)$	5	4/36
$(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(1,5)$	$(1,5),(2,4),(3,3)$	6	5/36
$(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$	$(1,6),(2,5),(3,4)$	7	6/36
$(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)$	$(2,6),(3,5),(4,4)$	8	5/36
$(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)$	$(3,6),(4,5)$	9	4/36
$(4,6),(5,5),(6,4)$	$(4,6),(5,5)$	10	3/36
$(5,6),(6,5)$	$(5,6)$	11	2/36
$(6,6)$	$(6,6)$	12	1/36

Za igro Craps, bomo uporabljali sledeči model, ki je povzet iz knjige [5]. Naj bo $(I_1, J_1), (I_2, J_2), \ldots$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih vektorjev s porazdelitvijo enako porazdelitvi od (I_0, J_0), kjer (I_n, J_n) predstavlja n-ti met obeh kock. Definirajmo vsoto padlih pik dveh kock v n-tem metu s $T_n = I_n + J_n$, $n \geq 1$. Naj bo $\mathcal{S} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Potem je $T_1, T_2, \ldots$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenenih slučajne spremenljivk, ki so porazdeljene enako kot $T_0 = I_0 + J_0$ in zavzamejo vrednosti iz $\mathcal{S}$ (glej tabelo 3). Porazdelitev vsote T_0 bomo označevali s $\pi_j = P(T_0 = j) = \frac{6-|j-7|}{36}$.

2.2 POTEK IGRE IN ANALIZA OBVEZNIH STAV

Igralcu sta dodeljeni dve kocki, ki ju zaporedoma meče. Zaporedje metov bomo označevali s slučajnimi spremenljivkami $T_1, T_2, \ldots$ (za porazdelitev slučajne spremenljivke T_i glej konec razdelka 2.1). Množici igralčevih metov od prvega pa do zadnjega, ko se igra zanj zaključi, pravimo **metalčeva roka**. Metalčeva roka je sestavljena iz ene ali več pass-line odločitev. Ko igralec v neki pass-line odločitvi vrže 7, a ne v prvem metu te odločitve, se metalčeva roka zanj zaključi. Pass-line odločitev (v povezavi z metačevo roko) opišemo v naslednjem podrazdelku 2.2.1.

V podrazdelku 2.2.2 spoznamo dve stavi, ki sta za igralca obvezni: pred pričetkom vsake pass-line odločitve mora izbrati eno izmed njiju; imenujeta se **pass-line** in **don't**

pass-line stava.

Sicer pa obstjajo še druge, neobvezne stave: **come/don't come** stavi sta zelo podobni obem obveznim stavam, **m-times odds** in **m_4-m_5-m_6-times odds** stavi postaneta na voljo, po prvem metu vsake pass-line odločitve in se končata sočasno s pass-line odločitvijo, v kateri sta bili stavljeni; **place bet** je stava, da pade neko število, preden pade 7. Te in še nekatere druge neobvezne stave opišemo v razdelku 2.5.

Nekatere neobvezne stave se lahko opravijo pred vsakim metom. Iz tega vidika je za igralca pomembna pričakovana dolžina metalčeve roke, saj predstavlja število stavnih priložnosti. Izračunamo jo v razdelku 2.4. V tem poglavju izračunamo tudi varianco in mediano in izpeljemo formulo za porazdelitev ter porazdelitveno funkcijo dolžine metalčeve roke. V pomoč nam je knjiga [5].

2.2.1 Pass-line odločitev in metalčeva roka

Spomnimo: $\mathcal{S} = \{2, 3, \ldots, 12\}$, slučajna spremenljivka T_i predstavlja število padlih pik v i-tem metu. Za podrobnosti glej konec razdelka 2.1. Za potrebe v nadaljevanju definirajmo še t.i. **point števila**, to so števila, ki pripadajo množici $\mathcal{P} := \{4, 5, 6, 8, 9, 10\}$.

Igralcu sta dodeljeni dve kocki. Prvi met v igri, T_1, je prvi met metalčeve roke in hkrati tudi prvi met prve pass-line odločitve v metalčevi roki. **Pass-line odločitev** se prične s **come-out metom** (dogodku, da je naslednji igralčev met come-out met, pravimo "metalec prihaja ven"). Zaključi se lahko že s come-out metom, če ta pripada množici $\{2, 3, 7, 11, 12\}$ (v primeru prve pass-line odločitve se to zgodi, ko $T_1 \in \mathcal{S} - \mathcal{P}$). Če rezultat come out meta leži v množici $\{4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ (v primeru prve pass-line odločitve se to zgodi, ko $T_1 \in \mathcal{P}$), potem se pass-line odločitev nadaljuje z nizom metov. Vsak met, ki ni come out met, imenujemo **point met**. Ta niz point metov, oz. preostanek pass-line odločitve, se konča, ko igralec prvič vrže 7, ali prvič, ko ponovi svoj začetni, come-out met. Če se pass-line odločitev konča s ponovitvijo izida iz come-out meta, potem se v tistem trenutku začne nova pass-line odločitev - metalec prihaja ven. Če se pass-line odločitev konča z metom 7ih pik potem se s tem zaključi tudi metalčeva roka (konec metalčeve roke pomeni tudi konec igre za igralca). Dogodku, da igralec konča metalčevo roko pravimo, da "igralec 7-outa."

2.2.2 Pass-line in don't pass-line stavi

S pass-line odločitvami so povezane tudi edine obvezne stave v igri. Pravila zahtevajo, da igralec opravi stavo pred vsakim začetkom nove pass-line odločitve (torej pred vsakim come-out metom). Na voljo ima dve možni stavi. Ena stava je t.i. **pass-line stava**, druga pa **don't pass line stava**. Gre za skoraj komplementarni stavi, zmaga v eni, bi ob enakem nizu metov pomenila poraz (ali push) v drugi.

Pass-line stavo igralec dobi, če v come-out metu vrže 7 ali 11. V tem primeru pravimo, da je vrgel t.i. **natural število**. V primeru, da v come-out metu vrže katero izmed t.i. **craps števil**, to so: 2, 3 ali 12, pass-line stavo izgubi (lahko bi rekli, da ni prečkal črte). Če igralec v come-out metu vrže kako izmed vsot, ki ni natural ali craps število, torej, če come-out met pripada množici $\mathcal{P}$, potem nadaljuje z metanjem. Zadnji met pass-line stave potem določi njegov izplen. Če je le ta 7, pass-line stavo izgubi, če pa ponovi svoj come-out met, potem stavo dobi.

Skoraj diametralna je don't pass line stava. Če igralec vrže craps število v come-out metu, potem igralec don't pass-line stavo zmaga, razen, če je craps število število 12. V tem primeru, se igralcu stava vrne (torej nič ne zasluži z njo, niti nič ne izgubi). Takemu dogodku rečemo **push** ali izenačenje. Če v come-out metu vrže natural število, potem stavo izgubi. Če je njegov come-out met point število, torej če pripada množici $\mathcal{P}$, potem nadaljuje z metanjem. Če je zadnji met pass-line odločitve 7, potem igralec stavo dobi. Če je zadnji met pass-line odločitve ponovitev point števila, ki ga je vrgel v svojem come-out metu, potem stavo izgubi.

Igralec v primeru zmage v pass/dont't pass line stavah osvoji toliko kot je zastavil. Če pa izgubi, izgubi svoj polog (razen v primeru pusha pri don't pass line stavi, takrat se igralcu vrne zastavljena vsota).

Primer 2.4 (Verjetnost zmage v pass-line stavi)**.** Naj bo W dogodek, da igralec zmaga v pass-line stavi. Verjetnost zmage je odvisna od izidov večkratnega ponavljanja slučajnega eksperimenta, meta dveh kock. Označimo zaporedje metov s $T_1, T_2, \ldots$, kjer $T_i \in \mathcal{S}$, in $P(T_i = j) = \pi_j$ za vsak $i \in \mathbb{N}$ (glej konec razdelka 2.1 in tabelo 3). S $\mathcal{P} = \{4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ označimo point števila. Verjetnost zmage bomo izračunali pogojno na prvi met, T_1. Velja

$$
\begin{aligned}
P(W) &= \sum_{j \in \mathcal{S}} \pi_j P(W \mid T_1 = j) \\
&= \sum_{j \in \{7,11\}} \pi_j \cdot 1 + \sum_{j \in \{2,3,12\}} \pi_j \cdot 0 + \sum_{j \in \mathcal{P}} \pi_j P\left(\bigcup_{k=2}^{\infty} \bigcap_{i=2}^{k-1} \{T_i \in \mathcal{S} \setminus \{j,7\}\} \cap \{T_k = j\}\right) \\
&= \pi_7 + \pi_{11} + \sum_{j \in \mathcal{P}} \pi_j \sum_{k=2}^{\infty} P\left(\bigcap_{i=2}^{k-1} \{T_i \in \mathcal{S} \setminus \{j,7\}\} \cap \{T_k = j\}\right) \\
&= \pi_7 + \pi_{11} + \sum_{j \in \mathcal{P}} \pi_j \sum_{k=2}^{\infty} \prod_{i=2}^{k-1} P\big(\{T_i \in \mathcal{S} \setminus \{j,7\}\}\big) P\big(\{T_k = j\}\big) \\
&= \pi_7 + \pi_{11} + \sum_{j \in \mathcal{P}} \pi_j \sum_{k=2}^{\infty} (1 - \pi_j - \pi_7)^{k-2} \pi_j \\
&= \pi_7 + \pi_{11} + \sum_{j \in \mathcal{P}} \pi_j \frac{\pi_j}{\pi_j + \pi_7}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{244}{495} = 0.4\overline{92}.$$

Za prvo enakost uporabimo izrek 1.9. Za tretjo enakost uporabimo definicijo 1.2, saj so dogodki v uniji disjunktni. Meti so med seboj neodvisni, s tem pa tudi dogodki iz preseka, zato za četrto enakost uporabimo definicijo 1.7. Verjetnost poraza je $P(W^C) = 1 - P(W) = \frac{251}{495} = 0.5\overline{07}$.

Primer 2.5 (Verjetnost zmage v don't-pass-line stavi)**.** Naj bo W dogodek, da igralec zmaga v don't pass-line stavi. Pri don't-pass-line stavi lahko pride do t. i. pusha - v primeru, da je $T_1 = 12$ - to pomeni, da igralec niti ne zmaga niti ne izgubi. Označimo s $p = P(W)$ verjetnost zmage, s q verjetnost poraza in z r verjetnost pusha. Velja $p + q + r = 1$. Push se zgodi z verjetnostjo $r = P(T_1 = 12) = \pi_{12} = 1/36$ (glej tabelo 3). Verjetnost zmage je (izračun je podoben kot zgoraj, zato podrobnosti izpustimo)

$$\begin{aligned} P(W) &= \sum_{j\in\{7,11,12\}} \pi_j \cdot 0 + \sum_{j\in\{2,3\}} \pi_j \cdot 1 + \sum_{j\in\mathcal{P}} \pi_j P\left(\bigcup_{k=2}^{\infty}\bigcap_{i=2}^{k-1} \{T_i \in \mathcal{S}\setminus\{j,7\}\} \cap \{T_k = 7\}\right) \\ &= \pi_2 + \pi_3 + \sum_{j\in\mathcal{P}} \pi_j \frac{\pi_7}{\pi_j + \pi_7} \\ &= \frac{949}{1980} = 0.47\overline{92}. \end{aligned}$$

Verjetnost poraza je torej $q = 1 - p - r = \frac{244}{495} = 0.4\overline{92}$ in je enaka verjetnosti zmage v pass-line stavi.

2.3 DOLŽINA PASS-LINE ODLOČITVE

Pass-line odločitev smo opisali v podrazdelku 2.2.1. Dolžina pass-line odločitve se ujema z dolžino od pologa do razrešitve pass-line in don't pass-line stav, ki smo ju opisali v podrazdelku 2.2.2. V primeru 2.6 izračunamo pričakovano dolžino pass-line odločitve.

Primer 2.6 (Pričakovana dolžina pass-line odločitve)**.** Dolžino prve pass-line odločitve opišemo s slučajno spremenljivko X_1, kjer je

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{če } T_1 \in \mathcal{S} - \mathcal{P}, \\ \min\{k \geq 2 \mid T_k = T_1 \text{ ali } T_k = 7\} & \text{če } T_1 \in \mathcal{P}. \end{cases}$$

Prvo pass-line odločitev sestavljajo meti $T_1, \ldots, T_{X_1}$, drugo pass-line odločitev sestavljajo meti $T_{X_1+1}, T_{X_1+2}, \ldots, T_{X_1+X_2}, \ldots$, i-to pass-line odločitev sestavljajo meti $T_{X_1+\cdots+X_{i-1}+1}, T_{X_1+\cdots+X_{i-1}+2}, \ldots, T_{X_1+\cdots+X_i}$. Za $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definirajmo $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, kjer $S_0 = 0$. V splošnem lahko torej za $i \in \mathbb{N}$ dolžino i-te pass-line odločitve X_i zapišemo kot

$$X_i = 1_{\{T_{S_{i-1}+1} \in \mathcal{S}-\mathcal{P}\}} + 1_{\{T_{S_{i-1}+1} \in \mathcal{P}\}} \min\{k \geq 2 \mid T_{S_{i-1}+k} = T_{S_{i-1}+1} \text{ ali } T_{S_{i-1}+k} = 7\}.$$

Ker so slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots$ enako porazdeljene, velja $E[X_i] = E[X_1]$ za vsak i. Izračunajmo pričakovano dolžino pass-line odločitve. Velja

$$
\begin{aligned}
E[X_1] &= \sum_{t \in \mathrm{Im} T_1} E[X_1 \mid T_1 = t] P(T_1 = t) \\
&= \sum_{t \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{P}} 1 \cdot \pi_t + \sum_{t \in \mathcal{P}} E[X_1 \mid T_1 = t] \pi_t \\
&= \sum_{t \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{P}} \pi_t + \sum_{t \in \mathcal{P}} \sum_{x \in \mathrm{Im} X_1} x P(X_1 = x \mid T_1 = t) \pi_t \\
&= \sum_{t \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{P}} \pi_t + \sum_{t \in \mathcal{P}} \pi_t \sum_{x=2}^{\infty} x P(\{\min\{k \geq 2 \mid T_k = t \text{ ali } T_k = 7\} = x\}) \\
&= \sum_{t \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{P}} \pi_t + \sum_{t \in \mathcal{P}} \pi_t \sum_{x=2}^{\infty} x P\left(\bigcap_{k=2}^{x-1} (\{T_k = t\}^C \cap \{T_k = 7\}^C) \cap (\{T_x = t\} \cup \{T_x = 7\}) \right) \\
&= \sum_{t \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{P}} \pi_t + \sum_{t \in \mathcal{P}} \pi_t \sum_{x=2}^{\infty} x \prod_{k=2}^{x-1} P\big(\{T_k = t\}^C \cap \{T_k = 7\}^C\big) P\big(\{T_x = t\} \cup \{T_x = 7\}\big) \\
&= \sum_{t \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{P}} \pi_t + \sum_{t \in \mathcal{P}} \pi_t \sum_{x=2}^{\infty} x (1 - \pi_t - \pi_7)^{x-2} (\pi_t + \pi_7) \\
&= \sum_{t \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{P}} \pi_t + \sum_{t \in \mathcal{P}} \pi_t \sum_{x=1}^{\infty} (x+1)(1 - \pi_t - \pi_7)^{x-1} (\pi_t + \pi_7) \\
&= \sum_{t \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{P}} \pi_t + \sum_{t \in \mathcal{P}} \pi_t \left(\frac{1}{\pi_t + \pi_7} + 1 \right) \\
&= 1 + \sum_{t \in \mathcal{P}} \frac{\pi_t}{\pi_t + \pi_7} \\
&= \frac{557}{165} = 3.3\overline{75}.
\end{aligned}
$$

Za prvo enakost smo uporabili posledico 1.62. Za 6. enakost smo uporabili definicijo 1.7 za neodvisnost dogodkov. Za enakost 9 smo uporabili pričakovano vrednost geometrijske porazdelitve (glej primer 1.36).

Primer 2.7 (Varianca dolžine pass-line odločitve)**.** Za izračun variance dolžine pass-line odločitve oz. dolžine pass in don't-pass-line stav X_1 uporabimo pogojni izrek za variance, tj. izrek 1.73. Zato potrebujemo pogojni pričakovani vrednosti $E[X_1 \mid T_1]$ in $E[X_1^2 \mid T_1]$. Velja

$$
E[X_1 \mid T_1] = \begin{cases} 1 & \text{če } T_1 \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{P}, \\ 1 + \frac{1}{\pi_{T_1} + \pi_7} & \text{če } T_1 \in \mathcal{P}. \end{cases}
$$

Utemeljitev za zgornjo enakost lahko bralec najde iz izračuna pričakovane dolžine pass-line odločitve v primeru 2.6. Drugi moment dolžine pass-line odločitve pogojno na come-out met pa je

$$
\begin{aligned}
E[X_1^2 \mid T_1] &= \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{če } T_1 \notin \mathcal{P}, \\ \sum_{x=2}^{\infty} x^2 P\big(\bigcap_{k=2}^{x-1} \{T_k \in \mathcal{S} \setminus \{T_1, 7\}\} \cap \{T_x \in \{T_1, 7\}\}\big) & \text{če } T_1 \in \mathcal{P} \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{če } T_1 \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{P}, \\ \sum_{x=2}^{\infty} x^2 (1 - \pi_{T_1} - \pi_7)^{x-2} (\pi_{T_1} + \pi_7) & \text{če } T_1 \in \mathcal{P} \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{če } T_1 \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{P}, \\ \sum_{x=1}^{\infty} (x+1)^2 (1 - \pi_{T_1} - \pi_7)^{x-1} (\pi_{T_1} + \pi_7) & \text{če } T_1 \in \mathcal{P} \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{če } T_1 \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{P}, \\ \frac{2 - \pi_{T_1} - \pi_7}{(\pi_{T_1} + \pi_7)^2} + 2 \frac{1}{\pi_{T_1} + \pi_7} + 1 & \text{če } T_1 \in \mathcal{P} \end{array} \right\} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{če } T_1 \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{P}, \\ 1 + \frac{2 + \pi_{T_1} + \pi_7}{(\pi_{T_1} + \pi_7)^2} & \text{če } T_1 \in \mathcal{P}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Za četrto enakost zgoraj uporabimo vrednost drugega in prvega momenta geometrijske porazdelitve $\mathrm{Geom}(\pi_{T_1} + \pi_7)$. Za izračun drugega momenta geometrijske porazdelitve glej primer 1.47, za izračun prvega pa primer 1.36. Iz izreka 1.72 sledi

$$
\mathrm{Var}(X_1 \mid T_1) = E[X_1^2 \mid T_1] - E[X_1 \mid T_1]^2 = \begin{cases} 0 & \text{če } T_1 \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{P}, \\ \frac{1 - \pi_{T_1} - \pi_7}{(\pi_{T_1} + \pi_7)^2} & \text{če } T_1 \in \mathcal{P}. \end{cases}
$$

Za izračun pričakovane vrednosti zgornje variance lahko uporabimo lemo 1.37, saj je $\mathrm{Var}(X_1 \mid T_1)$ funkcija od T_1, tj.

$$
E\big[\mathrm{Var}(X_1 \mid T_1)\big] = \sum_{t \in \mathcal{S}} \mathrm{Var}(X_1^2 \mid T_1 = t) P(T_1 = t) = \sum_{t \in \mathcal{P}} \frac{1 - \pi_t - \pi_7}{(\pi_t + \pi_7)^2} P(T_1 = t).
$$

V izračunu $\mathrm{Var}\big(E[X_1 \mid T_1]\big)$ za prvo enakost uporabimo prvo in tretjo točko izreka 1.52. Za drugo enakost uporabimo izrek 1.45. Za tretjo enakost uporabimo lemo 1.37, saj sta $(E[X_1 \mid T_1] - 1)^2$ in $E[X_1 \mid T_1] - 1$ funkciji od T_1. Velja

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\big(E[X_1 \mid T_1]\big) &= \mathrm{Var}\big(E[X_1 \mid T_1] - 1\big) = E\big[(E[X_1 \mid T_1] - 1)^2\big] - E\big[E[X_1 \mid T_1] - 1\big]^2 \\
&= \sum_{t \in \mathcal{S}} \big(E[X_1 \mid T_1 = t] - 1\big)^2 P(T_1 = t) - \Big(\sum_{t \in \mathcal{S}} (E[X_1 \mid T_1 = t] - 1) P(T_1 = t)\Big)^2 \\
&= \sum_{t \in \mathcal{P}} \left(\frac{1}{\pi_t + \pi_7}\right)^2 \pi_t - \left(\sum_{t \in \mathcal{P}} \frac{1}{\pi_t + \pi_7} \pi_t\right)^2.
\end{aligned}
$$

Uporabimo izrek 1.73 in dobimo varianco dolžine pass-line odločitve

$$
\mathrm{Var}(X_1) = \sum_{t \in \mathcal{P}} \pi_t \frac{1 - \pi_t - \pi_7}{(\pi_t + \pi_7)^2} + \sum_{t \in \mathcal{P}} \pi_t \frac{1}{(\pi_t + \pi_7)^2} - \left(\sum_{t \in \mathcal{P}} \pi_t \frac{1}{\pi_t + \pi_7}\right)^2 = \frac{245672}{27225} \approx 9.02.
$$

◻

2.4 DOLŽINA METALČEVE ROKE

Označimo z L dolžino metalčeve roke.

2.4.1 Pričakovana dolžina metalčeve roke

Metalčeva roka je sestavljena iz več zaporednih pass-line (ali don't-pass-line) odločitev. Zaključi se, ko igralec prvič izgubi pass-line stavo z metom 7 pik (ali prvič, ko zmaga don't pass-line stavo z metom 7 pik).

Naj bo $X_1, X_2, \ldots$ zaporedje dolžin pass-line odločitev. Prva naloga pri izračunu pričakovane dolžine metalčeve roke bo, da ugotovimo, iz koliko pass-line odločitev pričakujemo, da je sestavljena metalčeva roka. V ta namen bomo definirali zaporedje (zaporedji) pomožnih slučajnih spremenljivk $Y_1, Y_2, \ldots$ (in $Z_1, Z_2, \ldots$), tako, da bomo v kombinaciji s slučajnimi spremenljivkami X_i dobili zaustavitveni pogoj oz. čas ustavljanja igre (glej definicijo 1.81).

Naj bo Y_1 slučajna spremenljivka, ki ima vrednost 1, če igralec prvo pass-line odločitev dobi, in -1, če jo izgubi. (Glede na to, da je v primeru zmage razmerje zaslužek:vplačilo v pass-line stavi $1:1$, si lahko Y_1 interpretiramo tudi kot zaslužek v prvi pass-line stavi pri vplačilu ene enote denarja.) Velja

$$Y_1 := \begin{cases} 1 & ; \text{ če } T_1 \in \{7, 11\} \text{ ali } T_1 \in \mathcal{P} \text{ in } T_{X_1} = T_1, \\ -1 & ; \text{ sicer.} \end{cases}$$

Podobno lahko vidimo v primeru don't pass-line stave. Naj bo Z_1 slučajna spremelnjivka, ki ima vrednost 1, če igralec don't-pass-line stavo dobi, -1, če jo izgubi in 0, v primeru pusha. (Tudi pri tej stavi je razmerje zaslužek:vplačilo v primeru zmage $1:1$, v primeru pusha, nam vplačilo vrnejo, torej nič ne zaslužimo niti ne izgubimo, če pa stavo izgubimo, izgubimo vplačilo. Torej si Z_1 lahko interpretiramo tudi kot izplen pri enotski don't-pass-line stavi.) Velja

$$Z_1 := \begin{cases} 1 & ; \text{ če } T_1 \in \{2, 3\} \text{ ali } T_1 \in \mathcal{P} \text{ in } T_{X_1} = 7, \\ 0 & ; \text{ če } T_1 = 12, \\ -1 & ; \text{ če } T_1 \in \{7, 11\} \text{ ali } T_1 \in \mathcal{P} \text{ in } T_{X_1} = T_1. \end{cases}$$

Za $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definirajmo $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, kjer je $S_0 := 0$. Zaporedje $\{S_n\}_{n \geq 0}$ je submartingal glede na filtracijo $\{X_n\}_{n \geq 1}$. V splošnem definiramo za vsak $i \in \mathbb{N}$ dolžino i-te pass-line odločitve X_i in njen izid Y_i, v primeru pass-line stave, ter Z_i, v primeru don't-pass-line stave kot

$$X_i := 1_{\{T_{S_{i-1}+1} \in \mathcal{S} - \mathcal{P}\}} + 1_{\{T_{S_{i-1}+1} \in \mathcal{P}\}} \min\{k \geq 2 \mid T_{S_{i-1}+k} = T_{S_{i-1}+1} \text{ ali } T_{S_{i-1}+k} = 7\},$$
$$Y_i := 1_{\{T_{S_{i-1}+1} \in \{7,11\}\}} + 1_{\{T_{S_{i-1}+1} \in \mathcal{P}\}} 1_{\{T_{S_i} = T_{S_{i-1}+1}\}} - 1_{\{T_{S_{i-1}+1} \in \{2,3,12\}\}} - 1_{\{T_{S_{i-1}+1} \in \mathcal{P}\}} 1_{\{T_{S_i} = 7\}},$$

$Z_i := 1_{\{T_{S_{i-1}+1}\in\{2,3\}\}} + 1_{\{T_{S_{i-1}+1}\in\mathcal{P}\}}1_{\{T_{S_i}=7\}} - 1_{\{T_{S_{i-1}+1}\in\{7,11\}\}} - 1_{\{T_{S_{i-1}+1}\in\mathcal{P}\}}1_{\{T_{S_i}=T_{S_{i-1}+1}\}}$.

Definirajmo slučajno spremenljivko N, ki bo naš čas ustavljanja (glej definicijo 1.81), za prenehanje izvajanj pass-line odločitev in končanje metalčeve roke. Slučajna spremenljivka N predstavlja tudi število pass-line odločitev v metalčevi roki, torej:
$N := \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \geq 2 \text{ in } Y_n = -1\} = \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \geq 2 \text{ in } Z_n = 1\}$.

Dogodek $\{N = n\}$ je dogodek, da se v v n-tem Bernoullijevem poskusu prvič zgodi naslednji sestavljen dogodek: $T_{S_{n-1}+1} = t \in \mathcal{P}$, sledi niz metov pripadajoč množici $\mathcal{S} \setminus \{t, 7\}$ dolžine $S_n - S_{n-1} - 2$ in na koncu pade 7 v S_n-tem metu.

Torej, ker čakamo na najmanjši n, za katerega bo vse to veljalo, je N porazdeljen geometrijsko (glej definicijo 1.21):

$$\begin{aligned} N \sim \mathrm{Geom}(p) &= \mathrm{Geom}\left(\sum_{t\in\mathcal{P}} \pi_t \sum_{x=2}^{\infty}(1-\pi_t-\pi_7)^{x-2}\pi_7\right) \\ &= \mathrm{Geom}\left(\sum_{t\in\mathcal{P}} \pi_t \frac{\pi_7}{\pi_t+\pi_7}\right) = \mathrm{Geom}\left(\frac{196}{495}\right). \end{aligned}$$

Pričakovano število pass-line odločitev je torej: $E[N] = \frac{1}{p} = \frac{495}{196}$ (za izračun pričakovane vrednosti geometrijske porazdelitve glej primer 1.36).

Dolžino metalčeve roke lahko zapišemo kot $S_N = X_1 + \cdots + X_N$. Za izračun $E[S_N]$ si bomo pomagali z modificirano Waldovo identiteto (oz. s posledico 1.84). Da zadostimo njenim predpostavkam, pokažimo trditev 2.8.

Trditev 2.8. *Naj bo X_i dolžina i-te pass-line odločitve, Y_i pa ± 1, če igralec i-to odločitev dobi/izgubi. Zaporedje $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$ je sestavljeno iz neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih vektorjev.*

Dokaz. Enaka porazdelitev slučajnih vektorjev sledi iz definicije. Pokazati moramo, da so slučajni vektorji med sabo neodvisni. Naj bo $T_1 = t_1,\ T_2 = t_2, \ldots$ zaporedje metov in $n \in \mathbb{N}$ poljuben. Dogodek $\{(X_1, Y_1) = (x_1, y_1), \ldots, (X_n, Y_n) = (x_n, y_n)\}$ je določen s prvimi S_n meti. Za $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definirajmo $s_k := x_1 + \cdots + x_k$. Definirajmo zaporedji funkcij $\{f_i\}_{i=1}^n$ in $\{g_i\}_{i=1}^n$, kjer $f_i, g_i : \mathbb{R}^{x_i} \to \mathbb{R}$ ter $f_i : (t_{s_{i-1}+1}, \ldots, t_{s_i}) \mapsto x_i$ in $g_i : (t_{s_{i-1}+1}, \ldots, t_{s_i}) \mapsto y_i$. Naj bo $\{\mathbf{f}_i\}_{i=0}^n$ zaporedje vektorskih funkcij (vektor slikajo v vektor), kjer $\mathbf{f}_i : \mathbb{R}^{x_i} \to \mathbb{R}^2$ in $\mathbf{f}_i(t_{s_{i-i}+1}, \ldots, t_{s_i}) = (f_i(t_{s_{i-1}+1}, \ldots, t_{s_i}), g_i(t_{s_{i-1}+1}, \ldots, t_{s_i}))$.

Naj bosta $i, j \in \mathbb{N}$ različna in manjša ali enaka n, ter predpostavimo $i < j$. Potem

$$\begin{aligned}
&P\big((X_i, Y_i) = (x_i, y_i),\ (X_j, Y_j) = (x_j, y_j) \mid T_1 = t_1, \dots, T_{s_n} = t_{s_n}\big) = \\
&= P\big((X_i, Y_i) = \mathbf{f_i}(t_{s_{i-1}+1}, \dots, t_{s_i}),\ (X_j, Y_j) = \mathbf{f_j}(t_{s_{j-1}+1}, \dots, t_{s_j})\big) = \\
&= P\big(T_{s_{i-1}+1} = t_{s_{i-1}+1}, \dots, T_{s_i} = t_{s_i},\ T_{s_{j-1}+1} = t_{s_{j-1}+1}, \dots, T_{s_j} = t_{s_j}\big) = \\
&= P(T_{s_{i-1}+1} = t_{s_{i-1}+1}, \dots, T_{s_i} = t_{s_i})\ P(T_{s_{j-1}+1} = t_{s_{j-1}+1}, \dots, T_{s_j} = t_{s_j}) = \\
&= P((X_i, Y_i) = \mathbf{f_i}(t_{s_{i-1}+1}, \dots, t_{s_i}))\ P((X_j, Y_j) = \mathbf{f_j}(t_{s_{j-1}+1}, \dots, t_{s_j})) = \\
&= P\big((X_i, Y_i) = (x_i, y_i) \mid T_1 = t_1, \dots, T_{s_n} = t_{s_n}\big) \cdot \\
&\cdot P\big((X_j, Y_j) = (x_j, y_j) \mid T_1 = t_1, \dots, T_{s_n} = t_{s_n}\big).
\end{aligned}$$

Ker zgornja enakost velja za poljubno zaporedje prvih S_n metov, iz izreka o pogojni verjetnosti 1.9 sledi $P((X_i, Y_i) = (x_i, y_i), (X_j, Y_j) = (x_j, y_j)) = P((X_i, Y_i) = (x_i, y_i)) \cdot P((X_j, Y_j) = (x_j, y_j))$, kar pomeni, da sta slučajna vektorja (X_i, Y_i) in (X_j, Y_j) paroma neodvisna. Splošno neodvisnost slučajnih vektorjev $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$ pokažemo na podoben način. □

Trditev 2.8 velja tudi, če Y_i zamenjamo z Z_i, ter zaporedje $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$ za zaporedje $(X_1, Z_1), (X_2, Z_2), \dots$ Prav tako trditev velja, če samo nekatere izmed drugih koordinat v zaporedju vektorjev iz zgornje trditve zamenjamo z Z-ji. Dokaz je skoraj identičen.

Sedaj lahko izračunamo pričakovano dolžino metalčeve roke, saj nam trditev 2.8 zagotavlja, da je Waldova identiteta (posledica 1.84) pripravljena za uporabo. Dobimo

$$E[L] = E[S_N] = E[N]E[X_1] = \frac{495}{196} \cdot \frac{557}{165} = \frac{1671}{196} \approx 8.526.$$

Za izračun $E[X_1]$ glej primer 2.6.

2.4.2 Varianca dolžine metalčeve roke

Označimo z $X_1, X_2, \dots$ dolžine pass-line odločitev in z N število pass-line odločitev v metalčevi roki. V prejšnem podrazdelku 2.4.1 smo pokazali da je N porazdeljen geometrijsko s parametrom $q = \sum_{t \in \mathcal{P}} \pi_t \frac{\pi_7}{\pi_t + \pi_7} = \frac{196}{495}$. Dolžino metalčeve roke lahko zapišemo kot

$$L := X_1 + \dots + X_N.$$

Definirajmo zaporedje slučajnih vektorjev, ki predstavljajo zaporedje metov v posamezni pass-line odločitvi

$$\mathbf{X}_1 := (T_1 \dots, T_{X_1}), \quad \mathbf{X}_2 := (T_{X_1+1}, \dots, T_{X_1+X_2}), \dots$$

Dimenzije teh vektorjev so naključne. Vektor $(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N)$ je metalčeva roka.

Naj bo A množica vseh možnih zaporedij metov, ki rezultirajo v taki pass-line odločitvi, ki se ne konča z 7-out metom. To je torej množica vseh zaporedij

$$A := \bigcup_{k=2}^{\infty} \{(j_1, j_2, \dots, j_{k-1}, j_1) \mid j_1 \in \mathcal{P};\ j_2, \dots, j_{k-1} \notin \{j_1, 7\}\} \cup \{(2), (3), (7), (11), (12)\}$$

in naj bo B množica vseh možnih zaporedij metov, ki sestavljajo tako pass-line odločitev, ki se konča s 7-outom. Potem je B množica vseh zaporedij

$$B := \bigcup_{k=2}^{\infty} \{(j_1, j_2, \dots, j_{k-1}, 7) \mid j_1 \in \mathcal{P}; j_2, \dots, j_{k-1} \notin \{j_1, 7\}\}.$$

Verjetnost, da neka pass-line odločitev pripada množici A, je verjetnost, da come-out met bodisi ni point število, bodisi pa je point število, potem $(k-1)$-krat ne ponovimo come-out meta (za vse $k \geq 2$) in na koncu ponovimo come-out met. Torej

$$P(\mathbf{X}_1 \in A) = (1 - \sum_{t \in \mathcal{P}} \pi_t) + \sum_{t \in \mathcal{P}} \pi_t \sum_{k=2}^{\infty} (1 - \pi_t - \pi_7)^{k-2} \pi_t = 1 - \sum_{t \in \mathcal{P}} \pi_t + \sum_{t \in \mathcal{P}} \pi_t \frac{\pi_t}{\pi_t + \pi_7} = 1 - q.$$

Verjetnost, da neka pass-line odločitev pripada množici B pa je ravno q, tj.

$$P(\mathbf{X}_1 \in B) = q.$$

Število pass-line odločitev lahko izrazimo kot $N = \min\{k \geq 1 \ : \ \mathbf{X}_k \in B\}$.

Prvi moment metalčeve roke smo že izračunali s pomočjo Waldove identitete v prejšnjem podrazdelku 2.4.1 in dobili $E[L] = \frac{1671}{196} \approx 8,526$. Za izračun variance potrebujemo še drugi moment dolžine metalčeve roke, ki ga bomo izračunali s pomočjo rodovne funkcije, za to pa potrebujemo še nekaj izračunov. Rodovno funkcijo dolžine metalčeve roke bomo izračunali s pomočjo rodovnih funkcij slučajne spremenljivke X_1 glede na dogodek $\mathbf{X}_1 \in A$ oz. glede na dogodek $\mathbf{X}_1 \in B$. Najprej zapišimo pogojno porazdelitev dolžine pass-line odločitve X_1 glede na množico kateri pripada zaporedje metov te odločitve (A ali B).

Pogojna porazdelitev X_1 glede na dogodek $\mathbf{X}_1 \in A$ je

$$\begin{aligned}
P(X_1 = k \mid \mathbf{X}_1 \in A) &= \frac{P(X_1 = k, \mathbf{X}_1 \in A)}{P(\mathbf{X}_1 \in A)} \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sum_{(j_1) \in A} \pi_{j_1}}{1-q} & \text{če } k = 1, \\ \frac{\sum_{(j_1, j_2, \dots, j_{k-1}, j_1) \in A} \pi_{j_1} \pi_{j_2} \cdots \pi_{j_{k-1}} \pi_{j_1}}{1-q} & \text{če } k \geq 2 \end{array} \right\} \\
&= \begin{cases} \frac{1 - \sum_{j_1 \in \mathcal{P}} \pi_{j_1}}{1-q} & \text{če } k = 1, \\ \frac{\sum_{j_1 \in \mathcal{P}} \pi_{j_1}^2 (1 - \pi_{j_1} - \pi_7)^{k-2}}{1-q} & \text{če } k \geq 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Pogojna porazdelitev X_1 glede na $\mathbf{X}_1 \in B$ je $P(X_1 = k \mid \mathbf{X}_1 \in B) = 0$, če $k = 1$ in

$$\begin{aligned} P(X_1 = k \mid \mathbf{X}_1 \in B) &= \frac{P(X_1 = k, \mathbf{X}_1 \in B)}{P(\mathbf{X}_1 \in B)} = \frac{\sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_{k-1}, 7) \in B} \pi_{j_1} \pi_{j_2} \cdots \pi_{j_{k-1}} \pi_{j_1}}{q} \\ &= \frac{\sum_{j_1 \in \mathcal{P}} \pi_{j_1} (1 - \pi_{j_1} - \pi_7)^{k-2} \pi_7}{q}; \quad \text{če } k \geq 2. \end{aligned}$$

Rodovni funkciji dolžine metalčeve roke X_1 pogojno na $\mathbf{X}_1 \in A$ oz. na $\mathbf{X}_1 \in B$ sta

$$\begin{aligned} G_A(z) &:= E[z^{X_1} \mid \mathbf{X}_1 \in A] = \sum_{k=1}^{\infty} z^k P(X_1 = k \mid \mathbf{X}_1 \in A) \\ &= (1-q)^{-1} (1 - \sum_{t \in \mathcal{P}} \pi_t) z + \sum_{k=2}^{\infty} z^k (1-q)^{-1} \sum_{t \in \mathcal{P}} \pi_t^2 (1 - \pi_t - \pi_7)^{k-2} \\ &= (1-q)^{-1} \left[(1 - \sum_{t \in \mathcal{P}} \pi_t) z + \sum_{t \in \mathcal{P}} \frac{\pi_t^2}{(1 - \pi_t - \pi_7)^2} \sum_{k=2}^{\infty} z^k (1 - \pi_t - \pi_7)^k \right] \\ &= (1-q)^{-1} \left[(1 - \sum_{t \in \mathcal{P}} \pi_t) z + \sum_{t \in \mathcal{P}} \frac{\pi_t^2 z^2}{1 - (1 - \pi_t - \pi_7) z} \right] \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} G_B(z) &:= E[z^{X_1} \mid \mathbf{X}_1 \in B] = \sum_{k=2}^{\infty} z^k P(X_1 = k \mid \mathbf{X}_1 \in B) \\ &= q^{-1} \sum_{k=2}^{\infty} z^k \sum_{t \in \mathcal{P}} \pi_t (1 - \pi_t - \pi_7)^{k-2} \pi_7 = q^{-1} \sum_{t \in \mathcal{P}} \frac{\pi_t \pi_7 z^2}{1 - (1 - \pi_t - \pi_7) z}. \end{aligned}$$

S pomočjo rodovnih funkcij G_A in G_B lahko izpeljemo rodovno funkcijo metalčeve roke G_L

$$\begin{aligned} G_L(z) &:= E[z^L] = E\big[E[z^L \mid N]\big] = \sum_{n=1}^{\infty} E[z^{X_1 + \cdots + X_n} \mid N = n] P(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} E[z^{X_k} \mid N = n] P(\mathbf{X}_1 \in A)^{n-1} P(\mathbf{X}_1 \in B) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} G_A(z)^{n-1} G_B(z) (1-q)^{n-1} q = \frac{q G_B(z)}{1 - (1-q) G_A(z)}, \end{aligned}$$

kjer smo za prvo enakost uporabili definicijo 1.74, za drugo in tretjo enakost izrek 1.61 in posledico 1.62, za četrto enakost pa izrek 1.48.

Za izračun drugega momenta dolžine metalčeve roke potrebujemo drugi odvod njene rodovne funkcije, dobimo

$$\begin{aligned} G_L''(z) &= \frac{q G_B''(z)}{1 - (1-q) G_A(z)} + \frac{2(1-q) q G_A'(z) G_B'(z)}{(1 - (1-q) G_A(z))^2} \\ &\quad + q G_B(z) \left(\frac{(1-q) G_A''(z)}{(1 - (1-q) G_A(z))^2} + \frac{2(1-q)^2 G_A'(z)^2}{(1 - (1-q) G_A(z))^3} \right). \end{aligned}$$

Pri $z = 1$ in ob upoštevanju $G_A(1) = G_B(1) = 1$, dobimo

$$G''_L(1) = \frac{(1-q)G''_A(1) + qG''_B(1)}{q} + \frac{2(1-q)}{q}\frac{(1-q)G'_A(1) + qG'_B(1)}{q}G'_A(1) \tag{2.1}$$

Upoštevamo naslednje enakosti. Prvič

$$\begin{aligned} G'_A(1)(1-q) + G'_B(1)q &= E[X_1 \mid \mathbf{X}_1 \in A]P(\mathbf{X}_1 \in A) + E[X_1 \mid \mathbf{X}_1 \in B]P(\mathbf{X}_1 \in B) \\ &= E[X_1] = \frac{557}{165} \end{aligned}$$

(vrednost $E[X_1]$ smo izračunali v primeru 2.7). Drugič,

$$\begin{aligned} G''_A(1)(1-q) + G''_B(1)q &= (E[X_1^2 \mid \mathbf{X}_1 \in A] - E[X_1 \mid \mathbf{X}_1 \in A])P(\mathbf{X}_1 \in A) \\ &\quad + (E[X_1^2 \mid \mathbf{X}_1 \in B] - E[X_1 \mid \mathbf{X}_1 \in B])P(\mathbf{X}_1 \in B) \\ &= E[X_1^2] - E[X_1]. \end{aligned}$$

V primeru 2.7 smo zapisali formulo za $E[X_1^2 \mid T_1]$ iz katere dobimo pričakovano vrednost za X_1^2, $E[X_1^2] = \sum_{t\in\mathcal{S}} E[X_1^2 \mid T = t] = \frac{61769}{3025}$. In tretjič $G'_A(1) = E[X_1 \mid \mathbf{X}_1 \in A]$, kjer je pogojna pričakovana vrednost dolžine pass-line odločitve X_1 pri pogoju, da zaporedje metov te odločitve $\mathbf{X}_1$ pripada množici A enaka

$$\begin{aligned} E[X_1 \mid \mathbf{X}_1 \in A] &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(X_1 = k \mid \mathbf{X}_1 \in A) \\ &= (1-q)^{-1}\left(1 - \sum_{t\in\mathcal{P}} \pi_t + \sum_{k=2}^{\infty} k \sum_{t\in\mathcal{P}} \pi_t^2(1-\pi_t-\pi_7)^{k-2}\right) \\ &= (1-q)^{-1}\left(1 - \sum_{t\in\mathcal{P}} \pi_t + \sum_{t\in\mathcal{P}} \pi_t^2 \frac{1}{(1-\pi_t-\pi_7)} \sum_{k=2}^{\infty} k(1-\pi_t-\pi_7)^{k-1}\right) \\ &= (1-q)^{-1}\left(1 - \sum_{t\in\mathcal{P}} \pi_t + \sum_{t\in\mathcal{P}} \frac{\pi_t^2}{(\pi_t+\pi_7)}\left(\frac{1}{\pi_t+\pi_7} + 1\right)\right) \\ &= (1-q)^{-1}\left(1 - q + \sum_{t\in\mathcal{P}} \frac{\pi_t^2}{(\pi_t+\pi_7)^2}\right) \\ &= 1 + \sum_{t\in\mathcal{P}} \frac{\pi_t^2}{(\pi_t+\pi_7)^2(1-q)} = \frac{42457}{16445}. \end{aligned}$$

Označimo z $y_t = 1 - \pi_t - \pi_7$. Za 4. enakost zgoraj uporabimo naslednjo opazko $\sum_{k=2}^{\infty} k y_t^{k-1} = \frac{\delta}{\delta y_t} \sum_{k=2}^{\infty} y_t^k = \frac{y_t(2-y_t)}{(1-y_t)^2}$.
Na osnovi teh treh opažanj poračunamo do konca (2.1) in dobimo

$$G''_L(1) = \frac{E[X_1^2] - E[X]}{q} + \frac{2(1-q)E[X_1]}{q^2}E[X_1 \mid \mathbf{X}_1 \in A] = \frac{2116713}{19208}.$$

Sedaj po trditvi 1.75 dobimo

$$E[L^2] = G''_L(1) + E[L] = \frac{2116713}{19208} + \frac{1671}{196} = \frac{2280471}{19208}.$$

Varianca dolžine metalčeve roke torej znaša

$$\mathrm{Var}(L) = E[L^2] - E[L]^2 = \frac{2280471}{19208} - \left(\frac{1671}{196}\right)^2 = \frac{1768701}{38416} \approx 46.041.$$

2.4.3 Mediana dolžine metalčeve roke

Primer 2.9 (Mediana dolžine metalčeve roke)**.** Mediano dolžine metalčeve roke lahko izračunamo s pomočjo markovske verige $\{W_n\}_{n\geq 0}$. Prostor stanj verige je $S := \{\triangleright\} \cup \mathcal{P} \cup \{\bigstar\}$, kjer so $\mathcal{P}$ point števila (glej konec podrazdelka 2.2.2). Zapišimo kdaj je n-ti člen verige v nekem stanju iz prostora stanj

$$W_n := \begin{cases} \triangleright & \text{, če je naslednji met metalčeve roke come-out met} \\ j & \text{, če je vzspostavljeno število } j \text{ še nerazrešeno} \qquad\qquad ,j \in \mathcal{P}. \\ \bigstar & \text{, če je igralec 7-outal} \end{cases}$$

Spodaj izračunamo koeficiente prehodne matrike $\mathbf{P}$

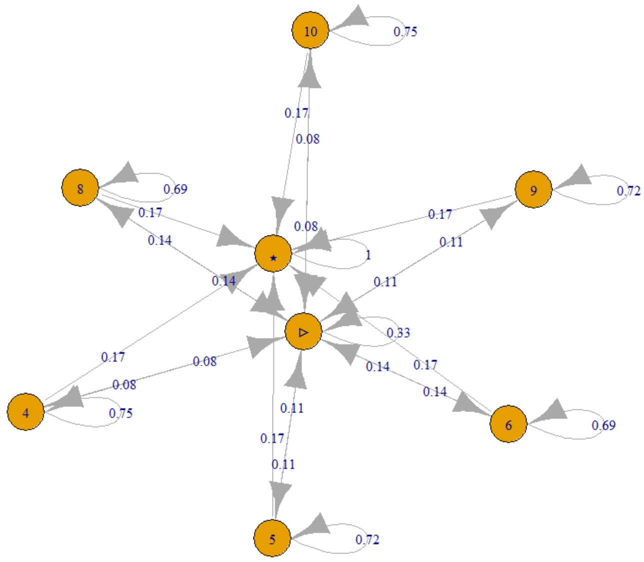
$$P_{\triangleright j} = \left\{ \begin{array}{ll} \pi_2 + \pi_3 + \pi_7 + \pi_{11} + \pi_{12} & \text{če } j = \triangleright, \\ \pi_j & \text{če } j \in \mathcal{P}, \\ 0 & \text{če } j = \bigstar \end{array} \right\},$$

$$P_{ij} = \left\{ \begin{array}{lll} \pi_i & \text{če } j = \triangleright, & \\ 1 - \pi_i - \pi_7 & \text{če j=i,} & \\ 0 & \text{če } j \in \mathcal{P} \setminus \{i\}, & i \in \mathcal{P} \\ \pi_7 & \text{če } j = \bigstar; & \end{array} \right\}, P_{\bigstar j} = \begin{cases} 1 & \text{, če } j = \bigstar \\ 0 & \text{, če } j = S \setminus \{\bigstar\}. \end{cases}$$

Rezultate dobljenih prehodnih verjetnosti zapišemo v matriko spodaj

$$36\mathbf{P} = \begin{array}{c} \text{stanja} \\ \triangleright \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ \bigstar \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \triangleright & 4 & 5 & 6 & 8 & 9 & 10 & \bigstar \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 3 & 4 & 5 & 5 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Digraf na sliki 10 ima vozlišča označena z možnimi stanji iz prostora stanj. Usmerjena povezava iz vozlišča $u \in S$ v vozlišče $v \in S$ predstavlja možen prehod iz stanja u v stanje v v enem koraku (tj. $P_{uv} > 0$). Uteži na povezavah so prehodne verjetnosti enega koraka.



Slika 10: Digraf markovske verige, ki prikazuje možne prehode med stanji igralčeve roke v enem koraku.

Prehodna verjetnost $P^{(m)}_{\triangleright\bigstar}$ je verjetnost, da pridemo iz stanja $\triangleright$ v stanje $\bigstar$ v največ m korakih. Z drugimi besedami, je to verjetnost $P(L \leq m)$, da se metalčeva roka konča v največ m metih. Za mediano L iščemo $m \in \mathbb{Z}$, za katerega bo veljalo $P(L \geq m) \geq \frac{1}{2}$ in $P(L \leq m) \geq \frac{1}{2}$. Velja
$P^{(5)}_{\triangleright\bigstar} = \frac{657}{1550} \approx 0.424$,
$P^{(6)}_{\triangleright\bigstar} = \frac{164494}{327163} \approx 0.503$; oziroma
$P(L \geq 6) = 1 - P^{(5)}_{\triangleright\bigstar} \geq \frac{1}{2}$ in
$P(L \leq 6) = P^{(6)}_{\triangleright\bigstar} \geq \frac{1}{2}$.
Sledi, da je mediana dolžine metalčeve roke $\mathrm{Median}(L) = 6$.

2.4.4 Porazdelitev dolžine metalčeve roke

Primer 2.9 je zanimiv še iz enega vidika. Z markovsko verigo in s pomočjo tranzicijske matrike enega koraka lahko določimo tudi porazdelitev in porazdelitveno funkcijo dolžine metalčeve roke L.

Primer 2.10. Naj bo $\mathbf{P}$ prehodna matrika enega koraka markovske verige $\{W_n\}_{n\geq 0}$ definirane v primeru 2.9. Potem velja $f_L(x) = P(L \leq x) - P(L \leq x-1) = P^{(x)}_{\triangleright\bigstar} - P^{(x-1)}_{\triangleright\bigstar}$ in $F_L(x) = P^{(x)}_{\triangleright\bigstar}$.

Drugi, morda preprostejši način je, da izpeljemo funkciji f_L in F_L rekurzivno.

Primer 2.11 (Rekurzivna izpeljava funkcij f_L in F_L)**.** Definirjajmo funckcijo h kot $h(x) := P(L \geq x)$. Metalčeva roka se prične s come-out metom, s katerim se zagotovo ne konča (v jeziku primera 2.9 lahko rečemo, da ni direktnega prehoda, oz. prehoda enega koraka med stanjem $\triangleright$ in $\bigstar$). Sledi $h(1) = h(2) = 1$.

Najti moramo še verjetnost dogodka $\{L \geq x\}$ za $x \geq 3$. Pri tem si bomo pomagali z rezultatom prvega come out meta. Ta je lahko bodisi končal pass-line odločitev, ali pa smo z njim vspostavili point število.

- Če je met končal pass-line odločitev, potem igralec ne sme 7-outat v nasjednjih $x - 2$ metih.

- Če smo z njim vspotavili point število $t \in \mathcal{P}$, ločimo dva primera.

  - Point število je do meta x še zmeraj nerazrešeno, tj. $T_2, \ldots, T_{x-1} \notin \{t, 7\}$.

  - Prva pass line odločitev se je končala v k-tem metu, kjer $k \in \{2, \ldots, x\}$. Za tem metom igralec ne sme 7-outat še v vsaj naslednjih $x - k - 1$ metih.

Na osnovi zgornjega razmisleka, lahko sedaj zapišemo funkcijo h za $x \geq 3$:

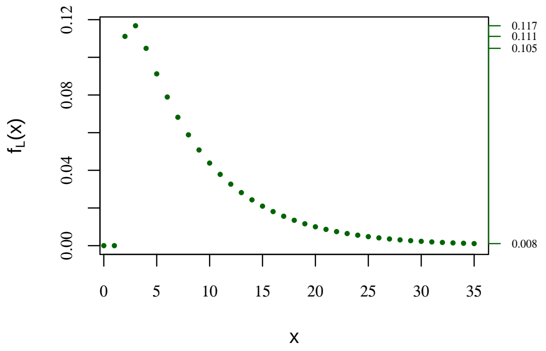
$$h(x) = \sum_{t \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{P}} \pi_t h(x-1) + \sum_{t \in \mathcal{P}} \pi_t (1 - \pi_t - \pi_7)^{x-2} + \sum_{t \in \mathcal{P}} \pi_t \sum_{k=2}^{x-1} (1 - \pi_t - \pi_7)^{k-2} \pi_t h(x-k).$$

Sedaj lahko porazdelitev in porazdelitveno funkcijo dolžine metalčeve roke zapišemo s pomočjo funkcije h. Velja $f_L(x) = P(L \leq x) - P(L \leq x-1) = (1 - h(x+1)) - (1 - h(x)) = h(x) - h(x+1)$ in $F_L(x) = P(L \leq x) = 1 - h(x+1)$.

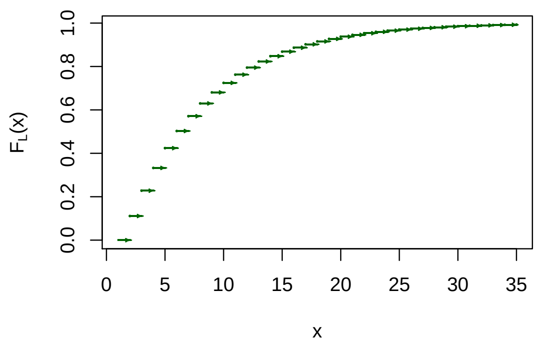
V tabeli 4 lahko za nekaj x-ov vidimo verjetnosti, da je metalčeva roka dolga vsaj x metov (to so vrednosti funkcije $h(x)$, ki smo jo definirali v primeru 2.11). Vidimo tudi nekaj vrednosti porazdelitve in porazdelitvene funkcije dolžine metalčeve roke. Na slikah 11 in 12 prikažemo porazdelitev oz. porazdelitveno funkcijo dolžine metalčeve roke še grafično.

Tabela 4: Tabela vrednosti funkcij h, f_L in F_L.

x	$h(x)$	$f_L(x)$	$F_L(x)$
1	1.000	.000	.000
2	1.000	.111	.111
3	.889	.117	.228
4	.772	.105	.333
5	.667	.091	.424
6	.576	.079	.503
7	.497	.068	.571
8	.430	.059	.630
9	.370	.051	.681
10	.319	.044	.724
11	.276	.038	.762
12	.238	.033	.795
13	.205	.028	.823
14	.177	.024	.847
15	.153	.210	.868
16	.132	.018	.886
17	.114	.016	.902
18	.098	.013	.916
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
33	.011	.001	.991
34	.009	.001	.992



Slika 11: Porazdelitev dolžine metalčeve roke.



Slika 12: Porazdelitvena funkcija dolžine metalčeve roke.

Porazdelitev dolžine metalčeve roke spominja na geometrijsko porazdelitev. Podobnost med obema porazdelitvama nakazuje tudi podobnost med razmerjema $Median(X) : E[X]$ in $Median(L) : E[L]$, kjer je X geometrijska slučajna spremenljivka, $X \sim \text{Geom}(p)$. Spomnimo, $\text{Median}(X) : E[X] \approx 0.69$ (glej primer 1.58), $\text{Median}(L) = 6$, $E[L] = \frac{1671}{196}$. Torej $\text{Median}(L) : E[L] \approx 0.704$.

Rekord v dolžini metalčeve roke je bil postavljen 25. maja 2009, ko je v Borgata Hotel & Spa-ju v Atlantic Cityu, Patricia De Mauro v 4 urah in 18 minutah 7-outala po 154. metu. Verjetnost, za tako ali daljšo dolžino metalčeve roke, je $h(154) \approx 1.788824 \cdot 10^{-10}$ (za več glej npr. [4]).

2.5 OPIS NEOBVEZNIH STAV

Definicija 2.12. Izplačilo v stavi je razmerje profit:velikost stave v primeru, da igralec zmaga v stavi (tj. v primeru, da se zgodi dogodek, na katerega je stavil).

2.5.1 Come in don't come stavi

Come stava (**don't come stava**) je skoraj enaka kot pass-line (don't pass-line stava), ki smo jo (ju) že opisali v podrazdelku 2.2.2. Razlikujeta se zgolj v dveh pogledih. Prva razlika je v tem, da je pass-line (don't pass-line) stava obvezna, medtem ko je come stava (dont't come stava) neobvezna. Druga razlika je trenutek, ko stavi postaneta razpoložljivi: pass-line stavo (don't pass-line) stavo metalec naredi pred come-out metom, come stavo (don't come stavo) lahko metalec naredi pred point metom.

Da natančneje predstavimo razliko med pass-line stavo in come stavo (oz med don't pass-line stavo oz. don't come stavo), definirajmo slučajno spremenljivko N_n. To je tisti met, po katerem se razreši pass-line ali come stava (oz. don't pass-line ali don't come stava), ki jo igralec naredi pred metom n. Z matematičnim zapisom je to

$$N_n := \begin{cases} n & \text{če } T_n = \mathcal{S} \setminus \mathcal{P}, \\ \min\{k > n \mid T_k = 7 \text{ ali } T_k = T_n\} & \text{če } T_n \in \mathcal{P}. \end{cases}$$

S pomočjo slučajne spremenljivke N_n rekurzivno definiramo zaporedje come-out metov

$$C_1 := 1,\ C_n := N_{C_{n-1}} + 1 \text{ za } n \geq 2.$$

Pred come-out meti $C_1, C_2, \ldots$, igralec naredi pass-line/don't pass-line stavo. Ostali meti, T_i, $T_i \notin \{C_1, C_2, \ldots\}$ so point meti, pred katerimi ima metalec na voljo opcijo, da naredi come ali don't come stavo.

Verjetnost zmage v come stavi je enaka kot verjetnosti zmage v pass-line stavi, ki smo jo že izračunali v primerih 2.4 iz podrazdelka 2.2.2. Prav tako so verjetnosti zmage, poraza in pusha v don't come stavi enake kot verjetnost zmage, poraza in pusha v don't pass-line stavi. Tudi te vrednosti smo že izračunali v primeru 2.5.

2.5.2 Free odds stavi v m-times free odds kazinoju in m_4-m_5-m_6-times free odds stava

2.5.2.1 Free odds in m_4-m_5-m_6-times free odds stavi, povezani s pass-line/come bet stavo

Free odds stava, ki je **povezana s pass-line ali come bet stavo**, je stava, ki postane razpoložljiva, ko je vzpostavljeno point število. Free odds stava je stava, da metalec zmaga v z njo povezani originalni stavi (torej v pass-line ali v come stavi). Gre za pošteno stavo, tj. stavo, katere pričakovan dobiček je 0. Ker je stava poštena, so izplačila v primeru zmage naslednja: 2 proti 1, če je vzpostavljeno point število 4 ali 10, 3 proti 2 če je vzpostavljeno point število 5 ali 9 in 6 proti 5, če je vzpostavljeno point število 6 ali 8. Igralec lahko v **m-times odds kazinoju** stavi največ m-krat toliko, kot je bila njegova originalna pass-line/come stava. V kazinojih je običajno $m \in \{1, 2, 3\}$. Pravimo tudi, da kazino ponudi enojne, dvojne ali trojne oddse.

V povezavi s pass-line/come stavo lahko definiramo tudi **$\mathbf{m_4}$-$\mathbf{m_5}$-$\mathbf{m_6}$-times free odds** stavo, ki je enaka kot m-times odds stava, povezana s pass-line/come bet stavo. Razlika je zgolj v maksimalni dovoljeni stavi, ki je m_4-kratnik pass-line/come bet stave v primeru, da je vzpostavljeno point število 4 ali 10, m_5-kratnik originalne stave v primeru, da je vzpostavljeno point število 5 ali 9 in m_6-kratnik originalne stave v primeru, da je vzpostavljeno point število 6 ali 8. Običajno kazino ponudi 3-4-5-times free odds stavo.

2.5.2.2 Free odds stava, povezana z don't pass-line/don't come stavo

Free odds stava, ki je **povezana z don't pass-line ali dont't come stavo**, je stava, ki postane razpoložljiva, ko je vzpostavljeno point število. Metalec zmaga v free odds stavi, če zmaga v z njo povezani originalni stavi (torej don't pass-line ali don't come stavi). Gre za pošteno stavo, tj. stavo, katere pričakovan dobiček je 0. Ker je stava poštena, so izplačila v primeru zmage naslednja: 1 proti 2, če je vzpostavljeno point število 4 ali 10, 2 proti 3, če je vzpostavljeno point število 5 ali 9 in 5 proti 6, če je vzpostavljeno point število 6 ali 8. Igralec lahko v m-times odds kazinoju stavi največ toliko, da v primeru zmage zasluži največ m-krat toliko, kot je bila njegova originalna don't pass-line/don't come stava.

V m_4-m_5-m_6-free odds stavi povezani z don't-pass-line/don't come bet stavo lahko stavi največ toliko, da njegov zaslužek ne preseže m_4-kratnika originalne stave, če je vzpostavljeno point število 4 ali 10, m_5-kratnika originalne stave, če je vzpostavljeno point število 5 ali 9 in m_6-kratnika originalne stave, če je vzpostavljeno point število 6 ali 8.

Definicija 2.13 (Zadeta/zgrešena točka)**.** Predpostavimo, da v come-out metu pass-line odločitve vržemo število $t \in \mathcal{P}$. Pravimo, da je **točka t zadeta**, če v nadalnjih metih pass-line odločitve pade t preden pade 7. Če pade 7 preden znova pade t pa pravimo, da je **točka t zgrešena**.

Primer 2.14. Verjetnost zmage v free-odds stavi v povezavi s pass-line/come bet stavo je verjetnost dogodka, da je točka t zadeta. Hkrati je to verjetnost poraza v free-odds stavi povezani z don't pass-line/don't come bet stavo.

Verjetnost poraza v free-odds stavi povezani s pass-line/come bet stavo pa je verjetnost dogodka, da je točka t zgrešena. To je hkrati verjetnost zmage v free odds stavi povezani z don't pass-line/don't come bet stavo.

Označimo z W_t dogodek, da je točka t zadeta, z L_t dogodek, da je točka t zgrešena, z D rezultat come out meta in z W dogodek, da zmagamo v pass-line stavi. Potem velja $P(W_t) = P(W \mid D = t) = \sum_{x=1}^{\infty}(1-\pi_t-\pi_7)^{x-1}\pi_t = \frac{\pi_t}{\pi_t+\pi_7}$ in $P(L_t) = 1 - P(W \mid D = t) = \frac{\pi_7}{\pi_t+\pi_7}$.

Tabela 5: Verjetnost, da je točka t v free-odds stavi zadeta oz. zgrešena.

t	$P(W_t)$	$P(L_t)$
4 ali 10	330/990	660/990
5 ali 9	396/990	594/990
6 ali 8	450/990	540/990

2.5.3 Place bet stava

Place bet stave je stava, da izbrano point število $t \in \mathcal{P}$ pade preden pade 7. Izplačila so 9 proti 5, če $t \in \{4, 10\}$, 7 proti 5, če $t \in \{5, 9\}$ in 7 proti 6, če $t \in \{6, 8\}$.

Sicer pa ima metalec po vsakem metu, ki ne razreši stave, opcijo, da od stave odstopi. Zato je morda iz vidika matematične analize, place bet stavo bolje definirati kot stavo enega meta, ki se nanaša zgolj na naslednji met. Naj bo $t \in \mathcal{P}$ izbrano point število. Definirajmo z W dogodek, da metalec zmaga v place bet stavi v naslednjem metu, z T dogodek, da pride do pusha oz. izenačenja, tj., v naslednjem metu metalec niti ne zmaga niti ne izgubi in z L dogodek, da metalec izgubi pass line stavo v naslednjem metu. Potem velja $P(W) = \pi_t$, $P(T) = 1 - \pi_t - \pi_7$ in $P(L) = \pi_7$.

2.5.4 Buy bet stava

2.5.4.1 Buy bet stava oz. buy bet stava s provizijo

Buy bet stava je enaka kot place bet stava, le da so izplačila skoraj poštena. Skoraj zato, ker mora igralec "kupiti" stavo tako, da plača provizijo na velikost stave, $c \in (0, 1)$.

Če je $a : 1$ pošteno izplačilo, potem je izplačilo v buy bet stavi enako $(a-c) : (1+c)$. Namreč, pri velikosti stave $1 + c$ igralec kupi 1 efektivno enoto. Zato v primeru zmage kazino plača a enot in vrne upoštevano vplačano enoto. Profit je pri temu $a - c$. Glede na to, da je v buy bet stavi na point število t verjetnost zmage π_t, poraza pa π_7, so poštene vrednosti za a naslednje: $a = 2$ za $t \in \{4, 10\}$, $a = 3/2$ za $t \in \{5, 9\}$ in $a = 6/5$ za $t \in \{6, 8\}$.

Običajno je provizija $c = 5\%$, izplačila pa so $39 : 21$ za $t \in \{4, 10\}$, $30 : 21$ za $t \in \{5, 9\}$ in $24 : 21$ za $t \in \{6, 8\}$.

2.5.4.2 Buy bet stava s provizijo v primeru zmage

Ponekod se provizija $c \in (0, 1)$ v buy bet stavi plača na velikost stave le v primeru zmage. Če je pošteno izplačilo $a : 1$, je izplačilo v buy bet stavi s provizijo v primeru zmage enako $(a - c) : 1$. Pojasnilo je naslednje. Pri velikosti stave 1 igralec kupi eno efektivno enoto. Če zmaga, se mu plača pošteno izplačilo a skupaj z vrnjeno stavo, od katere se trga delež c velikosti stave. Profit je torej $a - c$.

Pri proviziji $c = 5\%$ so izplačila sledeča: $39 : 20$ za $t \in \{4, 10\}$, $29 : 20$ za $t \in \{5, 9\}$ in $23 : 20$ za $t \in \{6, 8\}$.

2.5.5 Lay bets

Lay bet na točko $t \in \mathcal{P}$ je v nasprotju z buy bet stava, da pade 7 preden pade t. Po vsakem neodločujočem metu se lahko od stave odstopi, zato lahko stavo opišemo kot stavo enega meta. Izplačila so skoraj poštena, plača se provizija $c \in (0, 1)$ na velikost izplačila poštene stave - tj., če je pošteno izplačilo $a : 1$ se plača provizija ac. Poštena izplačila v lay bet stavi so obratna kot v place bet stavi: $a = 1/2$ za $t \in \{4, 10\}$, $a = 2/3$ za $t \in \{5, 9\}$ in $a = 5/6$ za $t \in \{4, 10\}$. Izplačilo v lay bet stavi je torej $(a - ac) : (1 + ac)$.

Za $c = 5\%$ so izplačila $19 : 41$ za $t \in \{4, 10\}$, $19 : 31$ za $t \in \{5, 9\}$ in $19 : 25$ za $t \in \{6, 8\}$.

2.5.6 Fire bet stava

Fire bet stava je stava, da bodo vzpostavljena in zadeta vsaj štiri različna point števila pred iztekom metalčeve roke. To pomeni, da mora metalčeva roka vsebovati vsaj 4 pass-line odločitve, v katerih mora igralec ob come-out metih vzpostaviti 4 različna point števila in jih ponoviti, preden pade 7. Izplačila so a_4 proti 1 za štiri zadeta point števila, a_5 proti 1 za pet zadetih point števil in a_6 proti 1 za vseh šest zadetih point števil. Običajno kazinoji konstante a_4, a_5 in a_6 postavijo na $a_4 = 24$, $a_5 = 249$ in $a_6 = 999$.

Pri izračunu verjetnosti zmage v fire bet stavi, si pomagamo z naslednjo trditvijo.

Trditev 2.15 (glej knjigo [5]). *Naj bo $n \geq 2$ neko celo število in $E_1, \ldots, E_n$ poljubni dogodki. Definirajmo vsoto $N := \sum_{i=1}^{n} 1_{E_i}$. Potem je verjetnost, da se zgodi natanko j izmed n dogodkov enaka*

$$P(N = j) = \sum_{k=j}^{n} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} S_k, \text{ kjer so}$$

$S_0 := 1$ *in* $S_k := \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \cdots \sum P(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k})$ *za* $k = 2, \ldots, n.$

Dokaz. Veljavnost formule za $P(N = j)$ pokažimo s pomočjo rodovne funkcije od N, velja

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} P(N = j) z^j &= E[z^N] \\
&= E\left[\prod_{i=1}^{n} (1_{E_i^C} + z 1_{E_i})\right] \\
&= E\left[\prod_{i=1}^{n} \big(1 + (z-1) 1_{E_i}\big)\right] \\
&= E[1 + (z-1)1_{E_1} + \cdots + (z-1)1_{E_n} \\
&\quad + (z-1)^2 1_{E_1} 1_{E_2} + \cdots + (z-1)^2 1_{E_{n-1}} 1_{E_n} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (z-1)^n 1_{E_1} \cdots 1_{E_n}] \\
&= E[1 + (z-1)(1_{E_1} + \cdots + 1_{E_n}) + (z-1)^2 (1_{E_1} 1_{E_2} + \cdots + 1_{E_{n-1}} 1_{E_n}) \\
&\quad + \cdots + (z-1)^n 1_{E_1} \cdots 1_{E_n}] \\
&= 1 + (z-1)\left[\sum_{i=1}^{n} P(E_i)\right] + (z-1)^2 \left[\sum_{1 \le i < j \le n}\sum P(E_i \cap E_j)\right] \\
&\quad + \cdots + (z-1)^n P(1_{E_1} \cap \cdots \cap 1_{E_n}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (z-1)^k S_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z^k (-1)^{k-j} S_k \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} S_k\right] z^k.
\end{aligned}$$

Koeficienti znotraj oglatih oklepajev pred z^k so ravno verjetnosti $P(N = j)$. Za predzadnjo enakost smo uporabili binomski izrek. $\square$

V naslednjem primeru izračunamo verjetnost zmage v fire bet stavi.

Primer 2.16 (Verjetnost zmage v fire bet stavi)**.** Naj bodo zaporedje vektorjev $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2, \ldots$ ter množici A in B taki, kot smo jih definirali v podrazdelku 2.4.2. Zaporedje dolžin pass-line odločitev zapišemo kot $X_1, X_2, \ldots$ Število pass-line odločitev je $N := \min\{k \ge 1 \ : \ \mathbf{X}_k \in B\}$.

Zanima nas porazdelitev števila zadetih točk $t \in \mathcal{P}$ v metalčevi roki $(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_N)$. Posamezne pass-line odločitve $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots$ so med seboj neodvisne, vsaka pass-line odločitev pa predstavlja poskus, v katerem lahko igralec vzpostavi in zadane novo točko.

Za $t \in \mathcal{P}$ definiramo dogodka $E_{t,i} :=$ {vzpostavimo točko t v come out metu i-te pass-line odločitve in zadanemo to točko} in $E_t := \cup_{i=1}^{N-1} E_{t,i} =$ {tekom metalčeve roke vzpostavimo in zadanemo točko t}. Naj bosta $C = \sum_{t\in\mathcal{P}} 1_{E_t}$ in $D = \sum_{t\in\mathcal{P}} 1_{E_t^C}$ števili zadetih oz. zgrešenih točk v metalčevi roki.

Število zadetih točk C, bomo izračunali pogojno na dolžino metalčeve roke $N = n$. Pri tem bo ključnega pomena, da opazimo naslednje. Pass-line odločitev $i < n$ pripada množici A. Sledi, da točko t v i-ti pass-line odločitvi zadanemo natanko tedaj, ko jo vzpostavimo v come out metu. Na podlagi tega razmisleka definirajmo verjetnost

$$p_t := P(E_{t,i} \mid \mathbf{X}_i \in A) = P(E_{t,1} \mid \mathbf{X}_1 \in A) = P(T_1 = t \mid \mathbf{X}_1 \in A) = \frac{P(T_1 = t, \mathbf{X}_1 \in A)}{P(\mathbf{X}_1 \in A)}$$
$$= \frac{\pi_t \sum_{k=2}^{\infty}(1-\pi_t-\pi_7)^{k-2}\pi_t}{1-q} = \frac{\pi_t^2}{(\pi_t+\pi_7)(1-q)},$$

kjer smo za drugo enakost uporabili neodvisnost pass-line odločitev $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots$, za verjetnost $P(\mathbf{X}_1 \in A)$ pa glej podrazdelek 2.4.2.

Preden lahko apliciramo trditev 2.15 za zapis porazdelitve števila zadetih točk v metalčevi roki, definirajmo naslednje vsote: $S_0 := 1$, $S_k := \sum_{I\subseteq\mathcal{P}:|I|=k} P(\cap_{t\in I} E_t^C \mid N = n)$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; kjer

$$\begin{aligned}
P(\cap_{t\in I} E_t^C \mid N = n) &= P(\cap_{t\in I}(\cup_{i=1}^{n-1} E_{t,i})^C \mid N = n) \\
&= P(\cap_{t\in I}(\cap_{i=1}^{n-1} E_{t,i}^C) \mid N = n) \\
&= P(\cap_{i=1}^{n-1}(\cap_{t\in I} E_{t,i}^C) \mid N = n) \\
&= P(\cap_{t\in I} E_{t,1}^C \mid \mathbf{X}_1 \in A, \ldots, \mathbf{X}_{n-1} \in A, \mathbf{X}_n \in B)^{n-1} \\
&= P(\cap_{t\in I} E_{t,1}^C \mid \mathbf{X}_1 \in A)^{n-1} \\
&= P((\cup_{t\in I} E_{t,1})^C \mid \mathbf{X}_1 \in A)^{n-1} \\
&= (1 - P(\cup_{t\in I} E_{t,1} \mid \mathbf{X}_1 \in A))^{n-1} \\
&= (1 - \sum_{t\in I} P(E_{t,1} \mid \mathbf{X}_1 \in A))^{n-1} \\
&= (1 - \sum_{t\in I} p_t)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Za tretjo enakost smo uporabili asociativnost preseka, za četrto enako porazdeljenost $1_{E_1}, 1_{E_2}, \ldots$, za četrto in osmo neodvisnost dogodkov $E_1, E_2, \ldots$, za drugo in šesto pa De Morganov zakon.

Verjetnost, da v metalčevi roki zadanemo j točk iz $\mathcal{P}$ je enaka

$$\begin{aligned}
P(C=j) = P(D=6-j) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(D=6-j, N=n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(D=6-j \mid N=n) P(N=n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=6-j}^{6} \binom{k}{6-j} (-1)^{k-6+j} S_k \right) (1-q)^{n-1} q \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=6-j}^{6} \binom{k}{6-j} (-1)^{k+j} \sum_{I \subseteq \mathcal{P}: |I|=k} P(\cap_{t\in I} E_t^C \mid N=n) \right) (1-q)^{n-1} q \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=6-j}^{6} \binom{k}{6-j} (-1)^{k+j} \sum_{I \subseteq \mathcal{P}: |I|=k} (1 - \sum_{t\in I} p_t)^{n-1} (1-q)^{n-1} q \\
&= \sum_{k=6-j}^{6} \binom{k}{6-j} (-1)^{k+j} q \sum_{I \subseteq \mathcal{P}: |I|=k} \left(1 - (1-q)(1 - \sum_{t\in I} p_t) \right)^{-1} .
\end{aligned}$$

Numerične vrednosti te formule prikažemo v tabeli 6.

Tabela 6: Porazdelitev števila zadetih točk v metalčevi roki

k	$P(C=k)$, točna vrednost	$P(C=k)$, približek
0	98/165	.593 939
1	78 834/302 335	.260 750
2	$\frac{1\ 970\ 803\ 095\ 086}{19\ 459\ 848\ 690\ 711}$	.101 275
3	$\frac{1\ 308\ 430\ 294\ 936\ 495\ 236\ 340\ 268}{39\ 134\ 473\ 632\ 501\ 557\ 375\ 602\ 251}$	.033 434
4	$\frac{397\ 827\ 275\ 553\ 303\ 559\ 561\ 275\ 300\ 153\ 332\ 123}{45\ 217\ 004\ 661\ 600\ 798\ 293\ 395\ 811\ 871\ 070\ 645\ 620}$	.008 798
5	$\frac{205\ 475\ 014\ 116\ 867\ 547\ 145\ 317\ 940\ 818\ 694\ 649\ 261\ 505}{125\ 294\ 750\ 887\ 234\ 054\ 523\ 299\ 013\ 860\ 064\ 832\ 861\ 616\ 986}$	.001 640
6	$\frac{3\ 700\ 403\ 899\ 126\ 040\ 038\ 831\ 518\ 494\ 284\ 887\ 738\ 125}{22\ 780\ 863\ 797\ 678\ 919\ 004\ 236\ 184\ 338\ 193\ 605\ 974\ 839\ 452}$	.000 162

Verjetnost zmage v fire bet stavi, $P(C \geq 4)$, je približno odstotek: 0.010 601.

2.5.7 Any Craps

Any craps bet je stava enega meta. Zmago prinaša met, v katerem pade eno izmed craps števil $2, 3$ ali 12. Verjetnost zmage je $\pi_2 + \pi_3 + \pi_{12} = 1/9$. Izplačilo je 7 proti 1. Prednost hiše znaša $(8/9) - 7(1/9) = 1/9$ (glej primer 3.3).

2.5.8 Hardway bets

Obstajajo štiri hardway stave. Sodi vsoti padlih pik pravimo **hard**, če pade na obeh kockah enako število. V nasprotnem pravimo sodi vsoti **easy**. Za $j = 2, 3, 4, 5$ definiramo **hard-$2j$ wager** stavo kot stavo, da pade hard $2j$ preden pade easy $2j$ ali 7.

Množico hard-$2j$ wager stav poimenujemo kot hardway bets. Razmerja profit:velikost stave so 7 proti 1 za hard 4 in hard 10 ter 9 proti 1 za hard 6 in hard 8. Od hardway stave lahko odstopimo kadarkoli, zato jo analiziramo kot stavo enega meta.

Spomnimo, v razdelku 2.1 smo zapisali porazdelitev slučajnega vektorja (I_0, J_0), ki predstavlja met identičnih kock (I_0 je minimum, J_0 pa maksimum padlih pik obeh kock) kot $f_{I_0,J_0}(x, y) = \frac{2-\delta_{x,y}}{36}$.

Naj bo p_{2j} verjetnost zmage v hard-$2j$ wager stavi. Potem velja

$$p_4 = p_{10} = \sum_{k=1}^{\infty}(1 - f_{I_0,J_0}(1, 3) - f_{I_0,J_0}(2, 2) - \pi_7)^{k-1} f_{I_0,J_0}(2, 2) = \frac{1}{9} \qquad \text{in}$$

$$p_6 = p_8 = \sum_{k=1}^{\infty}(1 - f_{I_0,J_0}(1, 5) - f_{I_0,J_0}(2, 4) - f_{I_0,J_0}(3, 3) - \pi_7)^{k-1} f_{I_0,J_0}(3, 3) = \frac{1}{11}.$$

Prednost hiše v hard-4 in hard-10 stavi je $(1 - p_4) - 7p_4 = (8/9) - 7(1/9) = 1/9$, v hard-6 in hard-8 stavi pa $(1 - p_6) - 9p_6 = (10/11) - 9(1/11) = 1/11$ (glej primer 3.3).

3 PREDNOST HIŠE

Prednost hiše je numerični indeks, ki pove kolikšna je igralčeva pričakovana izguba glede na pričakovano velikost stave. **Velikost stave** ni nujno količina denarja, ki ga igralec postavi na igralno površino, ampak del stavljenega denarja, ki je pod nevarnostjo izgube.

Enostavna/enojna stava je stava, v kateri igralec le enkrat stavi neko količino denarja na nek dogodek A. Sestavljena/sistemska stava je tista, v kateri igralec naredi več stav na različne dogodke. Prednost hiše bomo definirali glede na tip stave: enojna/sestavljena.

Za intuicijo pojmov iz prvih dveh odstavkov, lahko podamo naslednji primer, ki zahteva osnovno poznavanje rulete. Igralec naredi naslednjo sestavljeno stavo, ki sestoji iz 37ih stav: stavi po eno enoto denarja na vsako izmed 37 števil na običajni ruleti (z le eno ničlo). Izplačilo v primeru zmage za posamezno število je 35 proti ena. Izid take stave je jasen, igralec dobi nazaj svojo vplačilo in še 35 enot za zmagovalno število, ostalih 36 enot, ki so stavljena na neizbrana števila, pa izgubi. Čeprav je na igralno površino položenih 37 enot, je pod rizikom zgolj ena, zato je velikost stave v tem primeru 1.

3.1 PREDNOST HIŠE ENOJNE STAVE

Definirajmo enostavno oziroma enojno stavo.

Definicija 3.1. Naj bosta velikost stave (oz. zastavljena količina pod rizikom izgube) B in hazarderjev profit X skupno porazdeljeni slučajni spremenljivki. Potem je slučajni vektor (B, X) **enojna stava**.

Profit X iz definicije 3.1 je lahko pozitiven, negativen, ali pa nič. Sedaj podamo dve sprejeti definiciji za prednost hiše za enojno stavo, ki jih prevamemo iz knjige [5]. V primeru izenačenja oz. pusha v enojni stavi, se igralcu zastavljen znesek vrne. Zato ena definicija namesto velikosti stave B vključuje t.i. igralčevo **količino akcije** $B1_{\{X\neq 0\}}$.

Definicija 3.2. Naj bo (B, X) enojna stava. Zahtevamo

$$X^- \leq B, \qquad E[B] < \infty, \qquad E[B1_{\{X\neq 0\}}] > 0 \quad \text{in} \quad E[|X|] < \infty,$$

kjer je $X^- := -\min\{X, 0\}$. Prednost hiše enojne stave $H_0(B, X)$ ima v števcu igralčevo pričakovano izgubo, v imenovalcu pa pričakovano velikost stave

$$H_0(B, X) := \frac{-E[X]}{E[B]}.$$

Prednost hiše enojne stave $H(B, X)$ ima v števcu igralčevo pričakovano izgubo, v imenovalcu pa pričakovano količino akcije

$$H(B, X) := \frac{-E[X]}{E[B1_{\{X \neq 0\}}]}.$$

Prednost hiše enojne stave predstavlja dolgoročno razmerje med igralčevo skupno izgubo in skupno velikostjo stave oz. skupno količino akcije. Utemeljimo trditev. Naj bo (B, X) naša originalna enojna stava. Naj bo $(B_1, X_1), (B_2, X_2), \ldots$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih vektorjev, porazdeljenih enako kot originalna stava. Predpostavimo, da igralec n-krat ponovi originalno stavo, in definirajmo $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $T_n := B_1 + \cdots + B_n$ in $U_n := B_1 1_{\{X_1 \neq 0\}} + \cdots + B_n 1_{\{X_n \neq 0\}}$. Potem po zakonu velikih števil (glej izrek 1.98) razmerje igralčeve izgube in vsote velikosti stav po n igrah konvergira k prednosti hiše, saj

$$\frac{-(X_1 + \cdots + X_n)}{B_1 + \cdots + B_n} = \frac{-S_n/n}{T_n/n} \to \frac{-E[X]}{E[B]} \text{ s.g.}$$

in

$$\frac{-(X_1 + \cdots + X_n)}{B_1 1_{\{X_1 \neq 0\}} + \cdots + B_n 1_{\{X_n \neq 0\}}} = \frac{-S_n/n}{U_n/n} \to \frac{-E[X]}{E[B1_{\{X \neq 0\}}]} \text{ s.g.}$$

V naslednjem primeru izračunamo prednost hiše v enojni stavi z le tremi možnimi izidi: zmago, porazom in pushom. Z izračunom bomo hitro dobili prednost hiše za kar nekaj enojnih stav iz igre Craps v razdelku 3.3.

Primer 3.3 (Prednost hiše enojne stave s tremi možnimi izidi)**.** V enojnih stavah, kjer so možni zgolj trije možni izidi: zmaga, push ali poraz, lahko prednost hiše nekoliko poenostavimo. Naj bodo $p > 0$, $q > 0$ in r verjetnosti zmage, poraza in pusha v enojni stavi (velja $p + q + r = 1$). Naj bo izplačilo a proti 1 in naj bo velikost stave $B = b,\ b > 0$. Sledi $X \sim \begin{pmatrix} ab & -b & 0 \\ p & q & r \end{pmatrix}$ in $P(B = b) = 1$. Iz definicije 3.1 sledi

$$H_0(B, X) = \frac{-E[X]}{E[B]} = \frac{-abp + bq}{b} = -ap + q$$

in

$$H(B, X) = \frac{-E[X]}{E[B1_{\{X \neq 0\}}]} = \frac{-E[X]}{bP(X \neq 0)} = \frac{-abp + bq}{b(p + q)} = \frac{-ap + q}{p + q}.$$

V primeru 3.3, ima velikost stave B degenerirano porazdelitev (zavzame zgolj eno vrednost). Vidimo, da v tem primeru velikost stave ne igra vloge v prednosti hiše.

V literaturi (glej naprimer [2,5]) se pojavlja še ena definicija za prednost hiše enojne stave, ki ni odvisna od velikosti stave B, imenovana **rez**. Preden ga definiramo, poglejmo definicijo bistvenega supremuma nenegativne diskretne slučajne spremenljivke.

Definicija 3.4 (Bistveni supremum)**. Bistveni supremum** nenegativne diskretne slučajne spremenljivke X je definiran kot $\operatorname{ess\,sup}(X) := \inf\{M > 0 : P(X \leq M) = 1\}$.

Iz definicije bistvenega supremuma sledi, da ga lahko zapišemo tudi kot $\operatorname{ess\,sup}(X) = \sup\{x > 0 \mid x \in \operatorname{Im} X, P(X = x) \neq 0\}$.

Definicija 3.5 (Cut)**. Rez** enojne stave (B, X) je definiran kot

$$H_C(X) := \frac{-E[X]}{\operatorname{ess\,sup}(X^-)},$$

kjer je $X^- := -\min\{X, 0\}$.

V naslednjem primeru potegnemo analogijo s primerom 3.3, le da za izračun prednosti hiše enojne stave namesto H_0 in H uporabimo rez H_c.

Primer 3.6 (Prednost hiše enojne stave, z uporabo reza)**.** Naj bo (B, X) enojna stava, z enakimi latnostmi kot enojna stava iz primera 3.3. Velikot stave B je konstanta b in izplačilo a. Potem je $\operatorname{Im} X = \{-b, 0, ab\}$ in $\operatorname{Im} X^- = \{0, b\}$. Sledi $\operatorname{ess\,sup}(X^-) = b$ in

$$H_C(X) = \frac{-abp + bq}{b} = -ap + q.$$

Vidimo, da v enojni stavi z degenerirano porazdelitvijo B, H_C sovpada z H_0.

3.2 PREDNOST HIŠE SESTAVLJENE STAVE

3.2.1 Dvodelna sestavljena stava

Definicija 3.7. Dvodelna sestavljena stava je sestavljena iz začetne enojne stave (B, X), potem pa v primeru, da se zgodi dogodek A, se naredi še dodatna enojna stava (B', X'), kjer velja $B' = X' = 0$, če se zgodi A^C. Zapišemo jo lahko kot $(\mathbf{B}, \mathbf{X})$, kjer $\mathbf{B} := (B, B')$ in $\mathbf{X} := (X, X')$.

Definicija 3.8. Naj bo $(\mathbf{B}, \mathbf{X}) = ((B, B'), (X, X'))$ dvodelna sestavljena stava. Potem formuliramo **prednost hiše v dvodelni sestavljeni stavi, ki vključuje pushe** kot

$$H_0(\mathbf{B}, \mathbf{X}) := H_0(B + B', X + X') = \frac{-E[X + X']}{E[B + B']}.$$

Prednost hiše v dvodelni sestavljeni stavi, ki ne vključuje pushov pa kot

$$H(\mathbf{B}, \mathbf{X}) := H_0(B + B', X + X') = \frac{-E[X + X']}{E[(B + B')1_{\{X + X' \neq 0\}}]}.$$

Interpretacija prednosti hiše iz definicije 3.8 je sledeča: $H_0(\mathbf{B},\mathbf{X})$ je dolgoročno razmerje hazarderjeve izgube in njegove celotne velikosti stave $(B+B')$; $H(\mathbf{B},\mathbf{X})$ pa dolgoročno razmerje njegove izgube glede na celotno količino akcije $((B+B')1_{\{X+X'\neq 0\}})$. V knjigi [5] so predstavljene še druge različice definicij prednosti hiše, v tej nalogi smo uporabili tiste, ki se nam zdijo smiselnejše in se pogosteje uporabljajo.

3.3 PREDNOST HIŠE V STAVAH V IGRI CRAPS

V tem poglavju izračunamo prednost hiše stav v igri Craps. V naslednji seriji primerov poglejmo najprej prednost hiše enojnih stav.

Primer 3.9 (Prednost hiše v pass-line stavi)**.** Označimo s p, q in r verjetnosti zmage, poraza in pusha v pass-line stavi v tem zaporedju. Verjetnost zmage $p=\frac{244}{495}$ smo že izračunali v primeru 2.4. Pass-line stava se nikdar ne konča s pushom, lahko pa jo izgubimo. Sledi $q=1-p=\frac{251}{495}$ in $r=0$. Izplačilo v primeru zmage je 1 proti 1. Naj bo velikost stave $B=b$ za nek $b>0$. Iz primerov 3.3 in 3.6 sledi

$$H_0(B,X)=H_C(X)=-p+q=\frac{7}{495} \quad \text{in} \quad H(B,X)=\frac{-p+q}{p+q}=-p+q=\frac{7}{495}.$$

Prednost hiše v pass-line stavi iz primera 3.9 sovpada s prednostjo hiše v come bet stavi.

Primer 3.10 (Prednost hiše v don't pass-line stavi)**.** Označimo s p, q in r verjetnosti zmage, poraza in pusha v don't pass-line stavi v tem vrstnem redu. Te vrednosti smo že izračunali v primeru 2.5, kjer smo dobili $p=\frac{949}{1980}$, $q=\frac{976}{1980}$ in $r=\frac{55}{1980}$. Izplačilo je 1 proti 1. Velikost stave naj bo $B=b$, za nek $b>0$. Iz primerov 3.3 in 3.6 dobimo

$$H_0(B,X)=H_C(X)=-p+q=\frac{27}{1980} \quad \text{in} \quad H(B,X)=\frac{-p+q}{p+q}=\frac{27}{1935}.$$

Prednost hiše v don't pass-line stavi iz primera 3.10 sovpada s prednostjo hiše v don't come stavi.

V naslednjih štirih primerih izračunamo prednost hiše za pass-line oz. don't-pass-line stavi v kombinaciji z free odds stavami.

Primer 3.11 (Prednost hiše v pass-line stavi skupaj z m_4-m_5-m_6-times free odds stavo)**.** Pass-line stava (B,X) je v kombinaciji z m_4-m_5-m_6-times free odds stavo (B',X') dvodelna sestavljena stava. Free odds stave smo opisali v podrazdelku 2.5.2, kjer so v tabeli 5 zapisane verjetnosti zmage v free-odds stavi. Predpostavimo, da je velikost stave v pass-line stavi $B=1$ in da je velikost free odds stave B' maksimalna možna.

Stava m_4-m_5-m_6-times free odds postane razpoložljiva, če se zgodi dogodek $A=\{$come out met pripada množici point števil $\mathcal{P}\}$. Naj bo D rezultat come out meta.

Potem je $A = A_4 \cup A_5 \cup A_6$, kjer so $A_4 = \{D \in \{4, 10\}\}$, $A_5 = \{D \in \{5, 9\}\}$ in $A_6 = \{D \in \{6, 8\}\}$. Označimo z Z dogodek, da je točka zadeta in z M dogodek, da je točka zgrešena. Potem je $P(A_k \cap Z) = 2P(D = k)P(Z \mid D = k) = 2\pi_k \frac{\pi_k}{\pi_k+\pi_7}$ in podobno $P(A_k \cap M) = 2\pi_k \frac{\pi_7}{\pi_k+\pi_7}$ za $k \in \{4, 5, 6\}$. V primeru dogodka A^C, free odds stava ni na voljo. Vse potrebne podatke za izračun prednosti hiše prikažemo v tabeli 7.

Tabela 7: Porazdelitev dvodelne sestavljene stave: pass-line z m_4-m_5-m_6-free oddsi.

Dogodek	pass-line (B, X)	m_3-m_4-m_5-times free odds (B', X')	Verjetnost
$D \in \{7, 11\}$	$(1, 1)$	$(0, 0)$	440/1980
$D \in \{2, 3, 12\}$	$(1, -1)$	$(0, 0)$	220/1980
$A_4 \cap Z$	$(1, 1)$	$(m_4, 2m_4)$	110/1980
$A_5 \cap Z$	$(1, 1)$	$(m_5, \frac{3}{2}m_5)$	176/1980
$A_6 \cap Z$	$(1, 1)$	$(m_6, \frac{6}{5}m_6)$	250/1980
$A_4 \cap M$	$(1, -1)$	$(m_4, -m_4)$	220/1980
$A_5 \cap M$	$(1, -1)$	$(m_5, -m_5)$	264/1980
$A_6 \cap M$	$(1, -1)$	$(m_6, -m_6)$	300/1980

Pričakovan dobiček v free-odds stavi je

$$\begin{aligned}
E[X'] &= m_4\Big(2P(A_4 \cap Z) - P(A_4 \cap M)\Big) + m_5\Big(\frac{3}{2}P(A_5 \cap Z) - P(A_5 \cap M)\Big) \\
&+ m_6\Big(\frac{6}{5}P(A_4 \cap Z) - P(A_4 \cap M)\Big) \\
&= m_4\pi_4\Big(2\frac{\pi_4}{\pi_4+\pi_7} - \frac{\pi_7}{\pi_4+\pi_7}\Big) + m_5\pi_5\Big(\frac{3}{2}\frac{\pi_5}{\pi_5+\pi_7} - \frac{\pi_7}{\pi_5+\pi_7}\Big) \\
&+ m_6\pi_6\Big(\frac{6}{5}\frac{\pi_6}{\pi_6+\pi_7} - \frac{\pi_7}{\pi_6+\pi_7}\Big) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

saj je stava poštena.

Pričakovana vrednost igralčevega profita v pass-line stavi pa je

$$\begin{aligned}
E[X] &= P(\{\text{zmaga v pass-line stavi}\}) - P(\{\text{poraz v pass-line stavi}\}) \\
&= P((A_4 \cap Z) \cup (A_5 \cap Z) \cup (A_6 \cap Z) \cup (D \in \{7, 11\})) \\
&- P((A_4 \cap M) \cup (A_5 \cap M) \cup (A_6 \cap M) \cup (D \in \{2, 3, 12\})) \\
&= \sum_{k=4}^{6} P(A_k \cap Z) + P(D \in \{7, 11\}) + \sum_{k=4}^{6} P(A_k \cap M) + P(D \in \{2, 3, 12\}) \\
&= -\frac{7}{495}.
\end{aligned}$$

Imamo $E[X + X'] = E[X] + E[X'] = -\frac{7}{495}$, za prvo enakost uporabimo trditev 1.39.

Pričakovana velikost dvodelne sestavljene stave je enaka pričakovani količini akcije te stave in znaša $E[B+B'] = E[(B+B')1_{\{X+X'\neq 0\}}] = 1 + m_4P(A_4) + m_5P(A_5) + m_6P(A_6) = 1 + m_4\frac{6}{36} + m_5\frac{8}{36} + m_6\frac{10}{36}$.

Za izračun prednosti hiše pass-line stave s m_4-m_5-m_6-times free odds stavo uporabimo definicijo prednosti hiše dvodelne sestavljene stave 3.8 in dobimo

$$H_0(B+B', X+X') = H(B+B', X+X') = \frac{14}{55(18+3m_4+4m_5+5m_6)}.$$

V kazinojih je ponavadi na voljo 3-4-5-times free odds stava. V tem primeru je prednost hiše dvodelne sestavljene stave, ki jo sestavljata pass-line - (B, X) - in 3-4-5-times free odds stava - (B', X') - enaka $H_0(B+B', X+X') = H(B+B', X+X') = \frac{7}{1870}$.

Primer 3.12 (Prednost hiše v pass-line stavi skupaj z m-times free odds stavo)**.** Pass-line stava (B, X) je skupaj s m-times free odds stavo (B', X') dvodelna sestavljena stava (za opis m-times odds stave glej podrazdelek 2.5.2). Dogodki D, A, A_4, A_5, A_6, Z im M imajo enak pomen kot v primeru 7. Za izračun prednosti hiše dvodelne sestavljene stave uporabimo definicijo 3.8, potrebne informacije pa dobimo v tabeli 7 s to razliko, da konstante m_4, m_5 in m_6 zamenjamo s konstanto m.

Podobno kot v primeru 3.11 dobimo $E[X+X'] = -\frac{7}{495}$ in $E[B+B'] = E[(B+B')1_{\{X+X'\neq 0\}}] = 1 + mP(A) = 1 + \frac{2}{3}m$, prednost hiše pa znaša

$$H_0(B+B', X+X') = H(B+B', X+X') = \frac{7}{165(3+2m)}.$$

Kazinoji običajno ponudijo m-times free odds stavo za $m = 1, 2, 3$. V teh primerih prednost hiše H_0 kot tudi H v pass-line stavi skupaj z m-times free odds stavo znaša $7/825, 7/1155$ in $7/1485$.

Primer 3.13 (Prednost hiše v don't-pass-line stavi skupaj z m_4-m_5-m_6-free odds stavo)**.** Don't pass-line stava (B', X') skupaj z m_4-m_5-m_6-free odds stavo tvori dvodelno sestavljeno stavo. Naj bodo dogodki D, A, A_4, A_5, A_6, Z im M taki kot v primeru 7. Potrebne podatke za izračun prednosti hiše povzamemo v tabeli 8.

Pričakovan profit v don't-pass-line stavi je $E[X] = -\frac{3}{220}$, v free odds stavi pa $E[X'] = 0$, pričakovan profit sestavljene stave je torej $E[X+X'] = -\frac{3}{220}$. Pričakovana velikost sestavljene stave znaša $E[B+B'] = 1 + \frac{1}{3}(m_4+m_5+m_6)$, pričakovana velikost akcije pa $E[(B+B')1_{\{X+X'\neq 0\}}] = 1 \cdot 1_{\{D\neq 12\}} + 2m_4P(A_4) + \frac{3}{2}m_5P(A_5) + \frac{6}{5}m_6P(A_6) = \frac{35}{36} + \frac{1}{3}(m_4+m_5+m_6)$. Sledi, da prednost hiše znaša

$$H_0(B+B', X+X') = \frac{3}{220(1+\frac{1}{3}(m_4+m_5+m_6))} \quad \text{ali} \quad H(B+B', X+X') = \frac{3}{220(\frac{35}{36}+\frac{1}{3}(m_4+m_5+m_6))}.$$

Kazino v dvodelni sestavljeni stavi, ki sestoji iz don't-pass-line stave (B, X) in m_4-m_5-m_6-free odds stave (B', X') običajno ponudi 3-4-5-times free oddds stavo. V teh primerih je prednost hiše H_0 enaka $3/1100$, H pa je enaka $27/9845$.

Tabela 8: Porazdelitev dvodelne sestavljene stave: don't-pass-line z m_4-m_5-m_6-free oddsi.

Dogodek	don't-pass-line (B, X)	m_3-m_4-m_5-times free odds (B', X')	Verjetnost
$D \in \{7, 11\}$	$(1, -1)$	$(0, 0)$	440/1980
$D \in \{2, 3\}$	$(1, 1)$	$(0, 0)$	165/1980
$D = 12$	$(1, 0)$	$(0, 0)$	55/1980
$A_4 \cap Z$	$(1, -1)$	$(2m_4, -2m_4)$	110/1980
$A_5 \cap Z$	$(1, -1)$	$(\frac{3}{2}m_5, -\frac{3}{2}m_5)$	176/1980
$A_6 \cap Z$	$(1, -1)$	$(\frac{6}{5}m_6, -\frac{6}{5}m_6)$	250/1980
$A_4 \cap M$	$(1, 1)$	$(2m_4, m_4)$	220/1980
$A_5 \cap M$	$(1, 1)$	$(\frac{3}{2}m_5, m_5)$	264/1980
$A_6 \cap M$	$(1, 1)$	$(\frac{6}{5}m_6, m_6)$	300/1980

Primer 3.14 (Prednost hiše v don't-pass-line stavi skupaj z m-times free odds stavo)**.** Prednost hiše dobimo na enak način kot v primeru 3.13, le da konstante m_4, m_5 in m_6 iz tabele 8 zamenjamo s konstanto m. Dobimo $H_0(B+B', X+X') = \frac{3}{220(1+m)}$ oz. $H(B+B', X+X') = \frac{3}{220(35/36+m)}$.

Kazino običajno ponudi don't-pass stavo v kombinaciji z m-times free odds stavo za $m = 1, 2$ ali 3. V teh primerih je prednost hiše H_0 enaka $3/440, 1/220$ ali $3/880$. Prednost hiše H znaša $27/3905, 27/5885$ ali $27/7865$.

Primer 3.15 (Prednost hiše v fire bet stavi)**.** Fire bet stavo smo opisali v podrazdelku 2.5.6. Za velikost stave vzamimo $B = b > 0$. Sledi $E[B] = E[B1_{\{X \neq 0\}}] = b$, saj push ni možen. Označimo z a_k izplačilo na vplačano enoto v primeru zmage s k zadetimi točkami, za $k = 4, 5, 6$ in s C število zadetih točk v metalčevi roki (glej tabelo 6 za porazdelitev slučajne spremenljivke C). Potem je prednost hiše $H_0 = H = P(C \leq 3) - \sum_{k=4}^{6} a_k P(C = k)$ (sledi iz primera 3.3). V posebnem, ko so konstante $a_4 = 24$, $a_5 = 249$ in $a_6 = 999$ znaša prednost hiše $\frac{22773}{109682} = .2067275$.

Primer 3.16 (Prednost hiše v place bet stavi)**.** Place bet stavo smo že opisali v podrazdelku 2.5.3. Verjetnost zmage, poraza in pusha v place bet stavi pri izbranem point številu $t \in \mathcal{P}$ so $p = \pi_t$, $q = \pi_7$ in $r = 1 - p - q$. Pri izračunu H in H_0 uporabimo primer 3.3. Naj bo velikost stave $B = b$, $b > 0$.

Potem je izplačilo v place bet stavi z izbranim številom $t \in \{4, 10\}$, $\frac{9}{5}$, prednost hiše pa

$$H_0(B, X) = -\frac{9}{5}p + q = -\frac{9}{5}\pi_4 + \pi_7 = \frac{1}{60} \quad \text{oz.}$$

$$H(B, X) = \frac{-(9/5)p + q}{p + q} = \frac{-(9/5)\pi_4 + \pi_7}{\pi_4 + \pi_7} = \frac{1}{15}.$$

Izplačilo v place bet stavi z izbranim številom $t \in \{5, 9\}$ je $\frac{7}{5}$, prednost hiše pa je

$$H_0(B, X) = -\frac{7}{5}\pi_5 + \pi_7 = \frac{1}{90} \quad \text{oz.} \quad H(B, X) = \frac{-(9/5)\pi_4 + \pi_7}{\pi_4 + \pi_7} = \frac{1}{25}.$$

Izplačilo v place bet stavi z izbranim številom $t \in \{5, 9\}$ je $\frac{7}{5}$, prednost hiše pa je

$$H_0(B, X) = -\frac{7}{5}\pi_5 + \pi_7 = \frac{1}{216} \quad \text{oz.} \quad H(B, X) = \frac{-(9/5)\pi_4 + \pi_7}{\pi_4 + \pi_7} = \frac{1}{66}.$$

V igralniškem svetu se pogosteje pojavlja prednost hiše v place bet stavi izračunana z indeksom H, torej tistim, ki ne upošteva pushov.

Primer 3.17 (Prednost hiše v buy bet stavi)**.** Buy bet je enaka stava kot place bet, le izplačila so drugačna (glej podrazdelek 2.5.4). Vrednosti H in H_0 dobimo kot v primeru 3.3.

Prednost hiše buy bet stave s provizijo izračunamo pri upoštevanju efektivnih izplačil $(2-c):(1+c)$, $(\frac{3}{2}-c):(1+c)$ in $(\frac{6}{5}-c):(1+c)$ za stave na točke $t \in \{4, 10\}$, $t \in \{5, 9\}$ in $t \in \{6, 8\}$ v tem vrstnem redu; $c \in (0, 1)$ je provizija.

Za $t \in \{4, 10\}$ dobimo $H_0 = -\frac{2-c}{1+c}\pi_4 + \pi_7$ in $H = \frac{-\frac{2-c}{1+c}\pi_4+\pi_7}{\pi_4+\pi_7}$.
V posebnem za $c = 5\%$ dobimo $H = \frac{1}{84} \approx 1.19\%$ in $H_0 = \frac{1}{21} \approx 4.76\%$.

za $t \in \{5, 9\}$ dobimo $H_0 = -\frac{3/2-c}{1+c}\pi_5 + \pi_7$ in $H = \frac{-\frac{3/2-c}{1+c}\pi_5+\pi_7}{\pi_5+\pi_7}$.
V posebnem za $c = 5\%$ dobimo $H = \frac{5}{378} \approx 1.32\%$ in $H_0 = \frac{1}{21} \approx 4.76\%$.

za $t \in \{6, 8\}$ pa dobimo $H_0 = -\frac{6/5-c}{1+c}\pi_6 + \pi_7$ in $H = \frac{-\frac{6/5-c}{1+c}\pi_6+\pi_7}{\pi_6+\pi_7}$.
V posebnem za $c = 5\%$ dobimo $H = \frac{11}{456} \approx 1.46\%$ in $H_0 = \frac{1}{21} \approx 4.76\%$.

Prednost hiše buy bet stave s provizijo v primeru zmage izračunamo z efektivnimi izplačili $(2-c):1$, $(\frac{3}{2}-c):1$ in $(\frac{6}{5}-c):1$ za stave na točke $t \in \{4, 10\}$, $t \in \{5, 9\}$ in $t \in \{6, 8\}$ v tem vrstnem redu.

Za $t \in \{4, 10\}$ dobimo $H_0 = -(2-c)\pi_4 + \pi_7$ in $H = \frac{-(2-c)\pi_4+\pi_7}{\pi_4+\pi_7}$.
V posebnem za $c = 5\%$ dobimo $H = \frac{1}{240} \approx 0.42\%$ in $H_0 = \frac{1}{60} \approx 1.67\%$.

za $t \in \{5, 9\}$ dobimo $H_0 = -(3/2-c)\pi_5 + \pi_7$ in $H = \frac{-(3/2-c)\pi_5+\pi_7}{\pi_5+\pi_7}$.
V posebnem za $c = 5\%$ dobimo $H = \frac{1}{180} \approx 0.55\%$ in $H_0 = \frac{1}{50} = 2\%$.

za $t \in \{6, 8\}$ pa dobimo $H_0 = -(6/5-c)\pi_6 + \pi_7$ in $H = \frac{-(6/5-c)\pi_6+\pi_7}{\pi_6+\pi_7}$.
V posebnem za $c = 5\%$ dobimo $H = \frac{1}{144} \approx 0.69\%$ in $H_0 = \frac{1}{44} \approx 2.27\%$.

Primer 3.18 (Prednost hiše v lay bet stavi)**.** Naj bo c provizija. Zapišimo prednosti hiše za lay bet stave na točke iz $\mathcal{P}$. Vrednosti H in H_0 dobimo kot v primeru 3.3.
Za $t \in \{4, 10\}$ velja $H_0 = \frac{c}{24+12c}$ in $H = \frac{c}{2+c}$.
V posebnem pri $c = 5\%$ velja $H_0 = \frac{1}{492} \approx 0.20\%$ in $H = \frac{1}{41} \approx 2.44\%$,

Za $t \in \{5, 9\}$ velja $H_0 = \frac{5c}{27+18c}$ in $H = \frac{4c}{6+4c}$.

V posebnem pri $c = 5\%$ velja $H_0 = \frac{5}{588} \approx 0.85\%$ in $H = \frac{1}{31} = 3.23\%$.

Za $t \in \{6, 8\}$ velja $H_0 = \frac{55c}{216+180c}$ in $H = \frac{5c}{6+5c}$.
V posebnem pri $c = 5\%$ velja $H_0 = \frac{11}{900} \approx 1.22\%$ in $H = \frac{1}{25} = 4\%$.

4 TEORETIČNI SISTEMI ZA TRANSFORMACIJO PREDNOSTI HIŠE V PREDNOST IGRALCA

Očitno kazinoji poslujejo, ker se jim to izplača. V ta namen smo uvedli pojem prednosti hiše v poglavju 3. A če se igralnici splača obratovati, to avtomoatično pomeni, da se igralcu ne izplača hazardirati. Na tem mestu lahko citiramo Einsteina: "On se ne igra s kockami." (glej [7]). Sicer se Einsteinov citat nanaša na področje kvantne mehanike, pa vendar ga lahko apliciramo tudi na področje iger na srečo. To poglavje namenimo razmisleku o (ne)mogočih načinih/sistemih igranja igre Craps, s katerimi igralec pričakuje pozitiven izkupiček. Za prvi tak način si pogledamo sistem variablilnih stav oz. martingalov sistem. Martingalov sistem v splošnem je opisan v knjigi [5], priredimo ga za naš primer. Za drugi način pa si pogledamo teorijo kontrole kock.

4.1 MARTINGALOV SISTEM

Definicija 4.1 (Martingalov sistem)**.** Martingalov sistem je stavni sistem, v katerem igralec v zaporedju rund podvaja velikosti stav do prve zmage.

Predpostavimo, da igramo Craps tako, da so naše edine stave don't pass-line stave (glej podrazdelek 2.2.2 za opis stave). Naj bo $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ zaporedje slučajnih spremenljivk, kjer:

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{; če zmagamo don't pass line stavo v i-ti don't pass-line odločitvi,} \\ 0 & \text{; če se don't pass line stava konča s pushom v } i\text{-ti don't pass-line odločitvi,} \\ -1 & \text{; če izgubimo don't pass line stavo v i-ti don't pass-line odločitvi.} \end{cases}$$

Potem je $Z_i \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ p & r & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{949}{1980} & \frac{55}{1980} & \frac{976}{1980} \end{pmatrix}$ (glej primer 2.5 iz podrazdelka 2.2.2 za izračun verjetnosti p, q in r).

Predpostavimo, da igralec neha igrati, ko se konča metalčeva roka. Naj bo $X_1, X_2, \ldots$ zaporedje slučajnih spremenljivk, ki predstavljajo zaporedje dolžin pass-line odločitev (za njihovo definicijo glej primer 2.6). Zaradi priročnosti definirajmo še slučajni spremenljivki $X_0 := 0$ in $Z_0 := 0$. Potem je $N := \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \geq 2 \text{ in } Z_n = 1\}$ čas ustavljanja glede na filtracijo $\{(X_n, Z_n)\}_{n\geq 0}$ in velja

$$1_{\{N\leq n\}} = g((X_0, Z_0), \ldots, (X_n, Z_n)) := \begin{cases} 1 & ;\text{če } \min\{k \in \mathbb{N} \mid X_k \geq 2 \text{ in } Z_k = 1\} \leq n, \\ 0 & ;\text{ sicer} \end{cases}$$

(glej definicijo 1.81). V razdelku 2.4 smo pokazali, da velja $N \sim \text{Geom}(\frac{196}{495})$, sledi $E[N] = \frac{495}{196} < \infty$.

Definirajmo stavni sistem kot zaporedje velikosti stav $B_1, B_2, \ldots$, ki jih igralec naredi pred vsako pass-line odločitvijo. Naj bo $\{b_n\}_{n\geq 1}$ zaporedje nenaključnih funkcij, ki predstavljajo strategijo določanja velikosti stav. Potem definiramo zaporedje velikosti stav kot

$$B_1 := b_1 \geq 0 \text{ konstanta; } B_n := b_n((X_0, Z_0), \ldots, (X_{n-1}, Z_{n-1})), n \geq 2.$$

Naj bo $M_0 = c$, $c \in \mathbb{R}^+$ neka konstanta (začetni kapital namenjen igranju). Za $n \geq 0$ definirajmo slučajne spremenljivke M_n (kapital po n-ti igri) kot

$$M_n := M_0 + \sum_{k=1}^{\min\{n,N\}} B_k Z_k = M_0 + \sum_{k=1}^{n} 1_{\{N\geq k\}} B_k Z_k = M_0 + \sum_{k=1}^{n} (1 - 1_{\{N\leq k-1\}}) B_k Z_k. \tag{4.1}$$

Trditev 4.2. *Zaporedje slučajnih spremenljivk $\{M_n\}_{n\geq 0}$ iz (4.1) je supermartingal glede na filtracijo $\{(X_n, Z_n)\}_{n\geq 0}$.*

Dokaz.

$$\begin{aligned} E\big[M_{n+1} \bigm| (X_0, Z_0), \ldots, (X_n, Z_n)\big] &= E\big[M_n + (1 - 1_{\{N\leq n\}}) B_{n+1} Z_{n+1} \bigm| (X_0, Z_0), \ldots, (X_n, Z_n)\big] \\ &= M_n + E\big[B_{n+1} Z_{n+1} - 1_{\{N\leq n\}} B_{n+1} Z_{n+1} \bigm| (X_0, Z_0), \ldots, (X_n, Z_n)\big] \\ &= M_n + B_{n+1} E[Z_{n+1}] - 1_{\{N\leq n\}} B_{n+1} E[Z_{n+1}] \\ &= M_n + B_{n+1}(p - q) - 1_{\{N\leq n\}} B_{n+1}(p - q) \\ &= M_n + 1_{\{N\geq n+1\}} B_{n+1}(p - q) \\ &\leq M_n \end{aligned}$$

V zgornjem izračunu smo uporabili 2. in 3. točko izreka 1.69 in trditev 2.8. Zadnja neenakost sledi, ker je $p < q$. □

Interpretacija trditve 4.2 je, da je neodvisno od stavnega sistema zaporedje $\{M_n\}_{n\geq 0}$ supermartingal.

4.1.1 Martingalov sistem 1

Definirajmo **martingalov sistem 1** kot sistem, v katerem igralec stavi enoto v prvi pass-line odločitvi, potem pa v vsaki rundi od druge dalje podvaja stave do konca sistema. Enota je lahko igralni minimum, ki ga postavi kazino, ali kaj drugega. Torej

$$B_1 := 1, \quad B_n := 2^{n-1} 1_{\{n\leq N\}} = 2^{n-1} 1_{\bigcap_{k=1}^{n}(\{X_{k-1}=1\}\cup\{Z_{k-1}\in\{-1,0\}\})}, \quad n \geq 2.$$

Oziroma, če stavni sistem zapišemo rekurzivno, velja

$$B_n = 2B_{n-1}1_{\{X_{n-1}=1\}\cup\{Z_{n-1}\in\{-1,0\}\}}.$$

Kapital po n-ti rundi, opisuje supermartingal M_n v enačbi (4.1). Zapišimo igralčev kapital po n-ti rundi v najslebšem primeru, tj.

$$\min M_n = \begin{cases} M_0 - (1 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1}) = M_0 + 1 - 2^n & \text{, če } n+1 \leq N \\ M_0 - (1 + 2^1 + \cdots + 2^{N-2}) + 2^{N-1} = M_0 + 1 & \text{, če } n \geq N \end{cases}.$$

V najslabšem primeru torej, če igralec naredi $n \leq N$ stav in izgubi prav vse, izgubi $2^n - 1$ enot denarja. Ob koncu metalčeve roke bi v najslabšem primeru veljalo

$$P(\min M_N = M_0 + 1) = 1, \text{ oz. } P(M_N \geq M_0 + 1) = 1.$$

Na prvi pogled deluje to kot zmagovalni sistem! A temu ni tako, zaradi dveh razlogov.

1. Igralec ne more staviti tega, česar nima.

2. Kazino postavi maksimalno velikost stave M.

Trditev 4.3. *Če vpeljemo vsaj enega izmed pogojev 'igralec ne mora staviti česar nima' in 'kazino postavi maksimalno velikost stave' v martingalov sistem (4.1) opisan v tem razdelku, potem velja $E[M_N] \leq M_0$.*

Dokaz. 'Igralec ne mora staviti česar nima' pomeni, da velja pogoj: $B_n \leq M_{n-1}$ za vse $n \geq 1$. Ta pogoj je ekvivalenten pogoju $M_n \geq 0$ za vsak $n \geq 0$. Ker velja tudi $P(N < \infty) = 1$, je s tem zadoščeno prvi predpostavki izreka o optimalnem času ustavljanja 1.82; rezultat trditve sledi iz tega izreka.

'Kazino postavi maksimalno velikost stave M' pomeni, da velja $B_n \leq M$ za vsak $n \geq 1$. Sledi $E\big[|M_{n+1} - M_n| \mid (X_0, Z_0), \ldots, (X_n, Z_n)\big] \leq M$ za vsak $n \geq 0$, kjer $n+1 \leq N$. S tem je zadoščeno tretji predpostavka izreka o optimalnem času ustavljanja 1.82, rezultat trditve sledi iz tega izreka. $\square$

Primer 4.4 (Profit po n pass-line odločitvah)**.** Predpostavimo, da odigramo $n \leq N$ pass-line odločitev v našem martingalovem sistemu 1. Naj bo $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $k \leq n$ množica pass-line odločitev, v katerih dosežemo zmago. Definirajmo $i_0 = 0$.

Slika 13: Lokacije k-tih zmag v prvih n pass-line odločitvah.

Naj bo $p_W(i_j)$ igralčev profit od zmage v i_j-ti rundi, tj. $M_{i_j} - M_{i_{j-1}}$. Potem velja

$$\begin{aligned}
p_W(i_1) &= -\sum_{l=1}^{i_1-1} 2^{l-1} + 2^{i_1-1} = -2^{i_1-1} + 1 + 2^{i-1} = 1,\\
p_W(i_2) &= -\sum_{l=i_1+1}^{i_2-1} 2^{l-1} + 2^{i_2-1} = -\left(\sum_{l=1}^{i_2-1} 2^{l-1} - \sum_{j=1}^{i_1} 2^{j-1}\right) + 2^{i_2-1}\\
&= -\left(2^{i_2-1} - 1 - 2^{i_1} + 1\right) + 2^{i_2-1} = 2^{i_1},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

oz., če povzamemo, velja $p_W(i_j) = 2^{i_{j-1}}$ za $j = 1, 2, \dots, k$. Sledi

$$M_{i_j} = M_0 + \sum_{l=1}^{j} 2^{i_{l-1}} \text{ in } M_n = M_0 + \sum_{l=1}^{k} 2^{i_{l-1}} - \sum_{l=k+1}^{n} B_l \text{ za } j = 1, \dots, k.$$

Definicija 4.5 (Najslabši scenarij z in brez zmage)**. Najslabši scenarij z zmago** je, da igralec prvo zmago doseže v N-ti pass-line odločitvi. **Najslabši scenarij** je, da igralec ne zmaga v toliko rundah, da mora terminirati igralni sistem, ker za naslednjo stavo nima dovolj denarja, ali pa le ta prekorači limit kazinoja.

Primer 4.6 (Največje število rund v najslabšem scenariju z zmago)**.** Postavimo enoto $B_1 = 1$ na minimun, ki ga dovoljuje kazino in naj bo M maksimalna dovoljena stava. Najslabši scenarij z zmago (tj. igralec osvoji $\min(M_N - M_0) = 1$ enoto ob koncu igre), se lahko zgodi natanko tedaj, ko veljata pogoja, da ima igralec vsaj toliko denarja, kot ga sistem zahteva, tj. $\sum_{k=1}^{N} B_k \leq M_0$ in da največja stava ne preseže limita M, tj. $B_N \leq M$. Definirajmo

$$m_1 := \max\{N \ : \ \sum_{k=1}^{N} B_k \leq M_0\} \quad \text{in} \quad m_2 := \max\{N \ : \ B_N \leq M\},$$

iz česar dobimo

$$m_1 = \max\{N : 2^N - 1 \leq M_0\} = \lfloor \log_2(M_0 + 1) \rfloor \text{ in}$$

$$m_2 = \max\{N : 2^{N-1} \leq M\} = \lfloor \log_2 M \rfloor + 1.$$

Definirajmo $m := \min\{m_1, m_2\}$. Najslabši scenarij z zmago je dolg največ m pass-line odločitev. Če se v m pass-line odločitvah metalčeva roka ne konča, mora igralec terminirati sistem in nastopi najslabši scenarij.

Primer 4.7 (Verjetnost najslabšega scenarija z zmago)**.** Naj bo m tak, kot v primeru 4.6. Potem je iskana verjetnost enaka

$$\begin{aligned} P(\{\text{zgodi se najslabši scenarij z zmago}\}) &= P\left(\sum_{k=1}^{N} B_k \leq M_0,\ B_N \leq M\right) \\ &= P\left(2^N - 1 \leq M_0,\ 2^{N-1} \leq M\right) \\ &= P(N \leq m_1,\ N \leq m_2) \\ &= P(N \leq m) \\ &= 1 - P(Z_1 \in \{-1,0\}, \dots, Z_m \in \{-1,0\}) \\ &= 1 - (q+r)^m \\ &= 1 - \left(\frac{1031}{1980}\right)^m . \end{aligned}$$

Sicer resnejšo grožnjo, kot omejena sredstva igralcu predstavlja stavni limit M. Namreč z dostopnostjo kredita si lahko igralec zagotovi, da so njegova začetna sredstva M_0 dovolj velika, da velja $m = m_2$ (za notacije glej primer 4.6). Drugače povedano, če si igralec zagotovi začetna sredstva, ki zadostujejo, da odigra vsaj m_2 rund brez bankrota, tj. če ima $M_0 \geq 2^{m_2} - 1 = 2^{\lfloor \log_2 M \rfloor + 1} - 1$ enot merjenih v velikosti minimalne dovoljene stave v kazinoju, potem sistem ne bo zahteval stave, ki bi presegla igralčeva sredstva, preden bi moral prečkati stavni limit M.

4.1.2 Martingalov sistem 2

Definirajmo **martingalov sistem 2** kot sistem, v katerem igralec stavi enoto v prvi pass-line odločitvi. V vsaki naslednji rundi podvoji stavo, če je prejšnjo izgubil, ali ne spremeni velikosti stave, če se je prejšnja stava končala s pushom. V primeru zmage v prejšnji stavi (ki ni tudi zadnja), resetira sistem in stavi enoto. Postopek ponavlja do konca metalčeve roke. Torej

$$B_1 = 1, \quad B_n := 2B_{n-1}1_{\{Z_{n-1}=-1\}} + B_{n-1}1_{\{Z_{n-1}=0\}} + 1_{\{X_{n-1}=1, Z_{n-1}=1\}}, \quad n \geq 2.$$

Primer 4.8 (Število zmag)**.** Primer velja za martingalov sistem 1 in 2. Naj bo $M_n^{\#W}$ martingal kot (4.1) brez stavnega sistema, oz. z $B_k := 1$ za vsak k in naj velja $M_0 := 0$. Potem je $M_n^{\#W}$ razlika med številom zmag in porazov v prvih n pass-line odločitvah. Martingal $M_n^{\#W}$ zavzame vrednosti $\mathrm{Im}\{-n + 2k \mid k = 0, 1, \dots, n\}$. Vsota števila zmag in porazov je n. Število zmag je $\frac{n+M_n^{\#W}}{2}$, porazov pa $\frac{n-M_n^{\#W}}{2}$.

Primer 4.9 (Profit po n pass-line odločitvah)**.** Predpostavimo, da igralec odigra $n \leq N$ pass-line odločitev. Naj bo $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, $k \leq n$ množica vseh tistih pass-line odločitev, v katerih je dosežena zmaga. Velja $Z_j = 1$ natanko tedaj, ko $i_j \in I$. V nasprotnem velja $Z_j \in \{-1, 0\}$.

Označimo s $p_W(i_j)$ profit pridobljen z j-to zmago. Mislimo si lahko, da so $M_{i_{j-1}}$ začetna sredstva, profit iz j-te zmage pa je $M_{i_j} - M_{i_{j-1}}$. Potem velja

$$\begin{aligned} p_W(i_1) = -\sum_{l=1}^{-(Z_1+\cdots+Z_{i_1-1})} 2^{l-1} + 2^{-(Z_1+\cdots+Z_{i_1-1})} &= -2^{-(Z_1+\cdots+Z_{i_1-1})} + 1 + 2^{-(Z_1+\cdots+Z_{i_1-1})} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Podobno dobimo profite tudi za vse ostale zmagovalne pass-line odločitve,

$$p_W(i_j) = 1 \text{ za vsak } j \in I.$$

Igralčev kapital po n rundah je enak začetnemu kapitalu skupaj s profitom iz zmaganih rund (ta je enak številu zmag) in z odšteto drugo potenco na število porazov od zadnje zmage dalje, tj.

$$M_n = M_0 + \sum_{j=1}^{k} p_W(i_j) - 2^{-\sum_{m=i_k+1}^{n} Z_m} = M_0 + k - 2^{-\sum_{m=i_k+1}^{n} Z_m}.$$

V posebnem, ko je odigranih $n = N$ rund, je množica zmag $I = \{i_1, \ldots, i_{k-1}, i_k = N\}$ in velja

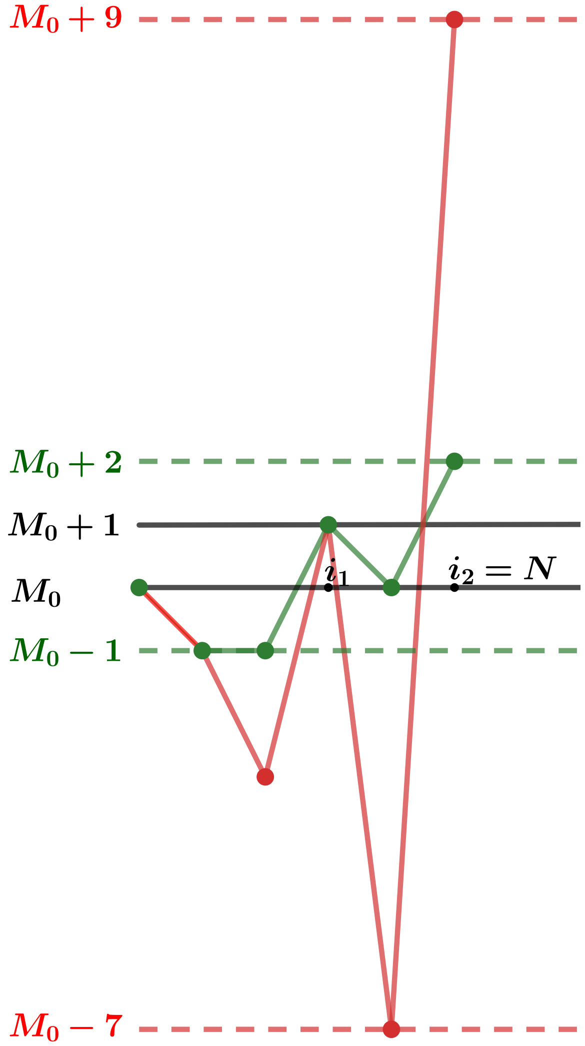
$$M_N = M_0 + k.$$

Tudi za martingalov sistem 2 velja $P(M_N \geq M_0 + 1) = 1$ in $E[M_N] \geq M_0 + 1$. A le dokler ne vpeljemo pogojev $M_n \geq 0$ in/ali $B_n \leq M$ za vsak $n \leq N$ (M je maksimalna stava). Zaradi trditve 4.3 po vpeljavi omenjenih pogojev, sistem ne deluje več.

Najslabši scenarij v martingalovem sistemu 2 je, da igralec izgubi vse runde (oz. toliko rund, da mora sistem terminirati); najslabši scenarij z zmago pa, da igralec izgubi vse runde razen zadnje, v kateri zmaga (in 7-outa). Največje število rund, ki jih igralec lahko odigra v najslabšem scenariju z zmago je enako kot v primeru 4.6 (saj v tem scenariju velja $B_k = 2B_{k-1}$ za vsak $k \geq 2$, kar je enako kot v martingalovem sistemu 1). Verjetnost najslabšega scenarija z zmago je tudi enaka kot v martingalovem sistemu 1, za izračun glej primer 4.7.

Predpostavimo, da igramo martingalov sistem 1 in martingalov sistem 2 v isti igri (tj., opazujemo isto zaporedje metov). Potem je po vsaki rundi, v kateri je dosežena zmaga kapital M_n v sistemu 1 vsaj tako velik, če ne večji, kot kapital M_n v martingalovem sistemu 2. Glavna razlika med sistemoma je ta, da v primeru, ko se ne zgodi kateri izmed najslabših scenarijev, lahko igralec v martingalovem sistemu 2 dlje vztraja v igri. Verjetnost za uspeh oz. uspešno zaključen sistem z dosego vsaj ene enote profita ob koncu sistema je zato večja v martingalovem sistemu 2.

Na sliki 14 vidimo primera obeh martingalovih sistemov v isti igri - martingal iz sistema 1 je obarvan rdeče, martingal iz sistema 2 pa zeleno. Metalčeva roka v tem



Slika 14: Primer martingalov M_n iz martingalovih sistemov 1 v rdečem in 2 v zelenem.

primeru vsebuje $N = 5$ pass-line odločitev, ki so se končale na naslednje načine: poraz, izenačenje (oz. push), zmaga v come-out metu, poraz in 7-out v tem vrstnem redu. Točki i_1 in i_2 označujeta lokaciji prve oz. druge zmage, rdeči oz. zeleni asimptoti pa maksimalno in minimalno vrednost obeh martingalov v tem primeru. Vidimo, da vrednosti martingala iz sistema 1 dosti bolj nihajo.

4.2 KONTROLA KOCK

V tem razdelku obravnavamo kontrolo kock v dveh osnovnih stavah igre Craps: pass-line in don't pass-line stavah. Realističen model kontrole kock zgradimo postopoma skozi serijo podrazdelkov, ki so povezani.

4.2.1 Model z metom nepoštenih kock

Vsaka kocka ima 3 pare nasprotnih si ploskev, katerih vsota pik je zmeraj enaka 7. Os, ki gre skozi središče nasprotnih si ploskev s številom pik 1 in 6, bomo poimenovali **os A**, os, ki gre skozi središči ploskev s številom pik 2 in 5 bomo poimenovali **os B** in os, ki gre skozi središči ploskev s številom pik 3 in 4 bomo poimenovali **os C**.

Definicija 4.10 (Nepoštene oz. pristranske kocke)**.** Naj bo $K \in \{A, B, C\}$. *Nepoštena kocka* K je nepošten objekt, tj. generira različno verjetne izide. Pike na ploskvah, ki jih seka os K, nikoli ne padejo, ostale pike pa padejo z enako verjetnostjo.

Definirajmo slučajne spremenljivke K_A, K_B, K_C kot število padlih pik na nepoštenih kockah A, B oz. C. Potem velja

$$K_A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}, K_B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ in } K_C \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Zanimajo nas porazdelitve vsote padlih pik dveh nepoštenih kock za vse možne izbire dveh nepoštenih kock. To so kombinacije nepoštenih kock iz množice $O := \{AA, AB, AC, BB, BC, CC\}$. Vsote padlih pik teh kombinacij nepoštenih kock bomo označili s $T_{AA}, T_{AB}, T_{AC}, T_{BB}, T_{BC}, T_{CC}$. Definirajmo porazdelitve teh slučajnih spremenljivk kot $\pi_t^o := P(T_o = t)$, kjer $t \in \mathcal{S}$ in $o \in O$. Porazdelitev vsote padlih pik poštenih kock π smo že definirali v poglavju 2.1. Definirajmo množico porazdelitev $\tau := \{\pi, \pi^{AA}, \pi^{AB}\, \pi^{AC}\, \pi^{BB}\, \pi^{BC}, \pi^{CC}\}$. Porazdelitve iz τ prikažemo v tabeli 9.

Tabela 9: Porazdelitev vsote padlih pik vseh možnih parov nepoštenih kock.

Porazdelitve \ $t \in \mathcal{S}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$16\pi_t^{AA}$	0	0	1	2	3	4	3	2	1	0	0
$16\pi_t^{AB}$	0	1	1	2	3	2	3	2	1	1	0
$16\pi_t^{AC}$	0	1	2	2	2	2	2	2	2	1	0
$16\pi_t^{BB}$	1	0	2	2	1	4	1	2	2	0	1
$16\pi_t^{BC}$	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1
$16\pi_t^{CC}$	1	2	1	0	2	4	2	0	1	2	1
$36\pi_t$	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

V primerih 4.11 oz. 4.13 definiramo strategijo uporabe različnih setov nepoštenih kock, ki jih bomo uporabljali v posameznih metih pass oz. don't pass-line stav. Vsakemu izmed primerov sledi primer z verjetnostjo zmage in prednostjo hiše za dotično stavo pri uporabi definirane strategije.

Primer 4.11 (Pass-line strategija)**.** Naj bo W_o dogodek, da v pass-line stavi zmagamo pri uporabi kombinacije pristranskih kock $o \in O$. Naj bo D število padlih pik v come-out metu. Naj bo X_o profit igralca pri velikost stave 1 in uporabi kombinacije kock $o \in O$. Strategijo razdelimo na dva dela

- Come out met: izberemo kombinacijo nepoštenih kock, ki maksimizira pričakovan profit v come-out metu, tj. kombinacija $o_1, o_1 \in \arg\max_{o \in O} E[X_o \mid D \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{P}] = \arg\max_{o \in O}\{(\pi_7^o + \pi_{11}^o) - (\pi_2^o + \pi_3^o + \pi_{12}^o)\}$. Optimalna izbira je kombinacija $o_1 = AA$, s pričakovanim profitom $(\pi_7^{AA} + \pi_{11}^{AA}) - (\pi_2^{AA} + \pi_3^{AA} + \pi_{12}^{AA}) = \frac{1}{4}$.

- Point meti: Če vzpostavimo neko točko $t \in \mathcal{P}$ v come-out metu, želimo izbrati tako kombinacijo kock, ki maksimizira verjetnost zmage. Tj. kombinacija o_2, kjer $o_2 \in \arg\max_{o \in O} P(W_o \mid D = t) = \arg\max_{o \in O} \frac{\pi_t^o}{\pi_t^o + \pi_7^o}$.
  - Če $t \in \{4, 10\}$, potem je optimalna izbira kombinacije nepoštenih kock $o_2 = AC$, za katero verjetnost zmage znaša $P(W_{o_2} \mid D = t) = \frac{1}{2}$.
  - Če $t \in \{5, 9\}$, potem je optimalna izbira nepoštenih kock ena izmed kombinacij: $o_2 \in \{AB, AC, BC\}$, za katero verjetnost zmage znaša $P(W_{o_2} \mid D = t) = \frac{1}{2}$.
  - Če $t \in \{6, 8\}$, potem je optimalna izbira nepoštenih kock $o_2 = AB$, za katero verjetnost zmage znaša $P(W_{o_2} \mid D = t) = \frac{3}{5}$.

Optimalna **strategija** $\mathbf{s}(\mathbf{pass} - \mathbf{line})$, bo označevala strategijo, v kateri izberemo naslednje kombinacije pristranskih kock:

- AA v come out metu,
- v vseh nadalnjih metih pass-line odločitve pa kombinacijo AC, če $D \in \{4, 10\}$ oz. kombinacijo AB, če $D \in \{5, 6, 8, 9\}$.

Primer 4.12 (Verjetnost zmage in prednost hiše v pass-line stavi pri uporabi kock A, B, C in strategiji s(pass-line))**.** Naj bo W dogodek, da zmagamo v pass-line stavi pri uporabi strategije s(pass-line). Naj bo D rezultat come-out meta. Potem je verjetnost zmage enaka

$$
\begin{aligned}
P(W) &= \sum_{t \in \mathcal{S}} P(D = t) P(W \mid D = t) \\
&= \sum_{t \in \{7,11\}} \pi_t^{AA} + \sum_{t \in \{4,10\}} \pi_t^{AA} \frac{\pi_t^{AC}}{\pi_t^{AC} + \pi_7^{AC}} + \sum_{t \in \{5,9\}} \pi_t^{AA} \frac{\pi_t^{AB}}{\pi_t^{AB} + \pi_7^{AB}} + \\
&+ \sum_{t \in \{6,8\}} \pi_t^{AA} \frac{\pi_t^{AB}}{\pi_t^{AB} + \pi_7^{AB}} = \frac{1}{4} + 2\left(\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{16} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{16} \cdot \frac{3}{5}\right) = \frac{53}{80} = 0.6625.
\end{aligned}
$$

Prednost hiše je $H = H_0 = -P(W) + (1 - P(W)) = 1 - 2P(W) = -\frac{26}{80} = -0.325$ (sledi iz primera 3.3). Negativna prednost hiše pomeni, da gre dejansko za prednost igralca. Na dolgi rok lahko s tako strategijo in uporabo nepoštenih kock pričakuje profit 0.33 enote na stavljeno enoto.

Primer 4.13 (Don't pass-line strategija)**.** Naj bo W_o dogodek, da v don't pass-line stavi zmagamo pri uporabi kombinacije nepoštenih kock $o \in O$. Naj bo D število padlih pik v come-out metu. Naj bo X_o profit igralca pri velikost stave 1 in uporabi kombinacije kock $o \in O$. Strategijo razdelimo na dva dela

- Come out met: izberemo kombinacijo pristranskih kock, ki maksimizira pričakovan profit v come-out metu, tj. kombinacija $o_1 := \arg\max_{o \in O} E[X \mid D \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{P}] = \arg\max_{o \in O}\{(\pi_2^o + \pi_3^o) - (\pi_7^o + \pi_{11}^o)\}$. Optimalna izbira je kombinacija $o_1 = BC$, s pričakovanim profitom $(\pi_2^{BC} + \pi_3^{BC}) - (\pi_7^{BC} + \pi_{11}^{BC}) = -\frac{1}{16}$.

- Point meti: če vzpostavimo neko točko $t \in \mathcal{P}$ v come-out metu, želimo izbrati tako kombinacijo nepoštenih kock iz O, ki maksimizira verjetnost zmage v don't pass-line stavi. Iščemo $o_2 := \arg\max_{o \in O} P(W_o \mid D = t) = \arg\max_{o \in O} \frac{\pi_7^o}{\pi_t^o + \pi_7^o}$.

  - Če $t \in \{4, 10\}$, potem je optimalna izbira nepoštenih kock kombinacija $o_2 = AA$ ali CC. Verjetnost zmage pri izbrani kombinaciji je $P(W_{o_2} \mid D = t) = \frac{4}{5}$.

  - Če $t \in \{5, 9\}$, potem je optimalna izbira nepoštenih kock kombinacija $o_2 = CC$. Verjetnost zmage je v tem primeru $P(W_{o_2} \mid D = t) = 1$.

  - Če $t \in \{6, 8\}$, potem je optimalna izbira kock kombinacija $o_2 = BB$. Verjetnost zmage za izbrano kombinacijo znaša $P(W_{o_2} \mid D = t) = \frac{4}{5}$.

Definirajmo (izbrano/optimalno) **strategijo s(don't pass − line)** na sledeči način

- Izberemo kombinacijo nepoštenih kock BC v come-out metu,

- V vseh nadaljnih metih izberemo kombinacijo CC, če je vzpostavljeno point število $t \in \{4, 5, 9, 10\}$ oz. kombinacijo BB, če je vzpostavljeno point število $t \in \{6, 8\}$.

Primer 4.14 (Don't pass-line verjetnost zmage in prednost hiše pri uporabi nepoštenih kock A, B, C in strategije s(don't pass-line))**.** Naj bo W dogodek, da zmagamo v don't pass-line stavi in D rezultat come-out meta. Predpostavimo, da igralec uporablja strategijo s(don't pass-line) z nepoštenimi kockami. Potem je verjetnost zmage

$$\begin{aligned}P(W) &= \sum_{t\in\mathcal{S}} P(D=t)P(W\mid D=t)\\ &= \sum_{t\in\{2,3\}} \pi_t^{BC} + \sum_{t\in\{4,10\}} \pi_t^{BC}\frac{\pi_7^{CC}}{\pi_t^{CC}+\pi_7^{CC}} + \sum_{t\in\{5,9\}} \pi_t^{BC}\frac{\pi_7^{CC}}{\pi_t^{CC}+\pi_7^{CC}} +\\ &+ \sum_{t\in\{6,8\}} \pi_t^{BC}\frac{\pi_7^{BB}}{\pi_t^{BB}+\pi_7^{BB}} = \frac{1}{8} + 2\left(\frac{1}{16}\cdot\frac{4}{5} + \frac{2}{16}\cdot 1 + \frac{2}{16}\cdot\frac{4}{5}\right) = \frac{27}{40} = 0.675.\end{aligned}$$

Naj bo T dogodek, da pride do pusha in L dogodek, da don't pass-line stavo izgubimo. Verjetnosti omenjenih dogodkov sta

$$P(T) = \pi_{12}^{BC} = \frac{1}{16} = 0.0625 \quad \text{in} \quad P(L) = 1 - P(W) - P(T) = \frac{21}{80} = 0.2625.$$

Prednost hiše je $H_0 = -P(W) + P(L) = -\frac{33}{80} = -0.4125$, oz. z neupoštevanjem pushev v velikost stave $H = \frac{-P(W)+P(L)}{P(W)+P(L)} = -\frac{33}{75} = -0.44$ (sledi iz primera 3.3). Sledi, da igralec pod predpostavkami tega primera na dolgi rok zasluži 0.4125 enote (oz. 0.44 enote z neupoštevanjem pushov) na stavljeno enoto.

4.2.2 Idealiziran model kontrole kock

V igralnici se uporabljajo poštene kocke. Metalec mora kocki upravljati zgolj z eno roko, jih vreči čez dolžino mize na način, da vsaj ena zadane navpični zid na robu mize, obložen z piramidno strukturo.

Definicija 4.15 (Kontrola meta kock)**. Kontrola meta kock** je sposobnost metalca, da pošteno kocko vrže kot nepošten objekt. To lahko stori na tri načine: pošteno kocko vrže kot kocko A, B ali kot kocko C. Podobno velja za sočasen met dveh poštenih kock, ki ju lahko metalec s sposobnostjo kontrole meta kock vrže kot poljubno kombinacijo iz množice vseh možnih izbir dveh nepoštenih kock O.

Definicija 4.16 (Nepopolno oz. delno kontroliran met kock)**. Nepopolno oz. delno kontroliran met kock** je met poštenih kock, kjer igralec pri izbrani kombinaciji kock $o \in O$ uspe kontrolirati zgolj eno izmed para kock, druga pa pade kot pošten objekt.

Definirajmo vse možne kombinacje parov delno kontroliranih kock kot $A-$, $B-$ in $C-$, kjer $K-$ pomeni, da igralec uspe kontrolirati zgolj kocko K, $K = A, B, C$, iz izbranega para kock $o = K\cdot$. Definirajmo množico vseh možnih kombinacij nepopolno kontroliranih kock kot $O^- := \{A-, B-, C-\}$. Definirajmo vsoto padlih pik para delno kontroliranih kock kot T_{K-}, porazdelitev vsote pa $\pi_t^{K-} := P(T_{K-} = t)$ za $K \in \{A, B, C\}$. Definirajmo množico $\tau^- := \{\pi_t^{A-}, \pi_t^{B-}, \pi_t^{C-}\}$. Vse porazdelitve iz τ^- prikažemo v tabeli 10.

Tabela 10: Porazdelitve padlih pik delno kontroliranih kock.

Porazdelitve \ $t \in \mathcal{S}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$24\pi_t^{A-}$	0	1	2	3	4	4	4	3	2	1	0
$24\pi_t^{B-}$	1	1	2	3	3	4	3	3	2	1	1
$24\pi_t^{C-}$	1	2	2	2	3	4	3	2	2	2	1

Definicija 4.17. Nivo kontrole kock je parameter $c \in [0,1]$, ki označuje delež uspešno kontroliranih metov izbrane kocke K, $K = A, B, C$. **Metalec z nivojem kontrole c** uspe posamezno vrženo kocko kontrolirati v $100c\%$ vseh metov.

Definirajmo verjetnost $p_t^{\gamma\delta,c}$, kjer $\gamma\delta \in O$ kot

$$\begin{aligned} p_t^{\gamma\delta,c} &:= P(\{\text{vržemo } t \text{ pik ob izbrani kombinaciji kock } \gamma\delta \text{ in nivoju kontrole } c\}) \\ &= c^2\pi_t^{\gamma\delta} + c(1-c)\pi_t^{\gamma-} + c(1-c)\pi_t^{\delta-} + (1-c)^2\pi_t. \end{aligned}$$

Sposobnost kontroliranega meta kock oz. nivo kontrole je težko izmerljiva metalčeva lastnost. Zato bomo v tej nalogi obravnavali dva pogleda na kontrolo kock: idealiziran model (v tem razdelku) in realističen model (v naslednjem). V idealiziranem pogledu, je nivo kontrole izmerljiva lastnost.

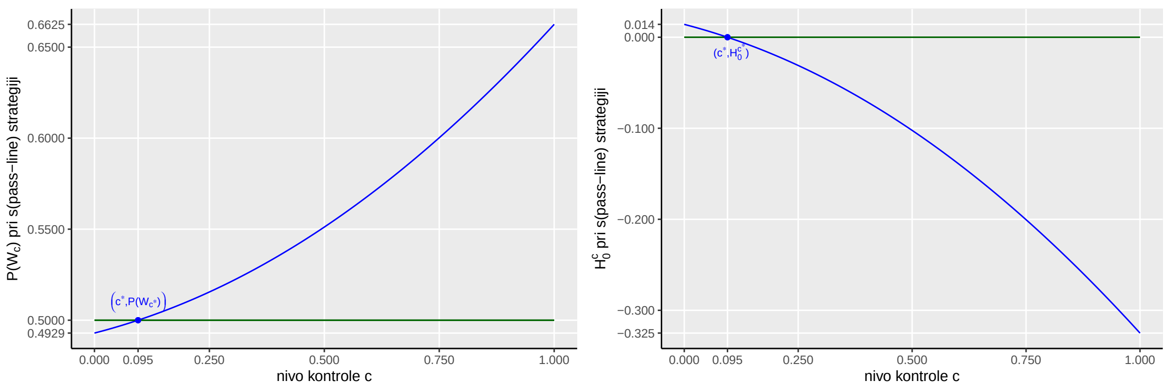
Strategiji $s(pass-line)$ in $s(don't\ pass-line)$ v tem in nadalnjih razdelkih ostajata nespremenjeni. Razlika je zgolj v temu, da metalec ne meče nepoštenih, pač pa poštene kocke. Izbrano strategijo pa poskuša izpeljati s pomočjo kontrole meta kock pri nekem nivoju kontrole. Uspešnost strategije je odvisna od nivoja kontrole kock, kar pokažemo v primerih 4.18 in 4.19.

Prednost hiše pri nivoju kontrole kock c metalca, bomo označevali H^c (brez upoštevanja pushev) oz. s H_0^c (z upoštevanjem pushev v velikost stave).

Primer 4.18 (Pass-line stava: verjetnost zmage in prednost hiše kot funkcija nivoja kontrole pri strategiji s(pass-line))**.** Naj bo c nivo kontrole kock metalca, ki igra strategijo s(pass-line). Naj bo W_c dogodek, da igralec z nivojem kontrole c zmaga v pass-line stavi in D število padlih pik v come-out metu. Potem je

$$\begin{aligned} P(W_c) &= \sum_{t\in\mathcal{S}} P(D=t)P(W_c \mid D=t) \\ &= \sum_{t\in\{7,11\}} p_t^{AA,c} + \sum_{t\in\{4,10\}} p_t^{AA,c}\frac{p_t^{AC,c}}{p_t^{AC,c}+p_7^{AC,c}} + \sum_{t\in\{5,9\}} p_t^{AA,c}\frac{p_t^{AB,c}}{p_t^{AB,c}+p_7^{AB,c}} + \\ &+ \sum_{t\in\{6,8\}} p_t^{AA,c}\frac{p_t^{AB,c}}{p_t^{AB,c}+p_7^{AB,c}}. \end{aligned}$$

Prednost hiše pa je $H^c = H_0^c = 1 - 2P(W_c)$, kar sledi iz primera 3.3. Na sliki 16 prikažemo dva grafa. Graf 15a prikazuje verjetnost zmage, graf 15b pa prednost hiše v pass-line stavi pri strategiji s(pass-line) kot funkciji nivoja kontrole kock c. Nivo kontrole, pri katerem je verjetnost zmage 50%, in pri katerem je prednost hiše enaka 0, je $c^* \approx 0.094, 856$. Pri večjih c, je verjetnost zmage večja od verjetnosti poraza, prednost hiše pa se spremeni v prednost igralca.



(a) $P(W_c)$ pri nivoju kontrole c.

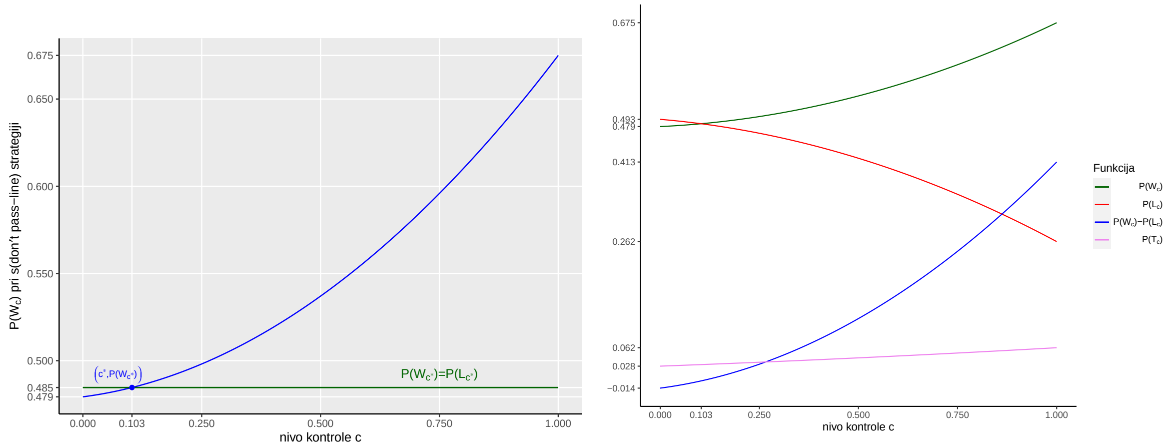
(b) $H^c = H_0^c$ pri nivoju kontrole c.

Slika 15: Verjetnost zmage (levo) in prednost hiše (desno) v pass-line stavi pri strategiji $s(pass - line)$ in nivoju kontrole c.

Primer 4.19 (Don't pass-line stava: verjetnost zmage in prednost hiše kot funkcija nivoja kontrole pri strategiji s(don't pass-line))**.** Naj bo c nivo kontrole igralca, ki igra strategijo s(don't pass-line). Naj bo W_c dogodek, da igralec zmaga v don't pass-line stavi in D število padlih pik v come-out metu. Potem je

$$\begin{aligned} P(W_c) &= \sum_{t \in \mathcal{S}} P(D = t) P(W_c \mid D = t) \\ &= \sum_{t \in \{2,3\}} p_t^{BC,c} + \sum_{t \in \{4,10\}} p_t^{BC,c} \frac{p_7^{CC,c}}{p_t^{CC,c} + p_7^{CC,c}} + \sum_{t \in \{5,9\}} p_t^{BC,c} \frac{p_7^{CC,c}}{p_t^{CC,c} + p_7^{CC,c}} + \\ &+ \sum_{t \in \{6,8\}} p_t^{BC,c} \frac{p_7^{BB,c}}{p_t^{BB,c} + p_7^{BB,c}}. \end{aligned}$$

Naj bo T_c dogodek, da pride do pusha in L_c dogodek, da igralec don't pass-line stavo izgubi, pri nivoju kontrole c. Potem sta verjetnost omenjenih dogodkov $P(T_c) = p_{12}^{BC,c}$ in $P(L_c) = 1 - P(W_c) - P(T_c)$. Na grafu 16a iz slike 16 prikažemo verjetnost zmage v don't pass-line stavi pri uporabi $s(don't\ pass - line)$ strategije. Nivo kontrole $c^* \approx 0.1032875$ označuje 'prebojno točko,' tj. točko, za katero velja $P(W_c) > P(L_c)$ za vse $c > c^*$. Na grafu 16b slike 16 pa vidimo, kako se veča razlika verjetnosti zmage in verjetnosti poraza, ko raste c. Vidimo tudi, kako narašča verjetnost pusha s c in pada verjetnost poraza.

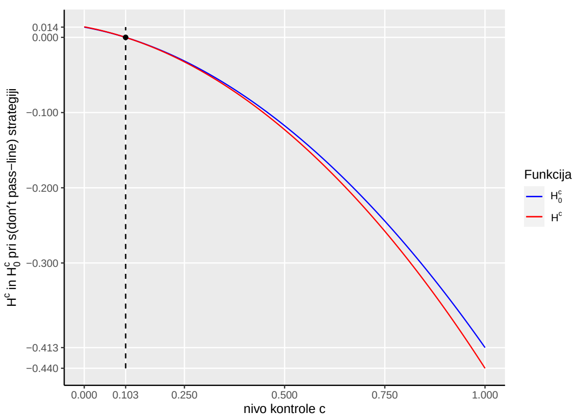


(a) $P(W_c)$ pri nivoju kontrole c.

(b) $P(W_c)$, $P(L_c)$, $P(W_c) - P(L_c)$ in $P(T_c)$ v odvisnosti od c.

Slika 16: Verjetnost zmage (levo) in nekaj ostalih verjetnosti (desno) v don't pass-line stavi pri nivoju kontrole c in uporabi $s(don't\ pass - line)$ strategije.

Prednost hiše z upoštevanjem pushov v velikost stave je $H_0^c = -P(W_c) + P(L_c)$, oz. z neupoštevanjem pushev $H^c = \frac{-P(W_c)+P(L_c)}{P(W_c)+P(L_c)}$ (sledi iz primera 3.3). Prednost hiše H^c in H_0^c prikažemo še grafično na sliki 17. Desno od nivoja kontrole c^*, se prednost hiše spremeni v prednost igralca.



Slika 17: Prednost hiše H^c in H_0^c v don't pas-line stavi pri uporabi strategije $s(don't\ pass - line)$ in nivoju kontrole c.

4.2.3 Realističen model kontrole kock

Realističen pogled na kontrolo kock je, da nivo kontole kock metalca ni izmerljiva (oz. je težko izmerljiva) lastnost.

Kontrolo poštene kocke igralec želi doseči tako, da je njena os v celotni fazi meta, tj. od vključno točke izmeta do trenutka, ko se neha gibati, tj. ko njena gibalna količina postane enaka 0, vzporedna z igralno površino. Spomnimo, os kocke gre skozi središči nasprotnih ploskev, na katerih so pike, ki se jih s kontrolo meta želimo izogniti. Če bi bili osi kock ves čas vzporedne z mizo, bi lahko z gotovostjo trdili, da smo kocke uspešno kontrolirali, in da se pike na ploskvah, ki jih seka os kocke niso pojavile zaradi veščine igralca - kontrole kock - in ne kot posledica naključja. Opazovanje takega eksperimenta bi morali posneti s kamero, ki zajema počasne posnetke in skozi celotno gibanje kocke meriti vzporednost osi kocke z igralno površino. Tega v tej nalogi ne bomo počeli.

Morda bi lahko uspešno kontrolo kock razglasili že pri nekem odstopanju osi kocke od vzporednosti. Npr., da bi dopustili maksimalen kot osi kocke z mizo, ki nebi presegel 45 stopinj v nobeni točki meta oz. gibanja kocke. V tem primeru (to velja za vse kote $<$ 90 stopinj) ploskvi, ki jih seka os kocke nebi v nobenem trenutku imeli popolnega stika s igralno površino. Tudi takih merjenj ne bomo izvajali.

Kar lahko realistično naredimo, je, da vržemo kocki z namenom kontrole in potem štejemo pojavnost 'prepovedanih' pik (tistih, ki ležijo na ploskvah, ki jih seka os kock) in 'dovoljenih' pik (tistih, ki jih ne seka os kock). Če pade 'dovoljeno' število pik na posamezni kocki, lahko to pripišemo bodisi sreči, ali pa kontroli kock. Če pade 'prepovedano' število, lahko z gotovostjo trdimo, da kocke nismo uspešno kontrolirali. Naredili bomo dva statistična testa, s katerima preverimo našo uspešnost.

Torej, metali bomo par poštenih kock in jih skušali kontrolirati kot kombinacijo nepoštenih kock AA (oz. kocki bomo nastavili tako, da sta števili 1 in 6 na strani in želimo se jim izogniti). Kocke bomo vse do vključno točke izmeta držali eno ob drugi z osmi kock A, A čim bolj vzporedno z mizo. Kocke bomo metali iz dolžine $2m$ ob pravilih iz kazinoja, ki zahtevajo, da se vsaj ena izmed para kock odbije od zida s piramidno strukturo. Kot opombo dodajmo, da ima zid pod piramidno strukturo tanek pas brez piramid, prav tako ima nekoliko širši pas brez piramid nad piramidno mrežo. Vsaka pravilna štiristrana piramida ima stranico osnovne ploskve, ki se ujema s stranico kocke, tj. 3/4 palca, oz. $19mm$. Uporabili bomo standardne kocke in standardno piramidno mrežo. Miza v kazinoju je sicer dolga 10, 12, 14 ali 16 nog (noga je $30.48cm$). Aktivni metalec pri mizi lahko stoji ob krajšem ali daljšem robu mize. Če stoji ob krajšem robu, kocko vrže čez celotno dolžino mize, če stoji ob daljšem robu, pa mora kocki vreči proti krajšemu robu, ki je od njega bolj oddaljen (torej preko polovice mize). Zato se nam dolžina meta $2m$ (minus dolžina roke, ki lahko pri metu prečka stojno razdaljo od ciljnega roba mize) zdi primerna za naš eksperiment. Naredimo statistični test, s katerim preverimo, ali smo uspeli doseči manjše število enk in šestk od pričakovanega števila enk in šestk pri metu poštenih kock brez poskusa kontrole. Naredimo tudi test, s katerem preverimo, ali smo dosegli vsaj c^* nivo kontrole, s katero bi prišli v prednost v pass-line stavi. Kocki bomo označili z L in R, da jih bomo pri metih ločili med sabo (L in R bosta v nadaljevanju predstavljali tudi slučajni spremenljivki, ki predstavljata padle pike na levi oz. desni kocki). Omenjena statistična testa naredimo v primerih

4.20 in 4.21 (H_0 se v podrazdelku 4.2.3 nanaša na ničto hipotezo in ne na prednost hiše).

Primer 4.20 (Pearsonov hi-kvadrat test skladnosti)**.** Testiramo, ali smo z meti poštenih kock, ki smo jih poskusili kontrolirati kot nepošteni kocki AA (tj. enkam in šestkam smo se skušali izogniti) pri neznanem nivoju kontrole c uspeli doseči statistično značilno razliko od rezultata, ki bi ga dobili pri metu dveh poštenih kock, brez poskusa kontrole. Za velikost vzorca vzamemo $n = 250$ metov. Zapišimo ničto in alternativno hipotezo

$$H_0 : \text{Pošteni kocki ne moremo metati kot nepošteni kocki,}$$
$$H_1 : \text{Pošteni kocki lahko mečemo kot nepošteni kocki.}$$

Za $i = 1, \ldots, n$ definiramo dogodke E_i^L oz. E_i^R kot dogodke, da v i-tem metu na levi kocki pade $L \in \{1, 6\}$ pik oz. na desni kocki pade $R \in \{1, 6\}$ pik. Potem sta indikatroski slučajni spremenljivki teh dogodkov enaki

$$1_{E_i^L} = \begin{cases} 1 & \text{če v } i\text{-tem metu pade } L \in \{1,6\}, \\ 0 & \text{če v } i\text{-tem metu pade } L \in \{2,3,4,5\} \end{cases}$$

in

$$1_{E_i^R} = \begin{cases} 1 & \text{če v } i\text{-tem metu pade } R \in \{1,6\}, \\ 0 & \text{če v } i\text{-tem metu pade } R \in \{2,3,4,5\}. \end{cases}$$

Naj bo $X_i = 1_{E_i^L} + 1_{E_i^R}$. Če je H_0 resnična, velja $X_i \sim \text{Bin}(2, \frac{1}{3})$. V n metih, sta opazovana oz. pričakovana frekvenca pojavnosti dogodkov $\{X_i = k\}$ za $k = 0, 1, 2$, O_k oz. E_k, sledeči

$$O_k := \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i = k\}} \quad \text{oz.} \quad E_k := E\left[\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i=k\}}\right] = nP(X_i = k), \quad \text{za } k = 0, 1, 2.$$

Sedaj lahko zapišemo ekvivalentno formulacijo ničelne oz. alternativne hipoteze kot H_0 : Ocenjevana porazdelitev slučajne spremenljivke X_i ustreza predpostavljeni porazdelitvi $X_i \sim \text{Bin}(2, \frac{1}{3})$ oz. H_1 : Ocenjevana porazdelitev slučajne spremenljivke X_i ne ustreza predpostavljeni porazdelitvi $X_i \sim \text{Bin}(2, \frac{1}{3})$. Rezultate našega vzorčenja (opazovane frekvence) skupaj s pričakovanimi frekvencami prikažemo v kontingenčni tabeli 11.

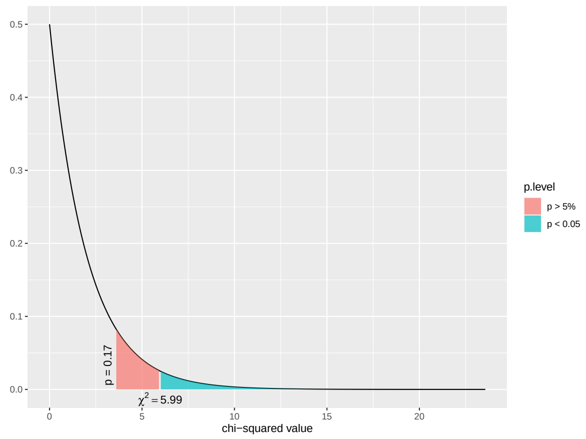
Tabela 11: Opazovane in pričakovane frekvence dogodkov $X_i = k$ pri $n = 250$ metih.

k	O_k	E_k	$\frac{(O_k-E_k)^2}{E_k}$
0	121	$111.\overline{1}$	$0.880\overline{1}$
1	95	$111.\overline{1}$	$2.336\overline{1}$
2	34	$27.\overline{7}$	$0.348\overline{4}$

Iz tabele 11 vidimo, da enka in šestka nista padli na nobeni izmed kock v 121 metih, kar je več od pričakovanega, in sta padli le na eni kocki v 95 metih, kar je manj od pričakovanega. Ta dva rezultata namigujeta na to, da smo uspeli imeti nek nivo kontrole nad kockami. Tretji rezultat, tj., enka in šestka sta padli v 34 metih, pa je večji od pričakovanega, kar ne gre v prid uspešnosti naše kontrole kock, saj smo se skušali enkam in šestkam izogniti.

Naša testna statistika je slučajna spremenljivka $\chi = \sum_{k=0}^{2} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 3.564\overline{6}$, porazdeljena kot hi-kvadrat slučajna spremenljivka z dvema prostostnima stopnjama. Število prostostnih stopenj je enako številu nivojev kategorijske oz. diskretne slučajne spremenljivke X_i minus ena, tj. $df = |\mathrm{Im} X_i| - 1 = 3 - 1 = 2$. Zapišemo $\chi \sim \chi^2(2)$. Na sliki 18 prikažemo hi-kvadrat porazdelitev z dvema prostostnima stopnjema in vrednost testne statistike, ki bi jo potrebovali za zavrnitev ničte hipoteze.

Mejno p-vrednost zavrnitve ničte hipoteze postavimo na $\alpha = 0.05$. Izračunamo p-vrednost pri naši testni statistiki, $p = P(\chi \geq 3.564\overline{6} \mid H_0) = 1 - F_\chi(3.564\overline{6}) \cong 0.168245$.



Slika 18: Dobljena in mejna vrednost testne statistike, za zavrnitev ničte hipoteze pri χ^2 porazdelitvi z dvema prostostnima stopnjama.

Čeprav je verjetnost, da dobimo tako ali bolj ekstremno (večjo) testno statistiko pri predpostavljeni ničti hipotezi relativno majhna - cca 17%, ničte hipoteze ne moremo zavrniti, saj $p > \alpha$.

S primerom 4.20 smo pokazali, da ne moremo trditi, da se naš rezultat statistično razlikuje od naključnega izida, tj. od izida, ki bi ga dobili, če bi metali kocke brez poskusa kontrole.

Glede na tak rezultat lahko sklepamo, da niti naslednji statističen test ne bo pokazal preveč optimističnih rezultatov za uporabo kontrole kock kot veščine, s katero bi igranje igre Craps iz namena zabave prelevili v igranje igre Craps z namenom zaslužka v igri.

Primer 4.21 (Binomski test za testiranje predpostavljenega nivoja kontrole)**.** Definirajmo X_i kot v primeru 4.20. Potem slučajna spremenljivka $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ označuje skupno število padlih enk in šestk. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena po binomski porazdelitvi $X \sim \mathrm{Bin}(2n, r)$, kjer $r = 1/3$ v primeru meta poštenih kock, oz. $r = \frac{1}{3}(1-c)$ pri nivoju kontrole kock c. Želimo preveriti, ali smo dosegli nivo kontrole c, ki je vsaj tako velik kot nivo kontrole $c^* \approx 0.094,856$, ki je potreben, da pridemo v prednost oz. izničimo prednost hiše v pass-line stavi (glej primer 4.18). Ničta hipoteza bo, da naš nivo kontrole znaša c^*, alternativna pa, da je naš nivo kontrole $c > c^*$, oz.

$$H_0 : r = \frac{1}{3}(1-c^*) \approx .301714591,$$
$$H_1 : r < \frac{1}{3}(1-c^*) \approx .301714591.$$

Iz vzorca naših metov smo ugotovi, da je skupno število enk in šestk znašalo $X = 163$. Izračunati moramo p-vrednost za naš test (mejno p-vredonst za zavrnitev ničte hipoteze postavimo na $\alpha = 0.05$). To je verjetnost, da se zgodi $X = 163$, ali bolj ekstremen dogodek (v smeri alternativne hipoteze), pri predpostavki, da ničta hipoteza velja; $p = P(X \leq 163 \mid H_0) = \sum_{k=1}^{163} \binom{2n}{k} r^k (1-r)^{n-k} = \sum_{k=1}^{163} \binom{500}{k} \left(\frac{1-c^*}{3}\right)^k \left(\frac{2+c^*}{3}\right)^{n-k} \approx 0.89$. Ugotovimo, da ne moremo zavrniti ničte hipoteze, saj $p > \alpha$. Zaključimo, da nismo dosegli nivoja kontrole, s katerim bi premagali prednost hiše v pass-line (in posledično tudi v don't pass-line) stavi.

Rezultat primera 4.21 je očiten, saj kljub temu, da smo uspeli doseči 163 enk in šestic, kar je manj od pričakovanih $166.\overline{6}$ v primeru $c = 0$ kontrole (tj., ko $r = 1/3$), je 163 dobljenih enk in šestic še zmeraj mnogo več od pričakovanih 150.86 enk in šestic, ki bi jih dobili pri predpostavljenem c^* nivoju kontrole, tj. pri $r \approx 0.302$. Zato ne le, da ne moremo zavrniti ničte hipoteze in sprejeti alternativne, tudi realne osnove nimamo, da bi verjeli, da ničta hipoteza drži. Veliko verjetneje je, da kock nismo uspeli kontrolirati, niti pri $c > 0$, kjer je nivo kontrole c poljubno blizu 0 (to sledi tudi iz primera 4.20, s katerim smo pokazali, da se izmerjena porazdelitev števila padlih enk in šestic v posameznem metu ni statistično značilno razlikovala od porazdelitve števila padlih enk in šestic v posameznem metu poštenih kock, brez poskusa kontrole). Če bi v primeru 4.21 postavili $H_0 : r = 1/3$ in $H_1 : r < 1/3$, bi p-vrednost znašala 0.383, kar je še vedno veliko več od α. Zato iz tega primera, kot tudi iz primera 4.20 sledi, da ne moremo trditi, da smo dosegli kakršenkoli nivo kontrole, večji od 0.

4.2.4 Craps in zlata roka

Zlata roka je naziv, ki ga pridobi metalec v igri Craps, če je v metalčevi roki vztrajal vsaj eno uro, brez 7-outa. Igralci z zlato roko, se potem zapišejo v klub igralcev z zlato roko (vsaj v nekaterih večjih ameriških kazinojih). Dve ekstremni dolžini metalčeve roke sta se zgodili v ameriških kazinojih (v Hotel Casino & Spa-ju iz Atlantic City-ja in v California Hotel and Casinoju iz Las Vegasa). Patricia De Mauro je za 156 metov potrebovala 4 ure in 18 minut, Stanley Fujikate pa je za 118 metov potreboval 3 ure in 6 minut. Na uro je to približno 36 oz. 38 metov. Verjetnosti za tako ali daljšo roko, sta $h(36) \approx 0.007$ in $h(38) \approx 0.005$. Funkcijo $h(x) = P(L \geq x)$ smo definirali v primeru 2.11 iz podrazdelka 2.4.4. Torej po grobi oceni, približno 1 na 200 metalčevih rok traja več kot eno uro, igralcu ki ta podvig uspe, pa za nagrado pridobi naziv zlate roke.

Glede na veliko število odigranih metalčevih rok, ki se dnevno odigrajo v kazinojih, lahko ugotovimo, da zlata roka ni mit, in se občasno pojavi igralec, ki mu to uspe, kot posledica nezanemarljive verjetnosti za tak dogodek. Da bi podvig zlate roke rednemu metalcu uspel hitreje kot bi mu to namenila sreča oz. verjetost pri metu poštenih kock, bi posameznik s tako željo moral znati kontrolirati kocke. Nam kontrola kock, kot smo pokazali v podrazdelku 4.2.3 ni uspela. Dopuščamo pa možnost, da obstajajo metalci, ki so bolje natrenirani od nas v tej veščini in morda lahko do neke mere kontrolirajo kocke. Zlata roka tako ni mit, kontrola kock pa je lahko mit, ali pa tudi ne.

5 ZAKLJUČEK

V nalogi smo predstavili lastnosti igre Craps. Ugotovili smo, da je pričakovana dolžina igre 8.5 metov z varianco približno 46. Mediana dolžine igre znaša 6 metov. Pričakovana dolžina posamezne podigre oz. pass-line odločitve pa znaša $3.3\overline{75}$ metov z varianco približno 9 in mediano 2.

Za igralca, ki želi igrati na način, da porabi čim manj denarja a še vedno aktivno sodeluje v igri, je optimalno, da igra le pass-line ali don't pass-line stavo z maksimalno razpoložljivo free-odds stavo. Prednost hiše - poenostavljeno gre za igralčevo pričakovano izgubo na stavljeno enoto - v pass-line stavi skupaj z 3-times free odds stavo znaša približno 0.47%, če je na voljo 3-4-5 times free odds stava, pa prednost hiše znaša pičlih 0.37%. Prednost hiše v don't pass-line stavi z 3-times free odds stavo z in brez upoštevanja pushov v velikost stave znaša približno 0.34%. Prednost hiše v don't pass-line stavi skupaj z 3-4-5-times free oddsi z in brez upoštevanja pushov v velikost stave pa znaša približno 0.27%. Torej gre za stave, z najmanšo prednostjo hiše. Igralec, ki so mu všeč bolj riskantne stave z večjimi izplačili, pa lahko izbere npr. fire bet stavo, ki ponekod izplača 24, 249 ali 999 enot za stavljeno enoto (izplačilo je odvisno od načina zmage v stavi). Gre za stavo z največjim izplačilom, a je v njej prednost hiše kar 20.6%, verjetnost zmage pa zgolj okoli 1%.

Predstavili smo dve nekoliko predelani verziji martingalovega sistema. V obeh sistemih pa podvojimo stavo po porazu v prejšnji rundi. Ugotovili smo, da sistema ne delujeta kot posledica izreka o optimalnem času ustavljanja. Gre za sistema, v katerih je verjetnost uspeha relativno velika, a je profit majhen v primerjavi z izgubo, do katere pride v primeru spodletelega sistema. Problem nastane, ko sistem zahteva stavo, ki bodisi preseže igralčeva preostala sredstva, ali ko preseže limit kazinoja. V obeh primerih se mora sistem terminirati. To se lahko zgodi po seriji zaporednih porazov. Pokazali smo, da igralec, ki začne stavljati pri eni enoti, merjeni v velikosti minimalne razpoložljive stave v kazinoju, in je kazinojev limit M enot, si z $2^{\lfloor \log_2 M \rfloor + 1} - 1$ enotami začetnega kapitala zagotovi, da igralni sistem ne bo poklical po stavi, ki presega igralčeva sredstva; kazinojevev limit pa vseeno ostaja problem.

Kontrola kock je veščina, s katero igralec teoretično lahko pride v prednost pred kazinojem. Predstavili smo teoretični model vpliva kontrole kock na verjetnost zmage in prednost hiše v pass-line in don't pass-line stavah - dveh osnovnih/obveznih stavah v igri Craps. Definirali smo optimalno strategijo oz. strategijo meta kock, pri kateri igralec z 100% nivojem kontrole kock pride do občutne prednosti - verjetnost zmage se povzpne na 66.25%, prednost hiše pa pade na -0.325 v pass-line stavi, oz. na 67.5% in -0.413 oz. -0.44 (z in brez upoštevanja pushev) v don't pass-line stavi. Mejni nivo kontrole c s katerim pridemo v prednost v pass-line stavi znaša približno 9.5% v pass-line in 10.3% v don't pass-line stavi. A ker je kontrola kock težko izmerljiva, in vprašanje, ali sploh mogoča, smo poskusili kontrolirati kocke in s hi-kvadrat testom pokazali, da nismo uspeli doseči rezultata, ki bi se statistično razlikoval od naključnega (tj. tistega, v katerem kocke ne bi poskušali kontrolirati). Zaključimo, da zlata roka, tj. naziv, ki ga dobi igralec za uro metanja brez 7-outa ni nemogoč dogodek, za veščino kontrole kock pa nismo uspeli zanikati, da gre zgolj za mit. Puščamo odprte možnosti, da obstajajo metalci z boljšo tehniko meta, ki imajo to veščino.

6 LITERATURA IN VIRI

[1] J. Bang-Jensen in G. Gutin, Semidefinite relaxations for minimum bandwidth and other vertex-ordering problems. V: Digraphs: Theory, Algorithms and Applications, *Springer London*, 2002, 1–44. *(Citirano na strani 27.)*

[2] L. E. Dubins, L. J. Savage, W. Sudderth in D. Gilat, *How to Gamble If You Must: Inequalities for Stochastic Processes.* Dover Publications, 2014. *(Citirano na strani 58.)*

[3] G. R. Grimmet in D. R. Stirzaker, *Probability and Random Processes.* Oxford University Press Inc., New York, 2001. *(Citirano na straneh 1, 2, 4, 5, 10, 15 in 24.)*

[4] S. N. Ethier in F. Hoppe, A World Record in Atlantic City and the Length of the Shooter's Hand at Craps. *The Mathematical Intelligencer* 32 (2009) 44–48. *(Citirano na strani 47.)*

[5] S. N. Ethier, *The Doctrine of Chances: Probabilistic Aspects of Gambling*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. *(Citirano na straneh 1, 3, 4, 12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 27, 32, 33, 51, 56, 58, 59 in 65.)*

[6] M. A. Pinsky in S. Karlin, *An Introduction to Stochastic Modeling (Fourth Edition).* Academic Press, Boston, 2011. *(Citirano na strani 24.)*

[7] M. Sassoli de Bianchi, Quantum dice. *Annals of Physics* 336 (2013) 56–75. *(Citirano na strani 65.)*