

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Magistrsko delo

Rotacijsko minimizirajoča ogrodja prostorskih krivulj

(Rotation minimizing frames of spatial curves)

Ime in priimek: Ivana Jović

Študijski program: Matematične znanosti, 2. stopnja

Mentor: izr. prof. dr. Vito Vitrih

Koper, september 2020

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Ivana JOVIĆ

Naslov zaključne naloge: Rotacijsko minimizirajoča ogrodja prostorskih krivulj

Kraj: Koper

Leto: 2020

Število listov: 45

Število slik: 5

Število referenc:10

Mentor: izr. prof. dr. Vito Vitrih

UDK: 514.12(043.2)

Ključne besede: krivulja s pitagorejskim hodografom, racionalno ogrodje, rotacijsko minimizirajoče ogrodje, minimalni zasuk

Math. Subj. Class. (2010): 53A04, 65D17, 68U07

Izveček:

V magistrski nalogi bom predstavila konstrukcijo rotacijsko minimizirajočih ogrodij prostorskih krivulj. Začenjam z uvodom, v katerem je opisana ideja same izvedbe. Po uvodu sledi definicija krivulj s pitagorejskim hodografom, tako ravninskih kot prostorskih, in prikaz njihovih glavnih značilnosti. Nadalje v tretjem poglavju spoznamo t.i. Euler-Rodriguesovo ogrodje, ki je eno najpomembnejših racionalnih ogrodij, ki so pomembne v aplikacijah. Sledi obravnava ogrodij z minimalnim zasukom, kjer je predstavljena interpolacijska shema, ki ima velik potencial uporabe v praksi. Za konec sledi še zaključek, v katerem so povzete ključne ugotovitve.

Key document information

Name and SURNAME: Ivana JOVIĆ

Title of final project paper: Rotation minimizing frames of spatial curves

Place: Koper

Year: 2020

Number of pages: 45

Number of figures: 5

Number of references: 10

Mentor: Assoc. Prof. Dr. Vito Vitrih

UDC: 514.12(043.2)

Keywords: Pythagorean hodograph curve, rational frame, rotation minimizing frame, minimal twist

Math. Subj. Class. (2010): 53A04, 65D17, 68U07

Abstract:

In my master's thesis, I present the construction of minimal twist frames of spatial curves. The thesis starts with an introduction which describes the idea of the thesis itself. The introduction is followed by the definition of Pythagorean hodograph curves, both planar and spatial ones, and a presentation of their main properties. In the third part, the Euler-Rodrigues frame is presented which is one of the most important rational frames that are relevant in applications. This is followed by the construction of minimal twist frames where an interpolation scheme is presented which has a great potential to be used in practice. The thesis ends with a conclusion summarizing the main results..

Zahvala

Zahvaljujem se mentorju dr. Vitu Vitrihu za vso pomoč, hitro odzivnost, razumevanje, razlago in za vse nasvete pri pisanju magistrskega dela.

Zahvaljujem se svojim staršem, sestri Tini, fantu Tomažu in vsem prijateljem, za vso spodbudo pri pisanju svoje naloge.

Kazalo vsebine

1	Uvod	1
2	Krivulje s pitagorejskim hodografom	3
2.1	Ravninske PH krivulje	4
2.2	Prostorske PH krivulje	8
3	Euler - Rodriguesovo ogrodje na PH krivuljah	12
3.1	Konstrukcija ER ogrodja	12
3.2	Lastnosti ER ogrodja	14
4	Ogrodje z minimalnim zasukom	17
4.1	Racionalno MT ogrodje	19
4.1.1	Linearni polinom $w(\xi)$	21
4.1.2	Kvadratni polinom $w(\xi)$	22
5	Racionalno MT ogrodje na krivuljah z rotacijsko minimizirajočim ER ogrodjem	24
5.1	Interpolacijska shema	25
5.1.1	Prvi korak	26
5.1.2	Algoritem in primer	30
5.1.3	Drugi korak	33
6	Zaključek	36
7	Literatura in viri	37

Kazalo slik in grafikonov

1	Frenet-Sorretovo ogrodje z nezveznostjo ogrodja v prevojni točki. . . .	13
2	Levo: Polinomska prostorska PH krivulja $\mathbf{r}(\xi)$ stopnje pet z danimi začetnimi/končnimi orientacijami $\mathbf{f}_2(0), \mathbf{f}_3(0)$ in $\mathbf{f}_2(1), \mathbf{f}_3(1)$ za vektorja normalne ravnine ogrodja $(\mathbf{f}_1(\xi), \mathbf{f}_2(\xi), \mathbf{f}_3(\xi))$. Desno: Vektorja $\mathbf{f}_2(\xi)$ in $\mathbf{f}_3(\xi)$ vzdolž $\mathbf{r}(\xi)$, kot je določeno v (4.2) in (4.9), ob upoštevanju robnih pogojev.	19
3	Variacija komponente kotne hitrosti ogrodja v smeri tangente za ER ogrodje in MT ogrodja, prikazano na sliki 2, vzdolž polinomske prostorske PH krivulje stopnje pet.	20
4	Iskanje spremenljivk x_1 in x_2 s pomočjo Pythona.	32
5	Grafični prikaz PH krivulje.	33

Seznam kratic

<i>PH krivulja</i>	Krivulja s pitagorejskim hodografom
<i>ER ogrodje</i>	Euler - Rodriguesovo ogrodje
<i>MT ogrodje</i>	Ogrodje z minimalnim zasukom
<i>RM ogrodje</i>	Rotacijsko minimizirajoče ogrodje

1 Uvod

Za opis prostorskega gibanja togega telesa je potrebno določiti spreminjanje njegovega položaja in orientacije v odvisnosti od časa. Za določitev spreminjanja lege položaja kot parametrične krivulje $\mathbf{r}(\xi)$ se običajno uporablja pot posebne točke, kot na primer središče telesa. Za določitev spreminjanja orientacije pa lahko uporabimo ortonormalno ogrodje $(\mathbf{f}_1(\xi), \mathbf{f}_2(\xi), \mathbf{f}_3(\xi))$, ki je pripeto na telo. Če parameter ξ predstavlja čas, potem prvi in drugi odvod krivulje $\mathbf{r}(\xi)$ predstavljata hitrost in pospešek telesa in prvi in drugi odvod ogrodja $(\mathbf{f}_1(\xi), \mathbf{f}_2(\xi), \mathbf{f}_3(\xi))$ predstavljata kotno hitrost in pospešek [3].

Prikrojeno ortonormalno ogrodje $(\mathbf{f}_1(\xi), \mathbf{f}_2(\xi), \mathbf{f}_3(\xi))$ na dani prostorski krivulji $\mathbf{r}(\xi)$ je ogrodje, za katerega velja, da je $\mathbf{f}_1(\xi) = \frac{\mathbf{r}'(\xi)}{|\mathbf{r}'(\xi)|}$ enotska tangenta in $\mathbf{f}_2(\xi), \mathbf{f}_3(\xi)$ sta ortogonalna enotska vektorja, ki razpenjata normalno ravnino. Odvodi vektorjev ogrodja po naravnem parametru s določajo kotno hitrost ω na naslednji način

$$\frac{d\mathbf{f}_1}{ds} = \omega \times \mathbf{f}_1, \quad \frac{d\mathbf{f}_2}{ds} = \omega \times \mathbf{f}_2, \quad \frac{d\mathbf{f}_3}{ds} = \omega \times \mathbf{f}_3. \quad (1.1)$$

Dobro znani primer ogrodja je Frenetovo ogrodje, ki vsebuje enotsko tangento \mathbf{t} , enotsko normalo \mathbf{n} in enotsko binormalo $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ s kotno hitrostjo $\omega = \kappa\mathbf{b} + \tau\mathbf{t}$, kjer sta κ ukrivljenost in τ torzija krivulje \mathbf{r} . Komponenta $\tau\mathbf{t}$ določa hitrost vrtenja normalnih vektorjev \mathbf{n} in \mathbf{b} glede na tangento \mathbf{t} . Ta komponenta je določena z zahtevo, da je enotska normala \mathbf{n} vedno usmerjena proti središču ukrivljenosti. Če namesto \mathbf{n} in \mathbf{b} izberemo normalna vektorja \mathbf{u} in \mathbf{v} , ki sta določena na način, da nimamo trenutnega vrtenja okoli tangente \mathbf{t} (t.j. kotna hitrost ogrodja zadošča $\omega \cdot \mathbf{t} \equiv 0$), potem ogrodje $(\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ imenujemo rotacijsko minimizirajoče ogrodje (RM ogrodje)

Takšna ogrodja imajo različne aplikacije v računalniških animacijah, načrtovanju gibanja in robotiki. Pred kratkim so bile razvite številne sheme za njihovo aproksimacijo. Pri konstrukciji RM ogrodja na vnaprej definirani krivulji \mathbf{r} nastopi težava z določitvo začetne vrednosti - z drugimi besedami, določitev orientacije vektorjev normalne ravnine na vsaki točki na krivulji določa njihovo orientacijo v vsaki drugi točki. Posledično ni mogoče v splošnem skonstruirati gibanja togega telesa, ki minimizira rotacijo ogrodja po vnaprej določeni poti s predpisanimi začetnimi in končnimi orientacijami. Tako v študijah racionalnih gibanj, ki minimizirajo rotacijo ogrodja s podanimi začetnimi in končnimi položaji in orientacijami, krivulja \mathbf{r} ni vnaprej določena, ampak je rezultat same konstrukcije. V praksi pa je pogosto zaželeno neodvisno določiti krivuljo \mathbf{r} in

racionalno prilagojeno ogrodje $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ vzdolž krivulje, ki morata zadoščati danim robnim točkam in orientacijam. Za zadostitev te dodatne zahteve je bilo uvedeno t.i. ogrodje z minimalnim zasukom (MT ogrodje), ki je povezano z vnaprej določeno krivuljo in začetnimi ter končnimi orientacijami. V skladu z robnimi pogoji si za MT ogrodje želimo [1]:

- Komponenta za kotno hitrost $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{f}_1$ ne spreminja predznaka. T.j. $\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ ohranjata konstantno rotacijo okoli \mathbf{f}_1 ;
- Integral dolžine loka $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{f}_1$ vzdolž \mathbf{r} ima najmanjšo možno absolutno vrednost. T.j., skupna količina rotacije $\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ okoli \mathbf{f}_1 je čim manjša.

V naslednjem poglavju bomo definirali krivulje s pitagorejskim hodografom, najprej v splošnem primeru, kjer bodo predstavljenje njihove glavne lastnosti, nato pa bomo v podpoglavjih definirali še ravninske in prostorske PH krivulje. Pri obeh bo naveden karakterizacijski izrek Kubote. V tretjem poglavju bo predstavljena konstrukcija Euler-Rodriguesovega ogrodja. Gre za eno najpomembnejših racionalnih ogrodij. Po sami konstrukciji ER ogrodja bodo sledile še lastnosti ogrodja. V četrtem in petem poglavju si bomo ogledali konstrukcijo racionalnega ogrodja z minimalnim zasukom. Spoznali bomo interpolacijsko shemo, s pomočjo katere lahko konstruiramo MT ogrodje na dani PH krivulji. V zadnjem poglavju bo sledil kratek povzetek celotnega dela.

2 Krivulje s pitagorejskim hodografom

Polinomska krivulja \mathbf{r} v \mathbb{R}^d je krivulja s pitagorejskim hodografom (na kratko PH krivulja), če so komponente njenega hodografa elementi pitagorejske $(d+1)$ -terice, t.j. vsota kvadratov komponent krivulje \mathbf{r} je enaka kvadratu nekega polinoma σ .

PH krivulje v \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^3 lahko skonstruiramo s pomočjo različnih pristopov, ki jih bomo spoznali kasneje [6].

Definicija 2.1. Naj bo $\mathbf{r}(\xi) = (x_1(\xi), \dots, x_d(\xi))^T$ krivulja stopnje n . Hodograf krivulje \mathbf{r} je vektorsko polje

$$\mathbf{r}'(\xi) = \left(x_1'(\xi), x_2'(\xi), \dots, x_d'(\xi) \right)^T.$$

Krivulja \mathbf{r} ima pitagorejski hodograf (je PH krivulja), če obstaja polinom σ stopnje $n-1$, da velja

$$(x_1'(\xi))^2 + \dots + (x_d'(\xi))^2 = \sigma^2(\xi).$$

Poglejmo si nekaj pomembnih lastnosti, ki veljajo za PH krivulje [9]:

- Če je krivulja regularna, torej $\mathbf{r}'(\xi) \neq 0$ za $\forall \xi$, potem je

$$\sqrt{(x_1'(\xi))^2 + \dots + (x_d'(\xi))^2} = \sigma(\xi).$$

- Njihovo ločno dolžino $\int_a^b \|\mathbf{r}'(\xi)\| d\xi = \int_a^b \sigma(\xi) d\xi$ lahko eksaktno izračunamo (brez uporabe numeričnih pravil za izračun integralov).
- Enotska tangenta \mathbf{t} je racionalna krivulja, saj velja $\mathbf{t}(\xi) = \frac{(x_1'(\xi), x_2'(\xi), \dots, x_d'(\xi))}{\|\mathbf{r}'(\xi)\|} = \left(\frac{x_1'(\xi)}{\sigma(\xi)}, \dots, \frac{x_d'(\xi)}{\sigma(\xi)} \right)$.
- Krivulje odmika ravninske krivulje, to so krivulje oblike $\mathbf{r}_\delta(\xi) := \mathbf{r}(\xi) + \delta \mathbf{n}(\xi)$, kjer $\delta > 0$ in $\mathbf{n}(\xi)$ je enotska normala na \mathbf{r} definirana kot

$$\mathbf{n}(\xi) := \frac{(-y'(\xi), x'(\xi))}{\sqrt{x'^2(\xi) + y'^2(\xi)}} = \left(\frac{-y'(\xi)}{\sigma(\xi)}, \frac{x'(\xi)}{\sigma(\xi)} \right),$$

so racionalne krivulje. Če je stopnja krivulje \mathbf{r} enaka n , potem je stopnja krivulje \mathbf{r}_δ enaka $2n-1$.

2.1 Ravninske PH krivulje

V tem podpoglavju bomo najprej predstavili konstrukcijo ravninskih PH krivulj in nato bo sledil izrek Kubote.

Definicija 2.2. Točka $(x(\xi), y(\xi))^T$ na krivulji \mathbf{r} je singularna točka, če je $\mathbf{r}'(\xi) = 0$ (hodograf krivulje poteka skozi koordinatno izhodišče).

Krivulji, ki nima singularne točke, pravimo regularna krivulja [10].

Krivulja $\mathbf{r}(\xi) = (x(\xi), y(\xi))^T$ je ravninska PH krivulja, če komponente njenega hodografa $\mathbf{r}'(\xi) = (x'(\xi), y'(\xi))^T$ ustrezajo pogoju

$$(x'(\xi))^2 + (y'(\xi))^2 = \sigma^2(\xi),$$

kjer je σ poljubna polinom [5], ki mu pravimo parametrična hitrost krivulje \mathbf{r} [10]. Če je krivulja \mathbf{r} stopnje n , potem je polinom σ stopnje $n - 1$ [5].

Zgornja zahteva je ekvivalentna zahtevi, da ima krivulja \mathbf{r} racionalno enotsko tangento [10].

Preden nadaljujemo, najprej zapišimo definicijo največjega skupnega delitelja.

Definicija 2.3. Največji skupni delitelj števil a in b je največje število, ki hkrati deli števili a in b . To število bomo označevali z $\gcd(a, b)$. Če je $\gcd(a, b) = 1$, potem sta si števili a in b tuji med seboj [8].

Naj bodo $x(\xi)$, $y(\xi)$ in $\sigma(\xi)$ polinomi in $\mathbf{r} = (x(\xi), y(\xi))^T$ krivulja. Hodograf krivulje \mathbf{r} je primitiven, če je $\gcd(x'(\xi), y'(\xi)) \in \mathbb{R}$. Primitivno krivuljo \mathbf{r}' lahko zapišemo s polinomoma u in v , ki sta paroma tuja kot

$$x'(\xi) = u^2(\xi) - v^2(\xi) \quad \text{in} \quad y'(\xi) = 2u(\xi)v(\xi), \quad \xi \text{ in } [0, 1].$$

Opazimo, da dobimo iskani pitagorejski trojček $(x'(\xi), y'(\xi), \sigma(\xi))$, ki je pri zgornjem primeru enak $(u^2(\xi) - v^2(\xi), 2u(\xi)v(\xi), u^2(\xi) + v^2(\xi))$, ker velja $(u^2(\xi) - v^2(\xi))^2 + (2u(\xi)v(\xi))^2 = (u^2(\xi) + v^2(\xi))^2$ [10].

Poglejmo si sedaj izrek Kubote, ki nam pove, kdaj trije polinomi zadoščajo pogoju $(x'(\xi))^2 + (y'(\xi))^2 = \sigma^2(\xi)$.

Izrek 2.4. Naj bodo $a(\xi)$, $b(\xi)$ in $c(\xi)$ realni polinomi. Ti polinomi zadoščajo pitagorejskemu pogoju

$$a^2(\xi) + b^2(\xi) = c^2(\xi), \tag{2.1}$$

natanko tedaj, ko jih lahko izrazimo s polinomi $u(\xi)$, $v(\xi)$ in $w(\xi)$ kot

$$\begin{aligned} a(\xi) &= (u^2(\xi) - v^2(\xi)) w(\xi), \\ b(\xi) &= 2u(\xi)v(\xi)w(\xi), \\ c(\xi) &= (u^2(\xi) + v^2(\xi)) w(\xi), \end{aligned} \tag{2.2}$$

kjer sta si polinoma $u(\xi)$ in $v(\xi)$ tuja med seboj.

Dokaz. Da je (2.2) zadosten pogoj za zadostitev enakosti (2.1), opazimo, ko enakosti (2.2) vstavimo v (2.1).

Dokažimo še v obratno smer. Predpostavimo, da je $w(\xi) = \gcd(a(\xi), b(\xi), c(\xi))$ in definirajmo polinome:

$$\bar{a}(\xi) = \frac{a(\xi)}{w(\xi)}, \quad \bar{b}(\xi) = \frac{b(\xi)}{w(\xi)}, \quad \bar{c}(\xi) = \frac{c(\xi)}{w(\xi)},$$

ki so med seboj paroma tuji in zadoščajo pitagorejskemu pogojju

$$\bar{a}^2(\xi) + \bar{b}^2(\xi) = \bar{c}^2(\xi).$$

Zapišimo zgornjo enačbo kot

$$\bar{b}^2(\xi) = \bar{c}^2(\xi) - \bar{a}^2(\xi) = (\bar{c}(\xi) + \bar{a}(\xi))(\bar{c}(\xi) - \bar{a}(\xi)).$$

Vemo, da $\bar{c}(\xi) + \bar{a}(\xi)$ in $\bar{c}(\xi) - \bar{a}(\xi)$ nimata skupnih ničel, kajti v nasprotnem primeru bi to pomenilo, da \bar{a} , \bar{b} in \bar{c} med seboj niso tuji. Sledi, da je vsaka ničla polinoma \bar{b} hkrati tudi ničla enega izmed polinomov $\bar{c} + \bar{a}$ in $\bar{c} - \bar{a}$, ki imajo sodo večkratnost. Polinoma lahko zapišemo kot

$$\bar{c}(\xi) + \bar{a}(\xi) = 2u^2(\xi) \quad \text{in} \quad \bar{c}(\xi) - \bar{a}(\xi) = 2v^2(\xi),$$

kjer sta polinoma $u(\xi)$ in $v(\xi)$ paroma tuja, tako da je $\bar{b}^2(\xi) = 4u^2(\xi)v^2(\xi)$. Dobimo

$$\bar{a}(\xi) = u^2(\xi) - v^2(\xi), \quad \bar{b}(\xi) = 2u(\xi)v(\xi), \quad \bar{c}(\xi) = u^2(\xi) + v^2(\xi).$$

Če te pomnožimo še z $w(\xi)$, dobimo (2.2). □

Kadar $\gcd(a(\xi), b(\xi), c(\xi)) \in \mathbb{R}$ to implicira $w(\xi) \in \mathbb{R}$ in $\gcd(u(\xi), v(\xi)) \in \mathbb{R}$ v (2.2). Takim rešitvam pravimo primitivna pitagorejska trojica.

Iz izreka Kubote sledi naslednja posledica.

Posledica 2.5. *Ravninska PH krivulja $\mathbf{r}(\xi) = (x(\xi), y(\xi))^T$ je določena s polinomi $u(\xi)$, $v(\xi)$ in $w(\xi)$, kjer sta polinoma $u(\xi)$ in $v(\xi)$ paroma tuja, preko izrazov*

$$x'(\xi) = (u^2(\xi) - v^2(\xi))w(\xi), \quad y'(\xi) = 2u(\xi)v(\xi)w(\xi). \quad (2.3)$$

Naštejmo vse možne izbire u , v in w , ki lahko generirajo neregularne PH krivulje:

- Če sta $u = v = 0$ ali $w = 0$, potem je hodograf $x' = y' = 0$ in je PH krivulja \mathbf{r} ena sama točka.

- Če so u, v, w konstante in je w ter vsaj eden izmed u in v konstanta različna od nič, potem je PH krivulja \mathbf{r} enakomerno parametrizirana daljica.
- Če sta u in v konstanti, vendar ne hkrati enaki 0 in w nekonsistentna, potem z integracijo x' in y' za \mathbf{r} dobimo neenakomerno parametrizirano daljico. V tem primeru, v primerjavi s prejšnjim primerom, ima parametrična hitrost σ ničle sode stopnje.
- Če je $w \neq 0$ in je eden izmed u in v enak 0, potem je PH krivulja \mathbf{r} vzporedna x ali y koordinatni osi.
- Če je $w = 0$ in $u = \pm v$ ali pa je vsaj eden izmed u in v različen od 0, potem je PH krivulja \mathbf{r} neenakomerno parametrizirana daljica.

Zaradi zgoraj naštetih primerov, se moramo omejiti na tiste primere, ko so u, v in w različni od 0 in sta u in v med seboj tuja, vendar ne hkrati konstantna. Ta omejitev od nas zahteva obravnavo PH krivulj, ki so stopnje vsaj 3.

V nadaljevanju bomo privzeli, da je $w = 1$, saj taki hodografi definirajo regularne PH krivulje, ki zadoščajo pogoju $\mathbf{r}'(\xi) \neq 0$ za $\forall \xi \in [0, 1]$. Regularne PH krivulje so lahko samo lihih stopenj (če nas zanima celoten interval $[0, 1]$).

Če ne bi prevzeli $w = 1$, potem bi ravninska PH krivulja $\mathbf{r} = (x(\xi), y(\xi))^T$ bila definirana z integracijo izrazov

$$x'(\xi) = w(u^2 - v^2), \quad y'(\xi) = 2wuv.$$

Opazimo, da bi lahko dobili krivuljo sode stopnje in obravnava PH krivulje sode stopnje je bolj zapletena [6].

Naslednja konstrukcija nam omogoča konstrukcijo PH krivulj lihich stopenj. Generirali jo bomo iz kompleksnega polinoma $\mathbf{w}(\xi)$, stopnje m , in sicer kot:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\xi) &= u(\xi) + \mathbf{i}v(\xi) \\ &= \sum_{k=0}^m u_k \binom{m}{k} (1-\xi)^{m-k} \xi^k + \mathbf{i} \sum_{k=0}^m v_k \binom{m}{k} (1-\xi)^{m-k} \xi^k \\ &= \sum_{k=0}^m \mathbf{w}_k \binom{m}{k} (1-\xi)^{m-k} \xi^k, \end{aligned} \quad (2.4)$$

kjer so $\mathbf{w}_k = u_k + \mathbf{i}v_k$ kontrolne točke. V enačbi (2.4) nastopajo Bernsteinovi bazni polinomi stopnje m . Ravninsko PH krivuljo \mathbf{r} stopnje $2m + 1$ dobimo z integracijo izraza

$$\mathbf{r}'(\xi) = \mathbf{w}^2(\xi). \quad (2.5)$$

Dobili smo $\mathbf{r}(\xi) = \int \mathbf{w}^2(\xi) d\xi + C$, kjer je $C \in \mathbb{R}$. To pomeni, da je PH krivulja \mathbf{r} določena enolično s svojim hodografo \mathbf{r}' do translacije natančno, ki je pogojena z integracijsko konstanto. Naj bo

$$\mathbf{r}(\xi) = \sum_{k=0}^n \mathbf{r}_k \binom{n}{k} (1-\xi)^{n-k} \xi^k$$

Bézierjeva krivulja stopnje $n = 2m + 1$ za $\xi \in [0, 1]$ z $n + 1$ kontrolnimi točkami $(\mathbf{r}_k)_{k=0}^n$. Sedaj lahko hodograf PH krivulje \mathbf{r} zapišemo kot Bézierjevo krivuljo stopnje $n - 1 = 2m$ iz množice kompleksnih števil, in sicer

$$\mathbf{r}'(\xi) = \mathbf{w}^2(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{\vartheta}_k \binom{n-1}{k} (1-\xi)^{n-1-k} \xi^k.$$

Kontrolne točke hodografa PH krivulje $(\boldsymbol{\vartheta}_k)_{k=0}^{n-1}$ so podane s

$$\boldsymbol{\vartheta}_k = n \Delta \mathbf{r}_k = n(\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k).$$

Poglejmo si sedaj nekaj geometrijskih lastnosti PH krivulj.

Lema 2.6. *Parametrično hitrost σ , enotsko tangento \mathbf{t} in ukrivljenost κ krivulje \mathbf{r} lahko izrazimo kot*

$$\sigma = |\mathbf{w}|^2, \quad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{w}^2}{\sigma}, \quad \kappa = 2 \frac{\text{Im}(\overline{\mathbf{w}} \mathbf{w}')}{\sigma^2}.$$

Dokaz. Najprej bomo dokazali, da je $\sigma = |\mathbf{w}|^2$. Velja

$$\sigma = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2} = u^2 + v^2 = |u + \mathbf{i}v|^2 = |\mathbf{w}|^2.$$

Iz tega sledi, da je

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} = \frac{\mathbf{w}^2}{|\mathbf{w}|^2} = \frac{\mathbf{w}^2}{\sigma}.$$

Opazimo, da je enotska tangenta \mathbf{t} na PH krivuljo \mathbf{r} res racionalna krivulja, kar sledi iz definicije PH krivulj. Dokazati moramo samo še zvezo za ukrivljenost κ krivulje \mathbf{r} . Dokazali bomo najprej levo stran enakosti. Po definiciji je $\kappa = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$. Z nekaj računjanja in po definiciji x' in y' dobimo

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{(u^2 - v^2)(2uv)' - 2uv(u^2 - v^2)'}{((u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2u^3v' + 2uv^2v' - 2u^2vu' - 2v^3u'}{(u^2 + v^2)^3} \\ &= \frac{2uv'(u^2 + v^2) - 2vu'(u^2 + v^2)}{(u^2 + v^2)^3} = 2 \frac{(uv' - vu')}{(u^2 + v^2)^2}. \end{aligned}$$

Desna stran enakosti je po nekaj algebraičnih operacijah in definicijah \mathbf{w} in σ enaka

$$\begin{aligned} 2 \frac{\operatorname{Im}(\overline{\mathbf{w}}\mathbf{w}')}{\sigma^2} &= 2 \frac{\operatorname{Im}\left(\overline{(u + \mathbf{i}v)}(u' + \mathbf{i}v')\right)}{x'^2 + y'^2} = 2 \frac{\operatorname{Im}\left((u - \mathbf{i}v)(u' + \mathbf{i}v')\right)}{(u^2 + v^2)^2} \\ &= 2 \frac{\operatorname{Im}(uu' + \mathbf{i}uv' - \mathbf{i}vu' + vv')}{(u^2 + v^2)^2} = 2 \frac{(uv' - vu')}{(u^2 + v^2)^2}. \end{aligned}$$

Na ta način smo dokazali še zadnjo enakost. \square

Iz dokaza sledi spodnja posledica.

Posledica 2.7. *Ukrivljenost PH krivulje \mathbf{r} je enaka*

$$\kappa = 2 \frac{(uv' - vu')}{(u^2 + v^2)^2} = 2 \frac{(uv' - vu')}{\sigma^2}.$$

Podobno lahko izrazimo tudi enotsko tangento \mathbf{t} in enotsko normalo \mathbf{n} na PH krivuljo \mathbf{r} s polinomima u in v kot

$$\mathbf{t} = \frac{(u^2 - v^2, 2uv)}{\sigma} \quad \text{in} \quad \mathbf{n} = \frac{(2uv, v^2 - u^2)}{\sigma}.$$

Naj bo \mathbf{w} stopnje m kot je v (2.4). Parametrična hitrost σ je polinom stopnje $2m$, enotska tangenta \mathbf{t} , enotska normala \mathbf{n} in ukrivljenost κ so racionalne funkcije oz. krivulje. Če je PH krivulja stopnje $n = 2m + 1$, potem sta racionalni krivulji \mathbf{t} in \mathbf{n} stopnje $n - 1 = 2m$, (tako v števcu kot v imenovalcu), ukrivljenost κ pa ima v števcu stopnjo $n - 3 = 2m - 2$ in v imenovalcu $2n - 2 = 4m - 2$. Ločna dolžina krivulje \mathbf{r} je funkcija parametra ξ in je enaka integralu

$$s(\xi) = \int_0^\xi \sigma(t) dt. \quad (2.6)$$

Polinom σ je stopnje $2m$, torej je polinom $s(\xi)$ stopnje $2m + 1$ [10].

2.2 Prostorske PH krivulje

Prostorska krivulja s pitagorejskim hodografom je krivulja $\mathbf{r}(\xi) = (x(\xi), y(\xi), z(\xi))^T$, za katero velja, da komponente $\mathbf{r}'(\xi) = (x'(\xi), y'(\xi), z'(\xi))^T$ zadoščajo pitagorejskemu pogoju

$$(x'(\xi))^2 + (y'(\xi))^2 + (z'(\xi))^2 = \sigma^2(\xi) \quad (2.7)$$

za nek polinom $\sigma(\xi)$. Za konstrukcijo prostorskih PH krivulj obstajata dva alternativna pristopa, in sicer uporaba kvaternionov in Hopfova preslikava.

Prvi pristop ustvari pitagorejski hodograf $\mathbf{r}'(\xi)$ iz kvaterniona [1]

$$\mathcal{A}(\xi) = u(\xi) + v(\xi)\mathbf{i} + p(\xi)\mathbf{j} + q(\xi)\mathbf{k}, \quad (2.8)$$

kjer so

$$\mathbf{1} = (1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{i} = (0, 1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 0, 1),$$

bazni enotski kvaternioni. Prva komponenta kvaterniona se imenuje skalarni del, ostale tri komponente se imenujejo vektorski del kvaterniona. Kvaternion z ničelnim skalarnim delom se imenuje čisti kvaternion. Vektorje v \mathbb{R}^3 lahko identificiramo s čistimi kvaternioni in obratno. Če pišemo $\mathcal{A} = (a, \mathbf{a})$ in $\mathcal{B} = (b, \mathbf{b})$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, potem velja

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = (a + b, \mathbf{a} + \mathbf{b}), \quad \mathcal{A}\mathcal{B} = (ab - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, a\mathbf{b} + b\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

kjer \cdot označuje skalarni produkt, \times pa vektorski produkt. Z $\mathcal{A}^* := (a, -\mathbf{a})$ označimo konjugiran kvaternion od kvaterniona \mathcal{A} in norma od kvaterniona \mathcal{A} je definirana kot:

$$\|\mathcal{A}\|^2 = \mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^* = a^2 + \|\mathbf{a}\|^2,$$

kjer je $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$ Evklidska norma vektorja \mathbf{a} . Nadalje lahko določimo komutativno množenje na prostoru kvaternionov kot

$$\mathcal{A} \star \mathcal{B} := \frac{1}{2}(\mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{B}^* + \mathcal{B}\mathbf{i}\mathcal{A}^*).$$

Opazimo, da je $\mathcal{A} \star \mathcal{B}$ čisti kvaternion in ga lahko identificiramo z vektorji iz \mathbb{R}^3 [4]. Kvaternionski polinom v (2.8) konjugiramo in dobimo $\mathcal{A}^*(\xi) = u(\xi) - v(\xi)\mathbf{i} - p(\xi)\mathbf{j} - q(\xi)\mathbf{k}$. Potem velja

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(\xi) = \mathcal{A} \star \mathcal{A} &= \mathcal{A}(\xi)\mathbf{i}\mathcal{A}^*(\xi) = [u^2(\xi) + v^2(\xi) - p^2(\xi) - q^2(\xi)] \mathbf{i} \\ &+ 2[u(\xi)q(\xi) + v(\xi)p(\xi)] \mathbf{j} \\ &+ 2[v(\xi)q(\xi) - u(\xi)p(\xi)] \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Alternativna konstrukcija je, da uporabimo Hopfovo preslikavo. Sedaj je hodograf definiran s kompleksnima polinomima $\alpha(\xi)$ in $\beta(\xi)$,

$$\alpha(\xi) = u(\xi) + \mathbf{i}v(\xi) \quad \beta(\xi) = q(\xi) + \mathbf{i}p(\xi), \quad (2.10)$$

kot

$$\mathbf{r}'(\xi) = (|\alpha(\xi)|^2 - |\beta(\xi)|^2, 2 \operatorname{Re}(\alpha(\xi)\bar{\beta}(\xi)), 2 \operatorname{Im}(\alpha(\xi)\bar{\beta}(\xi))). \quad (2.11)$$

Parametrična hitrost je definirana kot

$$\sigma(\xi) = |\mathbf{r}'(\xi)| = |\mathcal{A}(\xi)|^2 = |\alpha(\xi)|^2 + |\beta(\xi)|^2 = u^2(\xi) + v^2(\xi) + p^2(\xi) + q^2(\xi). \quad (2.12)$$

Torej je dolžina loka $s(\xi)$ nad intervalom $[0, \xi]$ enaka:

$$s(\xi) = \int_0^\xi \sigma(t) dt,$$

in je prav tako polinomska funkcija. Skupno dolžino krivulje nad intervalom $[0, 1]$ tako dobimo kot [3]

$$S = s(1) = \int_0^1 \sigma(t) dt.$$

Ekvivalenca med (2.9) in (2.11) je očitna, če vzamemo $\mathcal{A}(\xi) = \alpha(\xi) + \mathbf{k}\beta(\xi)$, kjer imaginarno enoto \mathbf{i} , identificiramo z baznim kvaternionom \mathbf{i} . Kvaternionski polinom (2.8) in kompleksna polinoma (2.10) lahko po Bernsteinovi bazi

$$b_i^m(\xi) = \binom{m}{i} (1 - \xi)^{m-i} \xi^i, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

zapišemo kot

$$\mathcal{A}(\xi) = \sum_{i=0}^m \mathcal{A}_i b_i^m(\xi), \quad \alpha(\xi) = \sum_{i=0}^m \alpha_i b_i^m(\xi), \quad \beta(\xi) = \sum_{i=0}^m \beta_i b_i^m(\xi),$$

kjer so koeficienti povezani z $\mathcal{A}_i = \alpha_i + \mathbf{k}\beta_i$ za $i = 0, 1, \dots, m$ [1].

Pri prvem poskusu posploševanja pitagorejskih hodografov iz \mathbb{R}^2 na \mathbb{R}^3 so uporabili spodnji hodograf $\mathbf{r}'(\xi)$

$$\begin{aligned} x'(\xi) &= h(\xi) [u^2(\xi) - v^2(\xi) - w^2(\xi)], \\ y'(\xi) &= 2h(\xi)u(\xi)v(\xi), \\ z'(\xi) &= 2h(\xi)u(\xi)w(\xi), \end{aligned} \quad (2.13)$$

za polinome $h(\xi), u(\xi), v(\xi), w(\xi)$ tako, da je $\sigma(\xi) = |h(\xi)|(u^2(\xi) + v^2(\xi) + w^2(\xi))$. Oblika (2.13) je zadosten, vendar ne potreben pogoj, da bi prostorski hodograf $\mathbf{r}'(\xi)$ zadoščal pitagorejski enačbi (2.7). Spodnji hodograf

$$x'(\xi) = (1 - \xi)^2, \quad y'(\xi) = \xi^2, \quad z'(\xi) = 1,$$

zadošča enačbi (2.7) z $\sigma(\xi) = \sqrt{2}(\xi^2 - \xi + 1)$, vendar ga ne moremo zapisati kot (2.13). S pomočjo tega primera opazimo, da hodograf (2.13) ne da vseh možnih prostorskih PH krivulj. Težava, ki se pojavi pri hodografu (2.13) je ta, da hodograf ni invarianten za rotacije v \mathbb{R}^3 . Hodograf sicer pri vrtenju okoli x osi ostane nespremenjen, pri vrtenju okoli y in z osi pa ne ohranja oblike.

Poglejmo si sedaj izrek Kubote za prostorske PH krivulje.

Izrek 2.8. *Vzemimo realne polinome $a(\xi)$, $b(\xi)$, $c(\xi)$ in $d(\xi)$, ki so si med seboj tuji. Ti polinomi zadoščajo pitagorejskemu pogoju*

$$a^2(\xi) + b^2(\xi) + c^2(\xi) = d^2(\xi) \quad (2.14)$$

natanko tedaj, ko jih lahko izrazimo z realnimi polinomi $u(\xi)$, $v(\xi)$, $p(\xi)$ in $q(\xi)$ kot [6]

$$\begin{aligned} a(\xi) &= u^2(\xi) + v^2(\xi) - p^2(\xi) - q^2(\xi), \\ b(\xi) &= 2[u(\xi)q(\xi) + v(\xi)p(\xi)], \\ c(\xi) &= 2[v(\xi)q(\xi) - u(\xi)p(\xi)], \\ d(\xi) &= u^2(\xi) + v^2(\xi) + p^2(\xi) + q^2(\xi). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dokaz. Ponovno zapišimo enačbo (2.14) kot $b^2(\xi) + c^2(\xi) = d^2(\xi) - a^2(\xi)$. Enačbo razstavimo

$$[b(\xi) + \mathbf{i}c(\xi)][b(\xi) - \mathbf{i}c(\xi)] = [d(\xi) + a(\xi)][d(\xi) - a(\xi)]. \quad (2.16)$$

Če $w(\xi) = \gcd(b(\xi), c(\xi)) = \text{konstanta}$, potem kompleksna polinoma $b(\xi) + \mathbf{i}c(\xi)$ in $b(\xi) - \mathbf{i}c(\xi)$ nimata skupnih realnih ničel. Prav tako pa so ničle $b(\xi) - \mathbf{i}c(\xi)$ konjugirani pari od $b(\xi) + \mathbf{i}c(\xi)$. Ker sta $d(\xi) + a(\xi)$ in $d(\xi) - a(\xi)$ realna polinoma, ju lahko razstavimo v kompleksno-konjugirane pare linearnih faktorjev, pri čemer je en člen vsakega para iz $b(\xi) + \mathbf{i}c(\xi)$, drugi pa iz $b(\xi) - \mathbf{i}c(\xi)$. Te polinome lahko zapišemo kot

$$b(\xi) + \mathbf{i}c(\xi) = f(\xi)\bar{g}(\xi), \quad b(\xi) - \mathbf{i}c(\xi) = \bar{f}(\xi)g(\xi), \quad (2.17)$$

kjer sta $f(\xi)$ in $g(\xi)$ kompleksna polinoma, da velja

$$d(\xi) - a(\xi) = f(\xi)\bar{f}(\xi), \quad d(\xi) + a(\xi) = g(\xi)\bar{g}(\xi). \quad (2.18)$$

Kompleksna polinoma zapišimo z realnim in imaginarnim delom, in sicer $f(\xi) = \sqrt{2}[p(\xi) + \mathbf{i}q(\xi)]$ in $g(\xi) = \sqrt{2}[v(\xi) + \mathbf{i}u(\xi)]$, kjer so $p(\xi)$, $q(\xi)$, $v(\xi)$ in $u(\xi)$ realni polinomi. Če te realne polinome vstavimo v (2.17) in (2.18), potem nam ti enačbi dasta izraze (2.15) kot rešitev za $a(\xi)$, $b(\xi)$, $c(\xi)$ in $d(\xi)$. Če je $w(\xi) = \gcd(b(\xi), c(\xi)) \neq \text{konstanta}$, potem iz (2.16) opazimo, da je $w^2(\xi)$ faktor od $d(\xi) - a(\xi)$ ali $d(\xi) + a(\xi)$. To pa zato, ker bi skupna ničla od $b(\xi)$, $c(\xi)$, $d(\xi) - a(\xi)$, $d(\xi) + a(\xi)$ implicirala, da $a(\xi)$, $b(\xi)$, $c(\xi)$ in $d(\xi)$ niso tuji. Torej, vzemimo $w^2(\xi)$ iz $d(\xi) + a(\xi)$ ali $d(\xi) - a(\xi)$. Prejšnje argumente lahko ponovimo s tem, ko $w(\xi)$ delimo z $b(\xi) + \mathbf{i}c(\xi)$ in $b(\xi) - \mathbf{i}c(\xi)$ [6]. \square

3 Euler - Rodriguesovo ogrodje na PH krivuljah

V tem poglavju bomo najprej predstavili konstrukcijo Euler-Rodriguesovega ogrodja (ER ogrodja), nato pa še njegove lastnosti.

3.1 Konstrukcija ER ogrodja

Euler-Rodriguesovo ogrodje (ER ogrodje) je racionalno ortonormalno ogrodje, definirano na PH krivuljah, kot

$$(\mathbf{e}_1(\xi), \mathbf{e}_2(\xi), \mathbf{e}_3(\xi)) = \frac{(\mathcal{A}(\xi)\mathbf{i}\mathcal{A}^*(\xi), \mathcal{A}(\xi)\mathbf{j}\mathcal{A}^*(\xi), \mathcal{A}(\xi)\mathbf{k}\mathcal{A}^*(\xi))}{|\mathcal{A}(\xi)|^2}. \quad (3.1)$$

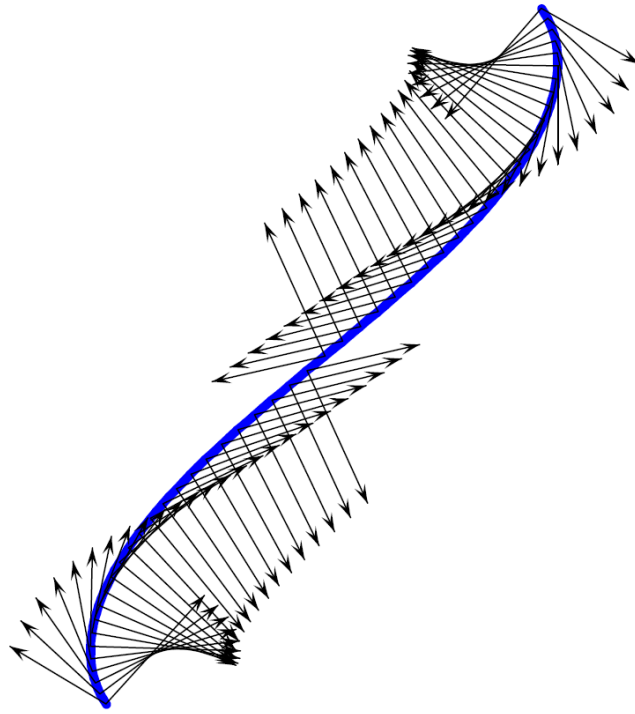
Prvi vektor ogrodja $\mathbf{e}_1(\xi)$ je enotska tangenta krivulje, medtem ko $\mathbf{e}_2(\xi)$ in $\mathbf{e}_3(\xi)$ ležita v normalni ravnini na tangento. V primerjavi z Frenet-Serretovim ogrođjem ima ER ogrođje prednost, da je racionalno ogrođje in da nima skokov v prevojnih točkah, kjer imamo ničelno ukrivljenost (glej sliko (1)).

Če bi vektorje ogrođja zapisali s komponentami kvaternionskega polinoma, potem bi zapis vektorjev bil [3]

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{(u^2 + v^2 - p^2 - q^2)\mathbf{i} + 2(uq + vp)\mathbf{j} + 2(vq - up)\mathbf{k}}{u^2 + v^2 + p^2 + q^2}, \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{2(vp - uq)\mathbf{i} + (u^2 - v^2 + p^2 - q^2)\mathbf{j} + 2(uv + pq)\mathbf{k}}{u^2 + v^2 + p^2 + q^2}, \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{2(up + vq)\mathbf{i} + 2(pq - uv)\mathbf{j} + (u^2 - v^2 - p^2 + q^2)\mathbf{k}}{u^2 + v^2 + p^2 + q^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Zapišimo komponente \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 in \mathbf{e}_3 v stolpce 3×3 matrike:

$$\frac{1}{u^2 + v^2 + p^2 + q^2} \begin{bmatrix} u^2 + v^2 + p^2 + q^2 & 2(vp - uq) & 2(up + vq) \\ 2(uq + vp) & u^2 - v^2 + p^2 - q^2 & 2(pq - uv) \\ 2(vq - up) & 2(uv + pq) & u^2 - v^2 - p^2 + q^2 \end{bmatrix}.$$



Slika 1: Frenet-Sorretovo ogrodje z nezveznostjo ogrodja v prevojni točki.

Dobimo ortogonalno matriko z determinanto enako ena [6].

Za prostorske polinomske PH krivulje stopnje 5 so komponente vektorjev ER ogrodja racionalne funkcije stopnje 4. Sprememba ER ogrodja vzdolž \mathbf{r} je določena s kotno hitrostjo $\boldsymbol{\omega}$ kot:

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1 \quad \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2 \quad \frac{d\mathbf{e}_3}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3,$$

kjer je $\boldsymbol{\omega}$ zapisan po ER bazi

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3. \quad (3.3)$$

Iz enačbe (3.3) izrazimo ω_1, ω_2 in ω_3 kot

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \mathbf{e}_3 \cdot \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = -\mathbf{e}_2 \cdot \frac{d\mathbf{e}_3}{ds} = 2 \frac{uv' - u'v - pq' + p'q}{\sigma^2}, \\ \omega_2 &= \mathbf{e}_1 \cdot \frac{d\mathbf{e}_3}{ds} = -\mathbf{e}_3 \cdot \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = 2 \frac{up' - u'p + vq' - v'q}{\sigma^2}, \\ \omega_3 &= \mathbf{e}_2 \cdot \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = -\mathbf{e}_1 \cdot \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = 2 \frac{uq' - u'q - vp' + v'p}{\sigma^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Sedaj uvedimo polinom $h(\xi)$ kot

$$h(\xi) = u(\xi)v'(\xi) - u'(\xi)v(\xi) - p(\xi)q'(\xi) + p'(\xi)q(\xi). \quad (3.5)$$

Tako lahko prvo komponentno kotne hitrosti zapišemo kot

$$\omega_1(\xi) = 2 \frac{h(\xi)}{\sigma^2(\xi)}. \quad (3.6)$$

Čeprav sta vektorja \mathbf{e}_2 in \mathbf{e}_3 odvisna od izbranega koordinatnega sistema $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, je prva komponenta kotne hitrosti ω_1 (ki določa vrtenje vektorjev \mathbf{e}_2 in \mathbf{e}_3 okoli tangente \mathbf{e}_1 na krivuljo) neodvisna od koordinatnega sistema. Sprememba koordinat bi pomenila zamenjavo kvaterniona \mathcal{A} s kvaternionom

$$\tilde{\mathcal{A}}(\xi) = \mathcal{A}(\xi)\mathcal{U} = \tilde{u}(\xi) + \tilde{v}(\xi)\mathbf{i} + \tilde{p}(\xi)\mathbf{j} + \tilde{q}(\xi)\mathbf{k}, \quad (3.7)$$

za nek enotski kvaternion \mathcal{U} . Lahko preverimo, da sta polinoma $\tilde{\sigma}(\xi)$ in $\tilde{h}(\xi)$ določena s spremembo $\tilde{u}(\xi)$, $\tilde{v}(\xi)$, $\tilde{p}(\xi)$ in $\tilde{q}(\xi)$ v $u(\xi)$, $v(\xi)$, $p(\xi)$ in $q(\xi)$ iz enačb (2.12) in (3.5) enaka $\sigma(\xi)$ in $h(\xi)$ [3].

3.2 Lastnosti ER ogrodja

ER ogrodje je racionalno ogrodje za prostorske PH krivulje, ki je definirano z izrazi (3.1) [6]. ER ogrodje ima nekaj lepih lastnosti. V primeru kubičnih PH krivulj je ER ogrodje ekvivalentno Fernetovemu ogrodju [2].

Zasuk (*ang: twist*) T_{ER} od ER ogrodja predstavlja skupno rotacijo vektorjev normalne ravnine \mathbf{e}_2 in \mathbf{e}_3 okoli tangente \mathbf{e}_1 vzdolž \mathbf{r} , in sicer:

$$T_{ER} = \int_0^s \omega_1 ds = \int_0^1 \omega_1(\xi)\sigma(\xi)d\xi = 2 \int_0^1 \frac{h(\xi)}{\sigma(\xi)} d\xi. \quad (3.8)$$

Na primer za polinomske PH krivulje stopnje 5 je integrand v števcu stopnje 2 in v imenovalcu stopnje 4.

Naj z_1, \bar{z}_1 in z_2, \bar{z}_2 označujeta dva para kompleksnih konjugiranih ničel realnega polinoma $\sigma(\xi) = u^2(\xi) + v^2(\xi) + p^2(\xi) + q^2(\xi)$, tako da je

$$\sigma(\xi) = c(\xi - z_1)(\xi - \bar{z}_1)(\xi - z_2)(\xi - \bar{z}_2)$$

za neko realno konstanto $c \neq 0$. Ničle polinoma $\sigma(\xi)$ lahko izrazimo v zaključeni obliki, kar nam omogoča Ferrarijeva metoda. Če delimo $h(\xi)$ in $\sigma(\xi)$ z c , potem ima parcialni ulomek integranda v (3.8) naslednjo obliko

$$\frac{h(\xi)}{\sigma(\xi)} = \frac{c_1}{\xi - z_1} + \frac{\bar{c}_1}{\xi - \bar{z}_1} + \frac{c_2}{\xi - z_2} + \frac{\bar{c}_2}{\xi - \bar{z}_2}, \quad (3.9)$$

kjer kompleksne vrednosti

$$c_1 = \frac{h(z_1)}{(z_1 - \bar{z}_1)(z_1 - z_2)(z_1 - \bar{z}_2)}, \quad c_2 = \frac{h(z_2)}{(z_2 - z_1)(z_2 - \bar{z}_1)(z_2 - \bar{z}_2)} \quad (3.10)$$

imenujemo ostanki racionalne funkcije $\frac{h(\xi)}{\sigma(\xi)}$ na polih (navpične asimptote) funkcije. z_1 , z_2 in \bar{z}_1 , \bar{z}_2 so konjugirani ostanki. Iz enačbe (3.9) dobimo nedoločen integral kot

$$\int \frac{h(\xi)}{\sigma(\xi)} d\xi = c_1 \ln(\xi - z_1) + \bar{c}_1 \ln(\xi - \bar{z}_1) + c_2 \ln(\xi - z_2) + \bar{c}_2 \ln(\xi - \bar{z}_2).$$

Konjugirane izraze lahko kombiniramo in dobimo

$$\begin{aligned} \int \frac{h(\xi)}{\sigma(\xi)} d\xi &= 2 \operatorname{Re}(c_1) \ln |\xi - z_1| - 2 \operatorname{Im}(c_1) \operatorname{arg}(\xi - z_1) \\ &+ 2 \operatorname{Re}(c_2) \ln |\xi - z_2| - 2 \operatorname{Im}(c_2) \operatorname{arg}(\xi - z_2). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Pri uporabi ER ogrodja kot osnove za konstrukcijo racionalnega ogrodja z minimalnim zasukom (MT ogrodje), moramo upoštevati nekatere značilnosti, ki vplivajo na spremembe ER ogrodja. Vektorja \mathbf{e}_2 in \mathbf{e}_3 se vrtila okoli tangente \mathbf{e}_1 v nasprotni smeri urinega kazalca, takrat ko prva komponenta kotne hitrosti ER ogrodja ω_1 spremeni predznak za $\xi \in (0, 1)$. Točke, v katerih ω_1 spremeni predznak, so tiste točke v katerih ima polinom (3.5) realne ničle lihe stopnje. Te točke imenujemo prevoji ER ogrodja. Za PH polinomske krivulje stopnje 4 je ta polinom stopnje 2 z Bernsteinovimi koeficienti

$$\begin{aligned} h_0 &= 2(u_0v_1 - u_1v_0 - p_0q_1 + p_1q_0), \\ h_1 &= u_0v_2 - u_2v_0 - p_0q_2 + p_2q_0, \\ h_2 &= 2(u_1v_2 - u_2v_1 - p_1q_2 + p_2q_1), \end{aligned} \quad (3.12)$$

in ničlami

$$\xi = \frac{h_0 - h_1 \pm \sqrt{h_1^2 - h_0h_2}}{h_0 - 2h_1 + h_2}. \quad (3.13)$$

Očitno je, da ER ogrodje nima prevojnih točk, ko je $h_1^2 - h_0h_2 < 0$. Segment PH krivulje $\mathbf{r}(\xi)$, ima monotono ER ogrodje, če ER ogrodje nima prevojev.

Zanimivi so tudi ekstremi od ω_1 , ki jih dobimo kot ničle njegovega odvoda,

$$\frac{d\omega_1}{ds} = 2 \frac{\sigma(\xi)h'(\xi) - 2\sigma'(\xi)h(\xi)}{\sigma^4(\xi)}. \quad (3.14)$$

Za prostorske PH polinomske krivulje stopnje pet se v števcu nahaja polinom stopnje 5 (ker sta $\sigma(\xi)$ in $h(\xi)$ stopnje 4 in 2) in ω_1 ima vsaj en in največ 5 ekstremov, vendar ne nujno znotraj intervala $[0, 1]$. Koeficiente polinoma lahko določimo iz $h(\xi)$ in $\sigma(\xi)$ s standardnimi algoritmi za vsoto in produkt polinomov v Bernsteinovi obliki.

Pri konstruiranju racionalnega MT ogrodja iz ER ogrodja je boljše dano polinomsko PH krivuljo \mathbf{r} stopnje 5 razdeliti na podsegmente z monotonim ER ogrođjem, kjer ω_1 ne spremeni predznaka ali pa nima ekstrema (ali pa oboje). To lahko dosežemo z uporabo de Casteljauvega algoritma na kvaternionskem polinomu [3].

4 Ogrodje z minimalnim zasukom

V tem poglavju bomo predstavili ogrodje z minimalnim zasukom (MT ogrodje). V podpoglavju bomo podrobneje predstavili racionalno MT ogrodje.

Vzemimo prostorsko krivuljo $\mathbf{r}(\xi)$, $\xi \in [0, 1]$, dolžine S , in naj bosta

$$(\mathbf{f}_1(0), \mathbf{f}_2(0), \mathbf{f}_3(0)) \quad \text{in} \quad (\mathbf{f}_1(1), \mathbf{f}_2(1), \mathbf{f}_3(1)), \quad (4.1)$$

vrednosti ogrodja v točkah pri $\xi = 0$ in $\xi = 1$, pri čemer je $\mathbf{f}_1(\xi) = \frac{\mathbf{r}'(\xi)}{|\mathbf{r}'(\xi)|}$. Označimo z $\Omega = \Omega_1 \mathbf{f}_1 + \Omega_2 \mathbf{f}_2 + \Omega_3 \mathbf{f}_3$ kotno hitrost ogrodja. Takšno ogrodje imenujemo ogrodje z minimalnim zasukom glede na pogoj (4.1), če velja:

- i) Ω_1 ne spremeni predznaka na intervalu $(0, 1)$, t.j. ogrodje je monotono in
- ii) daje najmanjšo možno absolutno vrednost integrala

$$T = \int_0^S \Omega_1 ds = \int_0^1 \Omega_1(\xi) \sigma(\xi) d\xi.$$

Točko, v kateri Ω_1 spremeni predznak, imenujemo prevojna točka ogrodja $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$. Če prevojnih točk ni, se vrednosti T za različna ogrodja z enakimi končnimi stanji lahko razlikujejo le za večkratnike števila 2π . Če pa imamo prevojne točke, potem se znotraj integrala T lahko rotacije v eno in drugo smer odštejejo. To pa ni zaželeno v skladu z lastnostjo minimalnega zasuka, zato je s pogojem i) to izključeno.

Vzemimo sedaj ogrodje $(\mathbf{f}_1(\xi), \mathbf{f}_2(\xi), \mathbf{f}_3(\xi))$ prostorske PH krivulje $\mathbf{r}(\xi)$, $\xi \in [0, 1]$, določeno z ER ogrodjem $(\mathbf{e}_1(\xi), \mathbf{e}_2(\xi), \mathbf{e}_3(\xi))$ kot $\mathbf{f}_1(\xi) = \mathbf{e}_1(\xi)$ in

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_2(\xi) \\ \mathbf{f}_3(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta(\xi) & \sin \Theta(\xi) \\ -\sin \Theta(\xi) & \cos \Theta(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2(\xi) \\ \mathbf{e}_3(\xi) \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Da bo ogrodje $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ racionalno, vzamemo

$$\Theta(\xi) = 2 \tan^{-1} \frac{b(\xi)}{a(\xi)}, \quad (4.3)$$

za tuja polinoma $a(\xi)$ in $b(\xi)$ stopnje m , da velja

$$\cos \Theta(\xi) = \frac{a^2(\xi) - b^2(\xi)}{a^2(\xi) + b^2(\xi)}, \quad \sin \Theta(\xi) = \frac{2a(\xi)b(\xi)}{a^2(\xi) + b^2(\xi)}. \quad (4.4)$$

Ker je Ω kotna hitrost ogrodja $(\mathbf{f}_1(\xi), \mathbf{f}_2(\xi), \mathbf{f}_3(\xi))$, velja

$$\frac{d\mathbf{f}_1}{ds} = \Omega \times \mathbf{f}_1, \quad \frac{d\mathbf{f}_2}{ds} = \Omega \times \mathbf{f}_2, \quad \frac{d\mathbf{f}_3}{ds} = \Omega \times \mathbf{f}_3.$$

Če to kotno hitrost razpišemo po ER bazi (t.j. $\Omega = \Omega_1 \mathbf{e}_1 + \Omega_2 \mathbf{e}_2 + \Omega_3 \mathbf{e}_3$), dobimo komponente

$$\Omega_1(\xi) = \omega_1(\xi) + \frac{\Theta'(\xi)}{\sigma(\xi)}, \quad (4.5)$$

in $\Omega_2(\xi) = \omega_2(\xi)$, $\Omega_3(\xi) = \omega_3(\xi)$, kjer je $\omega = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3$ je kotna hitrost ER ogrodja $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Iz enačbe (4.3) sledi

$$\Theta'(\xi) = 2 \frac{a(\xi)b'(\xi) - a'(\xi)b(\xi)}{a^2(\xi) + b^2(\xi)}. \quad (4.6)$$

Začetna in končna orientacija (4.1) sta določeni z začetno in končno orientacijo normalne ravnine, $\Theta_i = \Theta(0)$ in $\Theta_f = \Theta(1)$, vektorjev $\mathbf{f}_2(\xi)$, $\mathbf{f}_3(\xi)$ glede na $\mathbf{e}_2(\xi)$, $\mathbf{e}_3(\xi)$, tako da $\Theta_i, \Theta_f \in (-\pi, +\pi]$. Toda robna pogoja (4.1) ne določata enolična ogrodja $(\mathbf{f}_1(\xi), \mathbf{f}_2(\xi), \mathbf{f}_3(\xi))$. Ogrodje ima komponento kotne hitrosti (4.5) v smeri tangente, kjer je $\omega_1(\xi)$ komponenta kotne hitrosti ER ogrodja in $\frac{\Theta'(\xi)}{\sigma(\xi)}$ je komponenta, ki nastane ob rotaciji v normalni ravnini (4.2), zato izbira $\Theta(\xi)$ vpliva na variacijo ogrodja med robnima stanjema (4.1). V splošnem, zasuk ogrodja na prostorski krivulji z danima začetno in končno orientacijo lahko preseže vrednost 2π . To pomeni, da je skupna rotacija, ki je potrebna za izpolnitev robnih pogojev (4.1), presežena za en ali več polnih zasukov za kot 2π .

Zasuk ogrodja $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ je podan z

$$T = \int_0^S \Omega_1 ds = \int_0^1 (\omega_1 \sigma + \Theta') d\xi = T_{ER} + \Theta_f - \Theta_i, \quad (4.7)$$

in vrednost T lahko preseže 2π , ker je T_{ER} lahko večji od 2π in Θ_i ter Θ_f sta nedoločena do večkratnikov števila 2π . Ker lahko MT ogrodje vedno zadosti začetno/končno orientacijo s skupnim zasukom, ki ni manjši od $-\pi$ ali večji od $+\pi$, se uporablja zmanjšani zasuk T_{min} namesto nominalne vrednosti T . Če $T \in (-\pi, +\pi]$, potem vzamemo $T_{min} = T$. V nasprotnem primeru definiramo T_{min} tako, da dodamo ali odštejemo od T večkratnik števila 2π , ki da vrednost v definicijskem območju $(-\pi, +\pi]$.

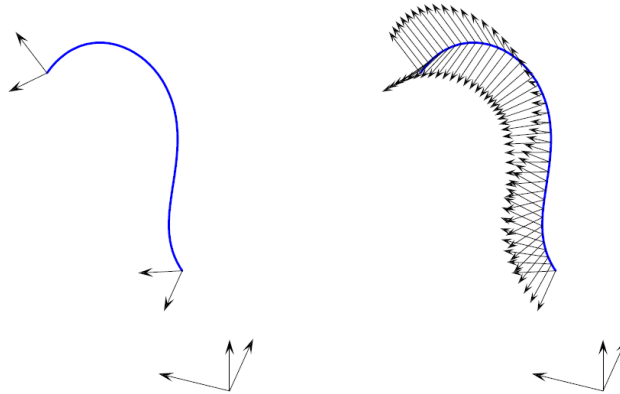
Ogrodje minimalnega zasuka, ki zadosti dana robna pogoja, je določeno tako, da ima vrednost zasuka T_{min} in povprečno komponento kotne hitrosti

$$\bar{\Omega}_1 = \frac{T_{min}}{S}. \quad (4.8)$$

Formula v zaključeni obliki za vektorja ogrodja $\mathbf{f}_2(\xi)$ in $\mathbf{f}_3(\xi)$, ki imata konstantno komponento kotne hitrosti $\bar{\Omega}_1$ v smeri tangente $\mathbf{e}_1(\xi) = \mathbf{f}_1(\xi)$, je določena s (4.2), kjer v (4.5) vzamemo $\Omega_1(\xi) \equiv \bar{\Omega}_1$. Z integriranjem ima kotna funkcija $\Theta(\xi)$ obliko

$$\Theta(\xi) = \Theta_i + \bar{\Omega}_1 s(\xi) - 2 \int_0^\xi \frac{h(x)}{\sigma(x)} dx, \quad (4.9)$$

kjer je $s(\xi)$ ločna dolžina funkcije, definirana kot $s(\xi) = \int_0^\xi \sigma(t) dt$. Pri funkciji $\Theta(\xi)$ iz (4.9) lahko za integral na desni strani uporabimo (3.11).



Slika 2: Levo: Polinomska prostorska PH krivulja $\mathbf{r}(\xi)$ stopnje pet z danimi začetnimi/končnimi orientacijami $\mathbf{f}_2(0), \mathbf{f}_3(0)$ in $\mathbf{f}_2(1), \mathbf{f}_3(1)$ za vektorja normalne ravnine ogrodja $(\mathbf{f}_1(\xi), \mathbf{f}_2(\xi), \mathbf{f}_3(\xi))$. Desno: Vektorja $\mathbf{f}_2(\xi)$ in $\mathbf{f}_3(\xi)$ vzdolž $\mathbf{r}(\xi)$, kot je določeno v (4.2) in (4.9), ob upoštevanju robnih pogojev.

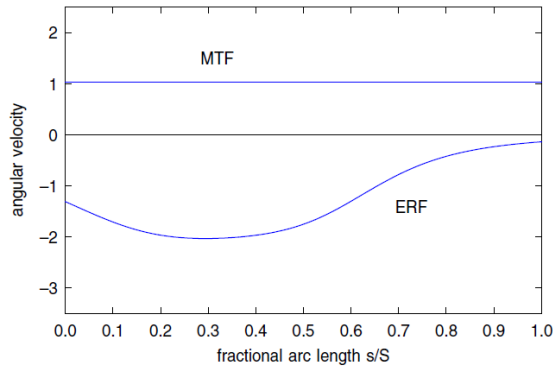
Slika 2 prikazuje primer polinomske prostorske PH krivulje stopnje pet z danimi začetnimi/končnimi orinetacijami ter vektorja normalne ravnine $\mathbf{f}_2(\xi)$ in $\mathbf{f}_3(\xi)$ MT ogrodja vzdolž krivulje, kot je opredeljeno v (4.2) in (4.9).

Na sliki 3 je prikazana primerjava variacije komponente kotne hitrosti vzdolž smeri tangente za ER in MT ogrodji [3].

4.1 Racionalno MT ogrodje

Izraza (4.2) in (4.9) določata MT ogrodje, ki zadošča pogoju konstantne kotne hitrost $\Omega_1(\xi) \equiv \bar{\Omega}_1$, vendar to implicira zapleteno izražavo za $\mathbf{f}_2(\xi)$ in $\mathbf{f}_3(\xi)$. Čeprav je $s(\xi)$ polinom, ima integral (4.9) transcendentno odvisnost od ξ , kot je razvidno iz (3.11). Poleg tega sta v enačbi (4.2) potrebna kosinus in sinus izraza (4.9).

V mnogih aplikacijah je bolje opustiti pogoj konstantne kotne hitrosti, saj lahko tako dobimo MT ogrodje s preprostejšimi (racionalnimi) izrazi za vektorja $\mathbf{f}_2(\xi)$, $\mathbf{f}_3(\xi)$, ki razpenjata normalno ravnino. Takšno ogrodje lahko skonstruiramo z uporabo (4.3)



Slika 3: Variacija komponente kotne hitrosti ogrodja v smeri tangente za ER ogrodje in MT ogrodja, prikazano na sliki 2, vzdolž polinomske prostorske PH krivulje stopnje pet.

za realna polinoma $a(\xi)$ in $b(\xi)$. Definirajmo kompleksni polinom $\mathbf{w}(\xi) = a(\xi) + \mathbf{i}b(\xi)$, tako da

$$\exp(\mathbf{i}\Theta(\xi)) = \frac{\mathbf{w}^2(\xi)}{|\mathbf{w}(\xi)|^2} = \frac{a^2(\xi) - b^2(\xi) + \mathbf{i}2a(\xi)b(\xi)}{a^2(\xi) + b^2(\xi)}. \quad (4.10)$$

Enačbo (4.10) lahko kompaktneje zapišemo kot

$$\exp(\mathbf{i}\Theta(\xi)) = \frac{\mathbf{w}(\xi)}{\bar{\mathbf{w}}(\xi)}, \quad (4.11)$$

kjer je $\bar{\mathbf{w}}(\xi) = a(\xi) - \mathbf{i}b(\xi)$. Enačbo (4.6) lahko sedaj zapišemo kot [3]

$$\Theta'(\xi) = 2 \frac{\text{Im}(\bar{\mathbf{w}}(\xi)\mathbf{w}'(\xi))}{|\mathbf{w}(\xi)|^2} = 2 \frac{a(\xi)b'(\xi) - a'(\xi)b(\xi)}{a^2(\xi) + b^2(\xi)}. \quad (4.12)$$

Z uporabo Hopfove preslikave in kompleksnega polinoma \mathbf{w} velja

$$\frac{\text{Im}(\bar{\alpha}(\xi)\alpha'(\xi) + \bar{\beta}(\xi)\beta'(\xi))}{|\alpha(\xi)|^2 + |\beta(\xi)|^2} = \frac{\text{Im}(\bar{\mathbf{w}}(\xi)\mathbf{w}'(\xi))}{|\mathbf{w}(\xi)|^2} \quad (4.13)$$

Leva stran enačbe (4.13) je komponenta kotne hitrosti ER ogrodja v smeri tangente $\mathbf{e}_1 = \mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|$ [1].

Pokažimo, da pogoj $\Omega_1 \equiv \textit{konstanta}$ ni nikoli izpolnjen, če sta $\mathbf{f}_2(\xi)$ in $\mathbf{f}_3(\xi)$ definirana kot v (4.2) in (4.3). Če je stopnja(u, v, p, q) = m in stopnja(a, b) = ℓ potem je

$$\begin{aligned} \textit{stopnja}(h) &= 2m - 2, & \textit{stopnja}(\sigma) &= 2m, & \textit{stopnja}(ab' - a'b) &= 2\ell - 2, \\ & & \textit{stopnja}(a^2 + b^2) &= 2\ell. \end{aligned}$$

Tako iz enačbe (4.5) z $\omega_1 = \frac{2h}{\sigma^2}$ in $\Theta' = \frac{2(ab' - a'b)}{a^2 + b^2}$ dobimo

$$\Omega_1 = 2 \frac{(a^2 + b^2)h + \sigma(ab' - a'b)}{\sigma^2(a^2 + b^2)}, \quad (4.14)$$

kjer imamo v števcu stopnjo $2m + 2\ell - 2$ in v imenovalcu stopnjo $4m + 2\ell$. Torej Ω_1 ne more biti konstantna. Spomnimo se, da realne ničle polinoma v števcu določajo prevojne točke ogrodja $(\mathbf{f}_1(\xi), \mathbf{f}_2(\xi), \mathbf{f}_3(\xi))$.

Pišimo sedaj polinom $\mathbf{w}(\xi)$ izražen v Bernsteinovi obliki

$$\mathbf{w}(\xi) = \sum_{k=0}^m \mathbf{w}_k \binom{m}{k} (1 - \xi)^{m-k} \xi^k. \quad (4.15)$$

Potem robna pogoja $\Theta(0) = \Theta_i$ in $\Theta(1) = \Theta_f$ implicirata

$$\frac{\mathbf{w}_0}{\bar{\mathbf{w}}_0} = \exp(\mathbf{i}\Theta_i) \quad \text{in} \quad \frac{\mathbf{w}_m}{\bar{\mathbf{w}}_m} = \exp(\mathbf{i}\Theta_f),$$

in zatorej $\mathbf{w}_0 = \gamma_i \exp(\mathbf{i}\frac{1}{2}\Theta_i)$, $\mathbf{w}_m = \gamma_f \exp(\mathbf{i}\frac{1}{2}\Theta_f)$, za neničelni realni konstanti γ_i , γ_f . Ker izraz (4.11) pri skaliranju $\mathbf{w}(\xi)$ s katerokoli neničelno realno vrednostjo ostane nespremenjen, lahko vzamemo $\gamma_i = 1$ ali $\gamma_f = 1$. Vzemimo torej

$$\mathbf{w}_0 = \exp(\mathbf{i}\frac{1}{2}\Theta_i) \quad \text{in} \quad \mathbf{w}_m = \gamma \exp(\mathbf{i}\frac{1}{2}\Theta_f).$$

Zaželjeno je, da je polinom $\mathbf{w}(\xi) = a(\xi) + \mathbf{i}b(\xi)$ nizke stopnje, da sta posledično tudi vektorja $\mathbf{f}_2(\xi)$, $\mathbf{f}_3(\xi)$ izražena v (4.2) relativno nizke stopnje [3].

4.1.1 Linearni polinom $\mathbf{w}(\xi)$

V enostavnem netrivialnem primeru je

$$\mathbf{w}(\xi) = \mathbf{w}_0(1 - \xi) + \mathbf{w}_1\xi,$$

kjer sta $\mathbf{w}_0 = \exp(\mathbf{i}\frac{1}{2}\Theta_i)$ in $\mathbf{w}_1 = \gamma \exp(\mathbf{i}\frac{1}{2}\Theta_f)$. Izraz (4.12) je enak

$$\Theta'(\xi) = \frac{2\gamma \sin \frac{1}{2}\Delta\Theta}{(1 - \xi)^2 + \gamma \cos \frac{1}{2}\Delta\Theta 2(1 - \xi)\xi + \gamma^2\xi^2},$$

kjer $\Delta\Theta = \Theta_f - \Theta_i$. Ker je števec konstanten in je imenovalec kvadratna funkcija z diskriminanto $-(\gamma \sin \frac{1}{2}\Delta\Theta)^2$, opazimo, da Θ' ne spremeni predznaka, kar pomeni, da je Θ monotona z $\Theta(\xi) \equiv 0$, ko je $\Theta_f = \Theta_i$. Parameter γ je edini parameter, s katerim lahko moduliramo variacijo $\Theta(\xi)$. S

$$\rho_0 = \sigma(0)[\bar{\Omega}_1 - \omega_1(0)] \quad \text{in} \quad \rho_1 = \sigma(1)[\bar{\Omega}_1 - \omega_1(1)], \quad (4.16)$$

lahko preverimo ali zapisa

$$\gamma = \frac{\rho_0}{2 \sin \frac{1}{2} \Delta \Theta} \quad \text{in} \quad \gamma = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \Delta \Theta}{\rho_1}$$

zagotovita $\Omega_1(0) = \bar{\Omega}_1$ in $\Omega_1(1) = \bar{\Omega}_1$. $\Omega_1(\xi)$ z vrednostjo (4.8) lahko dosežemo le v eni robni točki. Opazimo, da nam linearni polinom $w(\xi)$ ponuja premalo možnosti za modulacijo variacije $\Omega_1(\xi)$ [3].

4.1.2 Kvadratni polinom $w(\xi)$

Vzemimo sedaj polinom $w(\xi)$ stopnje 2,

$$w(\xi) = w_0(1 - \xi)^2 + w_1 2(1 - \xi)\xi + w_2 \xi^2, \quad (4.17)$$

kjer je v števcu (4.12) kvadratni polinom in v imenovalcu polinom stopnje 4. Polinom $w(\xi)$ stopnje 2 implicira MT ogrodje stopnje 5 (kar sledi iz (4.2)) in imajo racionalno odvisnost stopnje 8 krivulje s parametrom ξ . Pišimo $w_0 = \exp(\mathbf{i}\frac{1}{2}\Theta_i)$ in $w_2 = \gamma \exp(\mathbf{i}\frac{1}{2}\Theta_f)$ in uporabimo ρ_0 in ρ_1 iz (4.16), ter preverimo ali zapis

$$w_1 = \frac{\exp(\mathbf{i}\frac{1}{2}\Theta_f)\rho_0 + \exp(\mathbf{i}\frac{1}{2}\Theta_i)\gamma\rho_1}{4 \sin \frac{1}{2} \Delta \Theta}, \quad (4.18)$$

zadošča $\Omega_1(0) = \Omega_1(1) = \bar{\Omega}_1$. $\Omega_1(\xi)$ je v obeh točkah definiran kot v (4.8) in γ je prosti parameter. Z uporabo (4.18) imamo v števcu (4.12) Bernsteinove koeficiente

$$2 \operatorname{Im}(\bar{w}_0 w_1) = \frac{1}{2} \rho_0, \quad 2 \operatorname{Im}(\bar{w}_0 w_2) = 2\gamma \sin \frac{1}{2} \Delta \Theta, \quad 2 \operatorname{Im}(\bar{w}_1 w_2) = \frac{1}{2} \gamma^2 \rho_1.$$

Bernsteinovi koeficienti v imenovalcu pa so naslednji

$$\begin{aligned} & |w_0|^2, \\ & 2 \operatorname{Re}(\bar{w}_0 w_1) = \frac{\cos \frac{1}{2} \Delta \Theta \rho_0 + \gamma \rho_1}{2 \sin \frac{1}{2} \Delta \Theta}, \\ & 2 \operatorname{Re}(\bar{w}_0 w_2) + 4|w_1|^2 = \frac{\rho_0^2 + 2\gamma \cos \frac{1}{2} \Delta \Theta \rho_0 \rho_1 + \gamma^2 \rho_1^2}{16 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta \Theta}, \\ & 2 \operatorname{Re}(\bar{w}_1 w_2) = \frac{\rho_0 + \gamma^2 \cos \frac{1}{2} \Delta \Theta \rho_1}{2 \sin \frac{1}{2} \Delta \Theta}, \end{aligned}$$

$$|w_2|^2 = \gamma^2.$$

Da bi fiksirali prosti parameter γ , upoštevamo minimiziranje povprečnega kvadratnega odklona $\Omega_1(\xi)$ od povprečne vrednosti $\bar{\Omega}_1$, definirano kot

$$\langle |\Delta\Omega_1|^2 \rangle = \frac{1}{S} \int_0^1 [\Omega_1(\xi) - \bar{\Omega}_1]^2 \sigma(\xi) d\xi. \quad (4.19)$$

Če upoštevamo

$$\int_0^1 \Omega_1(\xi) \sigma(\xi) d\xi = S\bar{\Omega}_1,$$

lahko izraz (4.19) zapišemo kot

$$\langle |\Delta\Omega_1|^2 \rangle = \frac{1}{S} \int_0^1 \Omega_1^2(\xi) \sigma(\xi) d\xi - \bar{\Omega}_1^2.$$

Z uporabo (4.5) in z upoštevanjem, da je $\bar{\Omega}_1$ konstanten, lahko $\langle |\Delta\Omega_1|^2 \rangle$ minimiziramo glede na parameter γ z določitvijo minimuma integrala

$$F(\gamma) = \int_0^1 \left[\omega_1(\xi) + \frac{\Theta'(\xi)}{\sigma(\xi)} \right]^2 \sigma(\xi) d\xi, \quad (4.20)$$

kjer je samo $\Theta'(\xi)$ odvisen od γ . Ekstrem (4.20) zadošča pogoju

$$\frac{dF}{d\gamma} = 2 \int_0^1 \left[\omega_1(\xi) + \frac{\Theta'(\xi)}{\sigma(\xi)} \right] \frac{\partial \Theta'}{\partial \gamma}(\xi) \sigma(\xi) d\xi = 0.$$

Zgornji integral lahko načeloma zapišemo v zaključeni obliki, saj so polinomi, ki se v integralu pojavljajo, največ stopnje 4. Če pogledamo parcialni odvod $\Theta'(\xi)$ glede na γ , pa je v splošnem dobljena enačba transcendentno odvisna od γ . To pa zahteva iterativno numerično rešitev.

Uporabili bomo naslednji pristop. Za $\gamma \neq 0$ lahko funkcijo ¹ izračunamo s katerokoli željeno natančnostjo s Simpsonovim pravilom ². Pri enakomernih vozlih $\xi_i = \frac{i}{N}$, $i = 0, 1, \dots, N$ (N je sodo število), lahko integral (4.20) zapišemo s približkom

$$F(\gamma) \approx \frac{1}{3N} \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} (f(\xi_{2i-2}) + 4f(\xi_{2i-1}) + f(\xi_{2i})), \quad (4.21)$$

kjer $f(\xi) = \Omega_1^2(\xi) \sigma(\xi)$. Z izbiro $N = 2^n$ za $n = 1, 2, \dots$, lahko pri povečanju iz n na $n+1$ uporabimo predhodno izračunane vrednosti f . Ker je funkcija $f(\xi)$ nenegativna, to omogoča hitro konvergenco do željene tolerance. Napaka ϵ v približku (4.21) zadostuje [3]

$$|\epsilon| < \frac{1}{180N^4} \max_{\xi \in [0,1]} |f^{(4)}(\xi)|.$$

¹Vrednost $\gamma = 0$ je izključena, ker potem $\mathbf{w}_2 = 0$ in po L'Hopitalovem pravilu vrednost limite od (4.11), ko $\xi \rightarrow 1$ ne omogoči interpolacije vektorjev ogrodja $\mathbf{f}_2(1)$, $\mathbf{f}_3(1)$.

²Simpsonovo pravilo je Newton-Cotesova formula za oceno integrala funkcije \mathbf{f} s pomočjo polinomov stopnje dva. Simpsonovo pravilo lahko dobimo, tako da integriramo Lagrangeovo funkcijo stopnje 3, ki seka funkcijo \mathbf{f} v treh enako oddaljenih točkah. Vzemimo funkcijo \mathbf{f} , ki gre skozi točke x_0, x_1, x_2 , ki so oddaljene za h in pišimo $\mathbf{f}_n = \mathbf{f}(x_n)$. Glede na Simpsonovo pravilo velja: $\int_{x_0}^{x_0+2h} \mathbf{f}(x) dx = \int_{x_0}^{x_0+2h} \mathbf{f}(x) dx \approx \frac{1}{3} h (\mathbf{f}_0 + 4\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2)$ [7].

5 Racionalno MT ogrodje na krivuljah z rotacijsko minimizirajočim ER ogrođjem

Za krivulje, ki zadoščajo enačbi (4.16) in zanje velja $\text{Im}(\bar{\alpha}(\xi)\alpha'(\xi) + \bar{\beta}(\xi)\beta'(\xi)) \equiv 0$, je njihovo ER ogrođje $(\mathbf{e}_1(\xi), \mathbf{e}_2(\xi), \mathbf{e}_3(\xi))$ že samo rotacijsko minimizirajoče, zato rotacija iz enačbe (4.2) ni potrebna, da bi pridobili racionalno RM ogrođje. Velja, da je najpreprostejša prostorska krivulja s to lastnostjo PH krivulja stopnje 7.

Za konstrukcijo PH krivulj stopnje 7 uporabimo naslednja kubična kompleksna polinoma

$$\begin{aligned}\alpha(\xi) &= \alpha_0 b_0^3(\xi) + \alpha_1 b_1^3(\xi) + \alpha_2 b_2^3(\xi) + \alpha_3 b_3^3(\xi), \\ \beta(\xi) &= \beta_0 b_0^3(\xi) + \beta_1 b_1^3(\xi) + \beta_2 b_2^3(\xi) + \beta_3 b_3^3(\xi)\end{aligned}\tag{5.1}$$

v (2.11). Velja

$$\begin{aligned}|\alpha(\xi)|^2 \pm |\beta(\xi)|^2 &= (|\alpha_0|^2 \pm |\beta_0|^2)b_0^6(\xi) + \text{Re}(\bar{\alpha}_0\alpha_1 \pm \bar{\beta}_0\beta_1)b_1^6(\xi) \\ &+ \left[\frac{2}{5} \text{Re}(\bar{\alpha}_0\alpha_2 \pm \bar{\beta}_0\beta_2) + \frac{3}{5}(|\alpha_1|^2 \pm |\beta_1|^2) \right] b_2^6(\xi) \\ &+ \left[\frac{1}{10} \text{Re}(\bar{\alpha}_0\alpha_3 \pm \bar{\beta}_0\beta_3) + \frac{9}{10} \text{Re}(\bar{\alpha}_1\alpha_2 \pm \bar{\beta}_1\beta_2) \right] b_3^6(\xi) \\ &+ \left[\frac{2}{5} \text{Re}(\bar{\alpha}_1\alpha_3 \pm \bar{\beta}_1\beta_3) + \frac{3}{5}(|\alpha_2|^2 \pm |\beta_2|^2) \right] b_4^6(\xi) \\ &+ \text{Re}(\bar{\alpha}_2\alpha_3 \pm \bar{\beta}_2\beta_3)b_5^6(\xi) + (|\alpha_3|^2 \pm |\beta_3|^2)b_6^6(\xi),\end{aligned}\tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}2\alpha(\xi)\bar{\beta}(\xi) &= 2\alpha_0\bar{\beta}_0b_0^6(\xi) + (\alpha_0\bar{\beta}_1 + \alpha_1\bar{\beta}_0)b_1^6(\xi) \\ &+ \frac{2}{5}(\alpha_0\bar{\beta}_2 + \alpha_2\bar{\beta}_0 + 3\alpha_1\bar{\beta}_1)b_2^6(\xi) \\ &+ \frac{1}{10}[\alpha_0\bar{\beta}_3 + \alpha_3\bar{\beta}_0 + 9(\alpha_1\bar{\beta}_2 + \alpha_2\bar{\beta}_1)]b_3^6(\xi) \\ &+ \frac{2}{5}(\alpha_1\bar{\beta}_3 + \alpha_3\bar{\beta}_1 + 3\alpha_2\bar{\beta}_2)b_4^6(\xi) \\ &+ (\alpha_2\bar{\beta}_3 + \alpha_3\bar{\beta}_2)b_5^6(\xi) + 2\alpha_3\bar{\beta}_3b_6^6(\xi),\end{aligned}\tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}(\xi)\alpha'(\xi) + \bar{\beta}(\xi)\beta'(\xi) &= 3(\bar{\alpha}_0\alpha_1 + \bar{\beta}_0\beta_1)b_0^4(\xi) \\
&+ \frac{3}{2}(\bar{\alpha}_0\alpha_2 + \bar{\beta}_0\beta_2)b_1^4(\xi) \\
&+ \frac{1}{2}[3(\bar{\alpha}_1\alpha_2 + \bar{\beta}_1\beta_2) + \bar{\alpha}_0\alpha_3 + \bar{\beta}_0\beta_3]b_2^4(\xi) \\
&+ \frac{3}{2}(\bar{\alpha}_1\alpha_3 + \bar{\beta}_1\beta_3)b_3^4(\xi) \\
&+ 3(\bar{\alpha}_2\alpha_3 + \bar{\beta}_2\beta_3)b_4^4(\xi).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Da bo imela krivulja rotacijsko minimizirajoče ER ogrodje mora v polinomu (5.4) biti imaginarni del identično enak nič. Torej morajo veljati enačbe

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(\bar{\alpha}_0\alpha_1 + \bar{\beta}_0\beta_1) &= \operatorname{Im}(\bar{\alpha}_0\alpha_2 + \bar{\beta}_0\beta_2) = 0, \\
3\operatorname{Im}(\bar{\alpha}_1\alpha_2 + \bar{\beta}_1\beta_2) + \operatorname{Im}(\bar{\alpha}_0\alpha_3 + \bar{\beta}_0\beta_3) &= 0, \\
\operatorname{Im}(\bar{\alpha}_1\alpha_3 + \bar{\beta}_1\beta_3) &= \operatorname{Im}(\bar{\alpha}_2\alpha_3 + \bar{\beta}_2\beta_3) = 0.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Te enačbe nam dajo 5 pogojev za 16 prostih koeficientih (α_i, β_i) za $i = 0, 1, 2, 3$.

Definicija 5.1. Rečemo, da je PH krivulja določena z enačbama (2.10) in (2.11) v kanonični obliki, če velja $(\alpha_0, \beta_0) = (w, 0)$ za realen $w \neq 0$, tako da $(\mathbf{e}_1(0), \mathbf{e}_2(0), \mathbf{e}_3(0)) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Poljubno regularno krivuljo, t.j. $\mathbf{r}'(0) \neq 0$, lahko z rotacijo vedno preslikamo v kanonično obliko. Posledično se vsi rezultati, ki veljajo za kanonično obliko, prenesejo tudi na PH krivulje v splošnem položaju. V naslednji lemi si pogledimo, kako se pogoji (5.5) poenostavijo za krivuljo v kanonični obliki.

Lema 5.2. ER ogrodje PH krivulje stopnje 7 v kanonični obliki $(\alpha_0, \beta_0) = (w, 0)$ je rotacijsko minimizirajoče, če veljajo naslednji pogoji

$$\alpha_1 = \frac{\operatorname{Im}(\bar{\beta}_3\beta_1)}{\operatorname{Im}(\alpha_3)}, \quad \alpha_2 = \frac{\operatorname{Im}(\bar{\beta}_3\beta_2)}{\operatorname{Im}(\alpha_3)}, \quad \operatorname{Im}(w\alpha_3 + 3\bar{\beta}_1\beta_2) = 0. \tag{5.6}$$

V izrazih (5.6) smo predpostavili, da je $\operatorname{Im}(\alpha_3) \neq 0$. Ta predpostavka je avtomatično izpolnjena v primeru prave prostorske krivulje [1].

5.1 Interpolacijska shema

V tem podpoglavju si pogledimo konstrukcijo interpolacijske PH krivulje, ki ima racionalno MT ogrodje.

Interpolacijski problem je naslednji: Dani imamo točki $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f$ in ogrodji $(\mathbf{t}_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i), (\mathbf{t}_f, \mathbf{u}_f, \mathbf{v}_f)$ v začetni in končni točki. Želimo skonstruirati prostorsko PH krivuljo $\mathbf{r}(\xi)$ s predpisano dolžino $L > |\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i|$ in racionalnim MT ogrođjem $(\mathbf{f}_1(\xi), \mathbf{f}_2(\xi), \mathbf{f}_3(\xi))$, tako da:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= \mathbf{p}_i, & (\mathbf{f}_1(0), \mathbf{f}_2(0), \mathbf{f}_3(0)) &= (\mathbf{t}_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) \\ \mathbf{r}(1) &= \mathbf{p}_f, & (\mathbf{f}_1(1), \mathbf{f}_2(1), \mathbf{f}_3(1)) &= (\mathbf{t}_f, \mathbf{u}_f, \mathbf{v}_f). \end{aligned}$$

5.1.1 Prvi korak

V prvem koraku skonstruiramo PH krivuljo stopnje 7 z rotacijsko minimizirajočim ER ogrodjem, ki ustreza danim začetnim/končnim točkam, tangentam in ločni dolžini. Racionalno MT ogrodje bomo nato dobili v drugem koraku z uporabo racionalne rotacije na vektorjih normalne ravnine ER ogrodja.

Predpostavimo, da je $\mathbf{p}_i = (0, 0, 0)$ in da je krivulja $\mathbf{r}(\xi)$ v kanonični obliki z $(\alpha_0, \beta_0) = (w, 0)$ in $(\mathbf{t}_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) = (\mathbf{e}_1(0), \mathbf{e}_2(0), \mathbf{e}_3(0)) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Zgornje lahko predpostavimo, saj nam integracija hodografa (2.11) da prosto integracijsko konstanto $\mathbf{p}_i = \mathbf{r}(0)$. Preostale predpostavke dosežemo z rotacijo R , ki krivuljo pretvori v kanonično obliko. R je potrebno uporabiti tudi na vektorjih $(\mathbf{t}_f, \mathbf{u}_f, \mathbf{v}_f)$ in $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$. Ko dobimo interpolacijsko krivuljo za to standardno konfiguracijo, lahko inverz rotacije R^{-1} uporabimo za vrnitev krivulje v splošen položaj.

Za konstrukcijo krivulje v kanonični obliki imamo naslednje zahteve:

1. ujemanje $\mathbf{e}_1(1)$ s končno tangento \mathbf{t}_f ;
2. ujemanje $\mathbf{r}(1) - \mathbf{r}(0)$ z $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$;
3. ujemanje dolžine loka s predpisano vrednostjo L ;
4. izpolnjevanje pogojev (5.6), ki nam da rotacijsko minimizirajoče ERF ogrodje.

Interpolacijski pogoj 1. ustreza zahtevi:

$$\mathbf{e}_1(1) = \frac{(|\alpha_3|^2 - |\beta_3|^2, 2 \operatorname{Re}(\alpha_3 \bar{\beta}_3), 2 \operatorname{Im}(\alpha_3 \bar{\beta}_3))}{|\alpha_3|^2 + |\beta_3|^2} = \mathbf{t}_f. \quad (5.7)$$

Če $\Theta \in [0, \pi]$ in $\phi \in [0, 2\pi)$ lahko pišemo $\mathbf{t}_f = (\cos \Theta, \sin \Theta \cos \phi, \sin \Theta \sin \phi)$. Potem je pogoj (5.7) ekvivalenten z

$$\frac{|\alpha_3|^2 - |\beta_3|^2}{|\alpha_3|^2 + |\beta_3|^2} = \cos \Theta, \quad \frac{2\alpha_3 \bar{\beta}_3}{|\alpha_3|^2 + |\beta_3|^2} = \sin \Theta \exp(i\phi). \quad (5.8)$$

Ti enačbi nam dasta

$$\alpha_3 = \rho w \cos \frac{1}{2} \Theta \exp(i(\phi + \psi)), \quad \beta_3 = \rho w \sin \frac{1}{2} \Theta \exp(i\psi), \quad (5.9)$$

kjer sta ρ in ψ poljubna parametra. Parameter ψ vpliva na rotacijo vektorjev $\mathbf{e}_2(1)$, $\mathbf{e}_3(1)$ okoli tangente $\mathbf{e}_1(1)$ in vpliva na obliko krivulje. Parameter ρ nastopa v zvezi $|r'(1)| = \rho^2|r'(0)|$. Z izbiro $\rho = 1$ zagotovimo, da bodo simetrični podatki implicirali simetrične interpolante. V praksi je to omejujoče, saj bi v tem primeru rešitve obstajale le za omejeni obseg parametra ψ .

Pišimo $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ in uporabimo Hopfovo preslikavo (2.11). Izpolnjevanje pogoja 2 nam sedaj da realno enačbo

$$\int_0^1 |\alpha(\xi)|^2 - |\beta(\xi)|^2 d\xi = \Delta x \quad (5.10)$$

in kompleksno enačbo

$$\int_0^1 2\alpha(\xi)\bar{\beta}(\xi)d\xi = \Delta y + \mathbf{i}\Delta z. \quad (5.11)$$

Tretji pogoj pa je ekvivalenten z realno enačbo

$$\int_0^1 |\alpha(\xi)|^2 + |\beta(\xi)|^2 d\xi = L. \quad (5.12)$$

Enačbi (5.10) in (5.12) lahko nadomestimo z enostavnimi pogoji

$$\int_0^1 |\alpha(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2}(L + \Delta x), \quad \int_0^1 |\beta(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2}(L - \Delta x). \quad (5.13)$$

Za doseganje pogoja 4 pa moramo zadostiti pogojem (5.6).

Sedaj pogledjmo razpoložljive proste parametre in zahtevane pogoje. V kanonični obliki sta α_0 in β_0 odvisna samo od prostega parametra w , medtem ko interpolacija \mathbf{t}_f implicira, da sta α_3 in β_3 določena z (5.9), kjer sta ρ in ψ nadaljnja prosta parametra. Glede na lemo 5.2 morajo koeficienti iz (5.1) zadoščati pogojem (5.6), da imamo rotacijsko minimizirajoče ER ogrodje. Prva dva pogoja določata α_1 , α_2 s koeficienti α_3 , β_1 , β_2 , β_3 . Tako samo w , ρ , ψ , β_1 , β_2 ostanejo kot prosti parametri, ki predstavljajo sedem skalarnih stopenj svobode in morajo izpolnjevati pet skalarnih pogojev, in sicer tretji pogoj v (5.6), kompleksno enačbo (5.11) in dve realni enačbi (5.13). Torej, problem konstrukcije krivulje vključuje dva parametra svobode.

Zaradi enostavnosti uvedimo nove oznake

$$\begin{aligned} t &= \tan\left(\frac{1}{2}\Theta\right), & c &= \cos\left(\frac{1}{2}\Theta\right), & s &= \sin\left(\frac{1}{2}\Theta\right), \\ \lambda &= \cos(\phi + \psi), & \mu &= \sin(\phi + \psi). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Pišimo $\beta_1 = w\mathbf{z}_1 \exp(\mathbf{i}\psi)$, $\beta_2 = w\mathbf{z}_2 \exp(\mathbf{i}\psi)$ z $\mathbf{z}_1 = x_1 + \mathbf{i}y_1$, $\mathbf{z}_2 = x_2 + \mathbf{i}y_2$. Z uporabo enačb (5.6) in (5.9) so koeficienti iz (5.1) enaki

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = w \left(1, \frac{ty_1}{\mu}, \frac{ty_2}{\mu}, \rho c(\lambda + i\mu) \right), \quad (5.15)$$

$$(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = w (0, \mathbf{z}_1 \exp(i\psi), \mathbf{z}_2 \exp(i\psi), \rho s \exp(i\psi)), \quad (5.16)$$

in morajo izpolnjevati tretji pogoj v (5.6). Spomnimo se, da za prostorsko krivuljo velja $\text{Im}(\alpha_3) \neq 0$. Ker za regularno krivuljo velja $w \neq 0$, mora veljati tudi $c\mu \neq 0$.

Vemo, da je določen integral Bernsteinovega polinoma stopnje n enak vsoti svojih koeficientov, deljenih z $n + 1$. Torej, z uporabo enačb (5.2) in (5.3) realni enačbi iz (5.13) postaneta

$$\begin{aligned} & 10|\alpha_0|^2 + 6|\alpha_1|^2 + 6|\alpha_2|^2 + 10|\alpha_3|^2 \\ & + 10 \text{Re}(\bar{\alpha}_0\alpha_1 + \bar{\alpha}_2\alpha_3) + 4 \text{Re}(\bar{\alpha}_0\alpha_2 + \bar{\alpha}_1\alpha_3) \\ & + \text{Re}(\bar{\alpha}_0\alpha_3) + 9 \text{Re}(\bar{\alpha}_1\alpha_2) = 35(L + \Delta x), \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} & 10|\beta_0|^2 + 6|\beta_1|^2 + 6|\beta_2|^2 + 10|\beta_3|^2 \\ & + 10 \text{Re}(\bar{\beta}_0\beta_1 + \bar{\beta}_2\beta_3) + 4 \text{Re}(\bar{\beta}_0\beta_2 + \bar{\beta}_1\beta_3) \\ & + \text{Re}(\bar{\beta}_0\beta_3) + 9 \text{Re}(\bar{\beta}_1\beta_2) = 35(L - \Delta x), \end{aligned} \quad (5.18)$$

medtem ko kompleksna enačba iz (5.11) postane

$$\begin{aligned} & 20\alpha_0\bar{\beta}_0 + 12\alpha_1\bar{\beta}_1 + 12\alpha_2\bar{\beta}_2 + 20\alpha_3\bar{\beta}_3 \\ & + 10(\alpha_0\bar{\beta}_1 + \alpha_1\bar{\beta}_0 + \alpha_2\bar{\beta}_3 + \alpha_3\bar{\beta}_2) + 4(\alpha_0\bar{\beta}_2 + \alpha_2\bar{\beta}_0 + \alpha_1\bar{\beta}_3 + \alpha_3\bar{\beta}_1) \\ & + \alpha_0\bar{\beta}_3 + \alpha_3\bar{\beta}_0 + 9(\alpha_1\bar{\beta}_2 + \alpha_2\bar{\beta}_1) = 70(\Delta y + i\Delta z). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Sedaj uporabimo (5.15) in (5.16) v tretji enačbi v (5.6) in v (5.17), (5.18). Obe strani enačbe (5.19) pa pomnožimo z $\exp(i\psi)$ in v enačbo vstavimo podatke iz enačb (5.15) in (5.16) ter ločimo realen in imaginaren del. Pri imenovalcih dobimo sistem petih realnih enačb oblike:

$$w^2 f_0(x_1, y_1, x_2, y_2) = k_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (5.20)$$

kjer

$$\begin{aligned} f_0(x_1, y_1, x_2, y_2) & := c\mu\rho + 3(x_1y_2 - x_2y_1), \\ f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) & := \mu^2(10 + 10c^2\rho^2 + c\lambda\rho) + t\mu(10y_1 + 4y_2) \\ & \quad + s\lambda\mu\rho(4y_1 + 10y_2) + 3t^2(2y_1^2 + 3y_1y_2 + 2y_2^2), \\ f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) & := 10s^2\rho^2 + s\rho(4x_1 + 10x_2) \\ & \quad + 6(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) + 9(x_1x_2 + y_1y_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3(x_1, y_1, x_2, y_2) &:= s\mu\rho(20s\lambda\rho + 1) + \mu(10x_1 + 4x_2) \\
&\quad + st\rho(4y_1 + 10y_2) + 4c\mu\rho(\lambda x_1 + \mu y_1) + 10c\mu\rho(\lambda x_2 + \mu y_2) \\
&\quad + 12t(x_1y_1 + x_2y_2) + 9t(x_1y_2 + x_2y_1), \\
f_4(x_1, y_1, x_2, y_2) &:= 20cs\mu^2\rho^2 - \mu(10y_1 + 4y_2) + 4c\mu\rho(\mu x_1 - \lambda y_1) \\
&\quad + 10c\mu\rho(\mu x_2 - \lambda y_2) - 6t(2y_1^2 + 3y_1y_2 + 2y_2^2).
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Za dane vrednosti μ in ψ definiramo spodnje konstante

$$\begin{aligned}
k_0 &:= 0, \\
k_1 &:= 35(L + \Delta x)\mu^2, \\
k_2 &:= 35(L - \Delta x), \\
k_3 &:= 70(\cos(\psi)\Delta y - \sin(\psi)\Delta z)\mu, \\
k_4 &:= 70(\sin(\psi)\Delta y + \cos(\psi)\Delta z)\mu.
\end{aligned}$$

Ker za regularne krivulje velja neenakost $w \neq 0$, potem enačba (5.20) za $i = 0$ da:

$$g_1(x_1, y_1, x_2, y_2) := c\mu\rho + 3(x_1y_2 - x_2y_1) = 0, \tag{5.22}$$

medtem, ko za $i = 2, 3, 4$ opazimo, da je

$$k_1 [w^2 f_i(x_1, y_1, x_2, y_2) - k_i] - k_i [w^2 f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) - k_1] = 0.$$

Torej, ker $w \neq 0$, potem mora za $i = 2, 3, 4$ veljati

$$g_i(x_1, y_1, x_2, y_2) := k_1 f_i(x_1, y_1, x_2, y_2) - k_i f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0. \tag{5.23}$$

Enačbe (5.22) in (5.23) definirajo sistem $g_i(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, kvadratnih enačb s štirimi spremenljivkami x_1, y_1, x_2, y_2 iz katerih smo eliminirali w , medtem ko so $c, s, \lambda, \mu, \Delta x, \Delta y, \Delta z, L$ znane konstante za fiksne vrednosti parametrov ψ in ρ . Ta sistem definira štiri kvadratne hiperpovršine v \mathbb{R}^4 , ki ima v splošnem največ 16 različnih realnih presečišč.

Za vsako realno rešitev sistema $g_i(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, lahko iz kateregakoli izraza določimo ustrezno vrednost w^2 ,

$$w^2 = \frac{k_i}{f_i(x_1, y_1, x_2, y_2)}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{5.24}$$

Ker (w, x_1, y_1, x_2, y_2) in $(-w, -x_1, -y_1, -x_2, -y_2)$ definirajo enako krivuljo, lahko, brez izgube splošnosti, izberemo pozitiven w , kot je definiran v enačbi (5.24).

Upoštevajmo, da lahko enačbo $g_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0$ zapišemo kot

$$y_1 = \frac{3x_1y_2 + c\mu\rho}{3x_2}, \quad (5.25)$$

in če zgornjo enačbo vstavimo v $g_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0$ dobimo naslednjo kvadratno enačbo

$$a_2y_2^2 + a_1y_2 + a_0 = 0 \quad (5.26)$$

za spremenljivko y_2 , kjer so koeficienti odvisni od x_1, x_2 , in sicer

$$\begin{aligned} a_2 &= 9(k_1 - k_2t^2)(2x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2), \\ a_1 &= 3(k_1 - k_2t^2)c\mu\rho(4x_1 + 3x_2) \\ &\quad - 6k_2\mu x_2(5tx_1 + 2s\lambda\rho x_1 + 2tx_2 + 5s\lambda\rho x_2), \\ a_0 &= [30s\rho x_2^2(s\rho + x_2) + 18x_2^2(x_1^2 + x_2^2) + 3x_1x_2^2(4s\rho + 9x_2) + 2c^2\mu^2\rho^2] k_1 \\ &\quad - [3(10 + 10c^2\rho^2 + c\lambda\rho)x_2^2 + 2s^2\rho^2 + 10s\rho x_2 + 4cs\lambda\rho^2x_2] \mu^2k_2. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Za dani realni vrednosti x_1 in x_2 mora za diskriminanto $\delta = a_1^2 - 4a_2a_0$ iz enačbe (5.26) veljati, da je nenegativna, da bi lahko dobili realno rešitev y_2 , z upoštevanjem, da smo realno vrednost y_1 dobili iz enačbe (5.25). Tako opredeljene vrednosti zadoščajo $g_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = g_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0$.

Načeloma bi lahko iz štirih kvadratnih enačb $g_i(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0$ za $i = 1, 2, 3, 4$ eliminirali tri spremenljivke, z namenom, da bi dobili polinom stopnje 16 za preostalo spremenljivko. Ker je polinom sode stopnje, žal ni avtomatično zagotovljeno, da ima realno ničlo, kar pa je potrebno za obstoj rešitve. Zapletena odvisnost enačb (5.22) - (5.23) od vhodnih količin $L, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \Theta, \phi$ izključuje elementarno analizo obstoja rešitev za vse možne kombinacije njihovih vrednosti. Vendar pa obstoj dveh prostih parametrov ρ, ψ povečuje verjetnost, da je z njihovo prilagoditvijo vedno mogoče najti realne rešitve. To potrjujejo številni numerični testi, v katerih niso bili ugotovljeni primeri, ko realna rešitev ne bi obstajala [1].

5.1.2 Algoritem in primer

V tem podpoglavju si natančneje oglejmo potek algoritma za konstrukcijo PH krivulje iz prejšnjega podpoglavja in prikažimo primer, ki je naveden tudi v [1].

Prostra parametra ψ in ρ lahko npr. določimo z minimizacijo upogibne energije E , definirane kot [1]

$$E = 4 \int_0^1 \left(\frac{|\alpha(\xi)\beta'(\xi) - \alpha'(\xi)\beta(\xi)|^2}{\sigma^3(\xi)} \right) d\xi. \quad (5.28)$$

V našem primeru si bomo izbrali $\psi = 1,1625687\pi$ in $\rho = 1,321786853$. Poleg ψ in ρ določimo še vrednosti za $\Delta p = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (1.25, -0.25, 0.75)$, $L = 1.25 \cdot |\Delta p|$, $\Theta = \frac{\pi}{3}$, $\phi = \pi$. S pomočjo (5.14) izračunamo vrednosti za t , c , s , λ in μ .

Naslednji korak je rešiti sistem nelinearnih enačb

$$g_3(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0 \text{ in } g_4(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0,$$

iz katerega dobimo neznanki x_1 in x_2 . Nelinearni funkciji smo spoznali v prejšnjem podpoglavju, in sicer

$$\begin{aligned} g_3(x_1, y_1, x_2, y_2) &= k_1 * f_3(x_1, y_1, x_2, y_2) - k_3 * f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0, \\ g_4(x_1, y_1, x_2, y_2) &= k_1 * f_4(x_1, y_1, x_2, y_2) - k_4 * f_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0, \end{aligned} \quad (5.29)$$

kjer so f_i definirane v (5.21). Pri reševanju sistema nelinearnih enačb moramo biti pozorni, da bo diskriminanta δ , ki nastopa v (5.26) nenegativna. Če ta pogoj ne bo izpolnjen, bomo morali spremeniti izbiro za ψ in ρ . Pri samem reševanju sistema nelinearnih enačb uporabimo Newton-Raphsonovo iteracijo.

V našem primeru dobimo naslednje:

$$\begin{aligned} g_3(x_1, y_1, x_2, y_2) &= 89.8021 + 169.855x_1 + 169.982x_2 + 65.0791y_1 + 162.698y_2 \\ &+ 174.392x_1y_1 + 174.392x_2y_2 + 72.0768x_1y_2 + 189.511x_2y_1 = 0, \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} g_4(x_1, y_1, x_2, y_2) &= 98.122 + 26.7129x_1 + 66.7822x_2 - 169.855y_1 - 169.982y_2 \\ &- 174.392y_1^2 - 261.589y_1y_2 - 174.392y_2^2 + 54.3063x_1y_2 - 54.3063x_2y_1 = 0. \end{aligned}$$

Opazimo, da v sistemu dveh enačb ne nastopata samo x_1 in x_2 , ampak nastopata tudi y_1 in y_2 , ki pa ju lahko izrazimo z x_1 in x_2 s pomočjo (5.26), (5.25) in (5.20). Posledično avtomatično sledi, da sta $g_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0$ in $g_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0$. Začnemo pri y_2 in v enačbo (5.26) vstavimo vrednosti za a_0, a_1, a_2 . Opazimo, da je y_2 odvisna samo od x_1 in x_2 . Pomemben pogoj je, da mora biti $\delta \geq 0$. Dobljeno enačbo za diskriminanto sem zapisala v program Python na način, kot je predstavljeno na sliki 4.

S pomočjo algoritma dobimo več možnih izbir za x_1 in x_2 . Izbrali smo zadnji dve vrednosti, in sicer $x_1 = -0.48999999999999996$ in $x_2 = 0.17999999999999998$. Sedaj lahko izračunamo $y_2 = 0.227571$ in $y_1 = 0.41668$.

Naslednji korak bi bil izračun w , ki ga izračunamo po formuli (5.24). Sedaj imamo vse podatke, ki jih potrebujemo, da lahko zapišemo PH krivuljo \mathbf{r} . Potrebno je še

```

lista_rezultat= []
for x_1 in numpy.arange(-10,10,0.01):
    for x_2 in numpy.arange(-1, 1, 0.01):
        test_4 = (127.095 * x_1 + 95.3211 * x_2 - 248.307 * x_1 * x_2 - 248.161 * x_2 * x_2)*(127.095 * x_1 + 95.3211 * x_2 -
        248.307 * x_1 * x_2 - 248.161 * x_2 * x_2) - 16153.2 * x_1 * x_1 + 63117.2 * (x_1 * x_1) * x_2 + \
        30664.1 * (x_1 * x_1) * (x_2 * x_2) - 1120359.181 * (x_1 * x_1) * (x_2 * x_2 * x_2) - 635707.264 * \
        (x_1 * x_1 * x_1 * x_1) * (x_2 * x_2) - 1271414.528 * (
        x_1 * x_1) * (x_2 * x_2 * x_2 * x_2) - 280089.7953 * (x_1 * x_1 * x_1)*(
        x_2 * x_2) - 1907122.473 * (x_1 * x_1 * x_1) * (x_2 * x_2) - 24229.72 * x_1 * x_2 + 94675.6 * x_1 * (
        x_2 * x_2) - 45996.12 * x_1*(x_2 * x_2 * x_2) - 1330426.332 * x_1 * (
        x_2 * x_2 * x_2 * x_2) - 1430342.366 * (x_1 * x_1) * (x_2 * x_2 * x_2 * x_2) - 16153.16 * (
        x_2 * x_2) + 6311.7 * (x_2 * x_2 * x_2) + 30664.08 * (
        x_2 * x_2 * x_2 * x_2) - 700224.488 * (x_2 * x_2 * x_2 * x_2 * x_2) - 635707.264 * (
        x_2 * x_2 * x_2 * x_2 * x_2 * x_2)

        if test_4 >= 0:
            print("To je rezultat")
            print(x_2)
            print(x_1)
            lista_rezultat.append(x_1)
            lista_rezultat.append(x_2)

        else:
            print(" ni najdlje")

print("To je končni možni rezultati")
print(lista_rezultat)

```

Slika 4: Iskanje spremenljivk x_1 in x_2 s pomočjo Pythona.

izračunati α_i in β_i . Z uporabo enačb (5.1) in (5.15) lahko izračunamo vrednosti za α_i in z uporabo enačb (5.1) in (5.16) lahko izračunamo vrednosti za β_i .

V našem primeru dobimo

$$\alpha(\xi) = 2.1213007 - 1.11348\xi + 1.81041\xi^2 - 0.699841\xi^3 + 1.18695i\xi$$

$$\beta(\xi) = (4.01658 - 0.789066i)\xi + (-8.32457 - 0.24523i)\xi^2 + (3.08494 + 0.349006i)\xi^3.$$

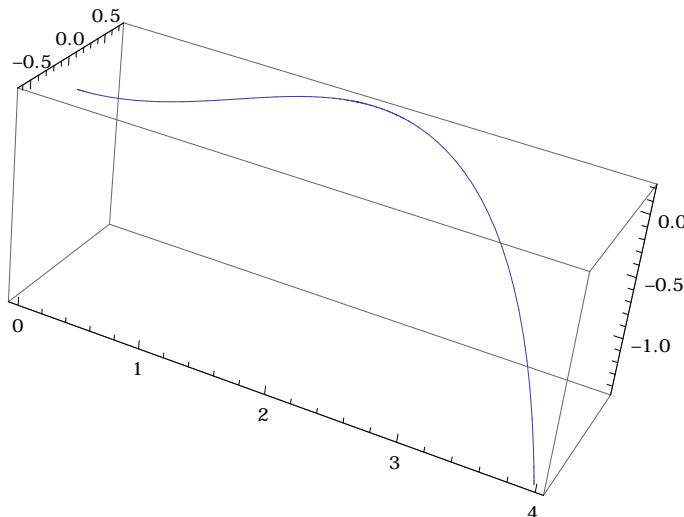
Kot zadnji korak sledi izračun hodografa krivulje \mathbf{r} po definiciji Hopfove preslikave. Dobimo

$$\mathbf{r}'(\xi) = (4.49992 - 4.72406\xi - 6.426002\xi^2 + 59.4847388\xi^3 - 88.75353948\xi^4 + 48.99877326\xi^5 - 9.148882592\xi^6, 17.040748\xi - 46.1358\xi^2 + 45.5878\xi^3 - 41.8052\xi^4 + 22.82176324\xi^5 - 4.317935\xi^6, 3.34769\xi + 0.716804\xi^2 - 18.9314\xi^3 + 7.88405\xi^4 - 1.60693\xi^5 + 0.488497\xi^6)$$

To nam da krivuljo

$$\mathbf{r}(\xi) = (4.49992\xi - 2.36203\xi^2 - 2.142\xi^3 + 14.8712\xi^4 - 17.7507\xi^5 + 8.16646\xi^6 - 1.30698\xi^7, 8.52037\xi^2 - 15.3786\xi^3 + 11.397\xi^4 - 8.36104\xi^5 + 3.80363\xi^6 - 0.616848\xi^7, 1.67385\xi^2 + 0.238935\xi^3 - 4.73285\xi^4 + 1.57681\xi^5 - 0.267822\xi^6 + 0.069785\xi^7),$$

ki je prikazana na sliki 5.



Slika 5: Grafični prikaz PH krivulje.

5.1.3 Drugi korak

V tem drugem delu si oglejmo, kako z rotacijo \mathbf{e}_2 in \mathbf{e}_3 dobimo MT ogrodje, ki interpolira tudi $\mathbf{f}_2(0)$, $\mathbf{f}_3(0)$, $\mathbf{f}_2(1)$ in $\mathbf{f}_3(1)$.

Za prilagojeno ogrodje $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ s kotno hitrostjo $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{f}_1 + \omega_2\mathbf{f}_2 + \omega_3\mathbf{f}_3$ na prostorski krivulji $\mathbf{r}(\xi)$, $\xi \in [0, 1]$ z ločno dolžino L je zasuk T definiran kot

$$T = \int_0^L \omega_1 ds = \int_0^1 \omega_1 \sigma d\xi,$$

kjer je $\sigma(\xi) = |\mathbf{r}'(\xi)|$ parametrična hitrost krivulje $\mathbf{r}(\xi)$. Za PH krivuljo v prejšnjih dveh podpoglavjih velja, da je $T_{ER} = 0$, saj je ER ogrodje rotacijsko minimizirajoče. Za konstrukcijo racionalnega MT ogrodja $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, ki bo zadostilo robne pogoje, moramo vektorja ER ogrodja $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, zarotirati z racionalno rotacijo normalne ravnine, in sicer kot

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_2(\xi) \\ \mathbf{f}_3(\xi) \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2(\xi) + b^2(\xi)} \begin{bmatrix} a^2(\xi) - b^2(\xi) & 2a(\xi)b(\xi) \\ -2a(\xi)b(\xi) & a^2(\xi) - b^2(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2(\xi) \\ \mathbf{e}_3(\xi) \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

za tuja polinoma $a(\xi)$ in $b(\xi)$. To nam da povezavo med \mathbf{f}_2 in \mathbf{f}_3 glede na \mathbf{e}_2 in \mathbf{e}_3 preko kota

$$\Theta(\xi) = 2 \tan^{-1} \frac{b(\xi)}{a(\xi)}. \quad (5.31)$$

Predpostavimo, da je krivulja podana v kanonični obliki z $(\mathbf{e}_1(0), \mathbf{e}_2(0), \mathbf{e}_3(0)) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Naj bodo $\mathbf{f}_2(0)$, $\mathbf{f}_3(0)$ in $\mathbf{f}_2(1)$, $\mathbf{f}_3(1)$ podani začetni in končni vektorji normalne ravnine MT ogrodja. Njihove orientacije Θ_i , Θ_f so, glede na ER ogrodje, definirane kot

$$(\cos \Theta_i, \sin \Theta_i) = (\mathbf{f}_2(0) \cdot \mathbf{e}_2(0), \mathbf{f}_2(0) \cdot \mathbf{e}_3(0)),$$

$$(\cos \Theta_f, \sin \Theta_f) = (\mathbf{f}_2(1) \cdot \mathbf{e}_2(1), \mathbf{f}_2(1) \cdot \mathbf{e}_3(1)).$$

Ker lahko MT ogrodje vedno zadošča začetnim in končnim orientacijam s skupno rotacijo, ki doseže vrednosti med $-\pi$ in π , se namesto nominalne vrednosti $T = \Theta_f - \Theta_i$ uporablja minimalna rotacija T_{min} . Če je $T \in (-\pi, \pi]$, potem velja $T = T_{min}$. V nasprotnem primeru lahko T_{min} definiramo na način, da prištejemo ali odštejemo večkratnik števila 2π , in tako T_{min} leži na intervalu $(-\pi, \pi]$. Če je $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{f}_1 + \omega_2 \mathbf{f}_2 + \omega_3 \mathbf{f}_3$ kotna hitrost MT ogrodja, potem je povprečna vrednost njene enotske tangente enaka

$$\bar{\omega}_1 = \frac{T_{min}}{L}.$$

Kot smo že omenili, ω_1 ne sme spremeniti predznaka pri MT ogrodju. Z drugimi besedami, \mathbf{f}_2 in \mathbf{f}_3 se morata z 'občutkom' vrteti okoli enotske tangente \mathbf{f}_1 . Naslednja zaželjena lastnost je $\omega_1 \equiv$ konstanta ($= \bar{\omega}_1$), t.j. fiksna hitrost vrtenja \mathbf{f}_2 in \mathbf{f}_3 okoli \mathbf{f}_1 . Tega pogoja ne moremo doseči z racionalnim MT ogrodjem iz (5.30), saj ta zadošča kotni rotaciji $\Theta(\xi) = \bar{\omega}_1 s(\xi)$ in ne moremo izraziti polinoma $a(\xi)$, $b(\xi)$ na način

$$\frac{a^2(\xi) - b^2(\xi)}{a^2(\xi) + b^2(\xi)} = \cos(\bar{\omega}_1 s(\xi)), \quad \frac{2a(\xi)b(\xi)}{a^2(\xi) + b^2(\xi)} = \sin(\bar{\omega}_1 s(\xi)).$$

Posledično je cilj zmanjšati variacijo ω_1 okoli povprečne vrednosti $\bar{\omega}_1$. Rotacijo (5.30) - (5.31) lahko zapišemo s pomočjo kompleksnega polinoma $\mathbf{w}(\xi) = a(\xi) + \mathbf{i}b(\xi)$, kot

$$\exp(\mathbf{i}\Theta(\xi)) = \frac{\mathbf{w}^2(\xi)}{|\mathbf{w}(\xi)|^2} = \frac{a^2(\xi) - b^2(\xi) + \mathbf{i}2a(\xi)b(\xi)}{a^2(\xi) + b^2(\xi)}, \quad (5.32)$$

iz katere dobimo

$$\Theta'(\xi) = 2 \frac{\text{Im}(\bar{\mathbf{w}}(\xi)\mathbf{w}'(\xi))}{|\mathbf{w}(\xi)|^2} = 2 \frac{a(\xi)b'(\xi) - a'(\xi)b(\xi)}{a^2(\xi) + b^2(\xi)}. \quad (5.33)$$

Rotacija normalne ravnine (5.30) nam da komponento kotne hitrosti

$$\omega_1(\xi) = \frac{d\Theta}{ds} = \frac{d\xi}{ds} \frac{d\Theta}{d\xi} = \frac{\Theta'(\xi)}{\sigma(\xi)} \quad (5.34)$$

za ogrodje $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ v smeri enotske tangente \mathbf{f}_1 . Za pridobitev MT ogrodja je potrebno določiti $\mathbf{w}(\xi)$ na način, da ta ne spremeni predznaka in da se \mathbf{f}_2 in \mathbf{f}_3 ujemata z začetnimi in končnimi orientacijami z minimalno skupno variacijo med njimi.

Polinom $\mathbf{w}(\xi)$ mora biti vsaj druge stopnje, če naj se MT ogrodje približa pogoju $\omega_1 =$ konstanta. V primeru prostorskega PH polinoma stopnje pet bi potrebovali komponento kotne hitrosti (5.34), ki jo implicira $\mathbf{w}(\xi)$, da izniči tangentno kotno hitrost ER ogrodja ter nadomešča skoraj konstantno hitrost rotacije, v skladu s predpisanimi robnimi pogoji. Za primere, ko ima ER ogrodje močno nihanje hitrosti je potrebno

razdeliti definicijsko območje $[0, 1]$ od $\mathbf{r}(\xi)$ z namenom, da bi zagotovili, da $\omega_1(\xi)$ ne spremeni predznaka.

PH krivulje stopnje 7 imajo rotacijsko minimizirajoče ER ogrodje (z ničelno tangentno kotno hitrostjo) in omogočajo enostavnejšo in bolj natančno identifikacijo polinoma, ki iz ER ogrodja ustvari MT ogrodje. V tem primeru $\mathbf{w}(\xi)$ ni potrebna za izničenje tangentne kotne hitrosti ER ogrodja. Potrebna je samo hitrost vrtenja \mathbf{f}_2 in \mathbf{f}_3 glede na \mathbf{e}_2 in \mathbf{e}_3 , ki aproksimira k povprečni vrednosti $\bar{\omega}_1$. Za Bernsteinov kompleksni polinom stopnje 2

$$\mathbf{w}(\xi) = \mathbf{w}_0(1 - \xi)^2 + \mathbf{w}_1 2(1 - \xi)\xi + \mathbf{w}_2 \xi^2$$

lahko preverimo, da s prostim parametrom γ in koeficienti

$$\mathbf{w}_0 = \exp(\mathbf{i}\frac{1}{2}\Theta_i), \quad \mathbf{w}_1 = \bar{\omega}_1 \frac{\exp(\mathbf{i}\frac{1}{2}\Theta_f)\sigma(0) + \gamma \exp(\mathbf{i}\frac{1}{2}\Theta_i)\sigma(1)}{4 \sin \frac{1}{2}\Delta\Theta}, \quad \mathbf{w}_2 = \gamma \exp(\mathbf{i}\frac{1}{2}\Theta_f)$$

dobimo $\Theta(0) = \Theta_i$, $\Theta(1) = \Theta_f$ in $\omega_1(0) = \omega_1(1) = \bar{\omega}_1$. Parameter γ lahko uporabimo za zmanjšanje povprečnega kvadratnega odklona ω_1 glede na $\bar{\omega}_1$, definirane z

$$\delta\omega_1 = \left[\frac{1}{L} \int_0^1 \left(\frac{\omega_1(\xi)}{\bar{\omega}_1} - 1 \right)^2 \sigma(\xi) d\xi \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.35)$$

V splošnem integral ne dopušča izražave v zaključeni obliki, toda lahko ga z uporabo Simpsonovega pravila izračunamo z visoko natančnostjo. Za iskanje vrednosti γ , ki doseže svojo minimalno vrednost, se potem lahko uporabi preprosta shema za minimizacijo [1].

6 Zaključek

V magistrski nalogi smo obravnavali konstrukcijo posebnih ogrodij na prostorskih krivuljah, kar ima številne aplikacije, kot npr. konstrukcijo gibanja togih teles, načrtovanja poti robotov, . . .

V želji imeti opravka z racionalnimi ogrodji, mora pripadajoča krivulja nujno zadoščati t.i. pitagorejskemu pogoju, torej biti mora PH krivulja. Spoznali smo, kako lahko preprosto skonstruiramo takšne krivulje v ravnini in v prostoru in si pogledali njihove ključne lastnosti, med drugim dejstvo, da je enotska tangenta racionalna krivulja, ker omogoča konstrukcijo racionalnih prikrojenih ogrodij. Kot najpreprostejše racionalno ogrodje smo spoznali Euler-Rodriguesovo ogrodje, si pogledali njegovo konstrukcijo in obravnavali pogoje, kdaj je takšno ogrodje lahko rotacijsko minimizirajoče. V ta namen smo v nadaljevanju tudi obravnavali interpolacijski problem konstrukcije PH krivulje stopnje 7 s predpisano dolžino, robnimi točkami in tangentami, katere ER ogrodje je hkrati tudi RM ogrodje. Ta problem je netrivialen, saj moramo rešiti nelinearen sistem štirih enačb s štirimi neznankami in dvema prostima parametroma. Numerični rezultati kažejo, da realna rešitev vedno obstaja, teoretično pa to ni preprosto dokazati. Naš zadnji, a hkrati glavni cilj pa je bil, kako skonstruirati ogrodje z minimalnim zasukom, ki bo poleg robnih tangent interpoliralo tudi vektorja normalne ravnine. V ta namen smo morali sprva sploh definirati t.i. MT ogrodja in spoznati njihove značilnosti. V nalogi smo tako interpolacijsko shemo podkrepili tudi z algoritmom in opisom konkretnega primera.

7 Literatura in viri

- [1] R.T. FAROUKI, C. GIANNELLI in A. SESTINI, Rational minimal-twist motions on curves with rotation-minimizing Euler-Rodrigues frames. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 352 (2019) 240–254. (*Citirano na straneh 2, 8, 10, 20, 25, 30 in 35.*)
- [2] H.I. CHOI in C.Y. HAN, Euler-Rodrigues frames on spatial Pythagorean-hodograph curves. *Computer Aided Geometric Design* 19 (2002) 603–620. (*Citirano na strani 14.*)
- [3] R.T. FAROUKI in H.P. MOON, Rational frames of minimal twist along space curves under specified boundary conditions. *JAdv Comput Math* 44 (2018) 1627–1650. (*Citirano na straneh 1, 10, 12, 14, 16, 19, 20, 21, 22 in 23.*)
- [4] M. KRANJC in V. VITRIH, Motion design with Euler-Rodrigues frames of quintic Pythagorean-hodograph curves. *Mathematics and Computers in Simulation* 82 (2012) 1696–1711. (*Citirano na strani 9.*)
- [5] G. FARIN, J. HOSCHEK in M.S. KIM, *Handbook of computer aided geometric design*. Elsevier Science B.V., 2002. (*Citirano na strani 4.*)
- [6] R.T. FAROUKI, *Pythagorean - Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable*, Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 2008. (*Citirano na straneh 3, 6, 11, 13 in 14.*)
- [7] *Simpson' Rule*,
<https://mathworld.wolfram.com/SimpsonsRule.html>. (Datum ogleda: 11. 5. 2020.) (*Citirano na strani 23.*)
- [8] *Največji skupni delitelj*,
<https://astra.si/najvecji-skupni-delitelj-2/>. (Datum ogleda: 27. 7. 2020.) (*Citirano na strani 4.*)
- [9] V. VITRIH, *Pythagorean-hodograph curves*,
<https://www.famnit.upr.si/sl/resources/files/seminarji/arhiv/seminarphcurveskopervito.pdf>. (Datum ogleda: . 28. 6.)2020 (*Citirano na strani 3.*)

- [10] N. DIMEC, *Modeliranje z ravninskimi polinomskimi krivuljami s pitagorejskim hodografom*, <https://repozitorij.uni-lj.si/Dokument.php?id=115726&lang=eng>. (Datum ogleda: 25. 7. 2020.) (*Citirano na straneh 4 in 8.*)