

UNIVERZA NA PRIMORSKEM  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN  
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Magistrsko delo

**Hitro prepoznavanje nekaterih parametričnih grafovskih  
družin**

(Fast recognition of some parametric graph families)

Ime in priimek: Nina Klobas

Študijski program: Matematične znanosti, 2. stopnja

Mentor: doc. dr. Matjaž Krnc

**Koper, september 2020**

## Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Nina KLOBAS

Naslov magistrske naloge: Hitro prepoznavanje nekaterih parametričnih grafovskih družin

Kraj: Koper

Leto: 2020

Število listov: 70

Število slik: 22

Število preglednic: 12

Število prilog: 1

Število strani prilog: 5

Število referenc: 47

Mentor: doc. dr. Matjaž Krnc

UDK: 519.17(043.2)

Ključne besede: posplošeni Petersenovi grafi,  $I$ -grafi, dvojno posplošeni Petersenovi grafi, zložene kocke, algoritem prepoznavanja grafov, ciklična regularnost

Math. Subj. Class. (2020): 05C85, 05C75

### **Izveček:**

V magistrski nalogi obravnavamo družino zloženih kock in dve posplošitvi Posplošenih Petersenovih grafov, to sta družina  $I$ -grafov ter družina dvojno posplošenih Petersenovih grafov. Natančno si ogledamo njihovo ciklično strukturo zloženih kock in definiramo vse  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularne dvojno posplošene Petersenove in  $I$ -grafe. Dobljene rezultate nato uporabimo za konstrukcijo linearnih algoritmov, ki prepoznajo te družine.

## Key document information

Name and SURNAME: Nina KLOBAS

Title of Master's thesis: Fast recognition of some parametric graph families

Place: Koper

Year: 2020

Number of pages: 70

Number of figures: 22

Number of tables: 12

Number of appendices: 1

Number of appendix pages: 5

Number of references: 47

Mentor: Assist. Prof. Matjaž Krnc, PhD

UDC: 519.17(043.2)

Keywords: generalized Petersen graphs,  $I$ -graphs, double generalized Petersen graphs, folded cubes, recognition algorithm, cycle regularity

Math. Subj. Class. (2020): 05C85, 05C75

### **Abstract:**

In this master's thesis we study three graph families. One is the family of folded cubes and the other two represent a generalization of generalized Petersen graphs, i.e. the family of  $I$ -graphs and double generalized Petersen graphs. We take a close look at the cyclic structure of folded cubes and define all  $[1, \lambda, 8]$ -cyclic regular double generalized Petersen graphs and  $I$ -graphs. These results are then used to construct linear time recognition algorithms of mentioned graph families.

## Zahvala

Najprej bi se rada zahvalila svojemu mentorju, doc. dr. Matjažu Krncu, za ves trud, ki ga je vložil v nastajanje tega dela, za vse dolge pogovore in razprave, ki sva jih imela v zadnjem letu, predvsem pa za ves čas, ki si ga je vzel zame.

Iskreno sem hvaležna tudi prof. dr. Štefku Miklaviču ter prof. dr. Tomažu Pisan-skemu, za konstruktivne diskusije ki so prispevale k izbolšanju tega dela. Zahvaljujem se tudi doc. dr. Ninotu Bašiču za vso dodatno pomoč pri izdelavi magistrske naloge.

Velika zahvala gre tudi vsem profesorjem in zaposlenim na FAMNIT-u. Hvala za vso prijaznost, potrpežljivost, predvsem pa za tako prijetno vzdušje, ki ga ustvarjate.

Zahvala gre tudi moji družini in prijateljem, ki so me podpirali v vseh letih mojega študija in so nemalokrat bili žrtve mojih matematičnih predavanj.

Last but not least I would like to thank all of my non-slovene speaking friends. Especially ones from G8G office, thank you for the hospitality and countless nights filled with discussions.

# Kazalo vsebine

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
1.1	Naš problem . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Osnovne definicije</b>	<b>5</b>
2.1	Grafi . . . . .	5
2.2	Algoritmi . . . . .	8
<b>3</b>	<b><i>I</i>-grafi</b>	<b>10</b>
3.1	Ekvivalentni 8-cikli . . . . .	11
3.2	Karakterizacija neekvivalentnih 8-ciklov . . . . .	12
3.2.1	8-cikli s 4 špicami . . . . .	13
3.2.2	8-cikli brez špic . . . . .	13
3.2.3	8-cikli z 1 povezavo na zunanjem oz. notranjem obroču . . . . .	14
3.2.4	8-cikli z 2 povezavama na zunanjem oz. notranjem obroču . . . . .	14
3.2.5	8-cikli s 3 povezavami na zunanjem oz. notranjem obroču . . . . .	14
3.3	Konstantna osemkotna vrednost grafa . . . . .	15
3.3.1	Obstoj ciklov $C_0$ in $C_7$ . . . . .	16
3.3.2	Obstoj ciklov $C_0$ , $C_1$ in $C_2$ . . . . .	16
3.3.3	Obstoj ciklov $C_3$ , $C_4$ in $C^*$ . . . . .	17
3.3.4	Obstoj ciklov $C_5$ , $C_6$ in $C^*$ . . . . .	17
3.3.5	<i>I</i> -grafi brez 8-ciklov . . . . .	17
3.4	Prepoznavna <i>I</i> -grafov . . . . .	18
3.4.1	Algoritem in njegova analiza . . . . .	19
3.4.2	Določitev natančnega izomorfizma z <i>I</i> -grafi . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Dvojno splošeni Petersenovi grafi</b>	<b>23</b>
4.1	Ekvivalentni 8-cikli . . . . .	25
4.2	Karakterizacija neekvivalentnih 8-ciklov . . . . .	26
4.2.1	8-cikli s 4 špicami . . . . .	26
4.2.2	8-cikli brez špic . . . . .	27
4.2.3	8-cikli z 2 špicama . . . . .	28

4.3	Konstantna osemkotna vrednost . . . . .	28
4.4	Prepoznavna dvojno posplošenih Petersenovih grafov . . . . .	30
4.4.1	Analiza algoritma prepoznavne . . . . .	30
4.4.2	Določitev natančnega izomorfizma z dvojno posplošenimi Petersenovimi grafi . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Zložene kocke</b>	<b>33</b>
5.1	Ciklična struktura zloženih kock . . . . .	34
5.1.1	4-cikli . . . . .	35
5.1.2	6-cikli . . . . .	35
5.2	Prepoznavna zloženih kock . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Nadaljnje delo</b>	<b>47</b>
6.1	Johnsonovi grafi . . . . .	47
6.2	Rozetni grafi . . . . .	48
6.3	Tabačjn grafi . . . . .	49
<b>7</b>	<b>Zaključek</b>	<b>51</b>
<b>8</b>	<b>Literatura in viri</b>	<b>52</b>

# Kazalo preglednic

1	Vsi neekvivalentni 8-cikli v $I$ -grafih skupaj z njihovimi pogoji za obstoj.	15
2	Prispevek 8-ciklov k oksemkotni vrednosti grafa in število ekvivalentnih 8-ciklov v $I$ -grafih. . . . .	15
3	$I$ -grafi, ki premorejo cikle $C_3, C_4$ in $C^*$ . . . . .	17
4	$I$ -grafi, ki premorejo cikle $C_5, C_6$ in $C^*$ . . . . .	17
5	Vsi $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularni $I$ -grafi, vrednost $\lambda$ in njihova imena. . . . .	18
6	Prispevek 8-ciklov k oksemkotni vrednosti grafa in število ekvivalentnih 8-ciklov v DP grafih. . . . .	28
7	Vsi neekvivalentni 8-cikli v DP grafih. . . . .	28
8	DP grafi, ki premorejo cikle $C_4, C_5$ in $C^*$ . . . . .	29
9	Vsi neekvivalentni 6-cikli grafov $FQ_n$ ( $n \notin \{4, 6\}$ ), ki se začnejo s povezavo 1. . . . .	38
10	Vsi neekvivalentni 6-cikli grafov $FQ_n$ ( $n \notin \{4, 6\}$ ), ki se začnejo s povezavo $d^*$ . . . . .	40
11	Vsi neekvivalentni 6-cikli v grafu $FQ_n$ ( $n \neq 6$ ), ki se začnejo s potjo $p = (1, 2)$ . . . . .	42
12	Vsi neekvivalentni 6-cikli grafov $FQ_n$ ( $n \notin \{4, 6\}$ ), ki se začnejo s potjo $p = (1, d^*)$ . . . . .	43

# Kazalo slik

1	$I$ -graf $I(9, 2, 3)$ , dvojno posplošen Petersenov graf $DP(6, 1)$ in zložena kocka $FQ_4$ . . . . .	2
2	Vsi 8-cikli 5-prizme. . . . .	7
3	Primer posplošenega Petersenovega grafa $G(11, 3)$ . . . . .	7
4	Primer $I$ -grafa $I(12, 2, 3)$ . . . . .	10
5	Primer neekvivalentnih 8-ciklov v $I$ -grafih. . . . .	12
6	Vsi $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularni $I$ -grafi. . . . .	19
7	Proces, kako določimo cikel v algoritmu 3 (glej vrstico 5). . . . .	22
8	Primer dvojno posplošenega Petersenovega grafa $DP(6, 2)$ . . . . .	24
9	Izomorfna grafa $DP(7, 2)$ in $G(14, 3)$ . . . . .	24
10	Izomorfna grafa $DP(10, 2)$ in $DP(10, 3)$ . . . . .	25
11	Primer vseh neekvivalentnih 8-ciklov v DP grafih. . . . .	27
12	Vsi $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularni DP grafi. . . . .	29
13	Proces, kako določimo imena vozlišč v algoritmu za DP grafe. . . . .	31
14	Primer zložene kocke $FQ_4$ . . . . .	33
15	Primer 4-cikla $(1, 3, 2, d)$ v grafu $FQ_4$ . . . . .	34
16	Primer vseh neekvivalentnih 6-ciklov grafov $FQ_n$ ( $n \notin \{3, 5\}$ ), ki se začnejo s povezavo 1. . . . .	37
17	Primer vseh neekvivalentnih 6-ciklov grafov $FQ_n$ ( $n \notin \{4, 6\}$ ), ki se začnejo s povezavo $d^*$ . . . . .	39
18	Primer vseh neekvivalentnih 6-ciklov grafov $FQ_n$ ( $n \neq 6$ ), ki se začnejo s potjo $p = (1, 2)$ . . . . .	41
19	Primer vseh neekvivalentnih 6-ciklov grafov $FQ_n$ ( $n \notin \{4, 6\}$ ), ki se začnejo s potjo $p = (1, d^*)$ . . . . .	42
20	Primer Johnsonovega grafa $J(5, 4)$ . . . . .	47
21	Primer rozetnega grafa $R_{10}(2, 3)$ . . . . .	48
22	Primer Tabačjn grafa $T(10; 2; 6; 3)$ . . . . .	49



# Kazalo prilog

Algoritmi za konstrukcijo grafov

## Seznam kratic

$\gcd(k_1, \dots, k_n)$	največji skupni delitelj števil $k_1, \dots, k_n$
$G(n, k)$	posplošen Petersenov graf definiran s parametri $n$ in $k$
$I(n, j, k)$	$I$ -graf definiran s parametri $n, j$ in $k$
$DP(n, k)$	dvojno posplošen Petersenov graf definiran s parametri $n$ in $k$
$FQ_n$	zložena kocka dimenzije $n$
$\sigma$	osemkotna vrednost

# 1 Uvod

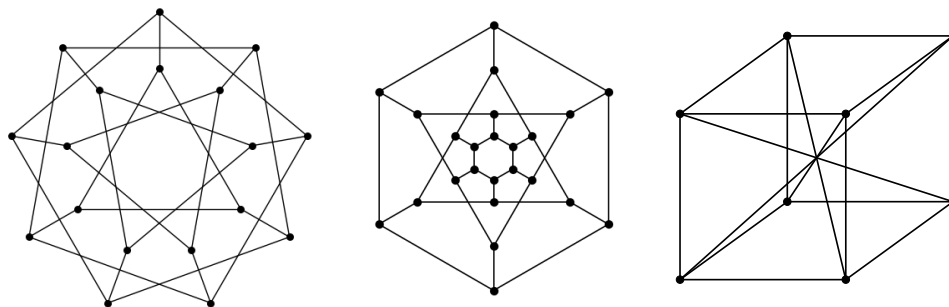
*Posplošene Petersenove grafe* je leta 1950 predstavil Coxeter [13] in jih 19 let kasneje poimenoval Watkins [43]. Predstavljajo družino kubičnih grafov, kjer vozlišča pravilnega mnogokotnika povežemo z vozlišči zvezdnega mnogokotnika. Preprostost opisa teh grafov in seznam številnih lepih lastnosti, predstavljajo velik razlog, zakaj je družina posplošenih Petersenovih grafov tako privlačna za raziskovanje. Znanih je veliko zanimivih rezultatov, med njimi so: hamiltonskost [2,4,11] in hipohalmitonskost posplošenih Petersenovih grafov [7], karakterizacija tistih, ki so ob enem tudi Cayleyevi [33,36] ali delne kocke [24] in določanje njihove grupe avtomorfizmov [17], iskanje izomorfni grafov [37]. Veliko dodatnih lastnosti je dokazanih v [12,21]. V tem delu se bomo posvetili dvema različnima posplošitvama družine posplošenih Petersenovih grafov; to sta družina *I-grafov* in družina *dvojno posplošenih Petersenovih grafov*, ki ju zdaj na kratko predstavimo.

*I*-grafi so kubični grafi, kjer imamo povezave med istoležnimi vozlišči dveh zvezdnih mnogokotnikotnikov (glej definicijo 3.1). Prvič so bili predstavljeni leta 1988 v Fosterjevemu popisu vseh kubičnih simetričnih grafov [16]. Za to družino je dokazanih kar nekaj lastnosti, med drugim so leta 2005 Boben idr. [6] preučili, kdaj so *I*-grafi povezani, kakšna je njihava ožina, ali so dvodelni, točkovno tranzitivni in navedli nekaj konfiguracij, ki jih porodijo dvodelni *I*-grafi. Leta 2012 so Horvat idr. [22] predstavili potrebne in zadostne pogoje, kdaj sta dva različna *I*-grafa izomorfna.

Dvojni posplošeni Petersenovi grafi so, kakor že samo ime pove, sestavljeni iz dveh kopij istega posplošenega Petersenovega grafa, kjer vozlišča, ki sestavljajo prvi zvezdni mnogokotnik, povežemo z vozlišči drugega zvezdnega mnogokotnika (glej definicijo 4.1). Koncept te družine je bil predstavljen leta 2012 s strani Zhoua in Fenga [46]. Leta 2016 sta Kutnar in Petecki [31] karakterizirala grupo avtomorfizmov dvojnih posplošenih Petersenovih grafov in preučila njihovo hamiltonskost ter točkovno in povezavno obarvanost.

Poleg omenjenih grafovskih družin obravnavamo tudi *zložene kocke*, ki jih dobimo z identificiranjem antipodnih vozlišč hiperkock. Zložene kocke nekateri avtorji, glej npr. [34,45], pripisujejo El-Amawyu in Latifiju [32], ki sta uporabila njihovo strukturo za razvoj učinkovitega algoritma usmerjevalnikov za oddajanje, čeprav so bile uporabljene že npr. s strani Brouwerja [9] in Terwilligerja [41], ki sta jih preučevala zaradi njihove

razdaljne regularnosti. Ti grafi so bili deležni številnih raziskav povezanih z njihovo ciklično strukturo [45], hamiltonsko povezanostjo [23], analizo grupe avtomorfizmov in simetrij [34], itn. Pri analizi njihove grupe avtomorfizmov je potrebno poudariti, da je bila karakterizacija opravljena že s strani Brouwerja idr. [10, str. 265].



Slika 1:  $I$ -graf  $I(9, 2, 3)$ , dvojno posplošen Petersenov graf  $DP(6, 1)$  in zložena kocka  $FQ_4$ .

## 1.1 Naš problem

V teoriji grafov se velikokrat srečamo s problemom prepoznavanja grafov. To pa pomeni, da želimo imeti algoritem, ki kot vhod prejme poljuben graf in določi, če je ta član določene družine ali ne. V splošnem je problem prepoznavanja lahko zelo zahteven. Poznamo primere družin, kjer sodi prepoznavanje kar v  $\mathcal{NP}$ -težke probleme, kot na primer pri družini grafov enotskih diskov [8], trodelinih grafov [18], koordinatnih grafov [40], nitnih grafov [28], ključnih grafov [1] itn. Za posplošene Petersenove grafe sta Krnc in Wilson [29] uvedla algoritem, ki s pomočjo štetja 8-ciklov prepozna te grafe v linearnem času. Z raširitvijo njunega pristopa smo dokazali naslednje rezultate.

**Posledica 3.6.**  *$I$ -grafe lahko prepoznamo v linearnem času.*

**Posledica 4.8.** *Dvojno posplošene Petersenove grafe lahko prepoznamo v linearnem času.*

**Posledica 5.10.** *Grafe zloženih kock lahko prepoznamo v linearnem času.*

Ključna ideja za tako hitro prepoznavanje se nahaja v razumevanju ciklične strukture opazovane grafovske družine, zato se bomo v delu magistrske naloge posvetili prav tej tematiki. Razumevanje strukture ciklov (ali anticiklov) v danem grafu je v osnovi povezano z družinami grafov, kot so drevesa, popolni grafi, dvodelni grafi, (šibko) tektivni grafi, panciklični grafi in mnogi drugi. Posebno močna lastnost cikla je pojem

*ciklična regularnost*, ki ga je uvedel Mollard [35] in je bil uporabljen za boljše razumevanje strukture nekaterih družin grafov, kot so hiperkocke ali posplošeni Petersenovi grafi.

V magistrski nalogi predstavimo algoritme za prepoznavo treh grafovskih družin, ki uporabijo pristop analize ciklov. Prva dva s pomočjo preštevanja 8-ciklov v linearnem času določita, če je vhodni graf član družine  $I$ -grafov oz. dvojno posplošenih Petersenovih grafov, zadnji pa z uporabo strukturnih lastnosti 4-ciklov v linearnem času določi pripradnost družini zloženih kock. Obstoj prvih dveh algoritmov nam zagotavljajo naslendnji rezultati.

**Izrek 3.5.** *Poljuben  $I$ -graf je  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularen le v primeru, ko je izomorfen grafu  $I(n, j, k)$ , kjer je  $j = 1$  in*

$$(n, k) \in \{(3, 1), (4, 1), (5, 2), (8, 3), (10, 2), (10, 3), (12, 5), (13, 5), (24, 5), (26, 5)\}.$$

**Izrek 4.7.** *Poljuben dvojno posplošen Petersenov graf je  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularen le v primerih, ko je izomorfen grafu  $DP(n, k)$ , kjer je  $(n, k) \in \{(5, 2), (10, 2)\}$ .*

Ob temeljiti študiji ciklov zloženih kock smo dobili naslednje rezultate.

**Izrek 5.5.** *Zloženi kocki  $FQ_2$  in  $FQ_4$  sta  $[1, 0, 4]$  in  $[1, 9, 4]$ -ciklično regularni. Vse ostale zložene kocke  $FQ_n$  so  $[1, n - 1, 4]$ -ciklično regularne.*

**Izrek 5.8.** *Zloženi kocki  $FQ_4$  in  $FQ_6$  sta  $[1, 36, 6]$  in  $[1, 200, 6]$ -ciklično regularni. Vse ostale zložene kocke  $FQ_n$  so  $[1, 4(n - 2)(n - 1), 6]$ -ciklično regularne.*

**Izrek 5.9.** *Zložena kocka  $FQ_4$  ni  $[2, \lambda, 6]$ -ciklično regularna. Zložena kocka  $FQ_6$  je  $[2, 2, 6]$ -ciklično regularna. Vse ostale zložene kocke  $FQ_n$  so  $[2, 4(n - 2), 6]$ -ciklično regularne.*

## Risanje grafov

Vse slike uporabljene v magistrski nalogi smo narisali sami. Večina slik je bila narejenih na algoritmični način, z orodjem SageMath, nekatere pa so bile narisane ročno, s pomočjo orodja IPE. Izvorno kodo orodja SageMath smo dopolnili s funkcijami za risanje družin  $I$ -grafov, dvojno posplošenih Petersenovih grafov, Rozetnih grafov in Tabačjn grafov, tako da lahko do teh funkcij sedaj dostopajo vsi uporabniki okolja SageMath. Vso kodo prilagamo tudi kot dodatek k tej magistrski nalogi.

## Povezane objave

Vsi rezultati, ki jih obravnavamo v tej magistrski nalogi, so povzeti v naslednjem članku.

- [25] KLOBAS, N. IN KRNC, M. Fast recognition of some parametric graph families. *arXiv e-prints* (Avg. 2020), arXiv:2008.08856

## 2 Osnovne definicije

V tem poglavju bodo navedene osnovne definicije in izreki, ki jih potrebujemo za razumevanje magistrske naloge.

### 2.1 Grafi

*Graf*  $G$  je urejen par  $(V, E)$ , ki ga sestavljata množica vozlišč  $V(G) = V$  in množica povezav  $E(G) = E \subseteq V \times V$ . Vozlišči  $u, v \in V$  sta sosednji, če obstaja povezava  $e = \{u, v\} \in E$ . Vozliščema  $u, v$  pravimo tudi krajišči povezave  $e$ . Za zapis povezave  $\{u, v\} \in E$  bomo uporabljali  $uv$ .

Za graf pravimo, da je *usmerjen* natanko tedaj, ko sta povezavi  $uv$  in  $vu$  različni. V tem primeru je  $E = uv$  lok, usmerjen od  $u$  proti  $v$ . Graf je *neusmerjen*, če in samo če vrstni red zapisa povezave ni pomemben, torej je  $uv = vu$ . Povezavi z enakima krajiščima pravimo *zanka*. Vzporedne povezave so povezave, ki imajo isti par krajišč. Za graf pravimo, da je *enostaven*, če ne vsebuje vzporednih povezav in zank. Če sta množici  $V$  in  $E$  končni, je tudi graf *končen*. V nalogi privzamemo, da so vsi grafi neusmerjeni, končni in enostavni.

*Stopnja točke*  $v$  je število sosedov  $v$ , oz. število povezav iz  $E$ , ki vsebujejo točko  $v$ . Grafu, kjer imajo vse točke stopnjo  $k$  pravimo  *$k$ -regularen graf*. Grafu, ki je 3-regularen pravimo tudi *kubičen graf*.

Naj bo  $G(V, E)$  graf in  $v_1, \dots, v_n$  vozlišča iz množice  $V$ . Zaporedje vozlišč  $s = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ , kjer sta vozlišči  $v_i$  in  $v_{i+1}$  sosednji za vse  $1 \leq i < n$ , imenujemo *sprehod dolžine  $n$*  na grafu  $G$ . Če so vsa vozlišča paroma različna, je  $s$  *pot dolžine  $n$*  in jo označimo s  $P_n$ . V primeru, da sta v sprehodu enaka le prvo in zadnje vozlišče, torej  $v_0 = v_n$ , imamo *cikel dolžine  $n$* ,  $C_n$ . Za graf pravimo, da je *povezan*, če lahko za vsak par točk najdemo pot, ki poteka skozi obe točki. *Razdalja* med vozliščema  $u, v$  v grafu  $G$ , zapisana z  $d_G(u, v)$  oz. krajše  $d(u, v)$ , je dolžina najkrajše poti, ki začne v vozlišču  $u$  in konča v  $v$ . V primeru, da taka pot ne obstaja, pravimo, da je razdalja med točkama  $u, v$  neskončna.

*Povezavni graf*  $L(G)$  grafa  $G$  je enostaven graf, čigar množico vozlišč predstavljajo povezave grafa  $G$  in velja, da je  $ef \in E(L(G))$ , če in samo če imata  $e$  in  $f$  skupno krajišče v  $G$ . Z  $N_k(v)$  označimo  *$k$ -to sosesčino* točke  $v$  grafa  $G$ , ki je definirana na

naslednji način

$$N_k(v) = \{w \in V(G) : d_G(v, w) = k\}.$$

V primeru, ko je  $k = 1$  indeks iz notacije izpustimo in zapišemo le kot  $N(v)$ . Za povezavo  $e \in E(G)$  definiramo  $k$ -to sosesčino kot

$$N_k(e) = \{f \in E(G) : d_{L(G)}(e, f) = k\}.$$

Za grafa  $G = (V_1, E_1)$  in  $H = (V_2, E_2)$  pravimo, da sta *izomorfna* (označimo z  $G \cong H$ ), če obstaja takšna bijektivna funkcija  $f : V_1 \rightarrow V_2$ , za katero velja  $(u, v) \in E_1$ , če in samo če  $(f(u), f(v)) \in E_2$ , za vsa vozlišča  $u, v \in V_1$ .

*Podgraf*  $H$  grafa  $G$ , označimo z  $H \subseteq G$ , je graf, za katerega je  $V(H) \subseteq V(G)$  in  $E(H) \subseteq E(G)$ .  $H$  je *induciran* podgraf grafa  $G$ , če je  $H \subseteq G$  in če za vsako povezavo  $e = uv \in E(H)$  velja, da je  $e \in E(G)$ . Če je  $U = V(H)$  pravimo, da je  $H$  induciran na množici točk  $U$  in označimo z  $G[U]$ . Naj bo  $W \subseteq E(G)$  množica povezav in  $U$  množica vozlišč, ki predstavljajo krajišča povezav iz  $W$ . Potem je graf induciran na množici povezav  $W$ ,  $G[W]$ , enak grafu induciranemu na množici vozlišč  $U$ .

Naj bo  $G$  enostaven graf. Množica povezav  $M$  grafa  $G$  je *prirejanje*, če povezave iz  $M$  nimajo skupnih krajišč. Prirejanje je *popolno*, če je vsako vozlišče grafa  $G$  krajišče natanko ene povezave iz  $M$ .

**Definicija 2.1** (Mollard [35]). Za cela števila  $l, \lambda, m > 0$  pravimo, da je graf  $[l, \lambda, m]$ -ciklično regularen, če vsaka pot dolžine  $l$  pripada natanko  $\lambda$  različnim ciklom dolžine  $m$ .

Za vajo pokažemo naslednjo trditev.

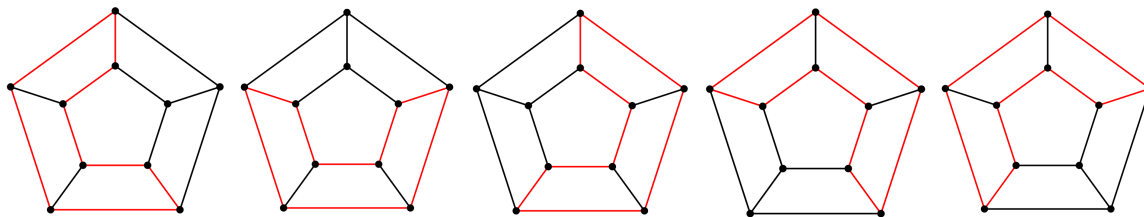
**Trditev 2.2.** Vsak  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularen kubičen graf je tudi  $[0, 3\lambda/2, 8]$ -ciklično regularen. Obrat ne drži.

*Dokaz.* Naj bo  $G$  poljuben  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularen kubičen graf. Vzemimo poljubno vozlišče  $v \in V(G)$ . Ker je  $G$  kubičen, ima  $v$  tri sosednja vozlišča, torej obstajajo tri povezave s krajiščem  $v$ . Ker vsaka povezava leži v  $\lambda$  različnih 8-ciklih, lahko hitro preverimo, da je vozlišče  $v$  vsebovano v  $3\lambda/2$  različnih 8-ciklih.

Da obrat ne drži, se lahko prepričamo na primeru grafa 5-prizme, glej sliko 2. Vsako vozlišče tega grafa leži v štirih 8-ciklih, med tem ko so povezave v treh ali dveh različnih 8-ciklih.  $\square$

**Definicija 2.3** (Osemkotna vrednost). Naj bo  $G$  poljuben graf. Preslikava  $\sigma : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$  vsaki povezavi iz grafa predpiše vrednost  $\sigma(e)$ , ki predstavlja število različnih 8-ciklov, v katerih leži povezava  $e$ . Vrednosti  $\sigma(e)$  pravimo *osemkotna vrednost* povezave  $e$ . Graf  $G$  ima *konstantno osemkotno vrednost*, če  $\sigma$  predstavlja konstantno funkcijo.





Slika 2: Vsi 8-cikli 5-prizme.

## Posplošeni Petersenovi grafi

Posplošeni Petersenovi grafi predstavljajo družino grafov, ki predstavlja posplošitev znanega Petersenovega grafa. Za potrebe naloge si pogledjmo njihovo definicijo in nekatere lastnosti.

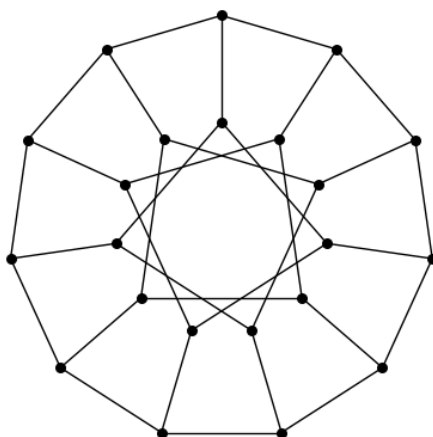
**Definicija 2.4.** Za naravni števili  $n, k$ , kjer je  $n \geq 3$  in  $n > k \geq 1$ , je *posplošen Petersenov graf*  $G(n, k)$  graf na množico vozlišč

$$\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}.$$

Množico povezav sestavljajo tri vrste povezav:

- *zunanje povezave*  $u_i u_{i+j}$ ,
- *špice*  $u_i w_i$  in
- *notranje povezave*  $w_i w_{i+k}$ ,

kjer indeksi predstavljajo ostanke pri deljenju z  $n$ .

Slika 3: Primer posplošenega Petersenovega grafa  $G(11, 3)$ .

Opazimo, da sta grafa  $G(n, k)$  in  $G(n, n - k)$  izomorfna. Če je  $k = n/2$  potem ima graf  $G(n, n/2)$  vzporedne povezave (ni enostaven). Zaradi tega lahko omejimo parametra  $n, k$  na naslednji način:  $n$  je večji od 2 in  $k$  je manjši od  $n/2$ .

## 2.2 Algoritmi

*Algoritem* je končno zaporedje dobro definiranih ukazov, s katerim rešimo določeno vrsto problemov oz. kaj izračunamo. Algoritem sprejme neko vrednost ali niz vrednosti kot vhodni podatek, jih obdela in uporabi za izračun rešitve, ki jo vrne kot izhodni podatek.

Pri analizi algoritma opazujemo njegovo pravilnost in časovno zahtevnost, včasih celo prostorsko zahtevnost. Pravilnost algoritma pokažemo z dokazom pravilnosti postopka. Časovna zahtevnost algoritma je čas, ki ga algoritem porabi za rešitev problema pri dani velikosti vhodnih podatkov. Časovno enoto predstavlja osnovna računsko operacija, ki jo algoritem opravi. Ker se čas delovanja algoritma lahko razlikuje med različnimi vhodnimi podatki iste velikosti, se običajno upošteva najslabša časovna zahtevnost, t.j. največja količina časa potrebna za rešitev problema pri dani velikosti vhodnih podatkov.

**Primer 2.5.** Algoritem  $\text{SEŠTEJ}(a, b)$  prejme kot vhodne podatke dve celi števili in vrne njuno vsoto. Algoritem v vsaki izvedbi opravi le eno operacijo, zato je njegov čas

---

**Algoritem 1**  $\text{SEŠTEJ}(a, b)$ .

---

**Zahteva:** Celi števili  $a$  in  $b$ .

1: **Vrni**  $a + b$

---

izvajanja 1 enota.

Pri analizi časovne zahtevnosti algoritma uporabljamo asimptotsko notacijo.

**Definicija 2.6.** Naj bosta  $f(n)$  in  $g(n)$  funkciji, definirani nad podmnožico realnih števil. Pravimo, da je  $f(n) \in O(g(n))$ , natanko tedaj, ko obstaja pozitivna konstanta  $k$  in realno število  $n_0$ , da velja

$$|f(n)| \leq k \cdot |g(n)|,$$

za vse  $n > n_0$ .

Prav tako je  $f(n) \in \Theta(g(n))$ , natanko tedaj, ko obstajata pozitivni konstanti  $k_1, k_2$  in realno število  $n_0$ , da velja

$$k_1 \cdot |g(n)| \geq |f(n)| \leq k_2 \cdot |g(n)|,$$

za vse  $n > n_0$ .

**Primer 2.7.** Naj bo  $g(n)$  polinom fiksne stopnje  $k$  oblike

$$g(n) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

kjer so  $a_i$  poljubna realna števila in  $a_k \neq 0$ . Potem je  $g(n) \in O(n^k)$ .

Za algoritem pravimo, da teče v *linearnem času*, če je njegova časovna zahtevnost  $O(n)$ . Kar pomeni, da je čas izvajanja algoritma največ  $kn$ , kjer je  $n$  velikost vhodnih podatkov in  $k$  pozitivna konstanta.

**Definicija 2.8** (Spinrad [39]). Za algoritem pravimo, da je *robusten*, če bodisi izračuna pravilno rešitev, bodisi sklene, da vhodni podatki ne pripadajo ustreznemu razredu podatkov.

## Prepoznavanje grafov

Pomemben primer grafovskih algoritmov so algoritmi prepoznavanja, ki določijo, ali je vhodni graf član določene grafovske družine. Ti algoritmi rešujejo problem prepoznavanja grafov, ki je definiran na naslednji način.

PREPOZNAVANJE GRAFOV DRUŽINE  $X$

**Vhodni podatki:** Poljuben graf  $G$ .

**Naloga:** Določi, če  $G$  pripada družini  $X$ .

Algoritmu, ki rešuje tak problem pravimo *algoritem prepoznave družine  $X$* .

V povezavi s prepoznavo grafov velikokrat govorimo tudi o problemu izomorfizmov grafov. To je računski problem, ki določa, ali sta dana grafa izomorfna. V splošnem še ni znano, če je ta problem rešljiv v polinomskem času, niti če je  $\mathcal{NP}$ -poln. V našem primeru algoritem prepoznavanja grafov prejme kot vhodni podatek poljuben graf  $G$ , za katerega določi potencialnega izomorfnega člana obravnavane družine, nato pa za njiju pregleda še, če sta izomorfna. Za družine grafov, ki jih obravnavamo v magistrski nalogi, je pregledovanje izomorfности opravljeno v linearnem času.

### 3 $I$ -grafi

Družina  $I$ -grafov je bila deležna številnih raziskav, glede na njihovo grupo avtomorfizmov in izomorfizmov [6, 22, 37]. Poleg tega so Horvat idr. [22] opisali njihovo povezanost in ožino, Boben idr. [6] pa so preučili njihovo dvodelnost, točkovno tranzitivnost in si ogledali tudi nekatere konfiguracije, ki se porodijo na dvodelnih  $I$ -grafih.

$I$  grafi predstavljajo eno izmed naravnih posplošitev družine posplošenih Peterse-  
novih grafov in so definirani na naslednji način.

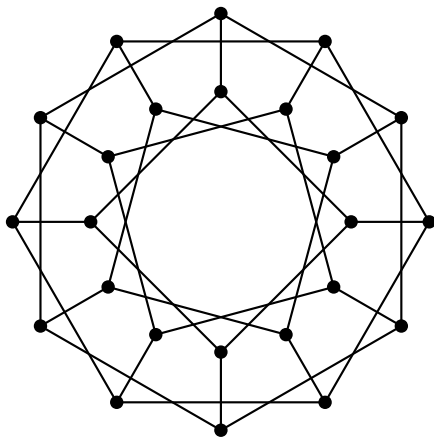
**Definicija 3.1.** Za naravna števila  $n, j, k$ , kjer je  $n \geq 3$  in  $n > j, k \geq 1$ , je  $I$ -graf  $I(n, j, k)$  graf na množico vozlišč

$$\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}.$$

Množico povezav sestavljajo tri vrste povezav:

- zunanje povezave  $u_i u_{i+j}$ ,
- špice  $u_i w_i$  in
- notranje povezave  $w_i w_{i+k}$ ,

kjer indeksi predstavljajo ostanke pri deljenju z  $n$ .



Slika 4: Primer  $I$ -grafa  $I(12, 2, 3)$ .

Brez škode za splošnost vedno privzamemo, da sta  $j, k < n/2$ . Ker sta  $I(n, j, k)$  in  $I(n, k, j)$  izomorfna, se v magistrski nalogi omejimo na primere, ko je  $j \leq k$ . Posplošeni Petersenovi grafi tvorijo podrazred  $I$ -grafov, kjer ima parameter  $j$  vrednost 1.

V svojem delu so Pisanski idr. [6] dokazali, da je  $I$ -graf nepovezan kadarkoli je  $d = \gcd(n, j, k) > 1$ . V tem primeru je graf sestavljen iz  $d$  kopij grafa  $I(n/d, j/d, k/d)$ . V magistrski nalogi bomo zato obravnavali le primere, ko je  $\gcd(n, j, k) = 1$ , saj lahko v nasprotnem primeru analiziramo vsako komponento posamično. Izomorfizmi  $I$ -grafov so natančno karakterizirani z naslednjim izrekom.

**Izrek 3.2** (Horvat idr. [22]).  $I$ -grafa,  $I(n, j, k)$  in  $I(n', j', k')$  sta izomorfna, če in samo če obstaja tako celo število  $a$ , tuje z  $n$ , za katerega velja bodisi  $\{j', k'\} = \{aj \pmod{n}, ak \pmod{n}\}$  bodisi  $\{j', k'\} = \{aj \pmod{n}, -ak \pmod{n}\}$ .

V celotnem poglavju, kadarkoli govorimo o  $I$ -grafih z določenimi parametri, imamo v mislih le leksikografsko najmanjše parametre, s katerimi je graf enolično določen. Npr. po izreku 3.2 velja  $I(26, 3, 11) \cong I(26, 7, 9) \cong I(26, 1, 5) \cong G(26, 5)$ . Torej bomo namesto  $I(26, 3, 11)$  pisali kar  $G(26, 5)$ .

### 3.1 Ekvivalentni 8-cikli

Vsak  $I$ -graf premore rotacijo  $\rho$ , definirano na naraven način:  $\rho(u_i) = u_{i+1}$ ,  $\rho(w_i) = w_{i+1}$ . Če  $n$  krat uporabimo rotacijo  $\rho$ , dobimo identično preslikavo. Delovanje preslikave  $\rho$  na poljubnem  $I$ -grafu razdeli množico povezav na 3 orbite, in sicer na orbito zunanjih povezav, ki jo označimo z  $E_J$ , orbito notranjih povezav,  $E_I$  in orbito špic,  $E_S$ . Povezave iz istih orbit imajo enako osemkotno vrednost, ki jo označimo z  $\sigma_J, \sigma_S$  in  $\sigma_I$ . Tako definiramo *osemkotna vrednost  $I$ -grafa* trojica  $(\sigma_J, \sigma_S, \sigma_I)$ .

V  $I$ -grafu  $I(n, j, k)$  zunanje povezave  $E_J$  inducirajo  $\gcd(n, j)$ -ciklov dolžine  $n/\gcd(n, j)$ , notranje povezave  $E_I$  inducirajo  $\gcd(n, k)$ -ciklov dolžine  $n/\gcd(n, k)$ , špice  $E_S$  pa inducirajo popolno prirejanje.

Pravimo, da sta 8-cikla v  $I$ -grafu *ekvivalentna*, če lahko slikamo prvega v drugega samo z uporabo rotacije  $\rho$ . V primeru, da cikla nista ekvivalentna, sta *neekvivalentna*.

Naj bo  $G \cong I(n, j, k)$  poljuben  $I$ -graf in  $C$  en izmed njegovih 8-ciklov. Z  $\gamma(C)$  označimo število ekvivalentnih 8-ciklov ciklu  $C$  v grafu  $G$ . Vsak 8-cikel prispeva k osemkotni vrednosti grafa. Prispevano vrednost označimo s  $\tau(C)$ , ki je definirana kot trojica  $(\delta_j, \delta_s, \delta_i)$ , kjer izračunamo  $\delta_j, \delta_s, \delta_i$  tako, da preštejemo število zunanjih povezav, špic in notranjih povezav v ciklu  $C$  in te vrednosti pomnožimo z  $\gamma/n$ . Če graf  $G$  premore  $m$  neekvivalentnih ciklov, potem izračunamo osemkotno vrednost grafa na naslednji način

$$(\sigma_J, \sigma_S, \sigma_I) = \sum_{i=1}^m \tau(C_i).$$

Naslednjo trditev lahko uporabimo tudi kot primer zgoraj omenjenih definicij. Ne smemo pozabiti, da upoštevamo samo  $I$ -grafe pri katerih je  $\gcd(n, j, k) = 1$ .

**Trditev 3.3.** V grafu  $I(n, j, k)$ , kjer je  $n > 3$  in sta  $k$  in  $j$  takšni celi števili, da velja  $k, j < n/2$ , vedno obstaja 8-cikel.

*Dokaz.* Imamo dve možnosti, če sta  $k$  in  $j$  različna, potem ima 8-cikel nasledjo obliko

$$C^* = (w_0, w_{\pm k}, u_{\pm k}, u_{\pm k \pm j}, w_{\pm k \pm j}, w_{\pm j}, u_{\pm j}, w_0).$$

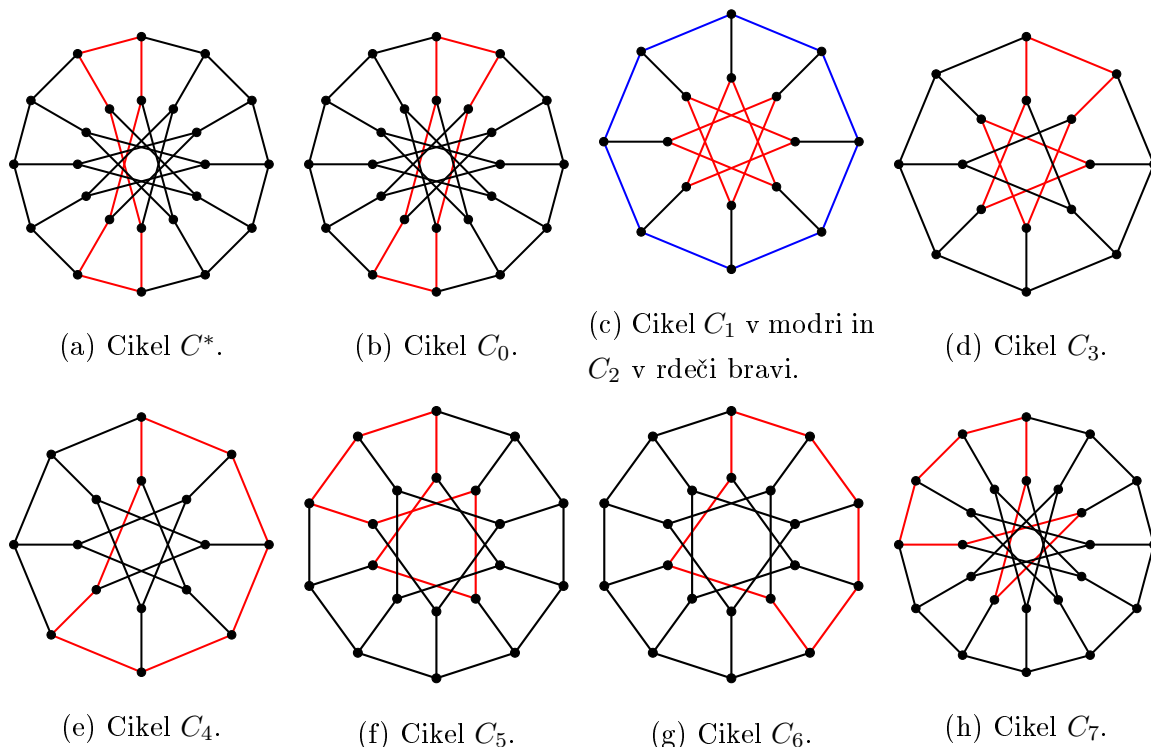
V primeru, ko sta  $k$  in  $j$  enaka, pa je 8-cikel oblike

$$C_7 = (u_0, u_k, u_{2k}, u_{3k}, w_{3k}, w_{2k}, w_k, w_0).$$

□

## 3.2 Karakterizacija neekvivalentnih 8-ciklov

V tem razdelku izpišemo in natančno obravnavamo vse možne neekvivalentne 8-cikle v  $I$ -grafih. Za vsak tak 8-cikel določimo tudi prispevek k vrednostim  $(\sigma_J, \sigma_S, \sigma_I)$ .



Slika 5: Primer neekvivalentnih 8-ciklov v  $I$ -grafih.

Analiza primerov je obravnavana v sledečih razdelkih. Najprej ločimo 8-cikle po številu špic, ki jih premorejo. Po kratkem premisleku opazimo, da ima lahko poljuben 8-cikel le sodo število špic, tj. 0, 4 oz. 2. Prva dva primera obravnavamo v razdelkih 3.2.1

in 3.2.2. Za zadnji primer pa analizo razdelimo še glede na število zunanjih in notranjih povezav, ki jih 8-cikel premore. Ti primeri so obravnavani v razdelkih 3.2.3, 3.2.4 in 3.2.5. Vsi cikli so prikazani na sliki 5 in predstavljeni v preglednici 1.

### 3.2.1 8-cikli s 4 špicami

Poleg štirih špic mora 8-cikel imeti še dve zunanji in dve notranji povezavi. Ko izberemo špico imamo v 8-ciklu še dve možnosti, kako izbrati notranjo (zunanjo) povezavo. Po temeljiti analizi ugotovimo, da imamo lahko le dva takšna 8-cikla, in sicer  $C^*$  (glej sliko 5a), ki obstaja kadakoli je  $k \neq j$  in pa  $C_0$ , ki ima naslednjo obliko:

$$C_0 = (w_0, w_{\pm k}, u_{\pm k}, u_{\pm k \pm j}, w_{\pm k \pm j}, w_{\pm 2k \pm j}, u_{\pm 2k \pm j}, u_{\pm 2k \pm 2j}),$$

glej sliko 5b. Cikel  $C_0$  obstaja, ko je  $2k + 2j = n$ . Hitro lahko preverimo, da velja  $\rho^n(C^*) = C^*$  in  $\rho^{n/2}(C_0) = C_0$ . Torej je vrednost  $\gamma$ -cikla  $C^*$  enaka  $n$  in  $n/2$  za cikel  $C_0$ . Ta cikla prispevata v osemkotno vrednost grafa  $(2, 4, 2)$ , v primeru  $C^*$  in  $(1, 2, 1)$ , v primeru  $C_0$ .

### 3.2.2 8-cikli brez špic

V tem primeru imamo dve možnosti za tak cikel, bodisi leži popolnoma na notranjem obroču bodisi na zunanjem obroču (glej sliko 5c). Ti cikli so naslednje oblike:

$$C_1 = (u_0, u_j, u_{2j}, u_{3j}, u_{4j}, u_{5j}, u_{6j}, u_{7j}),$$

$$C_2 = (w_0, w_k, w_{2k}, w_{3k}, w_{4k}, w_{5k}, w_{6k}, w_{7k}),$$

Po definiciji  $I$ -grafov so cikli na zunanjem oz. notranjem obroču dolžine  $n/\gcd(n, j)$  oz.  $n/\gcd(n, k)$ , torej ti cikli obstajajo, ko je  $8j \equiv 0 \pmod{n}$  oz.  $8k \equiv 0 \pmod{n}$ . Z uporabo te enačbe in dejstvom, da sta  $j, k < n/2$  dobimo naslednje pogoje za obstoj teh ciklov:  $8j = n$  ali  $8k = n$  oz.  $8j = 3n$  ali  $8j = 3n$ . V primeru, ko je  $8j = 2n$  oz.  $8k = 2n$ , lahko poenostavimo enačbo na  $4j = n$  oz.  $4k = n$ , kar pomeni, da imamo dva 4-cikla in zato ta primer odpade.

Vsaka zunanja oz. notranja povezava se pojavi v le enem ciklu te oblike, zato obstaja  $n/8$  takšnih ekvivalentnih ciklov. Cikla prispevata  $(1, 0, 0)$  oz.  $(0, 0, 1)$  k osemkotni vrednosti grafa.

### 3.2.3 8-cikli z 1 povezavo na zunanjem oz. notranjem obroču

V tem primeru so cikli oblike

$$C_3 = (w_0, w_k, w_{2k}, w_{3k}, w_{4k}, w_{5k}, u_{5k}, u_{5k \pm j}) \quad \text{ali}$$

$$C_4 = (u_0, u_j, u_{2j}, u_{3j}, u_{4j}, u_{5j}, w_{5j}, w_{5j \pm k}),$$

glej tudi sliki 5d in 5e. Ti cikli obstajajo, ko je  $5k + j \equiv 0 \pmod{n}$  ali  $5k - j \equiv 0 \pmod{n}$  za prvi primer in  $k + 5j \equiv 0 \pmod{n}$  za drugi primer. Ker imajo cikli te oblike le eno zunanjo oz. notranjo povezavo imamo v grafu  $n$  takšnih ekvivalentnih ciklov. Torej je njihov prispevek k osemkotni vrednosti grafa  $(1, 2, 5)$  oz.  $(5, 2, 1)$ .

### 3.2.4 8-cikli z 2 povezavama na zunanjem oz. notranjem obroču

V tem primeru so cikli oblike

$$C_5 = (w_0, w_k, w_{2k}, w_{3k}, w_{4k}, u_{4k}, u_{4k \pm j}, u_{4k \pm 2j}) \quad \text{ali}$$

$$C_6 = (u_0, u_j, u_{2j}, u_{3j}, u_{4j}, w_{4j}, w_{4j \pm k}, w_{4j \pm 2k}),$$

glej tudi sliki 5f in 5g. Ti cikli obstajajo, ko je  $4k + 2j \equiv 0 \pmod{n}$  ali  $4k - 2j \equiv 0 \pmod{n}$  za prvi primer in  $2k + 4j \equiv 0 \pmod{n}$  ali  $2k - 4j \equiv 0 \pmod{n}$  za drugi primer. Če želimo določiti prispevek ciklov k osemkotni vrednosti grafa, se moramo prepričati, da imamo v grafu  $n$  takšnih ekvivalentnih 8-ciklov. V primeru cikla  $C_5$  to dokažemo tako, da vzamemo točke  $u_{4k}, u_{4k \pm j}, u_{4k \pm 2j}$  iz zunanjega obroča. Dve izmed njih, natančneje  $u_{4k}$  in  $u_{4k \pm 2j}$ , sta krajišči zunanje povezave in špice iz opazovanega cikla, točka  $u_{4k \pm j}$  pa predstavlja krajišče dveh zunanjih povezav. Če torej želimo, da je  $\gamma(C_5)$  manjši od  $n$ , bi moralo obstajati tako pozitivno število  $i$ , da je  $\rho^i(u_{4k}) = u_{4k \pm 2j}$  in  $\rho^i(u_{4k \pm j}) = u_{4k \pm j}$ , kar ni mogoče. Torej je  $\gamma(C_5) = n$ . Podobno lahko trdimo za  $C_6$ . Zato je v grafu  $n$  ekvivalentnih 8-ciklov cikloma  $C_5$  in  $C_6$ , ki prispevajo  $(2, 2, 4)$  in  $(4, 2, 2)$  k osemkotni vrednosti grafa.

### 3.2.5 8-cikli s 3 povezavami na zunanjem oz. notranjem obroču

V tem primeru so cikli oblike:

$$C_7 = (u_0, u_j, u_{2j}, u_{3j}, w_{3j}, w_{3j \pm k}, w_{3j \pm 2k}, w_{3j \pm 3k}),$$

glej tudi sliko 5h. Ti cikli obstajajo, ko je  $3k + 3j \equiv 0 \pmod{n}$  ali  $3k - 3j \equiv 0 \pmod{n}$ . Z uporabo podobnega pristopa kot v prejšnjem primeru lahko pokažemo, da



Preglednica 1: Vsi neekvivalentni 8-cikli v  $I$ -grafih skupaj z njihovimi pogoji za obstoj.

Oznaka	Predstavnik 8-ciklov	Pogoji za obstoj
$C^*$	$(w_0, w_{\pm k}, u_{\pm k}, u_{\pm k \pm j}, w_{\pm k \pm j}, w_{\pm j}, u_{\pm j}, u_0)$	$k \neq j$ and $n > 4$
$C_0$	$(w_0, w_{\pm k}, u_{\pm k}, u_{\pm k \pm j}, w_{\pm k \pm j}, w_{\pm 2k \pm j}, u_{\pm 2k \pm j}, u_{\pm 2k \pm 2j})$	$2k + 2j = n$
$C_1$	$(u_0, u_j, u_{2j}, u_{3j}, u_{4j}, u_{5j}, u_{6j}, u_{7j})$	$8j = n$ ali $3n$
$C_2$	$(w_0, w_k, w_{2k}, w_{3k}, w_{4k}, w_{5k}, w_{6k}, w_{7k})$	$8k = n$ ali $3n$
$C_3$	$(w_0, w_k, w_{2k}, w_{3k}, w_{4k}, w_{5k}, u_{5k}, u_{5k+j})$	$5k + j = n$ ali $2n$
	$(w_0, w_k, w_{2k}, w_{3k}, w_{4k}, w_{5k}, u_{5k}, u_{5k-j})$	$5k - j = n$ ali $2n$
$C_4$	$(u_0, u_j, u_{2j}, u_{3j}, u_{4j}, u_{5j}, w_{5j}, w_{5j+k})$	$k + 5j = n$ ali $2n$
	$(u_0, u_j, u_{2j}, u_{3j}, u_{4j}, u_{5j}, w_{5j}, w_{5j-k})$	$5j - k = 2n$ ali $n$ ali $0$
$C_5$	$(w_0, w_k, w_{2k}, w_{3k}, w_{4k}, u_{4k}, u_{4k+j}, u_{4k+2j})$	$4k + 2j = n$ ali $2k + j = n$
	$(w_0, w_k, w_{2k}, w_{3k}, w_{4k}, u_{4k}, u_{4k-j}, u_{4k-2j})$	$4k - 2j = n$
$C_6$	$(u_0, u_j, u_{2j}, u_{3j}, u_{4j}, w_{4j}, w_{4j+k}, w_{4j+2k})$	$2k + 4j = n$ ali $k + 2j = n$
	$(u_0, u_j, u_{2j}, u_{3j}, u_{4j}, w_{4j}, w_{4j-k}, w_{4j-2k})$	$4j - 2k = n$ ali $0$
$C_7$	$(w_0, w_k, w_{2k}, w_{3k}, u_{3k}, u_{3k+j}, u_{3k+2j}, u_{3k+3j})$	$3k + 3j = n$ ali $2n$
	$(w_0, w_k, w_{2k}, w_{3k}, u_{3k}, u_{3k-j}, u_{3k-2j}, u_{3k-3j})$	$3k - 3j = n$ ali $0$

graf premore  $n$  takšnih ekvivalentnih ciklov. Če vzamemo na zunanjem obroču točke  $u_0, u_j, u_{2j}, u_{3j}$  opazimo, da se prva in zadnja točka pojavita na špici in zunanji povezavi, med tem ko sta  $u_0$  in  $u_{2j}$  le na dveh zunanjih povezavah opazovanega cikla. V tem primeru bi morala preslikava  $\rho^i$  preslikati  $u_0$  na  $u_{3j}$  in  $u_j$  na  $u_{2j}$ , za neko pozitivno celo število  $i < n$ , kar je nemogoče. Zato je v grafu  $n$  ekvivalentnih 8-ciklov ciklu  $C_7$ , ki prispevajo  $(3, 2, 3)$  k osemkotni vrednosti grafa.

Preglednica 2: Prispevek 8-ciklov k osemkotni vrednosti grafa in število ekvivalentnih 8-ciklov v  $I$ -grafih.

Label	$C^*$	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$
$\tau(\mathcal{C})$	$(2, 4, 2)$	$(1, 2, 1)$	$(0, 0, 1)$	$(1, 0, 0)$	$(5, 2, 1)$	$(1, 2, 5)$	$(4, 2, 2)$	$(2, 2, 4)$	$(3, 2, 3)$
$\gamma(\mathcal{C})$	$n$	$n/2$	$n/8$	$n/8$	$n$	$n$	$n$	$n$	$n$

Vsi možni neekvivalentni 8-cikli, ki se pojavijo v  $I$ -grafih, so zapisani v preglednici 1 skupaj z njihovimi pogoji za obstoj, med tem ko so njihovi prispevki k osemkotni vrednosti grafa in število ekvivalentnih 8-ciklov povzeti v preglednici 2.

### 3.3 Konstantna osemkotna vrednost grafa

Kot smo opazili v prejšnjih razdelkih, vsak 8-cikel prispeva določen delež k osemkotni vrednosti vsake particije povezav  $I$ -graфа. Izkaže se, da lahko določimo parametre danega grafa, če lahko prepoznamo vsaj eno particijo njegovih povezav. Zato želimo

najprej določiti grafe, pri katerih ne moremo prepoznati nobene particije. To so grafi s konstantno osemkotno vrednostjo, za katere velja, da se vsaka povezava dotika enakega števila 8-ciklov. Te grafe imenujemo  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularni grafi.

Da določimo parametre  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularnih  $I$ -grafov, si moramo ogledati vse možne kombinacije 8-ciklov, ki jih graf lahko ima. Ker so  $I$ -grafi določeni s tremi parametri in vsi 8-cikli dajejo omejitve za te parametre, je dovolj, da razmislimo o kombinacijah z največ štirimi cikli. Nekateri 8-cikli imajo več pogojev obstoja, zato se lahko zgodi, da ima  $I$ -graf več 8-ciklov iste oblike. Po natančnem pregledu pogojev obstoja vseh ciklov opazimo, da se to zgodi le s cikli  $C_5, C_6$  in  $C_7$ . V prvih dveh primerih je graf izomorfen grafu  $G(8, 2)$ , v zadnjem pa grafu  $G(6, 1)$ . V obeh primerih graf nima konstantne osemkotne vrednosti. Poglejmo si, kako smo prišli do rešitve na primeru cikla  $C_5$ , ostala primera rešimo na podoben način.

**Trditev 3.4.** Če  $I$ -graf premore dva 8-cikla oblike  $C_5$  potem je izomorfen grafu  $G(8, 2)$ .

*Dokaz.* Cikel  $C_5$  ima tri pogoje obstoja, dva izmed njih se med seboj ne izključujeta. To sta  $2k + j = n$  in pa  $4j - 2k = n$ . Parametri  $(n, j, k)$ , ki zadoščajo tem pogojem, so  $(8, 3, 2)$ . Z uporabo karakterizacije izomorfizma  $I$ -grafov (izrek 3.2) dobimo  $I(8, 3, 2) \cong I(8, 2, 1)$ . Torej graf  $I(8, 2, 1)$  premore dve obliki cikla  $C_5$ . Če želimo izračunati osemkotno vrednost tega grafa, moramo najprej poiskati vse neekvivalentne 8-cikle, ki jih graf premore. Ti cikli so  $C^*, C_2$  in pa dvakrat  $C_5$ . Torej ima graf  $I(8, 3, 2)$  osemkotno vrednost enako  $(2, 4, 2) + (1, 0, 0) + 2 \cdot (4, 2, 2) = (11, 8, 6)$ , ki ni konstantna. Vemo tudi, da je  $I(8, 2, 1) \cong I(8, 1, 2) = G(8, 2)$ .  $\square$

V ostalih 8-ciklih se pogoji obstoja izključujejo, zato se v poljubnem  $I$ -grafu, glede na ekvivalentnost, vsak cikel pojavi največ enkrat. V nadaljevanju na kratko obravnavamo pare oz. trojice ciklov, ki zagotavljajo konstantno osemkotno vrednost grafa.

### 3.3.1 Obstoje ciklov $C_0$ in $C_7$

Če ima  $I$ -graf  $G$  le dva neekvivalentna 8-cikla, enega oblike  $C_0$  in drugega oblike  $C_7$ , potem je njegova osemkotna vrednost enaka  $(4, 4, 4)$ . V tem primeru graf ne premore nobenega drugega 8-cikla, torej niti  $C^*$ , kar se zgodi natanko tedaj, ko sta parametra  $j$  in  $k$  enaka. Če sedaj ob tem upoštevamo še pogoje obstoja ciklov  $C_0$  in  $C_7$ , dobimo, da je  $G$  izomorfen grafu  $G(4, 1)$ .

### 3.3.2 Obstoje ciklov $C_0, C_1$ in $C_2$

$I$ -graf  $G$ , ki premore le cikle  $C_0, C_1$  in  $C_2$ , ima osemkotno vrednost enako  $(2, 2, 2)$ . Če upoštevamo pogoje obstoja za te tri cikle in dejstvo, da  $C^*$  ne sme obstajati, opazimo, da ni možno najti predstavnika iz družine  $I$ -grafov, ki bi tem pogojem zadoščal.

### 3.3.3 Obstoj ciklov $C_3$ , $C_4$ in $C^*$

V primeru, ko  $I$ -graf premore le cikle  $C_3$ ,  $C_4$  in  $C^*$ , je njegova osemkotna vrednost enaka  $(8, 8, 8)$ . Z uporabo pogojev obstoja teh ciklov izračunamo vse take neizomorfne  $I$ -grafe. Rezultati računanja so povzeti v preglednici 3, kjer upoštevamo pogoj  $j \neq k$ , ki ga daje cikel  $C^*$ .

Preglednica 3:  $I$ -grafi, ki premorejo cikle  $C_3, C_4$  in  $C^*$ .

$C_4 \backslash C_3$	$k + 5j = n$	$k + 5j = 2n$	$5j - k = 2n$	$5j - k = n$	$5j - k = 0$
$5k + j = n$	ne obstaja	$G(8, 3)$	$G(26, 5)$	$G(13, 5)$	$G(26, 5)$
$5k + j = 2n$	$G(8, 3)$	ne obstaja	$G(13, 5)$	$G(26, 5)$	$G(13, 5)$
$5k - j = 2n$	$G(26, 5)$	$G(13, 5)$	ne obstaja	$G(24, 5)$	$G(12, 5)$
$5k - j = n$	$G(13, 5)$	$G(26, 5)$	$G(24, 5)$	ne obstaja	$G(24, 5)$

### 3.3.4 Obstoj ciklov $C_5$ , $C_6$ in $C^*$

V primeru, ko  $I$ -graf premore le cikle  $C_5$ ,  $C_6$  in  $C^*$ , ima osemkotno vrednost enako  $(8, 8, 8)$ . V preglednici 4 so predstavljeni grafi, ki zadoščajo tem pogojem.

Preglednica 4:  $I$ -grafi, ki premorejo cikle  $C_5, C_6$  in  $C^*$ .

$C_6 \backslash C_5$	$2k + 4j = n$	$k + 2j = n$	$4j - 2k = n$	$4j - 2k = 0$
$4k + 2j = n$	ne obstaja	ne obstaja	$G(10, 3)$	$G(10, 2)$
$2k + j = n$	ne obstaja	ne obstaja	$G(10, 2)$	$G(5, 2)$
$4k - 2j = n$	$G(10, 3)$	$G(10, 2)$	ne obstaja	ne obstaja

### 3.3.5 $I$ -grafi brez 8-ciklov

V primeru, da  $I$ -graf ne premore nobenega 8-cikla, je njegova osemkotna vrednost enaka  $(0, 0, 0)$ . To se zgodi le, ko je graf izomorfen grafu trikotne prizme  $G(3, 1)$ .

### Povzetek analize primerov

Ob upoštevanju izreka 3.2 o karakterizaciji izomorfizmov  $I$ -grafov in celotne analiza 8-ciklov, ki smo jo opravili, dobimo naslednji izrek.

**Izrek 3.5.** *Poljuben  $I$ -graf je  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularen le v primeru, ko je izomorfen grafu  $I(n, j, k)$ , kjer je  $j = 1$  in*

$$(n, k) \in \{(3, 1), (4, 1), (5, 2), (8, 3), (10, 2), (10, 3), (12, 5), (13, 5), (24, 5), (26, 5)\}.$$

Ti grafi so na kratko predstavljeni v preglednici 5 in na sliki 6. Zanimivo je, da so vsi  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularni  $I$ -grafi pravzaprav grafi iz družine posplošenih Petersenovih grafov. Z izjemo  $G(13, 5)$  in  $G(26, 5)$  so vsi ostali povezavno tranzitivni. Izkaže se, da so to edini povezavno tranzitivni grafi iz te družine (glej [17]).

Preglednica 5: Vsi  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularni  $I$ -grafi, vrednost  $\lambda$  in njihova imena.

Graf	Vrednost parametra $\lambda$	Ime
$G(3, 1)$	0	3-prizma
$G(4, 1)$	4	Kocka
$G(5, 2)$	8	Petersenov graf
$G(8, 3)$	8	Möbius-Kantorjev graf
$G(10, 2)$	8	Dodekaeder
$G(10, 3)$	8	Desarguesov graf
$G(12, 5)$	8	Naurujev graf ( $F_{024}A$ )
$G(13, 5)$	8	/
$G(24, 5)$	8	$F_{048}A$
$G(26, 5)$	8	/

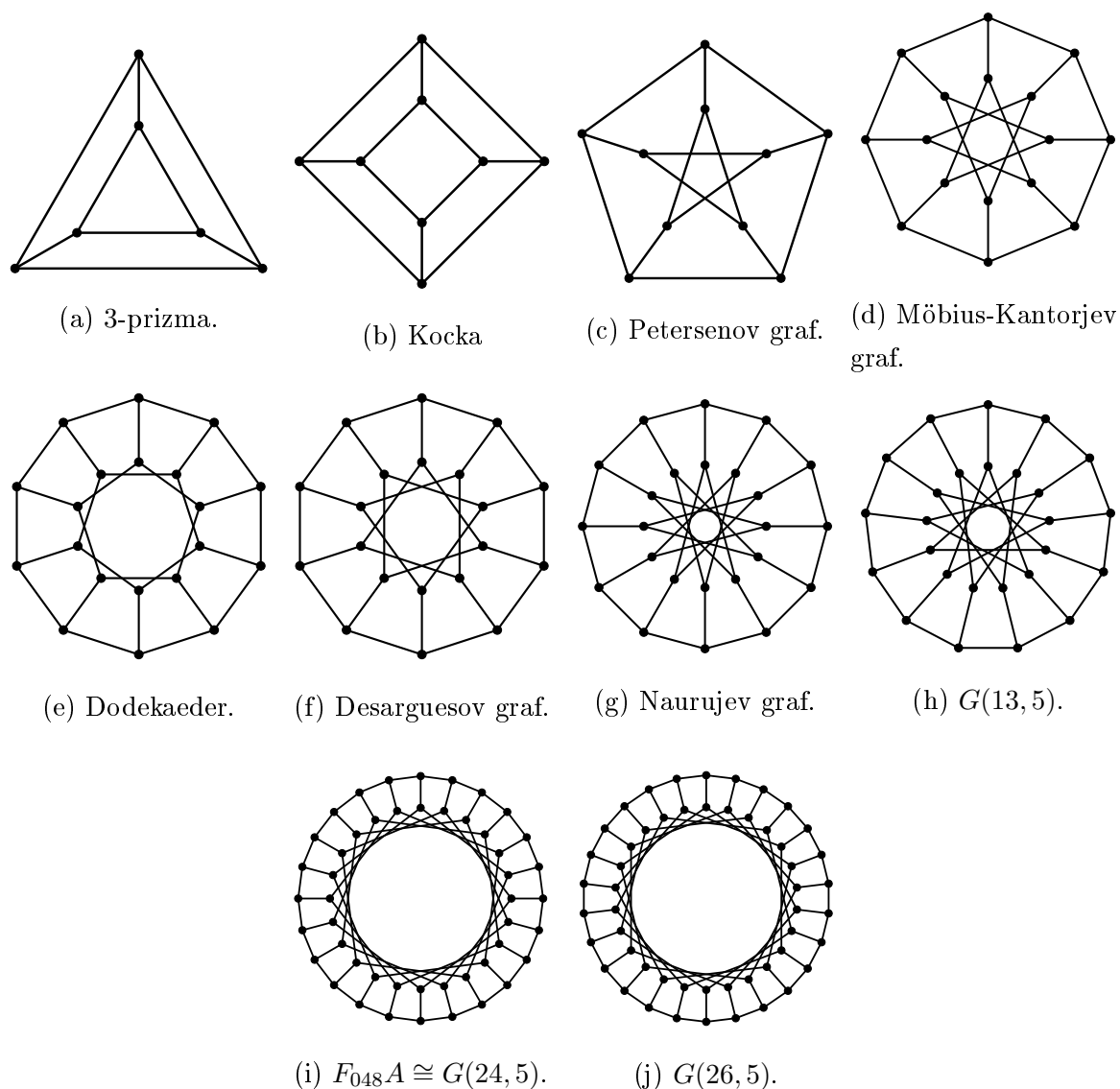
### 3.4 Prepoznava $I$ -grafov

V tem razdelku je predstavljen robusten algoritem, ki kot vhodne podatke prejme poljuben graf, za katerega določi, če spada v družino  $I$ -grafov ali ne. V primeru, da je graf član naše družine, algoritem vrne parametre grafa in certifikat pravilnosti (natančen izomorfizem med vhodnim grafom in članom družine). Algoritem je natančno zapisan z algoritmom 2.

Algoritem prejme kot vhodni podatek poljuben graf  $G$ , če je  $G$  član družine  $I$ -grafov in ni  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularen, potem lahko takoj prepoznamo orbito povezav ( $E_I, E_J$ , ali  $E_S$ ) velikosti  $|V(G)|/2$ . Izrek 3.5 zagotavlja, da je graf iz opazovane družine  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularen samo v končno mnogo primerih (glej sliko 6). Ker je izračun osemkotne vrednosti vsake povezave opravljen v konstantnem času in ker imamo končno mnogo  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularnih  $I$ -grafov, naslednja posledica drži.

**Posledica 3.6.**  *$I$ -grafe lahko prepoznamo v linearnem času.*

Dokaz predstavlja algoritem, ki je podan in analiziran v razdelkih 3.4.1 in 3.4.2.

Slika 6: Vsi  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularni  $I$ -grafi.

### 3.4.1 Algoritem in njegova analiza

Algoritem 2 za prepoznavo  $I$ -grafov je podoben algoritmu za prepoznavo dvojno poplošenih Petersenovih grafov 4.1. Razlika je v predpisu funkcije  $\text{RAZŠIRI}(G, U)$ . V tem razdelku navedemo algoritem in analiziramo njegovo pravilnost ter časovno zahtevnost skupaj s funkcijo  $\text{RAZŠIRI}(G, U)$  definirano za  $I$ -grafe.

Če vhodni graf  $G$  algoritma 2 ni kubičen, potem zagotovo ni član družine  $I$ -grafov. Postopek, ki preveri ali je graf kubičen, je opravljen v linearnem času, torej lahko preprosto domnevamo, da je  $G$  kubičen. Poleg tega, če  $G$  ni povezan, potem je lahko član opazovane družine le v primeru, ko je  $G$  sestavljen iz več izomorfnih komponent grafa  $I$  z enakimi parametri. Ta primer lahko obravnavamo ločeno, tako da posebej preverimo vsako komponento in primerjamo dobljene parametre. Zato brez škode za splošnost

---

**Algoritem 2** Postopek prepoznavanja  $I$ -grafov ali DP grafov, odvisno od funkcije  $\text{RAZŠIRI}(G, U)$ .

---

**Zahteva:** Povezan, kubični graf  $G$

- 1:  $\mathcal{P} \leftarrow$  prazen slovar
  - 2: **za**  $e \in E(G)$  **naredi**
  - 3:      $s = \text{OSEMKOTNAVREDNOST}(e)$   $\triangleright$  izračunamo  $\sigma(e)$
  - 4:      $\mathcal{P}[s].\text{dodaj}(e)$
  - 5:  $U \leftarrow$  element slovarja  $\mathcal{P}$  z najmanjšo pozitivno kardinalnostjo
  - 6: **če** je  $U$  unija disjunktih ciklov **potem**
  - 7:      $U \leftarrow \{e \mid e \in E(G), e \text{ je krajišče povezave iz } U\}$   $\triangleright U$  je popolno prirejanje grafa  $G$
  - 8: vrni  $\text{RAZŠIRI}(G, U)$
- 

predpostavimo, da je vhodni graf povezan. Algoritem 2 je sestavljen iz naslednjih 3 delov.

### Razdelitev množice povezav na različne dele, glede na osemkotno vrednost.

Algoritem izračuna osemkotno vrednost vsake povezave  $e \in E(G)$  in zgradi množico particij  $\mathcal{P}$  povezav grafa (glej vrstice 1 – 4). Ker je  $G$  kubičen in so vsi 8-cikli, ki vsebujejo povezavo  $e$  na razdalji največ 4 od povezave  $e$ , je dovolj da preverimo podgraf  $H = G[\cup_{i=0}^4 N_i(e)]$  grafa  $G$  z največ 62 vozlišči, da izračunamo osemkotno vrednost povezave. Torej je izračun  $\text{OSEMKOTNAVREDNOST}(e)$  opravljen v času  $O(1)$  za vsako povezavo  $e$ , celoten del pa v  $\Theta(|E(G)|)$ .

**Prepoznavna orbite povezav, ki ustreza naboru špic.** V vrsticah 5 – 7 določimo orbito povezav, ki ustreza špicam grafa. Za ta del potrebujemo  $O(|E(G)|/3)$  dodatnega časa.

**Uporaba množice  $U$  za določitev parametrov danega grafa.** Algoritem uporabi izračunano množico  $U$  za določitev natančnega izomorfizma med  $G$  in  $I$ -grafom, če le ta obstaja. Ta postopek se izvede s pomočjo funkcije  $\text{RAZŠIRI}(G, U)$ .

Če za graf  $G$  velja, da 2 ne deli  $|V(G)|$ , potem funkcija  $\text{RAZŠIRI}(G, U)$  graf  $G$  zavrne. V nasprotnem primeru, naj bo  $n = |V(G)|/2$  in  $H = G[U]$ . Imamo dve možnosti.

**$H = G$ .** V tem primeru ima  $G$  konstantno osemkotno vrednost. Vseh  $I$ -grafov s konstantno osemkotno vrednostjo je 10 (glej sliko 6). Če je  $G$  član družine  $I$ -grafov, potem mora biti izomorfen enemu izmed njih. Preverjanje izomorfности je opravljeno v konstantnem času.

**$H$  ima  $2n$  vozlišč in je 1 regularen.** V tem primeru predstavlja množica  $U$  popolno prirejanje grafa  $G$ , množica  $E(G) \setminus U$  pa unijo disjunktnih ciklov. Če je  $G$  iz družine  $I$ -grafov, potem obstajajo taka pozitivna cela števila  $j_1, j_2, l_1, l_2$ , kjer je  $j_1 \leq j_2$ , tako da imamo v množici  $E(G) \setminus U$  natanko  $j_1$ -ciklov dolžine  $l_1$  in  $j_2$ -ciklov dolžine  $l_2$ . Preveriti je potrebno še, če je  $G \cong I(n, j_1, k)$ . Ta postopek opišemo v sledečem razdelku, kjer izračunamo še parameter  $k$  in pokažemo, da se celotna funkcija  $\text{RAZŠIRI}(G, U)$  izvede v linearnem času.

Če  $H$  in  $G$  izpolnjujeta eno izmed zgornjih možnosti in če izomorfizem obstaja, potem algoritem vrne parametre ustreznega izomorfnega  $I$ -grafa, v nasprotnem primeru graf  $G$  ni iz naše družine in ga algoritem zavrne.

### 3.4.2 Določitev natančnega izomorfizma z $I$ -grafi

Algoritem 3 predstavlja zaporedje ukazov, ki ga izvrši funkcija  $\text{RAZŠIRI}(G, U)$ , algoritma 2. Algoritem prejme kot vhodni podatek graf  $G$  in njegovo popolno prirejanje  $U$  ter vrne natančen izomorfizem med grafom  $G$  in predstavnikom družine  $I$ -grafov, če le ta obstaja.

---

**Algoritem 3** Določitev natančnega izomorfizma med grafom  $G$  in  $I$ -grafom.

---

**Zahteva:** povezan, kubičen graf  $G$  na  $2n$  vozliščih in njegovo popolno prirejanje  $U$

- 1:  $j, k, l_1, l_2 \leftarrow$  število ciklov v množici  $F = E(G) \setminus U$  in njihove dolžine
- 2: Fiksiraj enega izmed  $l_1$ -ciklov  $C$  iz množice  $F$ , kot  $(u_0, u_j, \dots, u_{(l_1-1)j})$ .
- 3: **za**  $i \in [0, j, 2j, \dots, (l_1 - 1)j]$  **naredi**
- 4:     Z uporabo  $U$  določi imena vozlišč  $w_i$  in  $w_{i+j}$  na  $l_2$ -ciklu.
- 5:     **za**  $v \in N(w_i) \setminus u_i$  in  $v' \in N(w_{i+j}) \setminus u_{i+j}$  **naredi**
- 6:         Določi  $u, u'$  sosedi od  $v, v'$  z uporabo popolnega prirejanja  $U$ .
- 7:         **če**  $uu' \in E(G)$  **potem**
- 8:             Označi  $v, v', u, u'$  kot  $w_{i+k}, w_{i+k+j}, u_{i+k}, u_{i+k+j}$ .   ▷ Dobimo parameter  $k$
- 9:         **Končaj**
- 10:     Z uporabo  $l_2$ -ciklov iz  $F$  poimenuj preostala notranja vozlišča  $w_i, w_{i+k}, w_{i+2k} \dots$   
in  $w_{i+k+j}, w_{i+2k+j}, w_{i+3k+j} \dots$
- 11: Z uporabo  $U$  označi vsa zunanja vozlišča.

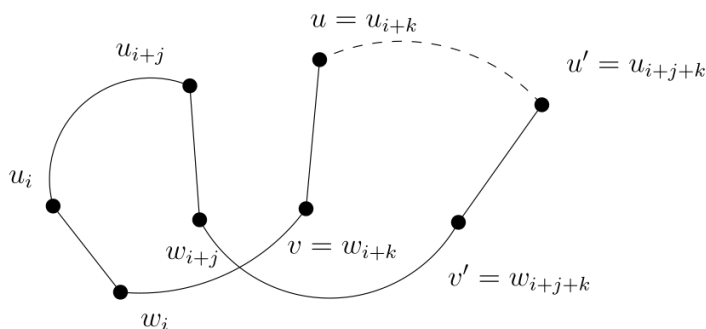
---

Graf  $G$  in množica  $U$  zadoščata začetnim pogojem, saj smo to preverili že v prejšnjem algoritmu. Naj bo  $n = |V(G)|/2$ . V celotni analizi algoritma gledamo indekse kot ostanke pri deljenju z  $n$ .

Ker je  $U$  popolno prirejanje, je množica  $F = E(G) \setminus U$  unija vsaj dveh disjunktnih ciklov.  $G$  je povezan graf, zato množica  $F$  premore bodisi 2-cikla dolžine  $n$  bodisi več

ciklov dveh različnih dolžin. V vrstici 1 določimo število daljših ciklov,  $j$  in njihovo dolžino  $l_1$ . To opravimo v času  $O(|E(G)|)$ .

Izberemo en cikel dolžine  $l_1$  iz množice  $F$  in ga položimo na zunanji obroč, kot  $(u_0, u_j, \dots, u_{(l_1-1)j})$ . Ko je cikel fiksiran se sprehodimo čez vsa njegova vozlišča in za vsak par sosednjih vozlišč  $u_i$  in  $u_{i+j}$ , z uporabo popolnega prirejanja  $U$ , označimo istoležni vozlišči  $w_i, w_{i+j}$  na notranjem obroču. Vzamemo vozlišči  $v \in N(w_i) \setminus u_i$  in  $v' \in N(w_{i+j}) \setminus u_{i+j}$  iz notranjega obroča, določimo njuni sosednji točki  $u, u'$  na zunanjem obroču in preverimo, če sta  $u$  in  $u'$  sosednji. Za lažjo predstavo glej sliko 7. Ker ima



Slika 7: Proces, kako določimo cikel v algoritmu 3 (glej vrstico 5).

množica  $N(w_i) \setminus u_i$ , za vsak  $i$ , natanko 2 elementa, se ta proces (zanka na vrstici 5) izvede največ 4 krat.

V primeru, da sta  $u$  in  $u'$  povezani, smo našli cikel in preimenujemo vozlišča  $v, v', u, u'$  v  $w_{i+k}, w_{i+k+j}, u_{i+k}, u_{i+j+k}$ . Sedaj določimo tudi parameter  $k$ . Če je  $k = j$  dobimo s tem procesom 4-cikel. To nam ne dela težav, ker v tem primeru poimenujemo vsa vozlišča, saj imamo v  $F$  le dva cikla dolžine  $n$ . V primeru, ko  $k \neq j$ , dobimo 8-cikel  $C^* = (u_i, u_{i+j}, w_{i+j}, w_{i+j+k}, u_{i+j+k}, u_{i+k}, w_{i+k}, w_i)$ , ki poimenuje nekatera dodatna vozlišča. Sedaj z uporabo ciklov iz  $F$ , ki ležijo na notranjih vozliščih ustrezno poimenujemo preostala notranja vozlišča. Ker je graf povezan in za  $I$ -graf  $I(n, j, k)$  velja, da je  $\gcd(n, j, k) = 1$  hitro vidimo, da smo po končani vrstici 10 označili vsa notranja vozlišča. Na koncu z uporabo popolnega prirejanja poimenujemo še zunanja vozlišča. Če se je postopek ustrezno izvedel, smo dobili natančen predpis izomorfizma med grafom  $G$  in  $I$ -grafom  $I(n, j, k)$ .

Celoten algoritem porabi  $\Theta(|E(G)|)$  časa za izvedbo, kar zagotavlja linearni čas delovanja algoritma 2.



## 4 Dvojno posplošeni Petersenovi grafi

Dvojno posplošeni Petersenovi grafi so bili deležni nekoliko manj raziskav kakor  $I$ -grafi. Kljub temu so zanje znani nekateri zanimivi rezultati, npr. leta 2016 sta Kutnar in Petecki [31] karakterizirala grupo avtomorfizmov in opazovala njihovo hamiltonskost, vozliščno ter povezavno obarvanost.

Kakor že omenjeno, dvojno posplošeni Petersenovi grafi predstavljajo še eno naravno posplošitev posplošenih Petersenovih grafov. Definiramo jih na naslednji način.

**Definicija 4.1.** Za naravni števili  $n, k$ , kjer je  $n \geq 3$  in  $n/2 > k \geq 1$ , je *dvojno posplošeni Petersenov graf*  $DP(n, k)$ , graf z množico vozlišč

$$\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, w_0, w_1, \dots, w_{n-1}, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}.$$

Množico povezav sestavljajo tri vrste povezav:

- *zunanje povezave*  $u_i u_{i+1}$  in  $x_i x_{i+1}$ ,
- *špice*  $u_i w_i$  in  $x_i y_i$  in
- *notranje povezave*  $w_i y_{i+k}$  in  $y_i w_{i+k}$ ,

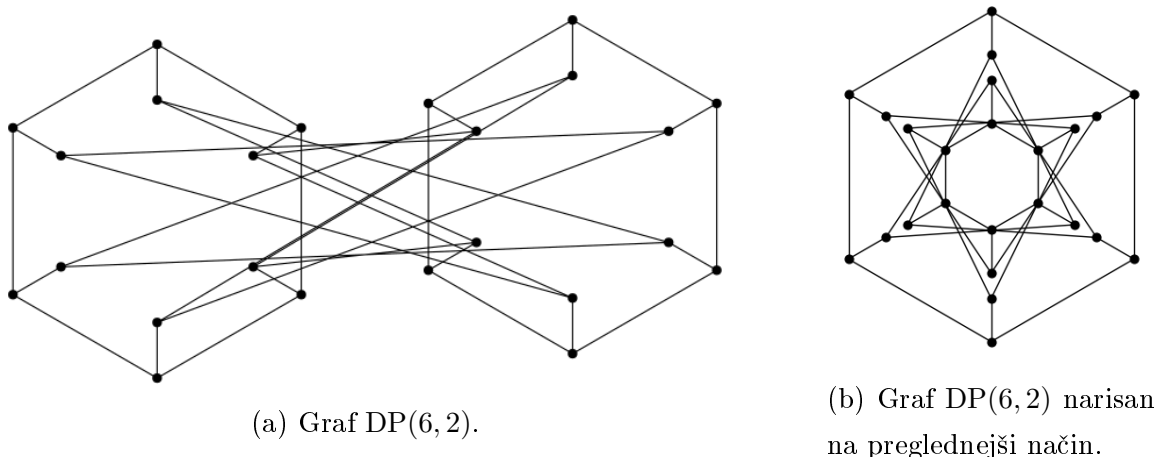
kjer indeksi predstavljajo ostanke pri deljenju z  $n$ .

Graf  $DP(n, k)$  dobimo, če vzamemo dve kopiji posplošenega Petersenovega grafa  $G(n/2, k)$ , kjer priredimo notranje povezave in sicer povežemo  $i$ -to vozlišče prve kopije grafa z  $i + k$ -tim vozliščem iz druge kopije in obratno. Za lažjo predstavo glej sliko 8a.

Te grafe lahko narišemo tudi na način, da sta kopiji grafa  $G(n/2, k)$  ena v drugi in sicer tako, da postavimo vozlišča na 4 kocentrične obroč. Zunanji obroč je sestavljen iz vozlišč  $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ , naslednji ima vozlišča  $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ , sledijo vozlišča  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  in notranji obroč iz  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ , glej sliko 8b.

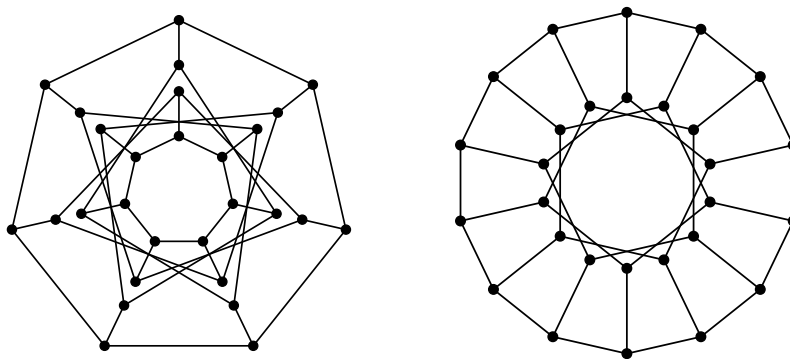
Dvojno posplošeni Petersenovi grafi so v nekaterih primerih izomorfnih posplošenim Petersenovim grafom. Natančna karakterizacija sledi v naslednjem izreku.

**Izrek 4.2** (Qin idr. [38]). *Grafa  $DP(n, k)$  in  $G(n', k')$  sta izomorfna natanko tedaj, ko je  $n$  liho pozitivno celo število in velja, da je  $\gcd(n, k) = 1$ . V tem primeru je  $n' = 2n$  in  $k'$  enolično pozitivno sodo za katerega je  $kk' \equiv \pm 1 \pmod{n}$ .*



Slika 8: Primer dvojno posplošenega Petersenovega grafa DP(6, 2).

**Primer 4.3.** Po izreku 4.2 sledi, da sta grafa DP(7, 2) in  $G(14, 3)$  izomorfna, saj je  $2 \cdot 3 \equiv -1 \pmod{7}$ .

Slika 9: Izomorfna grafa DP(7, 2) in  $G(14, 3)$ .

V splošnem izomorfizmi dvojno posplošenih Petersenovih grafov niso karakterizirani, vendar jih lahko določimo v nekaterih primerih.

**Izrek 4.4.** Naj bosta  $n, k$  pozitivni celi števili, kjer je  $n$  sod in  $k < n/2$ . Potem je graf DP( $n, k$ ) izomorfen grafu DP( $n, n/2 - k$ ).

*Dokaz.* Vse indekse v dokazu gledamo po modulu  $n$ .

Naj bodo  $u_i, w_i, x_i, y_i$ , for  $i = 0, \dots, n-1$  vozlišča grafa DP( $n, k$ ) s povezavami  $u_i u_{i+1}, x_i x_{i+1}, w_i y_{i+k}, y_i w_{i+k}, u_i w_i, x_i y_i$ . Naj bo  $j = n/2 - k$ . Definirajmo permutacijo

$\Pi$  na vozliščih grafa  $DP(n, k)$  na naslednji način:

$$u_i \mapsto u_i,$$

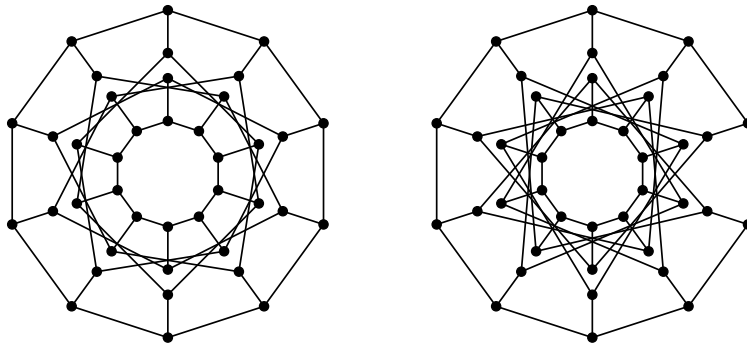
$$w_i \mapsto w_i,$$

$$x_i \mapsto x_{i+n/2},$$

$$y_i \mapsto y_{i+n/2},$$

za  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Če želimo, da je  $\Pi$  izomorfizem grafa  $DP(n, k)$ , potem mora slikati povezave iz določene particije nazaj v isto particijo. Zunanje povezave  $u_i u_{i+1}, x_i x_{i+1}$  se slikajo nazaj v zunanje povezave, saj je  $\Pi(u_i)\Pi(u_{i+1}) = u_i u_{i+1}$ ,  $\Pi(x_i)\Pi(x_{i+1}) = x_i x_{i+1}$ . Enako velja za špice  $u_i w_i, x_i y_i$ , saj je  $\Pi(u_i)\Pi(w_i) = u_i w_i$  in  $\Pi(y_i)\Pi(x_i) = x_{i+n/2} y_{i+n/2}$ . V primeru notranjih povezav  $\Pi$  slika  $w_i y_{i+k}$  v  $w_i y_{i+k+n/2}$ . Ker je  $k + n/2 \equiv n - (k + n/2) \equiv n/2 - k \equiv j \pmod{n}$ , lahko zapišemo to povezavo kot  $w_i y_{i+j}$ . Na enak način preverimo, da je povezava  $y_{n/2+i} w_{n/2+i+k}$  preslikana v  $y_i w_{i+j}$ . Torej je  $DP(n, k) \cong DP(n, j)$ .  $\square$

**Primer 4.5.** Po izreku 4.4 sledi, da sta grafa  $DP(10, 2)$  in  $DP(10, 3)$  izomorfna.



Slika 10: Izomorfna grafa  $DP(10, 2)$  in  $DP(10, 3)$ .

## 4.1 Ekvivalentni 8-cikli

Vsak dvojno posplošen Petersenov graf premore rotacijo  $\rho$  definirano kot  $\rho(u_i) = u_{i+1}$ ,  $\rho(w_i) = w_{i+1}$ ,  $\rho(x_i) = x_{i+1}$ ,  $\rho(y_i) = y_{i+1}$  in avtomorfizem  $\alpha$ , ki zamenja vozlišča ene kopije posplošenega Petersenovega grafa z vozlišči druge kopije:  $\alpha(u_i) = x_i$ ,  $\alpha(w_i) = y_i$ ,  $\alpha(x_i) = u_i$  in  $\alpha(y_i) = w_i$ . Delovanje preslikav  $\rho$  in  $\alpha$  na poljubnem dvojno posplošenem Petersenovem grafu razdeli množico povezav na 3 orbite, in sicer na orbito zunanjih povezav, ki jo označimo z  $E_J$ , orbito špic,  $E_S$  in orbito notranjih povezav,  $E_I$ . Orbita zunanjih povezav inducira dva cikla dolžine  $n$ , orbita špic inducira popolno prirejanje, orbita notranjih povezav pa inducira bodisi  $2 \cdot \gcd(n, k)$ -ciklov dolžine

$n/\gcd(n, k)$ , ko je vrednost  $n/\gcd(n, k)$  soda in  $\gcd(n, k) > 1$  bodisi  $\gcd(n, k)$ -ciklov dolžine  $2n/\gcd(n, k)$  sicer.

Vsak dvojno posplošen Petersenov graf premore vsaj en 8-cikel.

**Trditev 4.6.** *Za pozitivni celi števili  $n, k$ , kjer je  $n \geq 3$  in  $k < n/2$ , graf  $DP(n, k)$  premore 8-cikel*

$$C^* = (w_0, y_{\pm k}, x_{\pm k}, x_{\pm k \pm 1}, y_{\pm k \pm 1}, w_{\pm 1}, u_{\pm 1}, c_0).$$

Za preučevanje strukture 8-ciklov v dvojno posplošenih Petersenovih grafih uporabljamo podoben pristop kot pri  $I$ -grafih. Pravimo, da sta dva 8-cikla v dvojno posplošenih Petersenovih grafih *ekvivalentna*, če lahko slikamo prvega v drugega, ne le z uporabo rotacije  $\rho$ , temveč tudi z uporabo avtomorfizma  $\alpha$ . Tudi v tej družini grafov imajo povezave iz istih orbit enako osemkotno vrednost  $\sigma_J, \sigma_S$  in  $\sigma_I$ . Osemkotna vrednost grafa je torej trojica  $(\sigma_J, \sigma_S, \sigma_I)$ . Da izračunamo prispevek  $\tau$  poljubnega 8-cikla k osemkotni vrednosti dvojnega posplošenega Petersenovega grafa, moramo najprej določiti  $\delta_j, \delta_s, \delta_i$ . To naredimo tako, da preštujemo število zunanjih povezav, špic in notranjih povezav v 8-ciklu in, v tem primeru, vrednosti pomnožimo z  $\gamma/2n$ , kjer  $\gamma$  ponovno predstavlja število ekvivalentnih ciklov v danem dvojno posplošenem Petersenovem grafu.

## 4.2 Karakterizacija nekvivalentnih 8-ciklov

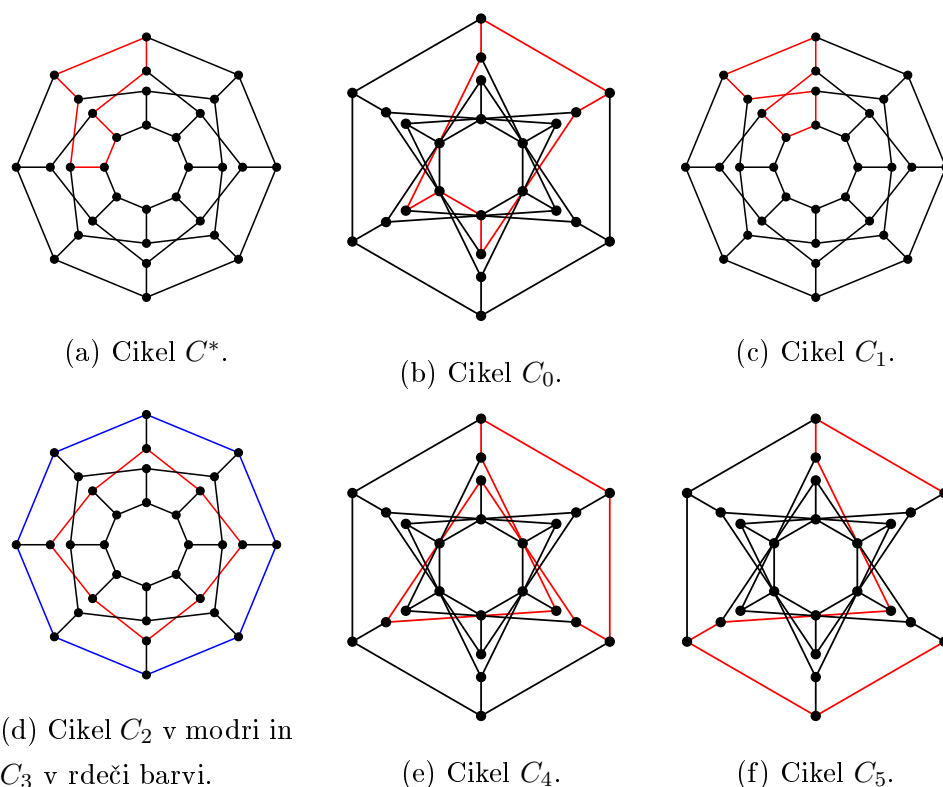
V tem razdelku izpišemo in natančno obravnavamo vse možne nekvivalentne 8-cikle v dvojno posplošenih Petersenovih grafih. Vsakemu 8-ciklu določimo tudi prispevek  $\tau$  k vrednostim  $(\sigma_J, \sigma_S, \sigma_I)$ . Rezultati so povzeti v preglednicah 7, 6 in prikazani na sliki 12.

Analiza primerov je obravnavana v sledečih podrazdelkih. Najprej ločimo 8-cikle glede na število špic, ki v njih nastopajo. Opazimo, da ima lahko en 8-cikel 4 (glej razdelek 4.2.1), 0 (glej razdelek 4.2.2) ali 2 (glej razdelek 4.2.3) špici.

Kljub temu, da je dvojno posplošen Petersenov graf  $DP(n, k)$  neusmerjen, si v analizi 8-ciklov pomagamo z usmerjenostjo povezav. Za povezavo  $e = u_i u_j$  pravimo, da je *pozitivno* usmerjena, če je  $i + 1 \equiv j \pmod{n}$  ali  $i + k \equiv j \pmod{n}$  in *negativno* usmerjena če je  $i - 1 \equiv j \pmod{n}$  ali  $i - k \equiv j \pmod{n}$ . Ker je  $k < n/2$  je usmerjenost dobro definirana.

### 4.2.1 8-cikli s 4 špicami

V tem primeru ima 8-cikel tudi dve zunanji in dve notranji povezavi. Glede na usmerjenost teh povezav ločimo tri cikle. Če je ena zunanja povezava pozitivno usmerjena,



Slika 11: Primer vseh neekvivalentnih 8-ciklov v DP grafih.

druga pa negativno in enako velja za notranje povezave, imamo cikel  $C^*$  (glej sliko 11a). V primeru, da imajo zunanje in notranje povezave enako orientacijo (glej sliko 11b), imamo cikel  $C_0$  oblike

$$C_0 = (w_0, y_{\pm k}, x_{\pm k}, x_{\pm k \pm 1}, y_{\pm k \pm 1}, w_{\pm 2k \pm 1}, u_{\pm 2k \pm 1}, u_{\pm 2k \pm 2}).$$

Če imata obe zunanji povezavi pozitivno orientacijo in obe notranji povezavi negativno, ali obratno, imamo cikel oblike:

$$C_1 = (w_0, y_{\pm k}, x_{\pm k}, x_{\pm k \mp 1}, y_{\pm k \mp 1}, w_{\pm 2k \mp 1}, u_{\pm 2k \mp 1}, u_{\pm 2k \mp 2}),$$

glej sliko 11c.

#### 4.2.2 8-cikli brez špic

Obstajata dva takšna neekvivalentna 8-cikla. En, ki sestoji izključno iz zunanjih povezav,

$$C_2 = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7)$$

in en, ki sestoji izključno iz notranjih povezav

$$C_3 = (w_0, y_k, w_{2k}, y_{3k}, w_{4k}, y_{5k}, w_{6k}, y_{7k}),$$

glej sliko 11d.

### 4.2.3 8-cikli z 2 špicama

Pri analizi teh ciklov nam pomaga opazka, da imajo ti cikli sodo število zunanjih in notranjih povezav. Torej imamo le dve možnosti za take 8-cikle.

$$C_4 = (w_0, y_k, w_{2k}, y_{3k}, w_{4k}, u_{4k}, u_{4k\pm 1}, u_{4k\pm 2}) \quad \text{ali}$$

$$C_5 = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, w_4, y_{4\pm k}, w_{4\pm 2k}),$$

glej slike 11f in 11e.

Vsi možni neekvivalentni 8-cikli, ki jih lahko najdemo v dvojno posplošenih Petersenovih grafih, skupaj s pogoji obstoja, prispevkom k osemkotni vrednosti celotnega grafa in število njim ekvivalentnih 8-ciklov, so povzeti v preglednicah 7 in 6.

Preglednica 6: Prispevek 8-ciklov k oksemkotni vrednosti grafa in število ekvivalentnih 8-ciklov v DP grafih.

Label	$C^*$	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
$\tau(\mathcal{C})$	(2, 4, 2)	(1, 2, 1)	(1, 2, 1)	(1, 0, 0)	(0, 0, 1)	(2, 2, 4)	(4, 2, 2)
$\gamma(\mathcal{C})$	$n \cdot 2$	$(n/2) \cdot 2$	$(n/2) \cdot 2$	2	$(n/8) \cdot 2$	$n \cdot 2$	$n \cdot 2$

Preglednica 7: Vsi neekvivalentni 8-cikli v DP grafih.

Oznaka	Predstavnik 8-ciklov	Pogoji za obstoj
$C^*$	$(w_0, y_{\pm k}, x_{\pm k}, x_{\pm k\pm 1}, y_{\pm k\pm 1}, w_{\pm 1}, u_{\pm 1}, u_0)$	$n \geq 3$
$C_0$	$(w_0, y_{\pm k}, x_{\pm k}, x_{\pm k\pm 1}, y_{\pm k\pm 1}, w_{\pm 2k\pm 1}, u_{\pm 2k\pm 1}, u_{\pm 2k\pm 2})$	$2k + 2 = n$
$C_1$	$(w_0, y_{\pm k}, x_{\pm k}, x_{\pm k\mp 1}, y_{\pm k\mp 1}, w_{\pm 2k\mp 1}, u_{\pm 2k\mp 1}, u_{\pm 2k\mp 2})$	$k = 1$
$C_2$	$(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7)$	$n = 8$
$C_3$	$(w_0, y_k, w_{2k}, y_{3k}, w_{4k}, y_{5k}, w_{6k}, y_{7k})$	$8k = n$ ali $3n$
$C_4$	$(w_0, y_k, w_{2k}, y_{3k}, w_{4k}, u_{4k}, u_{4k+1}, u_{4k+2})$	$4k + 2 = n$ ali $2k + 1 = n$
	$(w_0, y_k, w_{2k}, y_{3k}, w_{4k}, u_{4k}, u_{4k-1}, u_{4k-2})$	$4k - 2 = n$
$C_5$	$(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, w_4, y_{4+k}, w_{4+2k})$	$2k + 4 = n$
	$(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, w_4, y_{4-k}, w_{4-2k})$	$2k - 4 = 0$

## 4.3 Konstantna osemkotna vrednost

Podobno kot v primeru  $I$ -grafov želimo poiskati vse dvojno posplošene Petersenove grafe s konstantno osemkotno vrednostjo. Ker imajo nekateri 8-cikli več pogojev obstoja, se lahko pripeti, da v nekem dvojno posplošenem Petersenovem grafu obstajata dva cikla iste oblike. Bralec lahko hitro preveri, da se to zgodi le v primeru cikla  $C_5$

in sicer v grafu  $DP(8, 2)$ , čigar osemkotna vredost ni konstantna. Zato lahko predpostavimo, da poljuben dvojno posplošen Petersenov graf premore največ en cikel vsake oblike.

Cikel  $C^*$  je prisoten v vseh dvojno posplošenih Petersenovih grafih. Zato so grafi s konstantno osemkotno vrednostjo tisti, ki poleg  $C^*$  premorejo le še cikla  $C_4$  in  $C_5$ . Celotno računanje je povzeto v preglednici 8. Ob analiziranju teh grafov opazimo, da

Preglednica 8: DP grafi, ki premorejo cikle  $C_4, C_5$  in  $C^*$ .

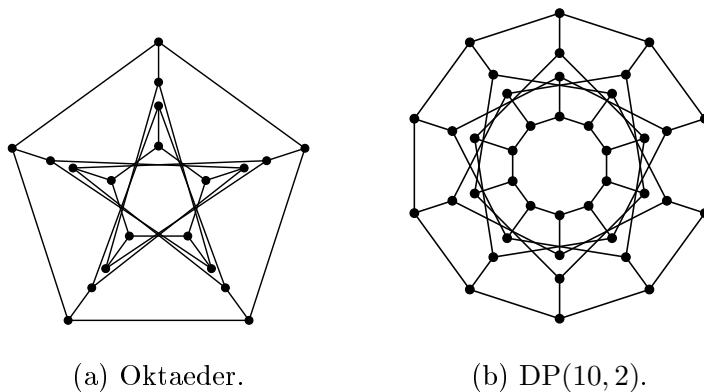
$C_5 \backslash C_4$	$2k + 4 = n$	$2k - 4 = 0$
$4k + 2 = n$	DP(6, 1)	DP(10, 2)
$2k + 1 = n$	ne obstaja	DP(5, 2)
$4k - 2 = n$	DP(10, 3)	DP(6, 2)

sta grafa  $DP(10, 2)$  in  $DP(10, 3)$  izomorfna (glej izrek 4.4) in da osemkotna vrednost grafov  $DP(6, 1)$  in  $DP(6, 2)$  ni konstantna. Torej obstajata natanko dva grafa iz družine dvojno posplošenih Petersenovih grafov, ki sta  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularna. Njuna  $\lambda$  vrednost je enaka 8. Grafa sta narisana na sliki 12.

Rezultati iz zgornje analize so povzeti v naslednjem izreku.

**Izrek 4.7.** *Poljuben dvojno posplošen Petersenov graf je  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularen le v primerih, ko je izomorfen grafu  $DP(n, k)$ , kjer je  $(n, k) \in \{(5, 2), (10, 2)\}$ .*

Omeniti velja, da so ti  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularni grafi tudi povezavno tranzitivni. Pravzaprav so to edini povezavno tranzitivni dvojno posplošeni Petersenovi grafi, kar sta dokazala Kutnar in Petecki [31]. Z uporabo trditve 4.2 dobimo, da je graf  $DP(5, 2)$  izomorfen Oktaedru  $G(10, 2)$ ,  $DP(10, 2)$  pa ni izomorfna nobenemu posplošenemu Petersenovemu grafu.



Slika 12: Vsi  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularni DP grafi.

## 4.4 Prepoznavna dvojno posplošenih Petersenovih grafov

Kakor že omenjeno, je algoritem za prepoznavo dvojno posplošenih Petersenovih grafov enak algoritmu za prepoznavo  $I$ -grafov z izjemo funkcije  $\text{RAZŠIRI}(G, U)$ . Zato v tem razdelku algoritma ne ponavljamo in bralca pošiljamo v razdelek 3.4.1, kjer je zapisan algoritem 2. Na tem mestu uvedemo le funkcijo  $\text{RAZŠIRI}(G, U)$  za dvojno posplošene Petersenove grafe in proceduro določanja natančnega izomorfizma med vhodnim grafom  $G$  in članom družine dvojno posplošenih Petersenovih grafov.

Ponovno velja, če je vhodni graf  $G$  algoritma 2 iz družine dvojno posplošenih Petersenovih grafov in ni  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularen, potem lahko takoj prepoznamo eno izmed orbit povezav ( $E_I, E_J$ , ali  $E_S$ ) velikosti  $|V(G)|/2$ . Izrek 4.7 zagotavlja, da je graf  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularen samo v primerih opisanih v prejšnjem razdelku (glej sliko 12). Ker obstajata le dva  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularna dvojno posplošena Petersenova grafa in ker je tudi v tej družini grafov izračun osemkotne vrednosti vsake povezave opravljen v konstantnem času velja naslednje.

**Posledica 4.8.** *Dvojno posplošene Petersenove grafe lahko prepoznamo v linearnem času.*

Dokaz predstavlja analiza algoritma v sledečih razdelkih.

### 4.4.1 Analiza algoritma prepoznave

Kakor rečeno, algoritem prepoznave je do nastopa funkcije  $\text{RAZŠIRI}(G, U)$  enak kot v primeru  $I$ -grafov.

Funkcija  $\text{RAZŠIRI}(G, U)$  prejme kot vhodne podatke povezan kubičen graf  $G$  in njegovo popolno prirejanje  $U$ . Če 4 ne deli  $|V(G)|$ , funkcija  $\text{RAZŠIRI}(G, U)$  graf  $G$  zavrne. V nasprotnem primeru, naj bo  $n = |V(G)|/4$  in  $H = G[U]$ . Ponovno imamo dve možnosti.

**$H = G$ .** V tem primeru ima  $G$  konstantno osemkotno vrednost. Torej je član družine dvojno posplošenih Petersenovih grafov le, če je izomorfen enemu izmed  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularnemu predstavniku te družine. Ker imamo le dva taka dvojno posplošena Petersenova grafa (glej sliko 12), je ta postopek opravljen v linearnem času.

**$H$  ima  $4n$  vozlišč in je 1 regularen.** V tem primeru predstavlja množica  $U$  popolno prirejanje grafa  $G$ , množica  $F = E(G) \setminus U$  pa unijo disjunktnih ciklov. Če je  $G$  iz družine dvojno posplošenih Petersenovih grafov, potem sta v  $F$  dva

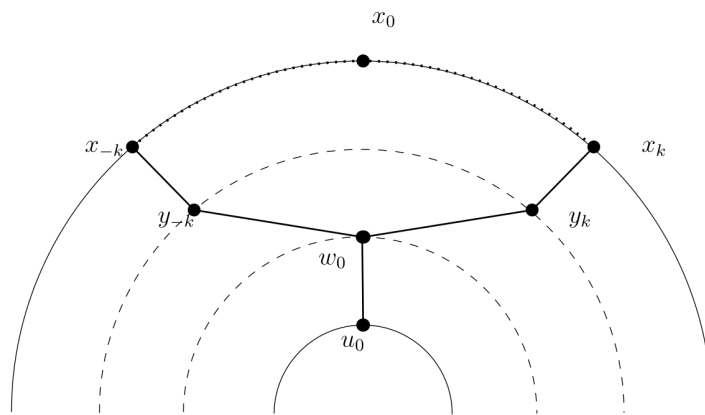


cikla dolžine  $n$  in  $g$ -ciklov dolžine  $m$ . Postopek, ki določi parameter  $k$  in preveri izomorfizem med  $G$  in  $DP(n, k)$  je opisan v sledečem razdelku. Celoten postopek  $RAZŠIRI(G, U)$  se izvede v linearnem času.

Če  $H$  in  $G$  izpolnjujeta eno izmed zgornjih možnosti in če izomorfizem obstaja, potem algoritem vrne parametre ustreznega izomorfnega dvojno posplošenega Petersenovega grafa, v nasprotnem primeru graf  $G$  ni iz naše družine in ga algoritem zavrne.

#### 4.4.2 Določitev natančnega izomorfizma z dvojno posplošenimi Petersenovimi grafi

Ker je  $U$  popolno prirejanje grafa  $G$  predstavlja množica  $E(G) \setminus U$  zbirko disjunktne ciklov, kjer sta vsaj dva cikla dolžine  $n$ . Če želimo določiti parameter  $k$ , najprej fiksiramo en cikel dolžine  $n$  in označimo njegova vozlišča z  $(u_0, \dots, u_{n-1})$ . S pomočjo množice  $U$  določimo sosednja vozlišča  $w_i$ . Sedaj uporabimo cikel iz množice  $E(G) \setminus U$ , ki poteka skozi vozlišče  $w_0$  in poiščemo njegovi sosednji točki, različni od  $u_0$ , ki ju označimo z  $y_k$  in  $y_{-k}$  (vrstni red poimenovanja vozlišč je poljuben). Ponovno z uporabo popolnega prirejanja določimo vozlišči  $x_k$  in  $x_{-k}$ . Nazadnje uporabimo cikel dolžine  $n$ , ki ne uporablja povezav iz  $U$ , in gre skozi vozlišči  $x_k$  in  $x_{-k}$ . Njegove točke označimo z  $x_0, \dots, x_{n-1}$ . Za lažjo predstavbo glej sliko 13.



Slika 13: Proces, kako določimo imena vozlišč v algoritmu za DP grafe.

**Trditev 4.9.** Če je  $G$  iz družine dvojno posplošenih Petersenovih grafov, potem lahko določimo parameter  $k$  kot polovično dolžino poti  $p = x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0, x_1, \dots, x_k$  najmanjše možne sode dolžine.

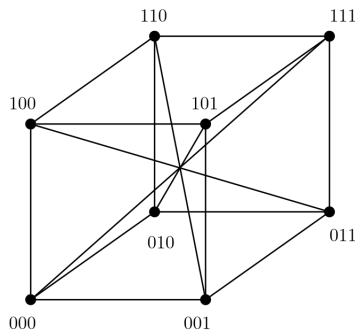
*Dokaz.* Očitno je pot  $p$  vedno sode dolžine. Torej  $n$ -cikel na vozliščih  $x_i$  v primeru, da je  $n$  lih razpade na pot lihe in pot sode dolžine, v primeru, da je  $n$  sod pa razpade na krajšo in daljšo pot sode dolžine (ker je  $k < n/2$  sta ti dolžini vedno različni),

vendar nam v tem primeru izrek o izomorfnosti, glej izrek 4.4, zagotavlja, da sta grafa  $DP(n, k)$  in  $DP(n, (n - 2k)/2)$  izomorfna.  $\square$

Ko so vozlišča  $x_i$  označena, lahko s pomočjo množice  $U$  določimo še vozlišča  $y_i$ . Sedaj je dovolj preveriti, da preostali cikli iz množice  $E(G) \setminus U$  upoštevajo trenutno poimenovanje. V primeru, da ga, je graf  $G$  izomorfen grafu  $DP(n, k)$ , v nasprotnem primeru pa graf  $G$  ni element opazovane družine grafov. Ker vsako povezavo grafa  $G$  v tem postopku uporabimo konstantno mnogo krat, se ta postopek izvede v času  $\Theta(|E(G)|)$ .

## 5 Zložene kocke

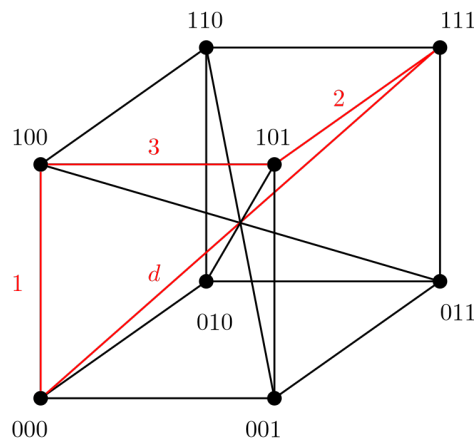
Graf  $n$  dimenzionalne hiperkocke  $Q_n$  je graf na  $2^n$  vozliščih, kjer so vozlišča predstavljena z binarnim nizom  $(x_1x_2 \dots x_n)$ . Dve vozlišči sta povezani, kadar se razlikujeta v natanko enem bitu. Z  $\bar{x}$  označimo komplement binarne vrednosti  $x$ , definiran kot  $1 - x$ . Zloženo  $n$ -kocko  $FQ_n$  dobimo, če v hiperkocki  $Q_n$  identificiramo pare antipodnih vozlišč, to so vozlišča, ki so natanko  $n$  narazen. Obstaja tudi drugi način konstrukcije zložene  $n$ -kocke, kjer  $n - 1$  hiperkocki  $Q_{n-1}$  dodamo vse *komplementarne povezave*, to so povezave med  $(x_1x_2 \dots x_{n-1})$  in  $(\bar{x}_1\bar{x}_2 \dots \bar{x}_{n-1})$ . Množico povezav zložene kocke lahko ločimo na dve disjunktni podmnožici, in sicer na množico povezav, ki sestavljajo hiperkocko, tem povezavam pravimo *povezave hiperkocke* in jih označimo s  $H$ , ter na množico komplementarnih povezav, ki jim pravimo tudi *diagonalne povezave* in jih označimo z  $D$ .



Slika 14: Primer zložene kocke  $FQ_4$ .

Vsaki povezavi hiperkocke priredimo oznako  $i$  iz množice  $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ , kjer je njegova vrednost enaka bitu, v katerem se sosednji vozlišči razlikujeta. Diagonalnim povezavam priredimo oznako  $d$ , za povezavo med vozliščema  $(0, 0, \dots, 0)$  in  $(1, 1, \dots, 1)$  pa uporabimo  $d^*$ . V tem poglavju označujemo cikle kot zaporedje povezav in ne več vozlišč, kakor smo to počeli v prejšnjih poglavjih. Opozoriti želimo, da obstaja več povezav z isto oznako, vendar le te niso nikoli sosednje, saj se za poljubno izmed naštetih oznak vsako vozlišče dotika natanko ene povezave s to oznako (za lažje razumevanje glej sliko 15).

Zložene kocke nekateri avtorji, glej npr. [34, 45], pripisujejo El-Amawyu in Lati-fiju [32], ki sta uporabila njihovo strukturo za razvoj učinkovitega algoritma usmerjevalnikov za oddajanje, čeprav so bile uporabljene že npr. s strani Brouwerja [9] in

Slika 15: Primer 4-cikla  $(1, 3, 2, d)$  v grafu  $FQ_4$ .

Terwilligerja [41], ki sta jih preučevala zaradi njihove razdaljne regularnosti. Ti grafi so bili deležni številnih raziskav povezanih z njihovo ciklično strukturo [45], hamiltonsko povezanostjo [23], analizo grupe avtomorfizmov in simetrij [34], itn. Pri analizi njihove grupe avtomorfizmov je potrebno poudariti, da je bila karakterizacija opravljena že s strani Brouwerja idr. [10, str. 265].

Naš prispevek k analizi zloženih kock razdelimo na dva dela. Najprej obravnavamo zložene kocke glede na njihovo ciklično strukturo in določimo vrednost  $\lambda$  pri obravnavi njihove  $[1, \lambda, 4]$ ,  $[1, \lambda, 6]$  in  $[2, \lambda, 6]$ -ciklične regularnosti, glej razdelek 5.1. Nato pa uvedemo algoritem za njihovo prepoznavo, ki teče v linearnem času, glej razdelek 5.2.

## 5.1 Ciklična struktura zloženih kock

Ker so zložene kocke razdaljno tranzitivne (glej npr. [42]), so tudi ločno tranzitivne, kar pomeni, da so  $[1, \lambda, m]$ -ciklično regularne za vsak  $m$ . V tem razdelku študiramo ciklično strukturo zloženih kock in določimo vrednost  $\lambda$  v primeru  $[1, \lambda, 4]$ ,  $[1, \lambda, 6]$  in  $[2, \lambda, 6]$ -ciklične regularnosti. Pri analizi bomo uporabili naslednje lastnosti zloženih kock.

*Opomba 5.1.* Naj bo  $C$  poljuben cikel v  $FQ_n$ . Potem za vse oznake iz  $\{1, 2, \dots, n-1, d\}$  velja, da se v  $C$  pojavijo bodisi vse sodo-krat bodisi vse liho-krat.

**Izrek 5.2** (Brouwer idr. [10], Xu, Ma [45]). *Graf  $FQ_n$  je dvodelen, če in samo če je  $n$  sod.*

**Izrek 5.3** (Xu, Ma [45]). *Vsaka povezava grafa  $FQ_n$  leži v vseh ciklih sode dolžine med 4 in  $2^{n-1}$ . V primeru, da je  $n$  lih vsaka povezava leži tudi na vseh ciklih lihe dolžine med  $n$  in  $2^{n-1} - 1$ .*

### 5.1.1 4-cikli

V tem razdelku se posvetimo 4-ciklom v zloženih kockah. Na tem področju poznamo naslednji rezultat.

**Izrek 5.4** (Mirafzal [34]). *Zložena kocka  $FQ_3$  je  $[2, 3, 4]$ -ciklično regularna. Vse ostale zložene kocke  $FQ_n$  so  $[2, 1, 4]$ -ciklično regularne.*

Podobno dokažemo za  $[1, \lambda, 4]$ -ciklično regularnost.

**Izrek 5.5.** *Zloženi kocki  $FQ_2$  in  $FQ_4$  sta  $[1, 0, 4]$  in  $[1, 9, 4]$ -ciklično regularni. Vse ostale zložene kocke  $FQ_n$  so  $[1, n - 1, 4]$ -ciklično regularne.*

*Dokaz.* Ker sta  $FQ_2 \simeq K_2$  in  $FQ_4 \simeq K_{4,4}$ , ni težko opaziti, da trditev drži za  $n \in \{2, 4\}$ . Opazimo, da v poljubnem ciklu ne moremo imeti dveh zaporednih diagonalnih povezav. Torej ima 4-cikel lahko največ dve diagonalni povezavi. Pravzaprav, z izjemo  $FQ_4$  imajo 4-cikli v vseh  $FQ_n$  le 2 ali 0 diagonalnih povezav (glej opombo 5.1).

Če želimo pokazati, da je zložena kocka  $[1, n, 4]$ -ciklično regularna, za  $n \notin \{2, 4\}$ , moramo vzeti poljubno povezavo  $e$  in pogledati v koliko različnih 4-ciklih leži. Ta postopek ločimo na dve možnosti, ko je  $e \in H$  in ko je  $e \in D$ . V primeru, ko je  $e \in D$  ima 4-cikel še dodatno diagonalno povezavo in dve povezavi hiperkocke. Označimo povezavo  $e$  z  $d$  in poljubno povezavo iz  $H$  z  $i$ . Takih ciklov je natanko  $n - 1$  in so oblike  $(d, i, d, i)$ . V primeru, ko je  $e \in H$  imamo dve možnosti za 4-cikle. Označimo povezavo  $e$  z  $i$ , še eno povezavo iz  $H$  z  $j$  in diagonalne povezave z  $d$ . Če ima cikel dve diagonalni povezavi, potem je enolično določen in ima obliko  $(i, d, i, d)$ , v primeru, ko cikel nima nobene diagonalne povezave imamo  $n - 2$  ciklov, ki imajo obliko  $(i, j, i, j)$ . Torej leži vsaka povezava v  $n - 1$  različnih 4-ciklih.  $\square$

### 5.1.2 6-cikli

V tem razdelku določimo vrednost  $\lambda$  pri  $[1, \lambda, 6]$  in  $[2, \lambda, 6]$ -ciklični regularnosti zloženih kock. Pri analizi 6-ciklov si pomagamo z naslednjo definicijo.

**Definicija 5.6.** Naj bo  $FQ_n$  zložena kocka dimenzije  $n$  in naj bo  $F_n = \{1, 2, \dots, n\} \cup \{d\}$ . Za dva 6-cikla,  $C_1 = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$  in  $C_2 = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$ , kjer so  $a_i, b_i \in F_n$  ( $1 \leq i \leq 6$ ), pravimo, da sta ekvivalentna, če obstaja permutacija  $f : F_n \rightarrow F_n$ , za katero je  $f(d) = d$  in  $f(C_1) = C_2$ , kjer je

$$f(C_1) := (f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4), f(a_5), f(a_6)).$$

S pomočjo definicije 5.6 bomo šteli 6-cikle glede na fiksirano prvo povezavo, zato zamiki zaporedja v splošnem niso ekvivalentni. Za lažje razumevanje definicije si pogledjmo sledeči primer.

**Primer 5.7.** Naj bo  $G = \text{FQ}_6$  in naj bodo  $C_1 = (1, 2, 3, 1, 2, 3)$ ,  $C_2 = (4, 5, 6, 4, 5, 6)$  in  $C_3 = (4, d, 6, 4, d, 6)$  tri njegovi 6-cikli.

Hitro se lahko prepričamo, da sta cikla  $C_1$  in  $C_2$  ekvivalentna, saj za  $f : F_6 \rightarrow F_6$  podano s predpisom

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & d \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & d \end{pmatrix}$$

velja  $f(C_1) = C_2$ . Vendar  $C_3$  ni ekvivalenten ostalima danima 6-cikloma, saj ne obstaja takšna permutacija, ki sledi pogojem definicije 5.6, ki bi preslikala 2 ali 5 v  $d$ .

### Določitev $[1, \lambda, 6]$ -ciklične regularnosti

Zložene kocke so ločno tranzitivne, zato moramo, za določitev  $\lambda$  vrednosti  $[1, \lambda, 6]$ -ciklične regularnosti, fiksirati poljubno povezavo in ptešteti v koliko neekvivalentnih ciklih se pojavi. To lahko naredimo na dva načina, s fiksiranjem diagonalne povezave ali povezave hiperkocke. V nadaljevanju obravnavamo oba primera, saj s tem ne le določimo iskano  $\lambda$  vrednost, temveč tudi karakteriziramo vse 6-cikle, ki se v zloženih kockah pojavijo.

### 6-cikli s fiksirano povezavo hiperkocke

V tem razdelku zapišemo vse 6-cikle, ki se začnejo s povezavo hiperkocke. Zaradi ekvivalentnosti 6-ciklov lahko, brez škode za splošnost, za prvo povezavo vzamemo povezavo z oznako 1. Te cikle ločimo glede na število diagonalnih povezav, ki jih premorejo. Ker dve diagonalni povezavi nista nikoli zaporedni v ciklu, imajo ti 6-cikli največ 3 diagonalne povezave. Skozi ta razdelek bo število  $n$  predstavljalo dimenzijo zložene kocke  $\text{FQ}_n$ ,  $d$  diagonalno povezavo,  $i, j, k, l > 1$  pa paroma različna pozitivna cela števila, manjša od  $n$ . Celotna analiza, ki smo jo opravili je povzeta v preglednici 9. Cikli pa so upodobljeni na sliki 16.

**Če cikel nima diagonalnih povezav,** potem mora imeti eno izmed naslednjih oblik:

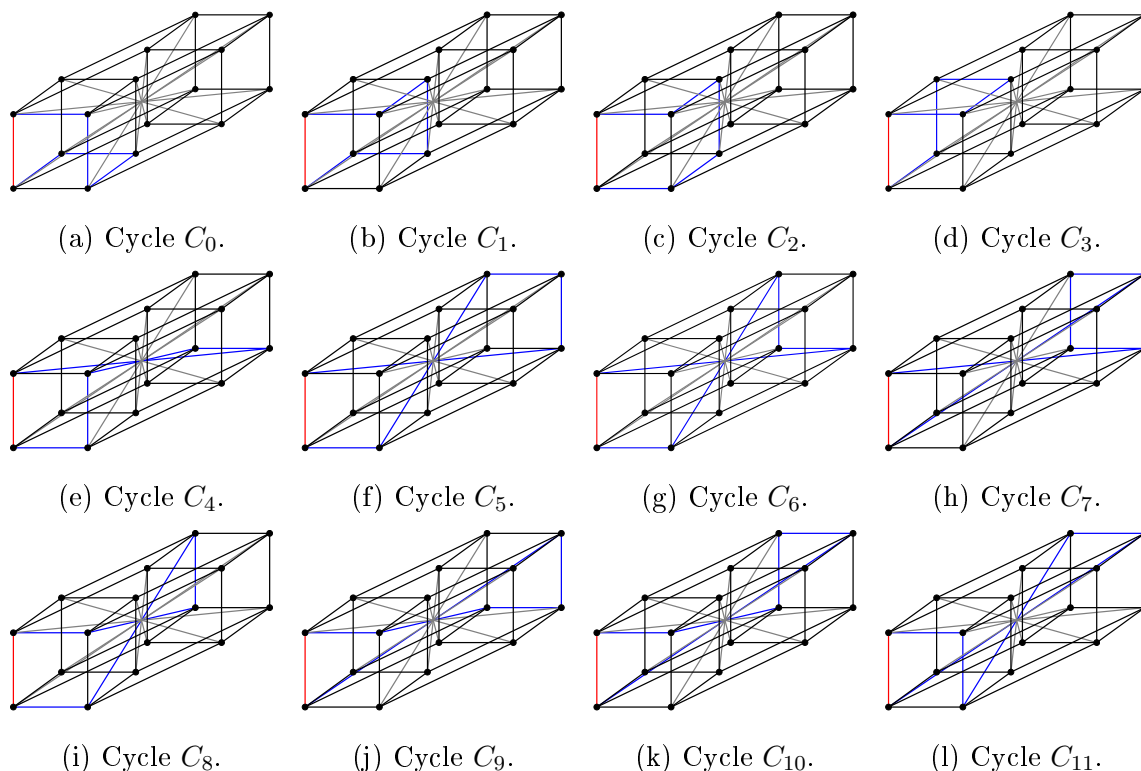
$$C_0 = (1, i, 1, j, i, j) \quad \text{ali}$$

$$C_1 = (1, i, j, 1, i, j) \quad \text{ali}$$

$$C_2 = (1, i, j, 1, j, i) \quad \text{ali}$$

$$C_3 = (1, i, j, i, 1, j).$$

Prispevek vseh ciklov k  $\lambda$  vrednosti grafa  $\text{FQ}_n$  je  $(n - 2)(n - 3)$ .



Slika 16: Primer vseh neekvivalentnih 6-ciklov grafov  $FQ_n$  ( $n \notin \{3, 5\}$ ), ki se začnejo s povezavo 1.

Če ima cikel le 1 diagonalno povezavo, potem mora imeti eno izmed naslednjih oblik:

$$D_1 = (1, d, i, j, k, l) \quad \text{ali}$$

$$D_2 = (1, i, d, j, k, l) \quad \text{ali}$$

$$D_3 = (1, i, j, d, k, l) \quad \text{ali}$$

$$D_4 = (1, i, j, k, d, l) \quad \text{ali}$$

$$D_5 = (1, i, j, k, l, d).$$

Ti cikli obstajajo le v grafu  $FQ_6$  in prispevajo 24 k  $\lambda$  vrednosti grafa.

**Če ima cikel 2 diagonalni povezavi,** potem mora imeti eno izmed naslednjih oblik:

$$C_4 = (1, d, i, d, 1, i) \quad \text{ali}$$

$$C_5 = (1, d, 1, i, d, i) \quad \text{ali}$$

$$C_6 = (1, d, i, 1, d, i) \quad \text{ali}$$

$$C_7 = (1, d, i, 1, i, d) \quad \text{ali}$$

$$C_8 = (1, i, d, 1, d, i) \quad \text{ali}$$

$$C_9 = (1, i, d, i, 1, d) \quad \text{ali}$$

$$C_{10} = (1, i, d, 1, i, d) \quad \text{ali}$$

$$C_{11} = (1, i, 1, d, i, d).$$

Prispevek vsakega izmed teh ciklov k  $\lambda$  vrednosti grafa  $FQ_n$  je  $n - 2$ .

**Če ima cikel 3 diagonalne povezave,** potem je oblike

$$D_6 = (1, d, i, d, j, d).$$

Ta cikel obstaja le v grafu  $FQ_4$  in prispeva 2 k  $\lambda$  vrednosti grafa.

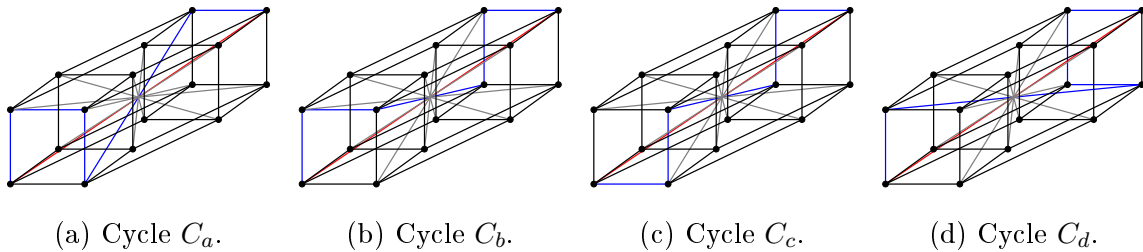
Preglednica 9: Vsi neekvivalentni 6-cikli grafov  $FQ_n$  ( $n \notin \{4, 6\}$ ), ki se začnejo s povezavo 1.

Oznaka	Predstavnik 6-cikla	Doprinos k $\lambda$ vrednosti
$C_0$	$(1, i, 1, j, i, j)$	$(n - 2)(n - 3)$
$C_1$	$(1, i, j, 1, i, j)$	$(n - 2)(n - 3)$
$C_2$	$(1, i, j, 1, j, i)$	$(n - 2)(n - 3)$
$C_3$	$(1, i, j, i, 1, j)$	$(n - 2)(n - 3)$
$C_4$	$(1, d, i, d, 1, i)$	$n - 2$
$C_5$	$(1, d, 1, i, d, i)$	$n - 2$
$C_6$	$(1, d, i, 1, d, i)$	$n - 2$
$C_7$	$(1, d, i, 1, i, d)$	$n - 2$
$C_8$	$(1, i, d, 1, d, i)$	$n - 2$
$C_9$	$(1, i, d, i, 1, d)$	$n - 2$
$C_{10}$	$(1, i, d, 1, i, d)$	$n - 2$
$C_{11}$	$(1, i, 1, d, i, d)$	$n - 2$



### 6-cikli s fiksirano diagonalno povezavo

V tem razdelku zapišemo 6-cikle, ki se začnejo z diagonalno povezavo. Zaradi ekvivalentnosti lahko obravnavamo le 6-cikle, začeni s povezavo  $d^*$ . Zopet ločimo 6-cikle glede na število diagonalnih povezav, ki jih premorejo. Skozi ta razdelek število  $n$  ponovno predstavlja dimenzijo zložene kocke  $FQ_n$ ,  $d$  diagonalno povezavo in  $1 \leq i, j, k, l, m \leq n - 1$  paroma različna pozitivna cela števila. Celotna analiza je povzeta v preglednici 10. Cikli pa so upodobljeni na sliki 17.



Slika 17: Primer vseh neekvivalentnih 6-ciklov grafov  $FQ_n$  ( $n \notin \{4, 6\}$ ), ki se začnejo s povezavo  $d^*$ .

**Če ima cikel 1 diagonalno povezavo,** potem obstaja le v grafu  $FQ_6$  in ima naslednjo obliko

$$D_a = (d^*, i, j, k, l, m).$$

Ta cikel prispeva 120 k  $\lambda$  vrednosti grafa.

**Če ima cikel 2 diagonalni povezavi,** potem mora imeti eno izmed naslednjih oblik.

$$C_a = (d^*, i, d, j, i, j) \quad \text{ali}$$

$$C_b = (d^*, i, j, d, i, j) \quad \text{ali}$$

$$C_c = (d^*, i, j, d, j, i) \quad \text{ali}$$

$$C_d = (d^*, i, j, i, d, j).$$

Prispevek vsakega izmed teh ciklov k  $\lambda$  vrednosti grafa  $FQ_n$  je  $(n - 1)(n - 2)$ .

**Če ima cikel 3 diagonalne povezave,** potem je oblike

$$D_b = (d^*, i, d, j, d, k).$$

Ta cikel obstaja le v grafu  $FQ_4$  in prispeva 6 k  $\lambda$  vrednosti grafa.

Zgornja analiza porodi naslednji rezultat.

**Izrek 5.8.** *Zloženi kocki  $FQ_4$  in  $FQ_6$  sta  $[1, 36, 6]$  in  $[1, 200, 6]$ -ciklično regularni. Vse ostale zložene kocke  $FQ_n$  so  $[1, 4(n - 2)(n - 1), 6]$ -ciklično regularne.*

Preglednica 10: Vsi neekvivalentni 6-cikli grafov  $FQ_n$  ( $n \notin \{4, 6\}$ ), ki se začnejo s povezavo  $d^*$ .

Oznaka	Predstavnik 6-cikla	Doprinos k $\lambda$ vrednosti
$C_a$	$(d^*, i, d, j, i, j)$	$n(n-1)$
$C_b$	$(d^*, i, j, d, i, j)$	$n(n-1)$
$C_c$	$(d^*, i, j, d, j, i)$	$n(n-1)$
$C_d$	$(d^*, i, j, i, d, j)$	$n(n-1)$

### Določitev $[2, \lambda, 6]$ -ciklične regularnosti

Če želimo določiti  $\lambda$  vrednost  $[2, \lambda, 6]$ -ciklične regularnosti zloženih kock moramo fiksirati poljubno pot  $p$  na dveh povezavah in prešteti v koliko neekvivalentnih ciklih se pojavi. Ker dve diagonalni povezavi nikoli nista sosednji, obravnavamo le dva primera: pot  $p$  je sestavljena iz dveh povezav hiperkocke in pot  $p$  sestoji iz povezave hiperkocke in diagonalne povezave.

### Pot $p$ premore dve povezvi hiperkocke

Ni težko opaziti, da sosednji povezavi nikoli nimata iste oznake. Zaradi ekvivalentnosti 6-ciklov lahko, brez škode za splošnost, povezavi hiperkocke fiksiramo kot 1 in 2. Sedaj želimo določiti v koliko neekvivalentnih 6-ciklih leži pot  $p = (1, 2)$ . Analizo ločimo, glede na število diagonalnih povezav, ki jih 6-cikel premore. Skozi razdelek število  $n$  ponovno predstavlja dimenzijo zložene kocke  $FQ_n$ ,  $d$  diagonalno povezavo in  $3 \leq i, j, k \leq n-1$  paroma različna pozitivna cela števila. Celotna analiza je povzeta v preglednici 11. Cikli pa so upodobljeni na sliki 18.

Če cikel nima diagonalnih povezav, potem mora imeti eno izmed naslednjih oblik:

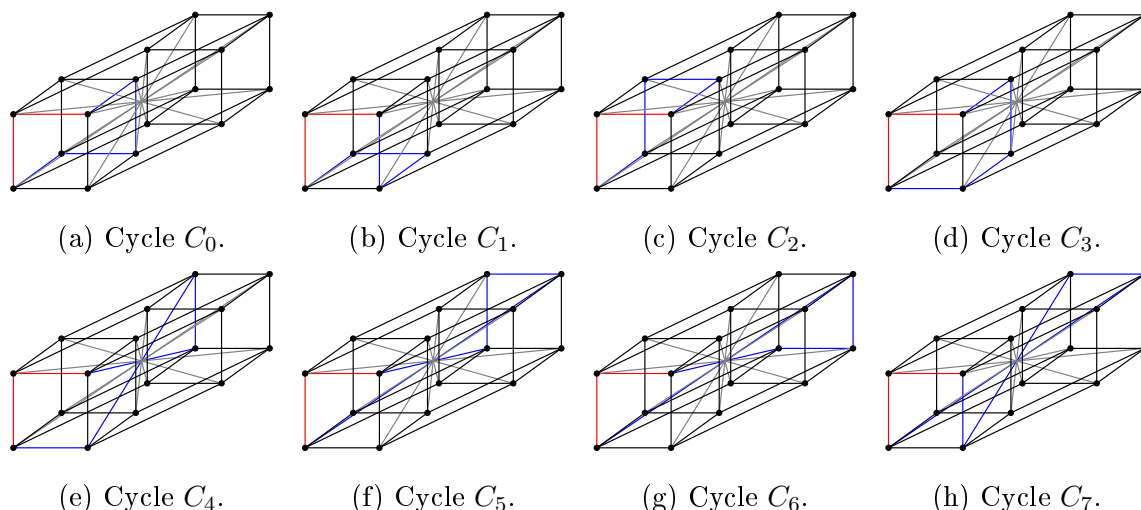
$$C_0 = (1, 2, i, 1, 2, i) \quad \text{ali}$$

$$C_1 = (1, 2, 1, i, 2, i) \quad \text{ali}$$

$$C_2 = (1, 2, i, 2, 1, i) \quad \text{ali}$$

$$C_3 = (1, 2, i, 1, i, 2).$$

Prispevek vseh ciklov k  $\lambda$  vrednosti grafa  $FQ_n$  je  $(n-3)$ .



Slika 18: Primer vseh neekvivalentnih 6-ciklov grafov  $FQ_n$  ( $n \neq 6$ ), ki se začnejo s potjo  $p = (1, 2)$ .

**Če ima cikel le 1 diagonalno povezavo,** potem mora imeti eno izmed naslednjih oblik:

$$D_1 = (1, 2, d, i, j, k) \quad \text{ali}$$

$$D_2 = (1, 2, i, d, j, k) \quad \text{ali}$$

$$D_3 = (1, 2, i, j, d, k) \quad \text{ali}$$

$$D_4 = (1, 2, i, j, k, d).$$

Ti cikli obstajajo le v grafu  $FQ_6$  in prispevajo 6 k  $\lambda$  vrednosti grafa.

**Če ima cikel 2 diagonalni povezavi,** potem mora imeti eno izmed naslednjih oblik:

$$C_4 = (1, 2, d, 1, d, 2) \quad \text{ali}$$

$$C_5 = (1, 2, d, 1, 2, d) \quad \text{ali}$$

$$C_6 = (1, 2, d, 2, 1, d) \quad \text{ali}$$

$$C_7 = (1, 2, 1, d, 2, d).$$

Prispevek vsakega izmed teh ciklov k  $\lambda$  vrednosti grafa  $FQ_n$  je 1.

Ni težko opaziti, da ne obstaja cikel začenši s potjo  $p$ , ki bi vseboval 3 diagonalne povezave.

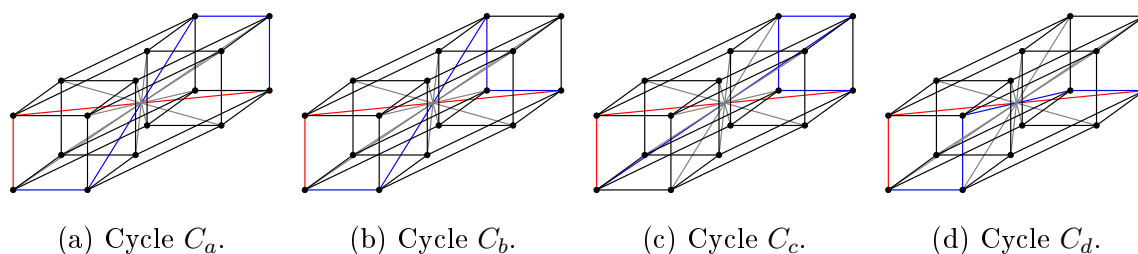
### Pot $p$ premore povezavo hiperkocke in diagonalno povezavo

V tem primeru pot  $p$  sestoji iz povezave hiperkocke in diagonalne povezave. Zaradi ekvivalentnosti 6-ciklov lahko, brez škode za splošnost, povezavi fiksiramo kot 1 in  $d^*$ .

Preglednica 11: Vsi neekvivalentni 6-cikli v grafu  $FQ_n$  ( $n \neq 6$ ), ki se začnejo s potjo  $p = (1, 2)$ .

Label	A representative of a 6-cycle	Contribution towards $\lambda$
$C_0$	$(1, 2, i, 1, 2, i)$	$(n - 3)$
$C_1$	$(1, 2, 1, i, 2, i)$	$(n - 3)$
$C_2$	$(1, 2, i, 2, 1, i)$	$(n - 3)$
$C_3$	$(1, 2, i, 1, i, 2)$	$(n - 3)$
$C_4$	$(1, 2, d, 1, d, 2)$	1
$C_5$	$(1, 2, d, 1, 2, d)$	1
$C_6$	$(1, 2, d, 2, 1, d)$	1
$C_7$	$(1, 2, 1, d, 2, d)$	1

Analize se lotimo podobno kot v prejšnjem primeru. Opazimo, da vrstni red povezav v  $p$  ni pomemben, saj so cikli na  $(1, d^*)$  enaki ciklom na  $(d^*, 1)$ , le da so ti zapisani v obratnem vrstnem redu. Dimenzija zložene kocke  $FQ_n$  je ponovno  $n$ ,  $d$  je diagonalna povezava in  $2 \leq m, i, j, k \leq n - 1$  so paroma različna pozitivna cela števila. Celotna analiza je povzeta v preglednici 12. Cikli pa so upodobljeni na sliki 19.



Slika 19: Primer vseh neekvivalentnih 6-ciklov grafov  $FQ_n$  ( $n \notin \{4, 6\}$ ), ki se začnejo s potjo  $p = (1, d^*)$ .

Če ima cikel 1 diagonalno povezavo, potem obstaja le v grafu  $FQ_6$  in ima naslednjo obliko

$$D_a = (1, d^*, m, i, j, k).$$

Ta cikel prispeva 24 k  $\lambda$  vrednosti grafa.

Če ima cikel 2 diagonalni povezavi, potem mora imeti eno izmed naslednjih oblik.

$$C_a = (1, d^*, 1, m, d, m) \quad \text{ali}$$

$$C_b = (1, d^*, m, 1, d, m) \quad \text{ali}$$

$$C_c = (1, d^*, m, 1, m, d) \quad \text{ali}$$

$$C_d = (1, d^*, m, d, 1, m).$$

Prispevek vsakega izmed teh ciklov k  $\lambda$  vrednosti grafa  $FQ_n$  je  $(n - 2)$ .

Če ima cikel 3 diagonalne povezave, potem je oblike

$$D_b = (1, d^*, m, d, j, d).$$

Ta cikel obstaja le v grafu  $FQ_4$  in prispeva 2 k  $\lambda$  vrednosti grafa.

Preglednica 12: Vsi neekvivalentni 6-cikli grafov  $FQ_n$  ( $n \notin \{4, 6\}$ ), ki se začnejo s potjo  $p = (1, d^*)$ .

Oznaka	Predstavnik 6-cikla	Doprinos k $\lambda$ vrednosti
$C_a$	$(1, d^*, 1, m, d, m)$	$(n - 2)$
$C_b$	$(1, d^*, m, 1, d, m)$	$(n - 2)$
$C_c$	$(1, d^*, m, 1, m, d)$	$(n - 2)$
$C_d$	$(1, d^*, m, d, 1, m)$	$(n - 2)$

Zgornja analiza porodi naslednji rezultat.

**Izrek 5.9.** *Zložena kocka  $FQ_4$  ni  $[2, \lambda, 6]$ -ciklično regularna. Zložena kocka  $FQ_6$  je  $[2, 2, 6]$ -ciklično regularna. Vse ostale zložene kocke  $FQ_n$  so  $[2, 4(n - 2), 6]$ -ciklično regularne.*

## 5.2 Prepoznavna zloženih kock

Ker so zložene kocke ločno tranzitivne in  $[2, \lambda, 4]$  ter  $[2, \lambda, 6]$ -ciklično regularne, nam podoben pristop kot v primeru  $I$ -grafov in dvojno posplošenih Petersenovih grafov, na 4 in 6-ciklih, ne pomaga pri njihovi prepoznavi. V nadaljevanju je zapisan algoritem, ki temelji na strukturnih lastnostih zloženih kock. Algoritem, kot vhodne podatke prejme poljuben graf  $G$ , za katerega določi, če je član družine zloženih kock ali ne. V primeru, da je  $G$  član družine, algoritem določi njegove parametre in poda certifikat pravilnosti (natančen izomorfizem med vhodnim grafom in članom družine).

Preden začnemo z obravnavo algoritma moramo vpeljati še naslednje oznake. Za poljubni točki  $u, v$  v grafu  $G$  definiramo množico  $W_{uv}$ , kot množico točk grafa  $G$ , ki so bližje točki  $u$  kot točki  $v$ ,

$$W_{uv} = \{x \in V(G) \mid d(u, x) < d(v, x)\}.$$

Algoritem 4 sestoji iz dveh delov. V prvem določimo množico diagonalnih povezav, ki jo v drugem delu (glej algoritem 5) uporabimo pri preverjanju, če je vhodni graf izomorfen zloženi kocki.

---

**Algoritem 4** Postopek prepoznavanja zloženih kock.

---

**Zahteva:**  $n$ -regularen, povezan graf  $G$  na  $2^{n-1}$  vozliščih.

- 1:  $\mathcal{L} \leftarrow$  prazen slovar na povezavah grafa  $G$ ,  $S, S' \leftarrow$  prazni množici,  $i \leftarrow$  oznaka  $\in \{1, 2, \dots, n-1\}$
  - 2: Označi poljubno povezavo  $uv \in E(G)$  z  $d$  in jo dodaj v  $S'$ .
  - 3: **za** vozlišči  $a \in N(u) \setminus \{v\}$  in  $b \in N(v) \setminus \{u\}$  **naredi**
  - 4:     **če**  $ab \in E(G)$  **potem**
  - 5:          $\mathcal{L}[au] = i$  in  $\mathcal{L}[bv] = i$
  - 6:         dodaj  $au, bv$  v  $S$  in izberi poljubno neuporabljeno oznako  $i$
  - 7: **dokler**  $S$  ni prazna množica **naredi**
  - 8:     Izberi povezavo  $uv \in S$  in jo dodaj v  $S'$ .
  - 9:     **za** poljubni povezavi  $au, vb \in E(G) \setminus \{uv\}$  **naredi**
  - 10:         **če**  $ab \in E(G)$  **potem**
  - 11:             Označi  $au, vb$  tako, da je  $\mathcal{L}[au] = \mathcal{L}[vb]$
  - 12:              $S = S \cup \{au, vb\} \setminus S'$
  - 13: Definiraj  $D = \{uv \in E(G) : \mathcal{L}[uv] = d\}$  in RAZŠIRI( $G, D$ ).
- 

Če vhodni graf  $G$  ni povezan,  $n$ -regularen z  $2^{n-1}$  vozlišči, potem graf ni v družini zloženih kock. Te pogoje lahko preverimo v linearnem času, zato lahko privzamemo, da vhodni graf algoritma 4 izpolnjuje zahteve algoritma.

**Določitev množice diagonalnih povezav.** Algoritem začne z dvema praznima množicama  $S, S'$  in s praznim slovarjem, ki ima kot ključne povezave grafa  $G$ , njihove vrednosti pa predstavljajo oznake na povezavah. Vrednost  $i$  predstavlja poljubno oznako iz množice  $\{1, \dots, n-1\}$ . Začnemo z izborom poljubne povezave  $uv \in E(G)$ , ki jo označimo kot diagonalno povezavo. To lahko naredimo, ker so zložene kocke ločno tranzitivne. Sedaj vzamemo vozlišči  $a, b$ , ki sta sosednji vozliščema  $u, v$  in, v primeru, da tvorijo 4-cikel, označimo povezave  $au$  in  $bv$  z oznako  $i$ , jih dodamo v  $S$  ter zamenjamo oznako. Ko se zanka v vrstici 3 izvede do konca ima množica  $S$  natanko

$2(n - 1)$  povezav,  $n - 1$  izmed njih je incidenčnih vozlišču  $u$  in imajo različne oznake (med 1 in  $n - 1$ ). Enako velja za ostalih  $n - 1$  povezav in vozlišče  $v$ . Celotna zanka se izvede v času  $O(n^2)$ . Sedaj, dokler množica  $S$  ni izpraznjena, izberemo poljubno povezavo  $uv \in S$  in opravimo podoben postopek, z izjemo, da tu označimo povezave glede na že označene povezave. Ker za poljubno povezavo  $uv \in S$  v vrstici 7 vedno velja, da ima eno njeno krajišče vse incidenčne povezave že označene in ker zanka na vrstici 9 označi vse povezave incidenčne povezavi  $uv$ , je poimenovanje v vrstici 11 vedno enolično določeno. Ta celoten postopek se izvede v času  $O(|E(G)|)$ . Ko so vse povezave označene je določitev diagonalnih povezav  $D$  preprosta. Kar nam preostane je preveriti, če je  $G$  izomorfen  $n$  dimenzionalni zloženi kocki. To opravimo s pomočjo funkcije  $\text{RAZŠIRI}(G, D)$ , glej algoritem 5.

---

**Algoritem 5** Funkcija  $\text{RAZŠIRI}(G, D)$  definirana za zložene kocke.

---

- 1: če  $H = G[E(G) \setminus D]$  ni dvodelen graf ali  $|E(H)| \neq 2^{n-1}n$  **potem**
  - 2: vrni **ne drži**.
  - 3: Vzami poljubno povezavo  $uv \in E(H)$ .
  - 4: če povezave med  $H[W_{uv}]$  in  $H[W_{vu}]$  ne definirajo popolnega prirejanja in izomorfizma med  $H[W_{uv}]$  in  $H[W_{vu}]$  **potem**
  - 5: Vrni **ne drži**.
  - 6: **sicer** če  $H[W_{uv}] = K_1$  **potem**
  - 7: Dodaj oznako 0 vozlišču iz  $W_{uv}$  in 1 vozlišču iz  $W_{vu}$ .
  - 8: **sicer**
  - 9: Dodaj oznako 0 vozliščem iz  $W_{uv}$  in 1 vozliščem iz  $W_{vu}$ .
  - 10: Ponovno izvedi vrstico 3 za  $H[W_{uv}]$  in  $H[W_{vu}]$ .
  - 11: Preveri, če diagonalne povezave  $D$  upoštevajo poimenovanje vozlišč v  $G$ .
- 

**Določitev, če je  $G$  izomorfen zloženi kocki** V tem delu uporabimo podoben pristop kakor Hammack idr. [20] v algoritmu, ki v linearnem času prepozna hiperkocke. Za določitev parametrov vhodnega grafa moramo najprej preveriti, če je  $H = G[E(G) \setminus D]$  izomorfen grafu hiperkocke dimenzije  $(n - 1)$  in ustrezno poimenovati njegova vozlišča. Vzamemo poljubno povezavo  $e = uv$  grafa  $H$  in izračunamo množici  $W_{uv}, W_{vu}$ , za kar porabimo  $O(|E(G)|)$  časa. V primeru, da je  $H$  hiperkocka dimenzije  $(n - 1)$  sta  $W_{uv}$  in  $W_{vu}$  hiperkocki dimenzije  $(n - 2)$ . Torej je potrebno preveriti, če povezave med  $H[W_{uv}]$  in  $H[W_{vu}]$  inducirajo popolno prirejanje na grafu  $H$  in izomorfizem. Ta del se ponovno izvede v času  $O(|E(G)|)$ . V primeru, ko povezave med  $H[W_{uv}]$  in  $H[W_{vu}]$  inducirajo popolno prirejanje, dodamo 0 oznakam vozlišč iz prve množice in 1 oznakam vozlišč iz druge množice. S tem smo upoštevali vse povezave iz popolnega prirejanja. Vsako

množico nato razpolovimo in ponovimo postopek, dokler ni v množici le eno vozlišče. Postopek se ponovi  $n - 1$  krat in poimenuje vsa vozlišča grafa  $H$ . Ta del se izvede v linearnem času. Sedaj je dovolj preveriti le, če povezave iz  $D$  sledijo poimenovanju grafa, kar se izvede v linearnem času. Ni težko opaziti, da algoritem 5 označi vsa vozlišča.

Analiza algoritma 4 porodi naslednji rezultat.

**Posledica 5.10.** *Grafe zloženih kock lahko prepoznamo v linearnem času.*



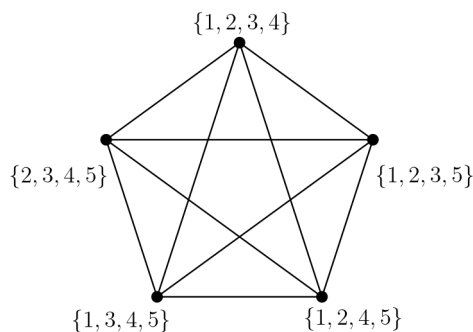
## 6 Nadaljnje delo

Z uporabo podobnih pristopov kot smo jih opisali v magistrski nalogi menimo, da lahko prepoznamo grafe iz nekaterih ostalih parametričnih družin z omejeno stopnjo vozlišč. Nekatero izmed teh družin opišemo v tem poglavju.

### 6.1 Johnsonovi grafi

Johnsonovi grafi so regularni grafi definirani na naslednji način.

**Definicija 6.1.** Za naravni števili  $n, k$ , kjer je  $n \geq k$  in za množico  $\Omega$  moči  $n$ , je  $J(n, k)$  *Johnsonov graf*, čigar vozlišča predstavljajo podmnožice množice  $\Omega$  velikosti  $k$ . Dve vozlišči  $A$  in  $B$  sta povezani, natanko tedaj, ko je  $|A \cap B| = k - 1$ .



Slika 20: Primer Johnsonovega grafa  $J(5, 4)$ .

Graf  $J(n, k)$  ima torej  $\binom{n}{k}$  vozlišč,  $(n - k) \frac{k}{2} \binom{n}{k}$  povezav in je  $k(n - k)$ -regularen. Ti grafi so tesno povezani z Johnsonovi shemami, zato so zelo priljubljeni v različnih vejah matematike in računalništva. Veliko lastnosti teh grafov je že analiziranih me drugim vemo, da so vsi Johnsonovi grafi vozliščno tranzitivni [19], Hamiltonsko povezani [3], poznamo njihovo grupo avtomorfizmov [10, str. 255]., itn.

Kljub temu, da so znane mnoge lastnosti Johnsonovih grafov, problem njihovega prepoznavanja še ni razrešen. Menimo, da lahko z uporabo našega pristopa problem rešimo.

## 6.2 Rozetni grafi

Rozetne grafe je leta 2008 predstavil Wilson [44]. Deležni so bili že številnih študij, npr. Kovács idr. so klacificirali vse družine povezavno-tranzitivnih rozetnih grafov [26], izračunali njihovo grupo avtomorfizmov ter določili tiste, ki premorejo rotacijske preslikave [27], dolčeni so bili potrebni in zadostni pogoji izmorfizma dveh rozetnih grafov [14], karakterizirana je bila tudi grupa avtomorfizmov rozetnih grafov, ki niso povezavno tranzitivni [15].

**Definicija 6.2.** Za naravna števila  $n, a, k$ , kjer je  $n \geq 3$ ,  $n > a, k \geq 1$  in  $k < n/2$ , je *rozetni graf*  $R_n(a, k)$ , graf z množico vozlišč

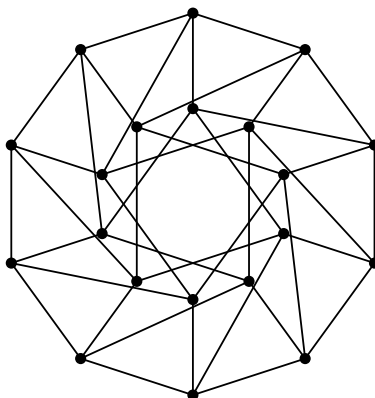
$$\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}.$$

Množico povezav sestavljajo štiri vrste povezav:

- *zunanje povezave*  $u_i u_{i+1}$ ,
- *0-špice*  $u_i w_i$ ,
- $(-a)$ -špice  $u_i w_{i-a}$  in
- *notranje povezave*  $u_i u_{i+k}$ ,

kjer indeksi predstavljajo ostanke pri deljenju z  $n$ .

Rozetni graf  $R_n(a, k)$  si lahko predstavljamo kot posplošen Petersenov graf  $G(n, k)$ , ki mu dodamo  $(-a)$ -špice (glej sliko 21).



Slika 21: Primer rozetnega grafa  $R_{10}(2, 3)$ .

Za uporabo našega pristopa bi bilo potrebno dokazati, da v vsakem rozetnem grafu obstaja cikel dolžine  $d$  (zdi se, da bi  $d$  lahko bil kar 8). Ker obstajajo družine neskončnih

povezavno tranzitivnih rozetnih grafov, nam analiza  $[1, \lambda, m]$ -ciklične regularnosti ne zagotavlja obstoj uspešnega algoritma za povezavo teh grafov. Vendar menimo, da bi pozitivne rezultate dobili v primeru obravnave  $[2, \lambda, m]$ -ciklične regularnosti. Prešteti bi morali torej v koliko  $m$ -ciklih se pojavi vsaka pot dolžine 2. Ker so rozetni grafi 4-regularni, pričakujemo, da bi algoritem tudi v tem primeru tekel v linearnem času.

### 6.3 Tabačjn grafi

Tabačjn grafi predstavljajo naravno posplošitev rozetnih grafov.

**Definicija 6.3.** Za naravna števila  $n, a, b, k$ , kjer je  $n \geq 3$ ,  $n > a, b, k \geq 1$ ,  $k \neq n/2$  in  $a \neq b$ , je *tabačjn graf*  $T(n; a; b; k)$ , graf z množico vozlišč

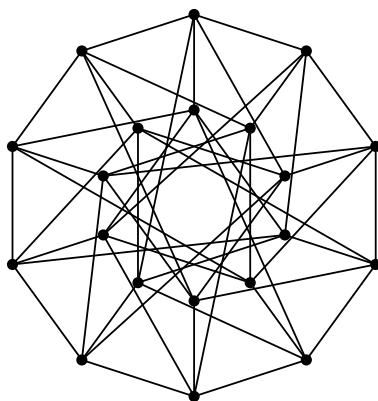
$$\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}.$$

Množico povezav sestavlja pet vrste povezav:

- *zunanje povezave*  $u_i u_{i+1}$ ,
- *0-špice*  $u_i w_i$ ,
- *a-špice*  $u_i w_{i+a}$ ,
- *b-špice*  $u_i w_{i+b}$  in
- *notranje povezave*  $u_i u_{i+k}$ ,

kjer indeksi predstavljajo ostanke pri deljenju z  $n$ .

Tabačjn graf  $T(n; a; b; k)$  si lahko predstavljamo kot posplošen Petersenov graf  $G(n, k)$ , ki mu dodamo  $a$  in  $b$ -špice (glej sliko 22).



Slika 22: Primer Tabačjn grafa  $T(10; 2; 6; 3)$ .

Kutnar idr. v članku [30] študirajo njihove grupe avtomorfizmov in pokažejo, da so vsi ti grafi vozliščno tranzitivni, v [5] pa klacificirajo vse ločno tranzitivne Tabačjn grafe. Podobno kot v prejšnjih primerih je problem prepoznavanja grafov še odprt. Menimo, da bi lahko z našim pristopom ta problem rešili in zagotovili algoritem, ki bi te grafe prepoznal v linernem času. Problema bi se lotili podobno kot pri rozetnih grafih. Preučevali bi torej  $[2, \lambda, m]$ -ciklično regularnost teh grafov, kjer je  $m$  najmanjša dolžina cikla, ki je prisoten v vsakem Tabačjn grafu.

## 7 Zaključek

V magistrskem delu smo si natančneje pogledali tri parametrične družine grafov in sicer  $I$ -grafe, dvojno posplošene Petersenove grafe in zložene kocke. Določili  $[1, \lambda, 8]$ -ciklično regularne  $I$ -grafe in dvojno posplošene Petersenove grafe. Za drugo družino smo podali tudi delno karakterizacijo izomorfizmov, vendar vprašanje celotne karakterizacije ostaja odprto. Poleg tega smo določili vrednost parametra  $\lambda$  v primeru  $[1, \lambda, 4]$ ,  $[1, \lambda, 6]$  in  $[2, \lambda, 6]$ -ciklične regularnosti zloženih kock in naredili popolno karakterizacijo opazovanih ciklov.

Za fiksirano povezavo nam je štetje 8-ciklov, v katerih povezava leži, omogočilo oblikovanje algoritma, ki v linearnem času odloči, če je dan graf član družine  $I$ -grafov ali dvojno posplošenih Petersenovih grafov. Strukturne lastnosti 4-ciklov zloženih kock pa so pripomogle k oblikovanju linearnega algoritma za njihovo prepoznavo.

Do sedaj je podoben pristop bil uporabljen le za družino posplošenih Petersenovih grafov [29]. Verjamemo, da se da podoben pristop uporabiti tudi na nekaterih drugih parametričnih grafovskih družinah, kot so npr. Johnsonovi grafi, rozetni grafi ali Tabačjni grafi. Nekatero izmed omenjenih grafovskih družin so predstavljene tudi v magistrski nalogi, kjer nakažemo, kako bi lahko pristopili k problemu.

## 8 Literatura in viri

- [1] ALCÓN, L., FARIA, L., DE FIGUEIREDO, C. M. H. IN GUTIERREZ, M. Clique graph recognition is NP-complete. In *Graph-theoretic concepts in computer science*, vol. 4271 of *Lecture Notes in Comput. Sci.* Springer, Berlin, 2006, pp. 269–277.
- [2] ALSPACH, B. The classification of Hamiltonian generalized Petersen graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 34, 3 (1983), 293–312.
- [3] ALSPACH, B. Johnson graphs are Hamilton-connected. *Ars Math. Contemp.* 6, 1 (2013), 21–23.
- [4] ALSPACH, B., ROBINSON, P. J. IN ROSENFELD, M. A result on Hamiltonian cycles in generalized Petersen graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 31, 2 (1981), 225–231.
- [5] ARROYO, A., HUBARD, I., KUTNAR, K., O'REILLY, E. IN ŠPARL, P. Classification of symmetric Tabačjn graphs. *Graphs Combin.* 31, 5 (2015), 1137–1153.
- [6] BOBEN, M., PISANSKI, T. IN ŽITNIK, A.  $I$ -graphs and the corresponding configurations. *J. Comb. Des.* 13, 6 (2005), 406–424.
- [7] BONDY, J. A. Variations on the Hamiltonian theme. *Canad. Math. Bull.* 15 (1972), 57–62.
- [8] BREU, H. IN KIRKPATRICK, D. G. Unit disk graph recognition is NP-hard. *Comput. Geom.* 9, 1-2 (1998), 3–24.
- [9] BROUWER, A. E. On the uniqueness of a certain thin near octagon (or partial 2-geometry, or parallelism) derived from the binary Golay code. *IEEE Trans. Inform. Theory* 29, 3 (1983), 370–371.
- [10] BROUWER, A. E., COHEN, A. M. IN NEUMAIER, A. *Distance-regular graphs*, vol. 18 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [11] CASTAGNA, F. IN PRINS, G. Every generalized Petersen graph has a Tait coloring. *Pacific J. Math.* 40 (1972), 53–58.

- [12] CHARTRAND, G., HEVIA, H. IN WILSON, R. J. The ubiquitous Petersen graph. vol. 100. 1992, pp. 303–311. Special volume to mark the centennial of Julius Petersen’s “Die Theorie der regulären Graphs”, Part I.
- [13] COXETER, H. S. M. Self-dual configurations and regular graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.* 56 (1950), 413–455.
- [14] DOBSON, E., KOVÁCS, I. IN MIKLAVIČ, V. The isomorphism problem for rose window graphs. *Discrete Math.* 323 (2014), 7–13.
- [15] DOBSON, E., KOVÁCS, I. IN MIKLAVIČ, V. The automorphism groups of non-edge-transitive rose window graphs. *Ars Math. Contemp.* 9, 1 (2015), 63–75.
- [16] FOSTER, R. M. *The Foster census*. Charles Babbage Research Centre, Winnipeg, MB, 1988. R. M. Foster’s census of connected symmetric trivalent graphs, With a foreword by H. S. M. Coxeter, With a biographical preface by Seymour Schuster, With an introduction by I. Z. Bouwer, W. W. Chernoff, B. Monson and Z. Star, Edited and with a note by Bouwer.
- [17] FRUCHT, R., GRAVER, J. E. IN WATKINS, M. E. The groups of the generalized Petersen graphs. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 70 (1971), 211–218.
- [18] GAREY, M. IN JOHNSON, D. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*. Mathematical Sciences Series. W. H. Freeman, 1979.
- [19] GODSIL, C. IN ROYLE, G. *Algebraic graph theory*, vol. 207 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [20] HAMMACK, R., IMRICH, W. IN KLAVŽAR, S. *Handbook of product graphs*, second ed. Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL, 2011. With a foreword by Peter Winkler.
- [21] HOLTON, D. A. IN SHEEHAN, J. *The Petersen graph*, vol. 7 of *Australian Mathematical Society Lecture Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [22] HORVAT, B., PISANSKI, T. IN ŽITNIK, A. Isomorphism checking of  $I$ -graphs. *Graphs Combin.* 28, 6 (2012), 823–830.
- [23] HSIEH, S.-Y. IN KUO, C.-N. Hamiltonian-connectivity and strongly Hamiltonian-laceability of folded hypercubes. *Comput. Math. Appl.* 53, 7 (2007), 1040–1044.
- [24] KLAVŽAR, S. IN LIPOVEC, A. Partial cubes as subdivision graphs and as generalized Petersen graphs. *Discrete Math.* 263, 1-3 (2003), 157–165.

- [25] KLOBAS, N. IN KRNC, M. Fast recognition of some parametric graph families. *arXiv e-prints* (Avg. 2020), arXiv:2008.08856.
- [26] KOVÁCS, I., KUTNAR, K. IN MARUŠIČ, D. Classification of edge-transitive rose window graphs. *J. Graph Theory* 65, 3 (2010), 216–231.
- [27] KOVÁCS, I., KUTNAR, K. IN RUFF, J. Rose window graphs underlying rotary maps. *Discrete Math.* 310, 12 (2010), 1802–1811.
- [28] KRATOCHVÍL, J. String graphs. II. Recognizing string graphs is NP-hard. *J. Combin. Theory Ser. B* 52, 1 (1991), 67–78.
- [29] KRNC, M. IN WILSON, R. J. Recognizing generalized Petersen graphs in linear time. *Discrete Applied Mathematics* 283 (2020), 756 – 761.
- [30] KUTNAR, K., MARUŠIČ, D., MIKLAVIČ, V. IN STRAŠEK, R. Automorphisms of Tabačjn graphs. *Filomat* 27, 7 (2013), 1157–1164.
- [31] KUTNAR, K. IN PETECKI, P. On automorphisms and structural properties of double generalized Petersen graphs. *Discrete Math.* 339, 12 (2016), 2861–2870.
- [32] LATIFI, S. IN EL-AMAWY, A. Properties and performance of folded hypercubes. *IEEE Transactions on Parallel & Distributed Systems* 2, 01 (jan 1991), 31–42.
- [33] LOVREČIČ SARAŽIN, M. A note on the generalized Petersen graphs that are also Cayley graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 69, 2 (1997), 226–229.
- [34] MIRAFZAL, S. M. Some other algebraic properties of folded hypercubes. *Ars Combin.* 124 (2016), 153–159.
- [35] MOLLARD, M. Cycle-regular graphs. *Discrete mathematics* 89, 1 (1991), 29–41.
- [36] NEDELA, R. IN ŠKOVIERA, M. Which generalized Petersen graphs are Cayley graphs? *J. Graph Theory* 19, 1 (1995), 1–11.
- [37] PETKOVŠEK, M. IN ZAKRAJŠEK, H. Enumeration of  $I$ -graphs: Burnside does it again. *Ars Math. Contemp.* 2, 2 (2009), 241–262.
- [38] QIN, Y.-L., XIA, B. IN ZHOU, S. Stability of generalized Petersen graphs. *arXiv e-prints* (Jul. 2018), arXiv:1807.07228.
- [39] RAGHAVAN, V. IN SPINRAD, J. Robust algorithms for restricted domains. vol. 48. 2003, pp. 160–172. Twelfth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (Washington, DC, 2001).



- [40] SOULIGNAC, F. J. IN SUEIRO, G. NP-hardness of the recognition of coordinated graphs. *Ann. Oper. Res.* 169 (2009), 17–34.
- [41] TERWILLIGER, P. The classification of distance-regular graphs of type IIB. *Combinatorica* 8, 1 (1988), 125–132.
- [42] VAN BON, J. Finite primitive distance-transitive graphs. *European J. Combin.* 28, 2 (2007), 517–532.
- [43] WATKINS, M. E. A theorem on Tait colorings with an application to the generalized Petersen graphs. *J. Combinatorial Theory* 6 (1969), 152–164.
- [44] WILSON, S. Rose window graphs. *Ars Math. Contemp.* 1, 1 (2008), 7–19.
- [45] XU, J.-M. IN MA, M. Cycles in folded hypercubes. *Appl. Math. Lett.* 19, 2 (2006), 140–145.
- [46] ZHOU, J.-X. IN FENG, Y.-Q. Cubic vertex-transitive non-Cayley graphs of order 8p. *Electron. J. Combin.* 19, 1 (2012), Paper 53, 13.

# PRILOGE

## A Algoritmi za konstrukcijo grafov

Spodaj so napisani algoritmi, ki omogočijo, da nam okoljse Sage grafe iz omenjenh družin tudi lepo izriše s pomočjo funkcije `plot()`.

### A.1 *I*-grafi

```
1 def Igraph(n, j, k):
2
3     if n < 3:
4         raise ValueError("n must be larger than 2")
5
6     if k < 1 or k \leq \lfloor (n-1) / 2 \rfloor:
7         raise ValueError("k must be in 1 <= k <= floor((n-1)/2)")
8
9     if j < 1 or j \leq \lfloor (n-1) / 2 \rfloor:
10        raise ValueError("k must be in 1 <= k <= floor((n-1)/2)")
11
12    G = Graph(2*n)
13
14    for i in range(n):
15        G.add_edge(i, (i+j) % n)
16        G.add_edge(i, i+n)
17        G.add_edge(i+n, n + (i+k) % n)
18
19    G._circle_embedding(list(range(n)), radius=1, angle=pi/2)
20    G._circle_embedding(list(range(n, 2*n)), radius=.5, angle=pi/2)
21
22    return G
```

Koda A.1: Algoritem za konstrukcijo *I*-grafov.

## A.2 Dvojno posplošeni Petersenovi grafi

```
1 def DoubleGeneralizedPetersenGraph(n,k):
2
3     if n < 3:
4         raise ValueError("n must be larger than 2")
5
6     if k < 1 or k \leq \lfloor (n-1) / 2 \rfloor:
7         raise ValueError("k must be in 1 <= k <= floor((n-1)/2)")
8
9     G = Graph(4*n)
10
11     for i in range(n):
12         G.add_edge(i, (i+1) % n)
13         G.add_edge(i + 3*n, (i+1) % n + 3*n)
14         G.add_edge(i, i+n)
15         G.add_edge(i + 2*n, i + 3*n)
16         G.add_edge(i+n, (i+k) % n + 2*n)
17         G.add_edge(i + 2*n, (i+k) % n + n)
18
19     G._circle_embedding(list(range(n)), radius=3, angle=pi/2)
20     G._circle_embedding(list(range(n, 2*n)), radius=2, angle=pi/2)
21     G._circle_embedding(list(range(2*n, 3*n)), radius=1.5, angle=pi/2)
22     G._circle_embedding(list(range(3*n, 4*n)), radius=0.5, angle=pi/2)
23
24     return G
```

Koda A.2: Algoritem za konstrukcijo dvojno posplošenih Petersenovih grafov.

## A.3 Rozetni grafi

```
1 def RoseWindowGraph(n,a,k):
2
3     if n < 3:
4         raise ValueError("n must be larger than 2")
5
6     if k < 1 or k \leq\lfloor(n-1)'\prime\rfloor':
7         raise ValueError("k must be in 1<= k <=floor((n-1)/2)")
8
9     if a < 1 or a = k or a = n/2 or a >= n :
10        raise ValueError("a must be bigger than 1, different than
11        k, n/2 and smaller than n")
12
13    G = Graph(2*n)
14
15    for i in range(n):
16        G.add_edge(i, (i+1) % n)
17        G.add_edge(i, i+n)
18        G.add_edge(i+n, n + (i+k) % n)
19        G.add_edge(i, (i + a) % n + n)
20
21    G._circle_embedding(list(range(n)), radius=1, angle=pi/2)
22    G._circle_embedding(list(range(n, 2*n)), radius=0.5, angle=pi/2)
23
24    return G
```

Koda A.3: Algoritem za konstrukcijo rozetnih grafov.

## A.4 Tabačjn grafi

```
1 def TabacjnGraph(n,a,b,k):
2
3     if n < 3:
4         raise ValueError("n must be larger than 2")
5
6     if k < 1 or k \leq\lfloor(n-1)'/2\rfloor':
7         raise ValueError("k must be in 1<= k <=floor((n-1)/2)")
8
9     if a < 1 or a = k or a = n/2 or a >= n :
10        raise ValueError("a must be bigger than 1, different than
11        k, n/2 and smaller than n")
12
13    if b < 1 or b = k or b = n/2 or b >= n or b = a:
14        raise ValueError("b must be bigger than 1, different than
15        k, a, n/2 and smaller than n")
16
17    G = Graph(2*n)
18
19    for i in range(n):
20        G.add_edge(i, (i+1) % n)
21        G.add_edge(i, i+n)
22        G.add_edge(i+n, n + (i+k) % n)
23        G.add_edge(i, (i + a) % n + n)
24        G.add_edge(i, (i + b) % n + n)
25
26    G._circle_embedding(list(range(n)), radius=1, angle=pi/2)
27    G._circle_embedding(list(range(n, 2*n)), radius=0.5, angle=pi/2)
28
29    return G
```

Koda A.4: Algoritem za konstrukcijo Tabačjn grafov.

## A.5 Zložene hiperkocke

```
1 def to_cartesian(r,phi):
2     return r * cos(phi), r*sin(phi)
3
4 def sum_vectors(sez):
5     x, y = 0, 0
6     for cx, cy in sez:
7         x += cx
8         y += cy
9     return x, y
10
11 def count_ones(b):
12     i = 0
13     while b > 0:
14         i += b % 2
15         b = b // 2
16     return i
17
18 def is_edge(i, j,d):
19     return count_ones(i ^ j) in (1,d)
20
21 def folded_hypercube(d):
22     n = 2**(d-1) # 1 << d
23
24     baza = {0b1: to_cartesian(1, 0), 0b10: to_cartesian(1, pi / 2), 0
25     b100: to_cartesian(0.8, pi / 5), 0b1000: to_cartesian(2, pi / 7),
26     0b10000: to_cartesian(2, pi / 12),0b100000: to_cartesian(2, pi /
27     24)}
28
29     #base vectors must be filled in manually using polar coordinates
30     #we are able to construct FQ-graphs in the dimension at most as
31     #much as the number of basis vectors we have
32
33     coord = {i: sum_vectors([v for k, v in baza.items() if i & k > 0])
34     for i in range(0, n)}
35
36     e_list = [(i, j) for i in range(0, n - 1) for j in range(i + 1, n)
37     if is_edge(i, j, d-1)]
38
39     g = Graph(e_list)
40
41     g.set_pos(coord)
42
43     return g
```

Koda A.5: Algoritem za konstrukcijo zloženih hiperkock.