

UNIVERZA NA PRIMORSKEM  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN  
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Matematične znanosti  
Študijski program 2. stopnje

Katarina BIŠČAK

**FIBONACCIJEVA ŠTEVILA IN ZLATI REZ V UMETNOSTI**

Magistrsko delo

Mentor: doc. dr. Klavdija KUTNAR

**Koper, 2013**

# Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Katarina BIŠČAK

Naslov magistrskega dela: Fibonaccijeva števila in zlati rez v umetnosti

Kraj: Koper

Leto: 2013

Število listov: 67      Število slik: 40      Število tabel: 5

Število referenc: 20

Mentor: doc. dr. Klavdija Kutnar

UDK: 51(043.2)

Ključne besede: Fibonaccijeva števila, Fibonaccijevo zaporedje, posplošeno Fibonaccijevo zaporedje, zlati rez, geometrija, likovna umetnost, kiparstvo, arhitektura, glasba

Math. Subj. Class. (2010): 11B39

Izvleček: V magistrskem delu so predstavljeni Fibonaccijeva števila in nekaj njihovih lastnosti, posplošena Fibonaccijeva števila in zveze med njimi, pojavljanje le-teh v kombinatoričnih problemih, zlato število in njegove posplošitve ter pojavi slednjih v geometrijskih likih in telesih. Za tem je predstavljeno še pojavljanje Fibonaccijevih števil in zlatega reza v umetniških delih ter različna stališča o njihovi uporabi in estetskosti.

## Key words documentation

First and LAST name: Katarina BIŠČAK

Master thesis title: Fibonacci numbers and the golden section in art

Place: Koper

Year: 2013

Number of pages: 67      Number of figures: 40      Number of tables: 5

Number of references: 20

Supervisor: Assist. Prof. Klavdija Kutnar

UDC: 51(043.2)

Key words: Fibonacci numbers, Fibonacci sequence, generalized Fibonacci sequence, golden section, geometry, painting, sculpture, architecture, music

Math. Subj. Class. (2010): 11B39

Abstract: In this thesis Fibonacci numbers and some of their properties, generalized Fibonacci numbers and identities pertaining to them, the occurrence of Fibonacci numbers in combinatorial problems, the golden number, its generalizations and occurrences of the latter in polygons and polyhedra are presented. Occurrences of Fibonacci numbers and the golden section in art and different views on their use and aesthetic are also presented.

# Kazalo

<b>Seznam tabel</b>	<b>IV</b>
<b>Seznam slik</b>	<b>IV</b>
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Fibonaccijevo zaporedje</b>	<b>2</b>
2.1 Definicija	2
2.2 Preproste lastnosti Fibonaccijevih števil	2
2.3 Rodovna funkcija	8
2.4 Predstavitev naravnih števil z vsoto Fibonaccijevih števil	11
<b>3 Posplošitev Fibonaccijevega zaporedja</b>	<b>15</b>
3.1 Definicija	15
3.2 Rodovna funkcija	16
3.3 Zveze med posplošenimi Fibonaccijevimi števili	17
<b>4 Fibonaccijeva števila v kombinatoriki</b>	<b>21</b>
4.1 Domine	21
4.2 Obarvani kvadrati in domine	22
4.3 Sedežni redi, barvanje stolpnic in podmnožice	26
4.4 Žarek skozi dve stekli	27
4.5 Vzpenjanje po stopnicah	28
<b>5 Zlati rez</b>	<b>29</b>
5.1 Definicija	29
5.2 Zlato število in verižni ulomki	29
5.3 Konstrukcije zlatega reza	33
5.4 Zlati rez v geometriji	36
5.5 Spirale	40
5.6 Platonska telesa	43
<b>6 Fibonaccijeva števila in zlati rez v umetnosti</b>	<b>46</b>
6.1 Likovna umetnost	46
6.2 Kiparstvo	52
6.3 Arhitektura	53
6.4 Glasba	56
6.5 Zlati rez kot estetsko merilo?	58
<b>7 Zaključek</b>	<b>59</b>



## Seznam tabel

1	Zaporedja, ki jih dobimo z različnimi začetnimi vrednostmi posplošenega Fibonaccijevega zaporedja. . . . .	15
2	Sedežni redi. . . . .	26
3	Poti žarkov skozi dve stekli. . . . .	27
4	Platonska telesa z osnovnimi lastnostmi. . . . .	44
5	Rezultati Fechnerjeve raziskave. . . . .	58

## Seznam slik

1	Pravokotnik, sestavljen iz kvadratov s stranicami $F_n$ . . . . .	4
2	Dve pokritji pravokotnika velikosti $1 \times 10$ z zamikom. . . . .	24
3	Pokritji po zamenjavi repov. . . . .	24
4	Za lihe $n$ je to edini par pokritij, ki ga ne moremo razbiti. . . . .	24
5	Za sode $n$ je to edini par pokritij, ki ga ne moremo razbiti. . . . .	25
6	Zadnji odboj je na začetku ali na koncu. . . . .	28
7	Zadnji odboj je na sredini. . . . .	28
8	Daljica, razdeljena v zlatem razmerju. . . . .	29
9	Konstrukcija zlatega reza s pomočjo šestila in ravnila. . . . .	33
10	Konstrukcija zlatega reza s pomočjo pravokotnega trikotnika in krožnic. . . . .	34
11	Konstrukcija zlatega reza s pomočjo pravokotnega trikotnika in višinskega izreka. . . . .	35
12	Konstrukcija zlatega reza s pomočjo enakostraničnega trikotnika. . . . .	35
13	Zlati rez v polkrogu. . . . .	36
14	Zlati rez v pravilnem desetkotniku. . . . .	37
15	Zlati rez v pravilnem petkotniku. . . . .	38
16	Srebrno število v pravilnem osemkotniku. . . . .	39
17	Zlati pravokotnik. . . . .	40
18	Zlati trikotnik. . . . .	41
19	Zlata spirala. . . . .	41
20	Srebrna spirala. . . . .	42
21	Bronasta spirala. . . . .	42
22	Zlati trikotnik z očrtano spiralo. . . . .	43
23	Ikozaeder z včrtanimi zlatimi pravokotniki. . . . .	44
24	Ikozaedru očrtan oktaeder. . . . .	45
25	Dodekaeder z včrtano kocko. . . . .	45
26	Dodekaeder z včrtanimi pravokotniki. . . . .	45
27	Zlati rez v Leonardovi študiji človeškega telesa. . . . .	47

---

28	Mona Liza. . . . .	47
29	Leonardove študije obrazov. . . . .	48
30	Dürerjeva Melanholija. . . . .	48
31	Stranica Dürerjevega telesa. . . . .	49
32	Dürerjev avtoportret. . . . .	49
33	La parade. . . . .	49
34	Une baignade à Asnières. . . . .	50
35	Merzova skulptura v obliki igluja v Torinu. . . . .	52
36	Merzova spirala s ptiči, ki nosijo Fibonaccijeva števila, na železniški postaji v Zurichu. . . . .	53
37	Dimnik v mestu Turku na Finskem, okrašen s Fibonaccijevimi števili. . . . .	53
38	Keopsova piramida. . . . .	54
39	Partenon. . . . .	55
40	Modulor. . . . .	56

## Zahvala

Zahvaljujem se svoji mentorici za vse strokovne nasvete, pomoč in potrpežljivost ter svoji družini za brezpogojno podporo v dolgem času nastajanja te magistrske naloge.

# 1 Uvod

Fibonaccijeva števila so eno izmed bolj znanih zaporedij števil. Tesno so povezana z zlatim številom oziroma zlatim rezom, ki ga bolje poznajo tudi umetniki. V prvih dveh poglavjih bomo raziskali Fibonaccijeva števila in posplošena Fibonaccijeva števila ter nekatere zveze med njimi. V tretjem poglavju bomo preverili, kako si s Fibonaccijevimi števili lahko pomagamo v kombinatoriki. V četrtem poglavju bomo definirali zlato število in njegove posplošitve ter raziskali pojavljanje zlatega števila v geometrijskih likih in telesih.

Fibonaccijeva števila in zlati rez se v številni literaturi in na spletu pojavljajo v drugačni, nematematični luči. Z njimi povezujejo velika umetniška dela, arhitekturo iz antike in celo skladatelje. Na drugi strani pa obstajajo večinoma modernejši umetniki in arhitekti, ki zlati rez namenoma uporabljajo v svojih stvaritvah. V zadnjem poglavju bomo predstavili različna stališča na temo namernosti in estetskosti.

## 2 Fibonaccijevo zaporedje

### 2.1 Definicija

Fibonaccijevo zaporedje izhaja iz Fibonaccijeve naloge o zajčjih parih iz njegovega dela *Liber Abaci* (1202).

*Zajčji par skoti nov zajčji par na koncu vsakega meseca, prvič po dveh mesecih. Koliko zajčjih parov je na začetku  $n$ -tega meseca ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )?*

Po prvih dveh mesecih je izvorni par edini, zatem skoti nov zajčji par. Po treh mesecih sta torej dva para. Po štirih mesecih novi par še ne more imeti potomcev, zato samo izvorni par skoti nov - tretji - par. Po petih mesecih dva para skotita po en nov par, zadnji pa še ne more imeti potomcev; skupno jih je torej pet itd.

Tako hitro pridemo do zaporedja

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots$$

**Definicija 2.1.1.** *Fibonaccijevo zaporedje* definiramo rekurzivno:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ za } n \geq 3.$$

Člene Fibonaccijevega zaporedja imenujemo *Fibonaccijeva števila*. Velikokrat zaporedje razširimo z 0-tim členom zaporedja, ki ga definiramo kot  $F_0 = 0$ .

### 2.2 Preproste lastnosti Fibonaccijevih števil

Zapišimo nekaj preprostih zvez med Fibonaccijevimi števili, kot jih predstavita Vorobiev [19] in Posamentier [17].

**Trditev 2.2.1.** *Vsota prvih  $n$  Fibonaccijevih števil je enaka*

$$F_1 + F_2 + \dots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - 1.$$

*Dokaz.* Iz definicije zaporedja sledi

$$F_1 = F_3 - F_2,$$

$$F_2 = F_4 - F_3,$$

...

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n,$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}.$$

Če seštejemo vse te enakosti, dobimo

$$F_1 + F_2 + \dots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1. \quad \square$$

**Trditev 2.2.2.** Vsota prvih  $n$  Fibonaccijevih števil z lihim indeksom je enaka

$$F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

*Dokaz.* Podobno kot v prejšnjem primeru je

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2, \\ F_3 &= F_4 - F_2, \\ F_5 &= F_6 - F_4, \\ &\dots \\ F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2}. \end{aligned}$$

Seštejemo in dobimo

$$F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}. \quad \square$$

**Trditev 2.2.3.** Vsota prvih  $n$  Fibonaccijevih števil s sodim indeksom je enaka

$$F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

*Dokaz.* Iz prejšnjih dveh primerov vemo

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{2n} = F_{2n+2} - 1$$

in

$$F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

Če enakosti odštejemo, dobimo

$$F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n} = F_{2n+2} - 1 - F_{2n} = F_{2n+1} - 1. \quad \square$$

**Trditev 2.2.4.** Alternirajoča vsota prvih  $n$  Fibonaccijevih števil je enaka

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + (-1)^{n+1} F_n = (-1)^{n+1} F_{n-1} + 1.$$

*Dokaz.* Odštejemo enakosti iz trditev 2.2.2 in 2.2.3 in dobimo

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + F_{2n-1} - F_{2n} = -F_{2n-1} + 1.$$

Enakosti na obeh straneh prištejemo še  $F_{2n+1} = F_{2n} + F_{2n-1}$  in dobimo

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots - F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n} + 1.$$

Zdaj obe enakosti združimo v eno

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + (-1)^{n+1} F_n = (-1)^{n+1} F_{n-1} + 1. \quad \square$$

**Trditev 2.2.5.** Vsota kvadratov prvih  $n$  Fibonaccijevih števil je enaka

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

*Dokaz.* Najprej opazimo, da velja

$$F_n^2 = F_n (F_{n+1} - F_{n-1}) = F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n.$$

Seštejemo sledeče enakosti

$$F_1^2 = F_1 F_2,$$

$$F_2^2 = F_2 F_3 - F_1 F_2,$$

$$F_3^2 = F_3 F_4 - F_2 F_3,$$

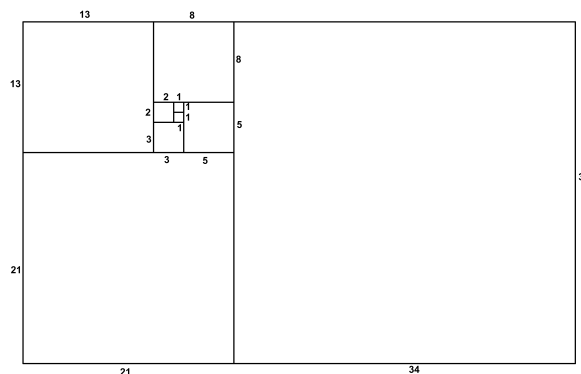
...

$$F_n^2 = F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n$$

in dobimo

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}. \quad \square$$

Zadnjo enakost lahko na zelo enostaven način grafično predstavimo s ploščino pravokotnika na sliki 1.



**Slika 1:** Pravokotnik, sestavljen iz kvadratov s stranicami  $F_n$ .

Sestavljen je iz kvadratov s stranicami dolžine  $F_n$ , njegovo celotno ploščino pa tudi z lahkoto izračunamo.

**Trditev 2.2.6.** Vsota desetih zaporednih Fibonaccijevih števil je deljiva z 11.

*Dokaz.* Zapišimo vsoto desetih zaporednih členov Fibonaccijevega zaporedja in zamenjamo zadnjega z vsoto prejšnjih dveh. Postopek ponavljamo, dokler nam ne ostaneta

le še  $F_{n+1}$  in  $F_{n+2}$ .

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{10} F_{n+i} &= F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + \dots + F_{n+10} = \\
 &= F_{n+1} + F_{n+2} + \dots + 2F_{n+8} + 2F_{n+9} = \\
 &= F_{n+1} + F_{n+2} + \dots + 3F_{n+7} + 4F_{n+8} = \\
 &= F_{n+1} + F_{n+2} + \dots + 5F_{n+6} + 7F_{n+7} = \\
 &= F_{n+1} + F_{n+2} + \dots + 8F_{n+5} + 12F_{n+6} = \\
 &= F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + 13F_{n+4} + 20F_{n+5} = \\
 &= F_{n+1} + F_{n+2} + 21F_{n+3} + 33F_{n+4} = \\
 &= F_{n+1} + 34F_{n+2} + 54F_{n+3} = \\
 &= 55F_{n+1} + 88F_{n+2} = 11(5F_{n+1} + 8F_{n+2}). \quad \square
 \end{aligned}$$

**Trditev 2.2.7.** Vsote in razlike kvadratov Fibonaccijevih števil:

- a)  $F_n^2 - F_{n-2}^2 = F_{2n-2}$ ,
- b)  $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ ,
- c)  $F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{n-1}F_{n+2}$ .

Preden dokažemo to trditev, si pogledjmo še naslednjo lemo.

**Lema 2.2.8.** Konvolucija Fibonaccijevih števil je enaka

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

*Dokaz.* Dokažimo z indukcijo. Najprej osnovi indukcije. Za  $n = 1$  dobimo

$$F_{m-1}F_1 + F_mF_2 = F_{m-1} + F_m = F_{m+1}.$$

Za  $n = 2$  pa dobimo

$$F_{m-1}F_2 + F_mF_3 = F_{m-1} + 2F_m = F_m + F_{m+1} = F_{m+2}.$$

Predpostavimo zdaj, da lema drži za število  $n$ . Potem velja

$$F_{m+n-1} = F_{m-1}F_{n-1} + F_mF_n$$

in

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

Poglejmo sedaj desno stran enakosti, ki jo želimo dokazati, za  $n + 1$ :

$$\begin{aligned}
 F_{m-1}F_{n+1} + F_mF_{n+2} &= F_{m-1}(F_{n-1} + F_n) + F_m(F_n + F_{n+1}) = \\
 &= F_{m-1}F_{n-1} + F_mF_n + F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1} = \\
 &= F_{m+n-1} + F_{m+n} = F_{m+n+1}. \quad \square
 \end{aligned}$$



*Dokaz trditve 2.2.7.* Uporabili bomo lemo 2.2.8.

$$\begin{aligned} \text{a) } F_n^2 - F_{n-2}^2 &= (F_n - F_{n-2})(F_n + F_{n-2}) = \\ &= F_{n-1}(F_{n-2} + F_n) = F_{n-2}F_{n-1} + F_{n-1}F_n = \\ &= F_{n-1+n-1} = F_{2n-2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } F_n^2 + F_{n+1}^2 &= F_nF_n + F_{n+1}F_{n+1} = \\ &= F_{n+1+n} = F_{2n+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } F_{n+1}^2 - F_n^2 &= (F_{n+1} - F_n)(F_{n+1} + F_n) = \\ &= F_{n-1}(F_{n+1} + F_n) = F_{n-1}F_{n+2}. \end{aligned} \quad \square$$

Poglejmo še nekaj lastnosti povezanih z deljivostjo povzetih po [19].

**Trditev 2.2.9.** *Za poljubni naravni števili  $m$  in  $n$  velja: če  $m|n$ , potem  $F_m|F_n$ .*

*Dokaz.* Naj  $m|n$ , torej je  $n = mk$ . Dokažimo z indukcijo. Za  $k = 1$  je  $n = m$  in  $F_m|F_n$  sledi zaradi refleksivnosti relacije deljivosti. Predpostavimo, da trditev velja za število  $k$ . Potem  $F_m$  deli  $F_{mk}$ . Dokažimo, da  $F_m$  deli tudi  $F_{m(k+1)}$ . Po lemi 2.2.8 je  $F_{m(k+1)} = F_{mk+m} = F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1}$ . To pa je deljivo z  $F_m$  po indukcijski predpostavki.  $\square$

Zapišimo še nekaj lastnosti največjih skupnih deliteljev, ki jih bomo potrebovali kasneje. Označimo največjega skupnega delitelja števil  $a$  in  $b$  z  $\gcd(a, b)$ .

**Trditev 2.2.10.** *Naj bodo  $a$ ,  $b$  in  $c$  naravna števila. Potem velja:*

$$\text{a) } \gcd(a, b) | \gcd(a, bc)$$

$$\text{b) } \gcd(ac, bc) = \gcd(a, b) \cdot c$$

$$\text{c) } \gcd(a, c) = 1 \Rightarrow \gcd(a, bc) = \gcd(a, b)$$

$$\text{d) } b|c \Rightarrow \gcd(a, b) = \gcd(a + c, b)$$

*Dokaz.*

a) Očitno  $\gcd(a, b)|a$  in  $\gcd(a, b)|b$ . Iz slednjega sledi, da  $\gcd(a, b)|bc$ , torej tudi  $\gcd(a, b)|\gcd(a, bc)$ .

b) Največjega skupnega delitelja števil  $a$  in  $b$  dobimo s pomočjo Evklidovega algoritma. Če v algoritmu vse enačbe pomnožimo s  $c$ , dobimo Evklidov algoritem za števili  $ac$  in  $bc$ , kjer je zadnji ostanek  $\gcd(ac, bc) = \gcd(a, b) \cdot c$ .

c) Iz a) sledi, da  $\gcd(a, bc)|\gcd(ab, bc)$ , iz b) pa, da je  $\gcd(ab, bc) = \gcd(a, c) \cdot b = 1 \cdot b = b$ . Torej  $\gcd(a, bc)$  deli  $b$  in očitno tudi  $a$ . Od tod sledi, da  $\gcd(a, bc)|\gcd(a, b)$  in zaradi antisimetričnosti še  $\gcd(a, bc) = \gcd(a, b)$ .

d) Če  $b|c$ , je  $c = bk$ . Naj bo  $\gcd(a, b) = d$ . Potem  $d|a$  in  $d|b$ , torej  $d$  deli tudi  $a + bk$ . Naj bo  $f$  skupni delitelj števil  $a + bk$  in  $b$  različen od  $d$ . Potem je  $a + bk = fx$  in  $b = fy$ . Od tod sledi, da je  $a = fx - bk = fx - fky = f(x - ky)$ . Torej je tudi  $f$  skupni delitelj števil  $a$  in  $b$ . Množici skupnih deliteljev števil  $a$  in  $b$  ter  $a + bk$  in  $b$  se ujemata. Zato je  $\gcd(a + bk, b) = \gcd(a, b)$ .  $\square$

**Trditev 2.2.11.** *Poljubni zaporedni Fibonaccijevi števili sta si tuji števili.*

*Dokaz.* Dokažimo z indukcijo. Ker je  $F_1 = 1$  in  $F_2 = 1$ , je  $\gcd(F_1, F_2) = 1$ . Predpostavimo, da trditev velja za vsa števila manjša od števila  $n$ . Potem je  $\gcd(F_{n-1}, F_n) = 1$ . Predpostavimo, da trditev za večja števila ne velja. Potem je  $\gcd(F_n, F_{n+1}) = a \neq 1$ . Torej je  $F_n = as$  in  $F_{n+1} = at$ , kjer sta  $s$  in  $t$  naravni števili. Zato je  $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n = at - as = a(t - s)$ . Vendar potem je  $\gcd(F_{n-1}, F_n) = a \neq 1$  protislovje.  $\square$

**Trditev 2.2.12.** *Za poljubni Fibonaccijevi števili velja:*

$$\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m,n)}.$$

*Dokaz.* Brez škode za splošnost privzamemo, da je  $m > n$ . Uporabimo Evklidov algoritem za  $m$  in  $n$ :

$$\begin{aligned} m &= nq_0 + r_1 \\ n &= r_1q_1 + r_2 \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3 \\ &\dots \\ r_{t-2} &= r_{t-1}q_{t-1} + r_t \\ r_{t-1} &= r_tq_t. \end{aligned}$$

Torej je  $r_t$  največji skupni delitelj števil  $m$  in  $n$ . Število  $F_m$  zapišemo kot  $F_{nq_0+r_1}$  in uporabimo lemo 2.2.8:

$$F_m = F_{nq_0+r_1} = F_{nq_0-1}F_{r_1} + F_{nq_0}F_{r_1+1}.$$

Po lastnostih iz prejšnjih trditev velja

$$\gcd(F_m, F_n) = \gcd(F_{nq_0-1}F_{r_1}, F_n).$$

Na enak način lahko dokažemo, da je

$$\begin{aligned} \gcd(F_{r_1}, F_n) &= \gcd(F_{r_2}, F_{r_1}), \\ \gcd(F_{r_2}, F_{r_1}) &= \gcd(F_{r_3}, F_{r_2}), \\ &\dots \\ \gcd(F_{r_{t-1}}, F_{r_{t-2}}) &= \gcd(F_{r_t}, F_{r_{t-1}}). \end{aligned}$$

Torej je  $\gcd(F_m, F_n) = \gcd(F_{r_t}, F_{r_{t-1}})$ . Ker  $r_t|r_{t-1}$ , tudi  $F_{r_t}|F_{r_{t-1}}$ , torej je  $\gcd(F_{r_t}, F_{r_{t-1}}) = F_{r_t}$ . Ker je število  $r_t$  enako  $\gcd(m, n)$ , dobimo  $\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m,n)}$ .  $\square$

**Posledica 2.2.13.** *Za poljubni Fibonaccijevi števili velja: če  $F_m|F_n$ , število  $m$  deli število  $n$ .*

*Dokaz.* Če  $F_m|F_n$ , potem je  $\gcd(F_m, F_n) = F_m$ . Po prejšnji trditvi pa je  $\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m,n)}$ , torej je  $F_m = F_{\gcd(m,n)}$  in  $m = \gcd(m, n)$ , kar pomeni, da število  $m$  deli število  $n$ .  $\square$

Trditev 2.2.12 in posledica 2.2.13 povesta, da velja naslednja trditev.

**Trditev 2.2.14.** *Za poljubni Fibonaccijevi števili velja  $F_m|F_n \Leftrightarrow m|n$ .*  $\square$

## 2.3 Rodovna funkcija

**Definicija 2.3.1.** Naj bo  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  zaporedje realnih števil. Potem je njegoa rodovna funkcija formalna potenčna vrsta

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

Uporabnost rodovnih funkcij se pokaže pri reševanju rekurzivnih enačb, iskanju podobnosti pri različnih zaporedjih (podobni rodovni funkciji morda pomenita podobni oz. povezani zaporedji), opazovanju obnašanja zaporedja v neskončnosti ali dokazovanju zvez med zaporedji.

V nadaljevanju sledi nekaj lastnosti rodovnih funkcij, ki smo jih povzeli iz [16].

**Trditev 2.3.2.**

- Če je  $F(x)$  rodovna funkcija zaporedja  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , je  $k \cdot F(x)$  rodovna funkcija zaporedja  $(k \cdot a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .
- Če sta  $F(x)$  in  $G(x)$  rodovni funkciji zaporedij  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  in  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  v tem vrstnem redu, je  $(F + G)(x)$  rodovna funkcija zaporedja  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .
- Če je  $F(x)$  rodovna funkcija zaporedja  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , je  $x^k \cdot F(x)$  rodovna funkcija zaporedja  $\left( \underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, a_0, a_1, a_2, \dots \right)$ .
- Če je  $F(x)$  rodovna funkcija zaporedja  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , je  $F'(x)$  rodovna funkcija zaporedja  $(na_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .
- Če sta  $F(x)$  in  $G(x)$  rodovni funkciji zaporedij  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  in  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  v tem vrstnem redu, je  $(F \cdot G)(x)$  rodovna funkcija zaporedja  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , kjer je  $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0$ .

*Dokaz.*

- a) Naj bo  $F(x)$  rodovna funkcija zaporedja  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ . Poglejmo rodovno funkcijo zaporedja  $(k \cdot a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

$$k \cdot a_0 + k \cdot a_1 x + k \cdot a_2 x^2 + \dots = k \cdot (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) = k \cdot F(x).$$

- b) Naj bosta  $F(x)$  in  $G(x)$  rodovni funkciji zaporedij  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  in  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  v tem vrstnem redu. Poglejmo rodovno funkcijo zaporedja  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) + \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = F(x) + G(x) = (F + G)(x).$$

- c) Naj bo  $F(x)$  rodovna funkcija zaporedja  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ . Poglejmo rodovno funkcijo zaporedja  $\left( \underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, a_0, a_1, a_2, \dots \right)$ .

$$a_0 x^k + a_1 x^{k+1} + a_2 x^{k+2} + \dots = x^k \cdot (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) = x^k \cdot F(x).$$

- d) Naj bo  $F(x)$  rodovna funkcija zaporedja  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ . Poglejmo rodovno funkcijo zaporedja  $(n \cdot a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

$$0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \dots = \frac{d}{dx} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) = \frac{d}{dx} F(x) = F'(x).$$

- e) Zadnji del trditve si bomo najlaže predstavljali s pomočjo tabele s produkti členov rodovnih funkcij  $F(x)$  in  $G(x)$ .

	$b_0 x^0$	$b_1 x^1$	$b_2 x^2$	$b_3 x^3$	$\dots$
$a_0 x^0$	$a_0 b_0 x^0$	$a_0 b_1 x^1$	$a_0 b_2 x^2$	$a_0 b_3 x^3$	$\dots$
$a_1 x^1$	$a_1 b_0 x^1$	$a_1 b_1 x^2$	$a_1 b_2 x^3$	$\dots$	
$a_2 x^2$	$a_2 b_0 x^2$	$a_2 b_1 x^3$	$\dots$		
$a_3 x^3$	$a_3 b_0 x^3$	$\dots$			
$\vdots$	$\dots$				

Opazimo, da se na diagonalah pojavljajo členi z enakimi potencami spremenljivke  $x$ . Če torej seštejemo po diagonalah, vidimo, da je koeficient  $c_n$  pred  $x^n$  vsota  $(n+1)$ -ve diagonale, torej  $a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$ . Zaporedje  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  je torej konvolucija zaporedij  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  in  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ . □

Poiščimo zdaj rodovno funkcijo Fibonaccijevega zaporedja. Pomnožimo rekurzivno formulo za Fibonaccijeva števila z  $x^n$  in seštejemo za vse smiselne  $n$ -je:

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n.$$

Vsote “popravimo”, da dobimo rodovne funkcije:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - F_1 x - F_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} \cdot x - F_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} \cdot x^2, \\ F(x) - x &= F(x)x + F(x)x^2, \\ F(x)(1 - x - x^2) &= x, \\ F(x) &= \frac{x}{1 - x - x^2}. \end{aligned}$$

S pomočjo dobljene rodovne funkcije lahko brez večjih težav poiščemo eksplicitno formulo za Fibonaccijeva števila.

Razvijmo ulomek  $\frac{x}{1-x-x^2}$  v vrsto. Najprej ga bomo razdelili na parcialne ulomke, zato naj bosta  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  in  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  korena karakteristične enačbe  $x^2 - x - 1 = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{A}{x+\alpha} + \frac{B}{x+\beta} = \\ &= \frac{-\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}{x+\alpha} + \frac{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}{x+\beta} = \frac{1}{\alpha-\beta} \left( \frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x} \right) = \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta} \left( (1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \alpha^3 x^3 + \dots) - (1 + \beta x + \beta^2 x^2 + \beta^3 x^3 + \dots) \right) = \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta} (x(\alpha-\beta) + x^2(\alpha^2-\beta^2) + x^3(\alpha^3-\beta^3) + \dots) = \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta} \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha^i - \beta^i) x^i. \end{aligned}$$

Dobili smo eksplicitno formulo za  $n$ -to Fibonaccijevo število.

**Trditev 2.3.3.** *Binetova formula za  $n$ -to Fibonaccijevo število:*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right). \quad \square$$

S pomočjo Binetove formule bistveno učinkoviteje izračunamo Fibonaccijeva števila, kot če bi uporabljali rekurzivno metodo. Poleg tega s pomočjo Binetove formule z lahkoto dokažemo nekatere zveze med Fibonaccijevimi števili, ki jih navajamo v naslednjih dveh trditvah.

**Trditev 2.3.4.** *Catalanova identiteta:*

$$F_{n-r} F_{n+r} - F_n^2 = (-1)^{n-r+1} F_r^2.$$

*Dokaz.* Uporabimo Binetovo formulo na levi strani enakosti:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha - \beta} \frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta} - \left( \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right)^2 = \\
 & = \frac{\alpha^{2n} - \alpha^{n+r} \beta^{n-r} - \alpha^{n-r} \beta^{n+r} + \beta^{2n} - \alpha^{2n} - 2\alpha^n \beta^n + \beta^{2n}}{(\alpha - \beta)^2} = \\
 & = \frac{-(\alpha\beta)^n \left( \frac{\alpha^r}{\beta^r} + \frac{\beta^r}{\alpha^r} - 2 \right)}{(\alpha - \beta)^2} = \\
 & = \frac{(-1)^{n+1} \left( \frac{\alpha^{2r} + \beta^{2r} - 2\alpha^r \beta^r}{(\alpha\beta)^r} \right)}{(\alpha - \beta)^2} = \\
 & = (-1)^{n-r+1} \left( \frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta} \right)^2 = (-1)^{n-r+1} F_r^2. \quad \square
 \end{aligned}$$

**Trditev 2.3.5.** *D'Ocagneva identiteta:*

$$F_m F_{n+1} - F_n F_{m+1} = (-1)^n F_{m-n}.$$

*Dokaz.* Z uporabo Binetove formule:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta} = \\
 & = \frac{\alpha^{m+n+1} - \alpha^{n+1} \beta - \alpha^m \beta^{n+1} + \beta^{m+n+1} - \alpha^{m+n+1} + \alpha^{m+1} \beta^n + \alpha^n \beta^{m+1} - \beta^{m+n+1}}{(\alpha - \beta)^2} = \\
 & = \frac{\alpha^m \beta^n (\alpha - \beta) - \alpha^n \beta^m (\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)^2} = \\
 & = \frac{\alpha^n \beta^n (\alpha^{m-n} - \beta^{m-n})}{\alpha - \beta} = \\
 & = (-1)^n \frac{(\alpha^{m-n} - \beta^{m-n})}{\alpha - \beta} = (-1)^n F_{m-n}. \quad \square
 \end{aligned}$$

## 2.4 Predstavitev naravnih števil z vsoto Fibonaccijevih števil

Fibonaccijeva števila lahko uporabimo tudi kot osnovo za številski sistem. Pogledjmo, kako naravna števila zapišemo v takem sistemu in kako si z njim pomagamo do zmagovalne strategije v igri Fibonacci nim.

### Zeckendorfova reprezentacija

Povzemimo Zeckendorfovo predstavitev naravnih števil iz [19]. Vsako naravno število  $a$  lahko predstavimo z zaporedjem števk  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ . To enolično določeno zaporedje lahko določimo induktivno s sledečim algoritmom.

Naj bo najprej  $a_0 = a$  in naj bo  $F_n$  največje Fibonaccijevo število, ki ni večje od  $a_0$ . Nato je  $\varphi_1 = 1$  in  $a_1 = a_0 - F_n$ . S tem je prvi korak zaključen. Predpostavimo, da smo že naredili  $k$  korakov in dobili zaporedje števk  $\varphi_1 \dots \varphi_k$ , ki sestoji iz ničel in

enic ter število  $a_k$ . Naredimo torej  $(k + 1)$ . korak. Primerjamo  $a_k$  s Fibonaccijevim številom  $F_{n-k}$ . Če je  $a_k < F_{n-k}$ , potem naj bo  $\varphi_{k+1} = 0$  in  $a_{k+1} = a_k$ , sicer pa naj bo  $\varphi_{k+1} = 1$  in  $a_{k+1} = a_k - F_{n-k}$ . V vsakem primeru zaporedje dobi nov člen. Proces se konča po  $n - 1$  korakih, ko dobimo  $a_{n-1} = 0$ . Velja

$$a = F_n\varphi_1 + F_{n-1}\varphi_2 + \dots + F_2\varphi_{n-1}.$$

Dobljenemu zaporedju rečemo tudi *Zeckendorfova reprezentacija*.

**Trditev 2.4.1** (Zeckendorf). *Vsako pozitivno naravno število lahko enolično zapišemo kot vsoto enega ali več različnih Fibonaccijevih števil, tako da vsota ne vsebuje dveh zaporednih Fibonaccijevih števil.*

*Dokaz.* Najprej predpostavimo, da sta dva člena zaporedja  $(\varphi_n)$ , ki sledita ničli oba enaka 1, npr. naj bo  $\varphi_k = 0$  in  $\varphi_{k+1} = \varphi_{k+2} = 1$ . Potem je

$$a_{k-1} < F_{n-k+1},$$

$$a_{k-1} = a_k, \quad a_k - F_{n-k} = a_{k+1} \text{ in } a_{k+1} \geq F_{n-k-1}.$$

Če upoštevamo zadnje tri zveze, dobimo

$$a_{k-1} = a_{k+1} + F_{n-k} \geq F_{n-k-1} + F_{n-k} = F_{n-k+1},$$

kar je v protislovju s prvo neenakostjo. Pokazati moramo še, da tudi predpostavka  $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$  pelje v protislovje. Če je  $\varphi_2 = 1$ , potem je  $a_1 = a_0 - F_n \geq F_{n-1}$ . Od tod pa sledi, da je

$$a_0 \geq F_n + F_{n-1} = F_{n+1},$$

kar je nemogoče, ker smo algoritem začeli z  $F_n$ , največjim Fibonaccijevim številom, ki ni večje od  $a_0$ .  $\square$

## Fibonacci nim

Fibonacci nim je različica igre nim - matematične igre, kjer dva igralca odstranjujeta predmete z enega ali več kupov. Fibonacci nim ima naslednja pravila:

- Imamo kup  $n$  enakih predmetov. Prvi igralec lahko s kupa odstrani poljubno pozitivno število predmetov, ampak ne vseh.
- V vsaki naslednji potezi lahko igralec odstrani vsaj enega, a največ dvakrat toliko predmetov kot njegov nasprotnik v prejšnji potezi.
- Zmaga tisti, ki odstrani zadnji predmet.

Pravimo, da je *varen položaj* tisti, ki ne dopušča zmagovitih potez in iz katerega lahko preidemo le v nevaren položaj. *Nevaren položaj* pa je tak, ki dopušča vsaj eno zmagovito potezo.

Ta igra je za nas zanimiva, ker zmagovita strategija temelji na Fibonaccijevih številih, točneje na Zackendorfovi reprezentaciji naravnih števil (Povzeto po [20]). V predstavitvi števila  $n > 0$  v Fibonaccijevem številskem sistemu je vsaj ena enica. Označimo Fibonaccijevo število, ki ga predstavlja skrajna desna enica v  $m$ -tem koraku z  $f_m$  in število predmetov, ki jih smemo odstraniti s  $q_m$ . Če je v  $m$ -tem koraku  $f_m > q_m$ , je položaj varen, če pa je  $f_m \leq q_m$ , je položaj nevaren in zmagovita poteza je odstranitev natanko  $f_m$  predmetov.

Za dokaz učinkovitosti strategije moramo pokazati, da lahko nevarne položaje vedno spremenimo v varne in da lahko varne položaje spremenimo le v nevarne.

Pokažimo najprej, da lahko poljuben nevaren položaj spremenimo v varnega. Po definiciji ( $f_m \leq q_m$ ) smemo odstraniti  $f_m$  predmetov. Če je  $f_m = n$ , z odstranitvijo  $f_m$  predmetov zmagamo. Če pa je  $f_m < n$ , po definiciji števila  $f_m$  obstaja še ena enica, druga z desne. Naj ta predstavlja Fibonaccijevo število  $F_k$ ,  $f_m$  pa naj bo  $F_i$ . Vemo, da v Zeckendorfovi predstavitvi nikoli ne nastopata dve enici hkrati, torej med  $F_i$  in  $F_k$  obstaja še eno Fibonaccijevo število. Naj bo  $F_j = F_{i+1}$ , ki pa ni nujno predhodnik  $F_k$ . Torej:

$$\begin{aligned} F_i &< F_j \\ 2F_i &< F_j + F_i \leq F_k \\ q_{m+1} &= 2f_m = 2F_i < F_k. \end{aligned}$$

Ampak v naslednjem koraku bo zadnja enica predstavljalala  $f_{m+1} = F_k$ :

$$f_{m+1} > q_{m+1} \Rightarrow \text{položaj je varen.}$$

Zdaj pa pokažimo še, da poljubna poteza iz varnega položaja naredi nevarnega. V varnem položaju ne smemo odstraniti zelenih  $f_m$  predmetov, ker je  $f_m > q_m$ , zato bo  $f_{m+1} < f_m$ . Naj bo število predmetov v  $m$ -tem koraku  $c + f_m = c + F_i$  in v  $(m + 1)$ -em koraku  $c + c_1 + f_{m+1} = c + c_1 + F_h$ . Predpostavimo najprej, da lahko  $c_1 + F_h$  zapišemo v obliki  $F_{i-1} + F_{i-3} + F_{i-5} + \dots + F_{h+2} + F_h$ . Naj bosta  $F_g$  in  $F_f$  predhodnika števila  $F_h$  ( $F_h = F_g + F_f$ ). Če seštejemo  $F_g$  in  $c_1 + F_h$  dobimo  $F_i$ :

$$\begin{array}{r} 101010 \dots 101000 \dots \\ + \qquad \qquad \qquad 100 \dots \\ \hline 1000000 \dots 000000 \dots \end{array}$$



Če pa je  $c_1 + F_h < F_{i-1} + F_{i-3} + F_{i-5} + \dots + F_{f+2} + F_h$ , velja, da je  $c_1 + F_h + F_g < F_i$ . Od tod sledi, da moramo odstraniti  $F_i - (c_1 + F_h)$ , torej vsaj  $F_g$  predmetov:

$$\begin{aligned}F_g &\geq F_f \\2F_g &\geq F_f + F_g = F_h \\q_{m+1} &= 2(F_i - (c_1 + F_h)) \geq 2F_g \geq F_h\end{aligned}$$

Ampak vemo, da je  $F_h = f_{m+1}$ , torej je  $f_{m+1} \leq q_{m+1}$  in položaj ni varen.

### 3 Posplošitev Fibonaccijevega zaporedja

#### 3.1 Definicija

Horadam [8] je leta 1965 posplošil Fibonaccijevo zaporedje, tako da je odvisno od štirih parametrov.

**Definicija 3.1.1.** Posplošeno Fibonaccijevo zaporedje  $(W_n)$  je definirano rekurzivno z

$$W_n = pW_{n-1} + qW_{n-2} \text{ za } n \geq 2; p, q \in \mathbb{Z}$$

z začetnima pogojevma  $W_0 = a$  in  $W_1 = b$ .

Definicija 3.1.1 nam da zaporedje

$$a, b, pb + qa, p(pb + qa) + qb, \dots$$

Za posebne vrednosti parametrov  $a, b, p$  in  $q$  dobimo znana zaporedja [9].

**Tabela 1:** Zaporedja, ki jih dobimo z različnimi začetnimi vrednostmi posplošenega Fibonaccijevega zaporedja.

$a$	$b$	$p$	$q$	Zaporedje	
0	1	1	1	0, 1, 1, 2, 3, 5, ...	Fibonaccijeva števila
0	1	$k$	1	0, 1, $k, k^2 - k, \dots$	$k$ -Fibonaccijeva števila
2	1	1	1	2, 1, 3, 4, 7, 11, ...	Lucasova števila
0	1	2	1	0, 1, 2, 5, 12, 29, ...	Pellova števila
2	2	2	1	2, 2, 6, 14, 34, ...	Pell-Lucasova števila
1	2	2	-1	1, 2, 3, 4, 5, 6, ...	naravna števila
1	3	2	-1	1, 3, 5, 7, 9, 11, ...	liha števila
0	2	2	-1	0, 2, 4, 6, 8, 10, ...	soda števila
$a$	$a + d$	2	-1	$a, a + d, a + 2d, \dots$	aritmetično zaporedje
$a$	$aq$	$q - 1$	$q$	$a, aq, aq^2, aq^3, \dots$	geometrijsko zaporedje

## 3.2 Rodovna funkcija

Poiščimo rodovno funkcijo  $W(x)$  za posplošeno Fibonaccijevo zaporedje  $(W_n)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} W_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} p W_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} q W_{n-2} x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} W_n x^n - W_1 x - W_0 &= p x \sum_{n=1}^{\infty} W_{n-1} x^{n-1} - p x W_0 + q x^2 \sum_{n=2}^{\infty} W_{n-2} x^{n-2} \\ W(x) - b x - a &= p x W(x) - p a x + q x^2 W(x) \\ W(x) &= \frac{a + b x - p a x}{1 - p x - q x^2}. \end{aligned}$$

Z dobljeno rodovno funkcijo si bomo sedaj pomagali pri iskanju Binetove formule za posplošeno Fibonaccijevo zaporedje  $(W_n)$ .

**Trditev 3.2.1.** *Binetova formula za  $n$ -to posplošeno Fibonaccijevo število je enaka*

$$W_n = \frac{(b - a\beta) \alpha^n - (b - a\alpha) \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

*Dokaz.* Naj bosta  $\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$  in  $\beta = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$  rešitvi karakteristične enačbe  $x^2 - p x - q = 0$ . Potem velja:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= p, \\ \alpha - \beta &= \sqrt{p^2 + 4q}, \\ \alpha \cdot \beta &= -q. \end{aligned}$$

Rodovno funkcijo  $W(x)$  razdelimo na parcialne ulomke in razvijemo v potenčno vrsto:

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{a + b x - p a x}{1 - p x - q x^2} = \frac{-\frac{1}{q} (a + b x - p a x)}{x^2 + \frac{p}{q} x - \frac{1}{q}} = \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left( \frac{-\frac{b\alpha}{q} + \frac{p a \alpha}{q} + a}{x + \frac{\alpha}{q}} + \frac{\frac{b\beta}{q} - \frac{p a \beta}{q} - a}{x + \frac{\beta}{q}} \right) = \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left( \frac{-\frac{b\alpha\beta}{q} + \frac{p a \alpha\beta}{q} + a\beta}{\beta x - 1} + \frac{\frac{b\beta\alpha}{q} - \frac{p a \beta\alpha}{q} - a\alpha}{\alpha x - 1} \right) = \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left( \frac{b - p a + a\alpha}{1 - \alpha x} - \frac{b - p a + a\beta}{1 - \beta x} \right) = \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} ((b - a\beta) (1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \dots) - (b - a\alpha) (1 + \beta x + \beta^2 x^2 + \dots)) = \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \sum_{i=0}^{\infty} ((b - a\beta) \alpha^i - (b - a\alpha) \beta^i) x^i. \quad \square \end{aligned}$$

### 3.3 Zveze med posplošenimi Fibonaccijevimi števili

**Trditev 3.3.1.** Vsota prvih  $n$  členov posplošenega Fibonaccijevega zaporedja je enaka

$$\sum_{i=0}^{n-1} W_i = \frac{W_{n+1} - W_1 + (1-p)(W_n - W_0)}{p+q-1}.$$

*Dokaz.* Uporabimo rekurzivno zvezo med členi zaporedja  $qW_n = W_{n+2} - pW_{n+1}$ :

$$\begin{aligned} q \sum_{i=0}^{n-1} W_i &= \sum_{i=0}^{n-1} (W_{i+2} - pW_{i+1}) = \\ &= W_2 + W_3 + \dots + W_{n+1} - pW_1 - pW_2 - \dots - pW_n = \\ &= -pW_1 + \sum_{i=2}^n (1-p)W_i + W_{n+1} = \\ &= -pW_1 + \sum_{i=0}^{n-1} (1-p)W_i - (1-p)W_0 - (1-p)W_1 + (1-p)W_n + W_{n+1} \\ (p+q-1) \sum_{i=0}^{n-1} W_i &= W_{n+1} - W_1 + (1-p)(W_n - W_0). \quad \square \end{aligned}$$

**Trditev 3.3.2.** Alternirajoča vsota  $n$  členov posplošenega Fibonaccijevega zaporedja je enaka

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i W_i = \frac{(-1)^n W_{n+1} - W_1 + (1+p)(W_0 - (-1)^n W_n)}{p-q+1}.$$

*Dokaz.* Spet uporabimo rekurzivno zvezo med členi zaporedja:

$$\begin{aligned} q \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i W_i &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (W_{i+2} - pW_{i+1}) = \\ &= W_2 - W_3 + \dots + (-1)^{n-1} W_{n+1} - pW_1 + pW_2 - \dots + (-1)^n pW_n = \\ &= -pW_1 + \sum_{i=2}^n (-1)^i (1+p)W_i + (-1)^{n+1} W_{n+1} = \\ &= -pW_1 + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (1+p)W_i - (1+p)W_0 + (1+p)W_1 + \\ &+ (-1)^n (1+p)W_n + (-1)^{n+1} W_{n+1}. \\ (p-q+1) \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i W_i &= (1+p)(W_0 - (-1)^n W_n) + (-1)^n W_{n+1} - W_1. \quad \square \end{aligned}$$

**Trditev 3.3.3.** Za posplošena Fibonaccijeva števila  $s$  sodim indeksom velja:

$$W_{2n} = q^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-i} W_{n-i}.$$

*Dokaz.* Trditev dokažemo z Binetovo formulo za posplošena Fibonaccijeva števila:

$$\begin{aligned}
 W_{2n} &= \frac{(b - a\beta) \alpha^{2n} - (b - a\alpha) \beta^{2n}}{\alpha - \beta} = \\
 &= \frac{1}{\alpha - \beta} ((b - a\beta) (p\alpha + q)^n - (b - a\alpha) (p\beta + q)^n) = \\
 &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left( (b - a\beta) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^{n-i} \alpha^n - iq^i - (b - a\alpha) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^{n-i} \beta^n - iq^i \right) = \\
 &= \frac{1}{\alpha - \beta} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^{n-i} q^i ((b - a\beta) \alpha^{n-i} - (b - a\alpha) \beta^{n-i}) = \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^{n-i} q^i W_{n-i}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Med nelinearnimi zvezami je naslednja najbolj podobna konvolucijskemu produktu.

**Trditev 3.3.4.** *Za sosednji posplošeni Fibonaccijevi števili velja:*

$$aW_{m+n} + (b - pa) W_{m+n-1} = W_m W_n + qW_{m-1} W_{n-1}.$$

*Dokaz.* Desno stran preoblikujemo s pomočjo Binetove formule in dobimo:

$$\begin{aligned}
 W_m W_n + qW_{m-1} W_{n-1} &= \\
 &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (((b - a\beta) \alpha^m - (b - a\alpha) \beta^m) ((b - a\beta) \alpha^n - (b - a\alpha) \beta^n) + \\
 &+ q ((b - a\beta) \alpha^{m-1} - (b - a\alpha) \beta^{m-1}) ((b - a\beta) \alpha^{n-1} - (b - a\alpha) \beta^{n-1})) = \\
 &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} ((b - a\beta)^2 \alpha^{m+n} - (b - a\alpha) (b - a\beta) \alpha^n \beta^m - \\
 &- (b - a\alpha) (b - a\beta) \alpha^m \beta^n + (b - a\alpha)^2 \beta^{m+n} - \\
 &- ((b - a\beta)^2 \alpha^{m+n-1} \beta - (b - a\alpha) (b - a\beta) \alpha^n \beta^m - \\
 &- (b - a\alpha) (b - a\beta) \alpha^m \beta^n + (b - a\alpha)^2 \beta^{m+n-1} \alpha)) = \\
 &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} ((b - a\beta)^2 \alpha^{m+n-1} (\alpha - \beta) - (b - a\alpha)^2 \beta^{m+n-1} (\alpha - \beta)) = \\
 &= \frac{((b - a(p - \alpha)) (b - a\beta) \alpha^{m+n-1} - (b - a(p - \beta)) (b - a\alpha) \beta^{m+n-1})}{\alpha - \beta} = \\
 &= (b - ap) \frac{(b - a\beta) \alpha^{m+n-1} - (b - a\alpha) \beta^{m+n-1}}{\alpha - \beta} + \\
 &+ a \frac{(b - a\beta) \alpha^{m+n} - (b - a\alpha) \beta^{m+n}}{\alpha - \beta} = \\
 &= (b - ap) W_{m+n-1} + aW_{m+n}. \quad \square
 \end{aligned}$$

**Trditev 3.3.5.** *Za posplošena Fibonaccijeva števila velja:*

$$aW_{2n} + (b - pa) W_{2n-1} = W_n^2 + qW_{n-1}^2 = W_{n+1} W_{n-1} + qW_n W_{n-2}.$$

*Dokaz.* Če v prejšnji trditvi zamenjamo  $m$  z  $n+1$  in  $n$  z  $n-1$ , dobimo enakost med levo in desno stranjo. Pokažimo najprej, da je  $W_{n+1}W_{n-1} - W_n^2 = (-q)^{n-1} (pab + qa^2 - b^2)$ :

$$\begin{aligned}
 & W_{n+1}W_{n-1} - W_n^2 = \\
 &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left( ((b - a\beta)\alpha^{n+1} - (b - a\alpha)\beta^{n+1}) \right. \\
 & \left. - ((b - a\beta)\alpha^{n-1} - (b - a\alpha)\beta^{n-1}) - ((b - a\beta)\alpha^n - (b - a\alpha)\beta^n)^2 \right) = \\
 &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left( (b - a\beta)^2 (\alpha^{2n} - \alpha^{2n}) + (b - a\alpha)^2 (\beta^{2n} - \beta^{2n}) - \right. \\
 & \left. - (b - a\alpha)(b - a\beta) (\alpha^{n-1}\beta^{n+1} + \alpha^{n+1}\beta^{n-1} - 2\alpha^n\beta^n) \right) = \\
 &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left( - (b - a\alpha)(b - a\beta) (\alpha\beta)^{n-1} (\beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2) \right) = \\
 &= (pab + qa^2 - b^2) (-q)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Iz tega sledi, da je  $-q(W_nW_{n-2} - W_{n-1}^2) = -q(-q)^{n-2}(pab + qa^2 - b^2)$ , torej tudi desna enakost velja.  $\square$

**Trditev 3.3.6.** *Za posplošena Fibonaccijeva števila velja:*

- a)  $W_{n+2} - (p^2 + q)W_n - pqW_{n-1} = 0$ ,
- b)  $pW_{n+2} - (p^2 + q)W_{n+1} - q^2W_{n-1} = 0$ .

*Dokaz.* V obeh primerih uporabimo Binetovo formulo za posplošena Fibonaccijeva števila in dokažemo.

a)

$$\begin{aligned}
 & (p^2 + q)W_n + pqW_{n-1} = \\
 &= \frac{(p^2 + q)((b - a\beta)\alpha^n - (b - a\alpha)\beta^n) + pq((b - a\beta)\alpha^{n-1} - (b - a\alpha)\beta^{n-1})}{\alpha - \beta} = \\
 &= \frac{((b - a\beta)(p^2\alpha^n + q\alpha^n + pq\alpha^{n-1}) - (b - a\alpha)(p^2\beta^n + q\beta^n + pq\beta^{n-1}))}{\alpha - \beta} = \\
 &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left( (b - a\beta) ((\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)\alpha^n - \alpha^{n+1}\beta - (\alpha + \beta)\alpha^n\beta) - \right. \\
 & \left. - (b - a\alpha) ((\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)\beta^n - \alpha\beta^{n+1} - (\alpha + \beta)\alpha\beta^n) \right) = \\
 &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left( (b - a\beta) (\alpha^{n+2} + 2\alpha^{n+1}\beta + \alpha^n\beta^2 - \alpha^{n+1}\beta - \alpha^{n+1}\beta - \alpha^n\beta^2) - \right. \\
 & \left. - (b - a\alpha) (\alpha^2\beta^n + 2\alpha\beta^{n+1} + \beta^{n+2} - \alpha\beta^{n+1} - \alpha^2\beta^n - \alpha\beta^{n+1}) \right) = \\
 &= \frac{(b - a\beta)\alpha^{n+2} - (b - a\alpha)\beta^{n+2}}{\alpha - \beta} = W_{n+2}.
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
& (p^2 + q) W_{n+1} + q^2 W_{n-1} = \\
&= \frac{(p^2 + q) ((b - a\beta) \alpha^{n+1} - (b - a\alpha) \beta^{n+1})}{\alpha - \beta} - \frac{q^2 ((b - a\beta) \alpha^{n-1} - (b - a\alpha) \beta^{n-1})}{\alpha - \beta} = \\
&= \frac{(b - a\beta) (p^2 \alpha^{n+1} + q \alpha^{n+1} - q^2 \alpha^{n-1}) - (b - a\alpha) (p^2 \beta^{n+1} + q \beta^{n+1} - q^2 \beta^{n-1})}{\alpha - \beta} = \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} ((b - a\beta) (p(\alpha + \beta) \alpha^{n+1} - \alpha^{n+2} \beta - \alpha^{n+1} \beta^2) - \\
&\quad - (b - a\alpha) (p(\alpha + \beta) \beta^{n+1} - \alpha \beta^{n+2} - \alpha^2 \beta^{n+1})) = \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} ((b - a\beta) (p\alpha^{n+2} + p\beta\alpha^{n+1} - \alpha^{n+1} \beta (\alpha + \beta)) - \\
&\quad - (b - a\alpha) (p\alpha\beta^{n+1} + p\beta^{n+2} - \alpha\beta^{n+1} (\alpha + \beta))) = \\
&= \frac{p}{\alpha - \beta} ((b - a\beta) \alpha^{n+2} - (b - a\alpha) \beta^{n+2}) = pW_{n+2}. \quad \square
\end{aligned}$$

## 4 Fibonaccijeva števila v kombinatoriki

Fibonaccijeva števila poskrbijo tudi za elegantno reševanje nekaterih kombinatoričnih problemov. Pogledali bomo problem tlakovanja pravokotnika velikosti  $2 \times n$  z dominami, posebne vrste sedežnih redov in barvanj stolpnic ter načine odbijanja žarka, ki potuje skozi dve stekli.

### 4.1 Domine

S pomočjo Fibonaccijevih števil z lahkoto ugotovimo, na koliko načinov lahko z dominami pokrijemo pravokotnik velikosti  $2 \times n$ . Poglejmo nekaj začetnih primerov. Pravokotnik velikosti  $2 \times 1$  lahko pokrijemo le na en način. Pravokotnik velikosti  $2 \times 2$  pa na dva načina: z dvema navpičnima ali z dvema vodoravnima dominama. Za pravokotnik velikosti  $2 \times 3$  imamo tri možnosti: tri navpične domine, najprej ena navpična in za njo dve vodoravni ali pa najprej dve vodoravni in za njima ena navpična domina. Pravokotnik velikosti  $2 \times 4$  lahko pokrijemo na pet načinov: s štirimi navpičnimi dominami, dvema paroma vodoravnih domin ali pa s kombinacijo dveh navpičnih domin in enim parom vodoravnih domin (take možnosti so tri). Splošni primer lahko rešimo s Fibonaccijevimi števili. Če želimo pokriti pravokotnik velikosti  $2 \times n$ , lahko začnemo z navpično domino in nam ostane pravokotnik velikosti  $2 \times (n - 1)$ , ali pa začnemo s parom vodoravnih domin in nam ostane pravokotnik velikosti  $2 \times (n - 2)$ . Naj bo  $D_n$  število načinov pokritja pravokotnika velikosti  $2 \times n$  ( $n$  je naravno število). Velja:

$$D_n = D_{n-1} + D_{n-2}, \text{ za } n \geq 3,$$

$$D_1 = 1,$$

$$D_2 = 2.$$

To bi lahko razširili še z  $D_0 = 1$ , ker lahko pravokotnik velikosti  $2 \times 0$  pokrijemo na en način. Torej je  $D_n = F_{n+1}$ .

Na podoben način lahko rešimo še nekaj kombinatoričnih problemov ([17]):

- Na koliko načinov lahko dano število  $n$  zapišemo kot vsoto enic in dvojk? Dovolj je izračunati  $F_{n+1}$ .
- Na koliko načinov lahko gremo po  $n$  stopnicah, če lahko stopimo na naslednjo stopnico, ali pa eno preskočimo? Odgovor je spet  $F_{n+1}$ .
- Na koliko načinov lahko plačamo znesek na avtomatu, če imamo na voljo le kovance za 50 centov in 1 evro in je znesek na avtomatu zaokrožen na pol evra? Znesek najprej zapišemo kot  $0,5n$ , potem je načinov spet  $F_{n+1}$ .



## 4.2 Obarvani kvadrati in domine

Poglejmo še nekaj zvez med posplošenimi Fibonaccijevimi števili s pomočjo kombinatorike, kot so predstavljene v [2]. Omejili se bomo na primere, ko sta začetna člena zaporedja  $W_0 = 0$  in  $W_1 = 1$ . Tokrat bomo pokrivali pravokotnik velikosti  $1 \times n$  s kvadrati  $1 \times 1$  in dominami  $1 \times 2$ . Gre za enak problem kot v razdelku 4.1, le da gledamo samo spodnjo ali zgornjo polovico pravokotnika velikosti  $2 \times n$ .

Pravokotnik velikosti  $1 \times n$  želimo pokriti s kvadrati in dominami, kjer imamo za kvadrate  $p$  barvnih možnosti, za domine pa  $q$  barvnih možnosti. Problema se lotimo enako kot v razdelku 4.1. Pokrivanje lahko začnemo s kvadratom. Zanj imamo  $p$  možnosti, ostane pa nam še  $n - 1$  mest, ki jih moramo pokriti. Lahko pa začnemo z domino, za katero imamo  $q$  možnosti. Tokrat nam ostane za pokrivanje še  $n - 2$  mest. Označimo število načinov pokrivanja pravokotnika velikosti  $1 \times n$  z  $G_n$  in zapišimo rekurzijo:

$$\begin{aligned} G_n &= pG_{n-1} + qG_{n-2}, \text{ za } n \geq 2, \\ G_0 &= 1, \\ G_1 &= 1. \end{aligned}$$

Velja  $G_n = W_{n+1}$ , kjer je  $W_n$  posplošeno Fibonaccijevo število (glej stran 15).

Poglejmo pokrivanje še z drugačnega vidika. Preštejmo, koliko pokritij lahko razdelimo na pravokotnika velikosti  $1 \times m$  in  $1 \times (n - m)$  ter koliko jih ne moremo. Pokritij, ki jih lahko razdelimo, je  $G_m \cdot G_{n-m}$ , ker lahko posebej pokrijemo prvih  $m$  mest in zadnjih  $n - m$  mest. Pokritja, ki jih ne moremo razdeliti na  $m$ -tem mestu, pa so sestavljena iz pravokotnika velikosti  $1 \times (m - 1)$ , ene domine v eni izmed  $q$  barv in pravokotnika velikosti  $1 \times (n - m - 1)$ . Takih pokritij je  $G_{m-1} \cdot q \cdot G_{n-m-1}$ . Pravkar smo dokazali zvezo

$$G_n = G_m G_{n-m} + q G_{m-1} G_{n-m-1},$$

ki smo jo v bolj splošni obliki že srečali v trditvi 3.3.4 (glej stran 18).

Zapišimo trditev 3.3.1 (glej stran 17) v drugačni obliki.

$$\begin{aligned} (p + q - 1) \sum_{i=0}^{n-1} W_i &= W_{n+1} - 1 + (1 - p)W_n \\ (p + q - 1) \sum_{i=1}^{n-1} W_i + (p - 1)W_n &= W_{n+1} - 1 \\ (p + q - 1) \sum_{i=0}^{n-2} G_i + (p - 1)G_{n-1} &= G_n - 1 \end{aligned}$$

Poglejmo nanjo v kombinatoričnem smislu. Desna stran predstavlja vsa pokritja pravokotnika velikosti  $1 \times n$ , ki niso sestavljena samo iz belih kvadratov in domin. Da bi

dobili levo stran, razdelimo pokritja glede na zadnji element, ki ni bel. Recimo, da se zadnji element, ki ni bel, začne na  $k$ -tem mestu. Če je  $k = n$ , je ta element kvadrat in imamo zanj  $p - 1$  barvnih možnosti, pred njim pa lahko pravokotnik pokrijemo na  $G_{n-1}$  načinov. Če je  $1 \leq k \leq n - 1$ , je na  $k$ -tem mestu kvadrat ali pa začetek domine, kar lahko izberemo na  $p + q - 1$  načinov. Pred tem pa je pravokotnik velikosti  $1 \times k - 1$ , ki ga lahko pokrijemo na  $G_{k-1}$  načinov. Skupno imamo torej

$$(p - 1)G_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} (p + q - 1)G_{k-1}$$

pokritij.

Naslednjo zvezo med Fibonaccijevimi števili smo že srečali v trditvi 2.2.5. Tokrat jo pogledjmo v bolj splošni obliki.

**Trditev 4.2.1.** *Za pare pokritij pravokotnikov velikosti  $1 \times n$  in  $1 \times n + 1$  velja:*

$$G_n G_{n+1} = p \sum_{k=0}^n G_k^2 q^{n-k}.$$

*Dokaz.* Na levi strani imamo vse pare pokritij pravokotnikov velikosti  $1 \times n$  in  $1 \times (n+1)$ . Za vse  $0 \leq k \leq n$  pogledjmo, pri koliko parih pokritij je zadnji kvadrat na  $(k + 1)$ -em mestu natanko pri enem pokritju. Prvih  $k$  mest lahko pokrijemo na  $G_k^2$  načinov, kvadrat na  $(k + 1)$ -em mestu na  $p$  načinov. Na preostalih  $2n - 2k$  mestih je  $n - k$  domin, ki jih lahko izberemo na  $q^{n-k}$  načinov. Skupaj imamo

$$p \sum_{k=0}^n G_k^2 q^{n-k}$$

pokritij. □

Catalanovo identiteto smo za Fibonaccijeva števila dokazali v trditvi 2.3.4, za posplošena Fibonaccijeva števila pa smo jo srečali v dokazu trditve 3.3.5. Zapišimo jo s pomočjo pokritij in pogledjmo njeno kombinatorično interpretacijo.

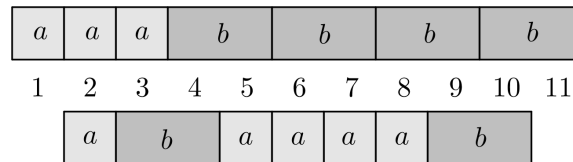
$$G_n^2 = G_{n+1}G_{n-1} + (-1)^n q^n$$

Na levi strani je število pokritij dveh pravokotnikov velikosti  $1 \times n$ . Za desno stran pa moramo biti malo bolj iznajdljivi. Zamaknimo spodnji pravokotnik za eno mesto v desno in pogledjmo, kje lahko razbijemo obe pokritji hkrati. Pri primeru na sliki 2 se to zgodi na 1., 2., 5. in 7. mestu.

V splošnem lahko oba pravokotnika razbijemo na  $i$ -tem mestu za  $1 \leq i \leq n$ , če nobeno izmed pokritij nima domine na  $i$ -tem in  $(i + 1)$ -em mestu. Naj bo *rep* pokritja del pravokotnika za zadnjim možnim razbitjem. Če pravokotnika zamenjata repa, dobimo



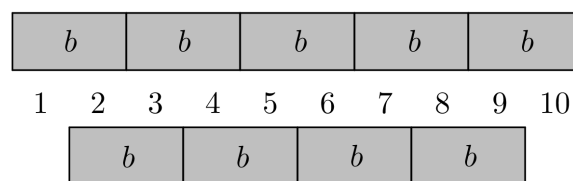
**Slika 2:** Dve pokritji pravokotnika velikosti  $1 \times 10$  z zamikom.



**Slika 3:** Pokritji po zamenjavi repov.

pravokotnika velikosti  $1 \times (n + 1)$  in  $1 \times (n - 1)$ , ki imata enaka možna razbitja (glej sliko 3).

Naj bo najprej  $n$  liho število. Potem morata obe pokritji imeti vsaj po en kvadrat. Če je kvadrat na  $i$ -tem mestu, lahko pravokotnika razbijemo na  $i$ -tem ali  $(i - 1)$ -em mestu. Če zamenjamo repa pravokotnikov, dobimo pravokotnika velikosti  $1 \times (n + 1)$  in  $1 \times (n - 1)$ , ki imata enaka možna razbitja. Imamo torej bijektivno preslikavo med pokritji dveh pravokotnikov velikosti  $1 \times n$  ter para pravokotnikov velikosti  $1 \times (n + 1)$  in  $1 \times (n - 1)$ , ki jih lahko razbijemo. Ali se lahko zgodi, da para pravokotnikov velikosti  $1 \times (n + 1)$  in  $1 \times (n - 1)$  ne moremo razbiti? Seveda, če uporabimo same domine. To lahko naredimo na  $q^n$  načinov (glej sliko 4). Za lihe  $n$  torej velja  $G_n^2 = G_{n+1}G_{n-1} - q^n$ .

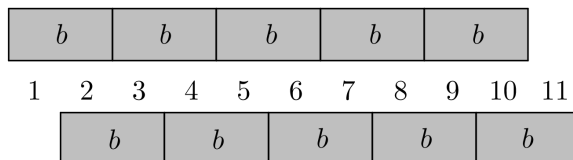


**Slika 4:** Za lihe  $n$  je to edini par pokritij, ki ga ne moremo razbiti.

Podobno za sode  $n$  zamenjava repov ustvari bijektivno preslikavo med pokritji z možnimi razbitji. Edino pokritje, ki ga ne moremo razbiti, je na sliki 5. Za sode  $n$  je torej  $G_n^2 = G_{n+1}G_{n-1} + q^n$ . Če združimo primera za lihe in sode  $n$ , dobimo iskano identiteto.

Za konec pogledjmo še zvezo, ki smo jo že srečali v trditvi 2.2.12. S pomočjo kombinatorike jo bomo dokazali še za posplošena Fibonaccijeva števila.

**Trditev 4.2.2.** Za posplošena Fibonaccijeva števila, za katera je  $W_0 = 0$  in  $W_1 = 1$



**Slika 5:** Za sode  $n$  je to edini par pokritij, ki ga ne moremo razbiti.

ter sta  $p$  in  $q$  tuji si števili, velja:

$$\gcd(W_n, W_m) = W_{\gcd(n,m)}.$$

Za dokaz trditve 4.2.2 potrebujemo naslednjo lemo.

**Lema 4.2.3.** *Za posplošena Fibonaccijeva števila, za katera je  $W_0 = 0$  in  $W_1 = 1$  ter sta  $p$  in  $q$  tuji si števili, sta za vsak  $m \geq 1$  števili  $W_m$  in  $qW_{m-1}$  tuji si števili.*

*Dokaz.* Najprej dokažimo, da sta  $W_m$  in  $q$  tuji si števili. Razdelimo pokritja pravokotnika velikosti  $1 \times (m-1)$  glede na prvo domino. Če domine ni, imamo  $p^{m-1}$  možnosti. Če pa se prva domina pojavi na  $j$ -tem mestu, jo lahko izberemo izmed  $q$  možnih, pred njo imamo  $j-1$  kvadratov ( $p^{j-1}$  možnosti), za njo pa moramo pokriti še  $m-j-2$  mest. To lahko zapišemo kot

$$G_{m-1} = p^{m-1} + q \sum_{j=1}^{m-2} p^{j-1} G_{m-j-2}$$

ali

$$W_m = p^{m-1} + q \sum_{j=1}^{m-2} p^{j-1} W_{m-j-1}.$$

Če bi število  $d > 1$  delilo števili  $W_m$  in  $q$ , bi moralo deliti tudi  $p^{m-1}$ , kar pa ni mogoče, ker sta  $p$  in  $q$  tuji si števili. Dokažimo še, da sta  $W_m$  in  $W_{m-1}$  tuji si števili. Pomagamo si s Catalanovo identiteto. Če bi število  $d > 1$  delilo števili  $W_m$  in  $W_{m-1}$ , bi moralo deliti tudi  $q^{m-1}$ , kar pa spet ni mogoče, ker sta  $W_m$  in  $q$  tuji si števili. Iz  $\gcd(W_m, q) = 1$  in  $\gcd(W_m, W_{m-1}) = 1$  sedaj sledi, da je tudi  $\gcd(W_m, qW_{m-1}) = 1$ .  $\square$

*Dokaz trditve 4.2.2.* Pomagali si bomo z Evklidovim algoritmom. Zapišimo  $n = km+r$ , kjer je  $0 \leq r < m$ . Potem velja  $\gcd(n, m) = \gcd(m, r)$ . Število  $W_n$  lahko zapišemo kot kombinacijo  $W_m$  in  $W_r$ :

$$W_n = (qW_{m-1})^k W_r + W_m \sum_{j=1}^k (qW_{m-1})^{j-1} W_{(k-j)m+r+1},$$

za kar obstaja dovolj enostaven kombinatorični dokaz. Na levi imamo število pokritij pravokotnika velikosti  $1 \times (n-1)$  oziroma  $1 \times (km+r-1)$ . Za desno stran najprej

preštejmo pokritja, ki jih ne moremo razbiti na mestih oblike  $jm - 1$ , kjer je  $1 \leq j \leq k$ . Taka pokritja imajo domine, ki se začnejo na mestih  $m - 1, 2m - 1, \dots, km - 1$ , kar lahko izberemo na  $q^k$  načinov. Pred vsako izmed teh domin je  $m - 2$  mest, ki jih poljubno pokrijemo na  $G_{m-2}$  načinov. Ostalih  $r - 1$  celic pa lahko pokrijemo na  $G_{r-1}$  načinov. Skupaj je to  $(qW_{m-1})^k W_r$  pokritij. Ostala pokritja razdelimo glede na prvo mesto oblike  $jm - 1, 1 \leq j \leq k$ , kjer lahko pravokotnik razbijemo. Po podobnem razmisleku je možnosti za tako pokritje  $(qW_{m-1})^{j-1} W_m W_{(k-j)m+r+1}$ . Skupno število pokritij je potem  $(qW_{m-1})^k W_r + W_m \sum_{j=1}^k (qW_{m-1})^{j-1} W_{(k-j)m+r+1}$ . Iz tega sledi, da je  $d$  skupni delitelj števil  $W_n$  in  $W_m$  natanko tedaj, ko deli  $W_m$  in  $(qW_{m-1})^k W_r$ . Po lemi 4.2.3, mora biti  $d$  skupni delitelj števil  $W_m$  in  $W_r$ . Torej imata  $W_n$  in  $W_m$  enake delitelje kot  $W_m$  in  $W_r$  in zato tudi enakega največjega skupnega delitelja. S ponavljanjem enakega postopka pridemo do  $\gcd(W_{\gcd(n,m)}, W_0) = \gcd(W_{\gcd(n,m)}, 0) = W_{\gcd(n,m)}$ .  $\square$

### 4.3 Sedežni redi, barvanje stolpnic in podmnožice

Posamentier [17] omenja več zanimivih problemov, ki jih na preprost način rešimo s Fibonaccijevimi števili. Zanima nas, na koliko načinov lahko na  $n$  mest posedemo moške in ženske, če poljubni dve ženski ne smeta sedeti skupaj. Poglejmo nekaj začetnih primerov.

**Tabela 2:** Sedežni redi.

Število mest	Sedežni redi	Število možnosti
1	M, Ž	2
2	MM, MŽ, ŽM	3
3	MMM, MMŽ, MŽM, ŽMM, ŽMŽ	5
4	MMMM, MMMŽ, MMŽM, MŽMM, ŽMMM, MŽMŽ, ŽMŽM, ŽMMŽ	8

Izkaže se, da lahko za  $n$  mest pripravimo  $F_{n+2}$  različnih razporeditev. Razmislek je podoben kot pri dominah. Če začnemo sedežni red z moškim, lahko naslednjih  $n - 1$  mest poljubno zasedemo, če pa začnemo z žensko, mora biti na naslednjem mestu moški in ostane nam še  $n - 2$  mest, ki jih lahko poljubno zasedemo. Zveza med sedežnimi redi je torej enaka kot pri Fibonaccijevih številih, le začetni pogoji so drugačni.

Na enak način rešimo problem barvanja nadstropij stolpnice z dvema barvama, kjer druge barve ne smemo uporabiti za dve zaporedni nadstropji. Z enakim razmislekom kot pri sedežnih redih imamo za  $n$  nadstropij visoko stolpnico  $F_{n+2}$  možnosti.

Vprašajmo se še, koliko podmnožic, ki ne vsebujejo zaporednih naravnih števil, ima množica  $\{1, 2, \dots, n\}$ ? Kot pri sedežnem redu lahko v podmnožico vključimo enico, dvojke potem ne smemo in ostane nam še  $n - 2$  števil, za katere se še nismo odločili. Če enice ne vključimo, pa nam ostane  $n - 1$  števil, med katerimi še izbiramo. Vseh možnosti je spet  $F_{n+2}$ .

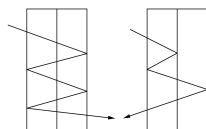
#### 4.4 Žarek skozi dve stekli

Zadnji primer prihaja s področja optike. Povzemimo ga iz [17]. Imejmo dve stekleni plošči drugo ob drugi in preštejmo na koliko načinov se lahko žarek na poti skozi njiju odbije. Če se žarek sploh ne odbije, imamo eno možno pot. Če se žarek odbije enkrat, imamo dve možnosti - lahko se odbije na koncu ali pa na sredini. Če se žarek lahko odbije dvakrat, imamo tri možnosti. Če pa se žarek lahko odbije trikrat, imamo kar pet možnih poti (glej tabelo 3).

**Tabela 3:** Poti žarkov skozi dve stekli.

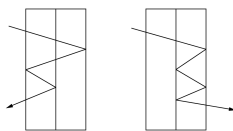
Število odbojev	Možne poti
0	
1	
2	
3	
4	

Poglejmo še splošen primer z  $n$  odboji. Označimo število možnih poti z  $n$  odboji s  $P_n$ . Če se je zadnji odboj zgodil na začetku prvega stekla za sode  $n$  ali na koncu



**Slika 6:** Zadnji odboj je na začetku ali na koncu.

drugega stekla za lihe  $n$  (glej sliko 6), je bilo pred tem  $P_{n-1}$  možnih poti. Če pa se je zadnji odboj zgodil med stekli (z leve za lihe  $n$  in z desne za sode  $n$ ), se je predzadnji odboj zgodil na začetku za lihe  $n$  oziroma na koncu za sode  $n$  (glej sliko 7), pred tem pa je bilo  $P_{n-2}$  možnih poti. Skupaj imamo torej  $P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$  možnih poti, kjer je  $P_0 = 1$  in  $P_1 = 2$ . Velja  $P_n = F_{n+2}$ .



**Slika 7:** Zadnji odboj je na sredini.

## 4.5 Vzpenjanje po stopnicah

Omenili smo že, na koliko načinov se lahko povzpne po  $n$  stopnicah, če lahko v posameznem koraku prestopimo največ dve stopnici. Kaj pa, če lahko v vsakem koraku prestopimo liho število stopnic?

Naj bo  $S_n$  število načinov vzpenjanja po  $n$  stopnicah, če lahko v vsakem koraku prestopimo liho število stopnic. Razdelimo načine vzpenjanja glede na prvi korak. V prvem koraku lahko prestopimo eno, tri, pet, sedem, ... stopnic. Ločimo primera, ko je  $n$  sodo ali liho število. Naj bo najprej  $n = 2k$ . Po prvem koraku nam ostane še  $2k - 1, 2k - 3, 2k - 5, \dots, 3$  ali  $1$  stopnica, torej velja

$$S_{2k} = S_{2k-1} + S_{2k-3} + S_{2k-5} + \dots + S_3 + S_1.$$

Naj bo zdaj  $n = 2k - 1$ . Po prvem koraku nam ostane še  $2k - 2, 2k - 4, 2k - 6, \dots, 4, 2$  ali nobena stopnica in velja

$$S_{2k-1} = S_{2k-2} + S_{2k-4} + S_{2k-6} + \dots + S_4 + S_2 + 1.$$

Obe zvezi namigujeata na Fibonaccijeva števila. Srečali smo ju v trditvah 2.2.2 in 2.2.3. Omenjenih načinov vzpenjanja po stopnicah je torej  $S_n = F_n$ .

Enak je tudi problem zapisa naravnega števila  $n$  kot vsote lihih naravnih števil, kjer je vrstni red seštevancev pomemben.

## 5 Zlati rez

### 5.1 Definicija

**Definicija 5.1.1.** Vzemimo daljico  $AB$  in jo razdelimo na dva dela s točko  $C$ , tako da bo

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|CB|} = \varphi.$$

Temu razmerju pravimo *zlati rez* ali *zlato razmerje*. Točki  $C$  pa rečemo tudi *zlata točka*.



**Slika 8:** Daljica, razdeljena v zlatem razmerju.

Če označimo dolžino  $AC$  z  $x$ , dolžino  $CB$  pa z  $1$ , potem dobimo zvezo

$$\frac{1+x}{x} = \frac{x}{1},$$

iz nje pa kvadratno enačbo

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

ki ima pozitivno rešitev  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Izračunali smo *zlato število*  $\varphi$ .

### 5.2 Zlato število in verižni ulomki

S pomočjo karakteristične enačbe Fibonaccijevega zaporedja, katere rešitev je zlato število  $\varphi$ , lahko to zapišemo v obliki periodičnega verižnega ulomka.

**Definicija 5.2.1.** *Neskončni verižni ulomek*  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ , kjer je  $a_0$  naravno število,  $a_1, a_2, \dots$  pa so cela števila, opredeljuje število

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + \dots}}}}.$$



**Definicija 5.2.2.** *Periodični verižni ulomek*  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{b_1, b_2, \dots, b_m}]$ , kjer je  $a_0$  naravno število,  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m$  pa so cela števila, opredeljuje število

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{b_1, b_2, \dots, b_m}] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{b_m + \frac{1}{b_1 + \dots}}}}}}}$$

Pravimo, da je verižni ulomek *popolnoma periodičen*, če je oblike

$$\beta = [\overline{b_1, b_2, \dots, b_m}] = b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{b_m + \frac{1}{b_1 + \dots}}}}$$

Neposredno iz karakteristične enačbe  $x^2 - x - 1 = 0$  sledi, da je  $x = 1 + \frac{1}{x}$ , od koder z zaporednimi zamenjavami dobimo

$$x = \varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = [\overline{1}].$$

Poglejmo še družino karakterističnih enačb za posplošena Fibonaccijeva števila. Spinadelova [18] vse rešitve družine enačb  $x^2 - px - q = 0$  imenuje z nadpomenko *kovinska števila*, nekatera med njimi pa imajo kar svoje ime. Označimo pozitivne rešitve te družine enačb s  $\sigma_p^q$ .

Poglejmo poseben primer enačbe za  $q = 1$ , torej  $x^2 - px - 1 = 0$ . Z zaporednimi zamenjavami iz  $x = p + \frac{1}{x}$  dobimo

$$x = p + \frac{1}{p + \frac{1}{p + \frac{1}{p + \dots}}} = [\overline{p}].$$

Za  $p = 2$  dobimo *srebrno število*

$$\sigma_2^1 = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} = [2],$$

za  $p = 3$  pa *bronasto število*

$$\sigma_3^1 = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \dots}}} = [3].$$

Poglejmo še drug poseben primer, ko je  $p = 1$ , tj. kvadratno enačbo  $x^2 - x - q = 0$ . Za  $q = 1$  dobimo *zlato število*. Za  $q = 2$  dobimo *bakreno število*

$$\sigma_1^2 = 2 = [2; \overline{0}],$$

za  $q = 3$  pa *nikljevo število*

$$\sigma_1^3 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} = [2; \overline{3}].$$

Na podoben način dobimo tudi

$$\begin{array}{lll} \sigma_1^4 = [2; \overline{1, 1, 3}], & \sigma_1^5 = [2; \overline{1, 3}], & \sigma_1^6 = 3 = [3; \overline{0}], \\ \sigma_1^7 = [3; \overline{5}], & \sigma_1^8 = [3; \overline{2, 1, 2, 5}], & \sigma_1^9 = [3; \overline{1, 1, 5}], \\ \sigma_1^{10} = [3; \overline{1, 2, 2, 1, 5}], & \sigma_1^{11} = [3; \overline{1, 5}], & \sigma_1^{12} = 4 = [4; \overline{0}]. \end{array}$$

Tudi tu lahko opazimo nekaj preprostih ponavljanj.

**Trditev 5.2.3.** *Pozitivna rešitev enačbe  $x^2 - x - q = 0$  je:*

- a) za  $q = n^2$  enaka  $\sigma_1^{n^2} = [n; \overline{1, 1, 2n - 1}]$ ,
- b) za  $q = n(n - 1)$  enaka  $\sigma_1^{n(n-1)} = n = [n; \overline{0}]$ ,
- c) za  $q = n(n - 1) - 1$  enaka  $\sigma_1^{n(n-1)-1} = [n - 1; \overline{1, 2n - 3}]$ ,
- d) za  $q = n(n - 1) + 1$  pa enaka  $\sigma_1^{n(n-1)+1} = [n; \overline{2n - 1}]$ .

*Dokaz.*

- a) Naj bo  $q = n^2$  in označimo  $\sigma_1^{n^2}$  z  $x$ . Ulomek  $\frac{1}{x-n}$  je popolnoma periodičen verižni ulomek, kar lahko uporabimo v izrazu za  $x$ :

$$x = n + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2n-1+x-n}}}$$

Preoblikujmo  $x$  v običajen ulomek:

$$\begin{aligned} x &= n + \frac{1}{1 + \frac{1}{x+n-1+1}} = n + \frac{1}{1 + \frac{1}{x+n-1}} = n + \frac{1}{\frac{x+n+x+n-1}{x+n}} = \\ &= n + \frac{x+n}{2x+2n-1} = \frac{2xn+2n^2-n+x+n}{2x+2n-1}. \end{aligned}$$

Torej  $x$  zadošča enačbi:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2nx - x &= 2nx + 2n^2 + x \\ x^2 - x - n^2 &= 0 \end{aligned}$$

in zato  $\sigma_1^{n^2}$  reši zadnjo enačbo.

- b) Naj bo  $q = n(n-1)$ . S pomočjo Vièetovega pravila hitro najdemo rešitev enačbe  $x^2 - x - n(n-1) = 0$ .

$$\begin{aligned} (x-n)(x+(n-1)) &= 0, \\ x_1 = n &= [n; \overline{0}], \\ x_2 = -n+1 &\leq 0. \end{aligned}$$

- c) Naj bo  $q = n(n-1) - 1$  in  $x = \sigma_1^{n(n-1)-1}$ . Postopali bomo enako kot v primeru a):

$$\begin{aligned} x &= n-1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2n-3+x-n+1}} = n-1 + \frac{n+x-2}{n+x-2+1}, \\ nx + x^2 - x &= n^2 + nx - n - n - x + 1 + n + x - 2 \\ x^2 - x - n^2 + n + 1 &= 0 \\ x^2 - x - (n(n-1) - 1) &= 0. \end{aligned}$$

d) Naj bo  $q = n(n - 1) + 1$  in  $x = \sigma_1^{n(n-1)+1}$ . Ponovno naredimo enako kot pri a):

$$x = n + \frac{1}{2n - 1 + x - n} = \frac{n^2 + xn - n + 1}{n + x - 1},$$

$$nx + x^2 - x = n^2 + nx - n + 1$$

$$x^2 - x - (n^2 - n + 1) = 0$$

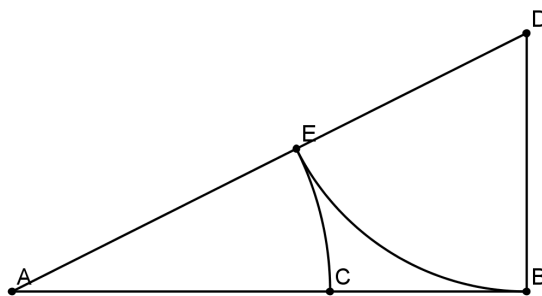
$$x^2 - x - (n(n - 1) + 1) = 0. \quad \square$$

### 5.3 Konstrukcije zlatega reza

Zlati rez lahko konstruiramo na več različnih načinov. V nadaljevanju si bomo ogledali nekaj izmed njih, ki so povzeti iz [17].

#### Konstrukcija zlatega reza s pomočjo šestila in ravnila

Konstrukcija zlate točke  $C$  na daljico  $AB$  je precej preprosta in zahteva le uporabo šestila in ravnila. Najprej narišemo pravokotnico na daljico skozi točko  $B$  (glej sliko 9) in na njej označimo točko  $D$ , ki je od daljice  $AB$  oddaljena za  $\frac{|AB|}{2}$ . Tako dobimo pravokotni trikotnik  $ABD$ . Skozi točko  $B$  narišemo lok s središčem v  $D$ . Ta nam da na daljici  $AD$  točko  $E$ . Končno narišemo še lok skozi točko  $E$  s središčem v  $A$ . Presečišče te krožnice z daljico  $AB$  je zlata točka  $C$ .



**Slika 9:** Konstrukcija zlatega reza s pomočjo šestila in ravnila.

Zdaj pa še preverimo, da je ta točka res zlata točka. Naj bo kot prej  $|AC| = x$  in  $|CB| = 1$ . Dokažimo, da je  $x = \varphi$ . Vemo, da je  $|BD| = |ED| = \frac{1+x}{2}$ . Po Pitagorovem izreku je potem  $|AD| = \frac{(1+x)\sqrt{5}}{2}$ . S preprostim odštevanjem dobimo  $|AE| = |AD| - |ED| = \frac{(1+x)(\sqrt{5}-1)}{2}$ , vemo pa tudi, da je  $|AE| = |AC| = x$ . Če rešimo preprosto linearno enačbo  $\frac{(1+x)(\sqrt{5}-1)}{2} = x$ , dobimo  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , kar smo tudi želeli dokazati.

### Konstrukcija zlatega reza s pomočjo pravokotnega trikotnika in krožnic

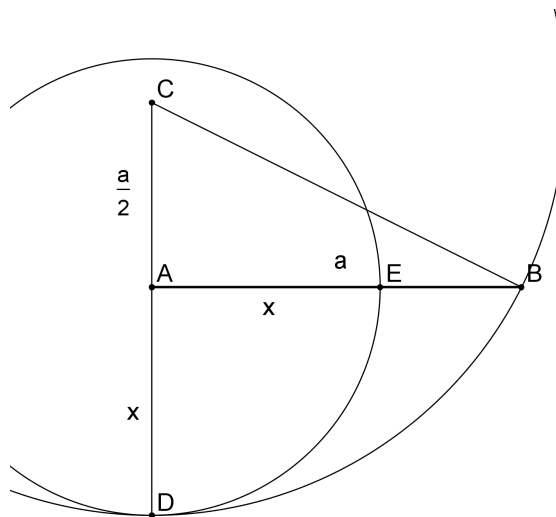
Začnemo s pravokotnim trikotnikom  $ABC$  (glej sliko 10). Naj bo  $a = |AB|$ . Potem je  $|AC| = \frac{a}{2}$ . Za tem narišemo krožnico s središčem v  $C$  in polmerom dolžine  $|CB|$ . Daljico  $CA$  podaljšamo, da pridemo do presečišča  $D$  s krožnico. Na koncu narišemo še krožnico s središčem v  $A$  in polmerom dolžine  $|AD|$ . Točka  $E$ , ki je presečišče daljice  $AB$  in nazadnje narisane krožnice, deli daljico  $AB$  v zlatem razmerju, saj je:

$$|CB| = \frac{a\sqrt{5}}{2} = |CD|,$$

$$|AE| = |AD| = x = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2},$$

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{a}{x} = \frac{2a}{a(\sqrt{5}-1)} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi \text{ in}$$

$$\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{x}{a-x} = \frac{2a(\sqrt{5}-1)}{2a(3-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi.$$



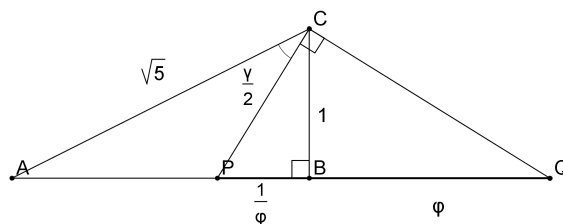
Slika 10: Konstrukcija zlatega reza s pomočjo pravokotnega trikotnika in krožnic.

### Konstrukcija zlatega reza s pomočjo višinskega izreka

Spet drugače lahko zlato število srečamo, če začnemo s pravokotnim trikotnikom  $ABC$  s katetama dolžin  $|AB| = 2$  in  $|BC| = 1$  (glej sliko 11). Hipotenuza torej meri  $|AC| = \sqrt{5}$ . Zdaj razpolovimo kot  $\gamma = \angle ACB$  in v presečišču s stranico  $AB$  dobimo točko  $P$ . Če razpolovimo še zunanji kot pri oglišču  $C$ , pa dobimo v presečišču z nosilko daljice  $AB$  še točko  $Q$ . Z uporabo kotnih funkcij hitro vidimo, da je

$$\frac{|PB|}{1} = \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{1 - \cos \gamma}{\sin \gamma} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi}.$$

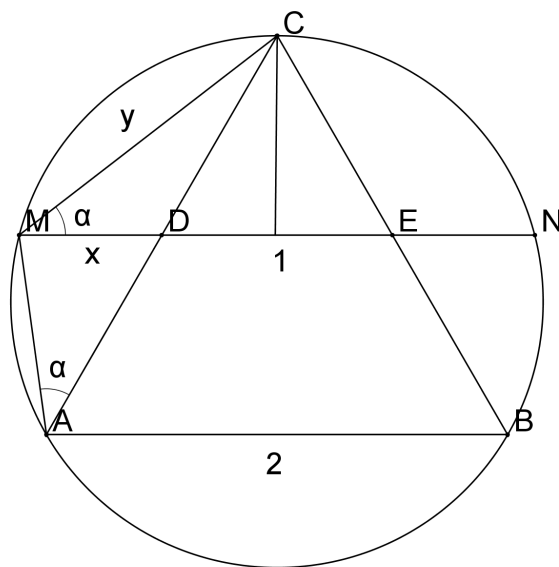
Po višinskem izreku v pravokotnem trikotniku  $PQC$  je potem tudi  $|BQ| = \varphi$ .



**Slika 11:** Konstrukcija zlatega reza s pomočjo pravokotnega trikotnika in višinskega izreka.

### Konstrukcija zlatega reza s pomočjo enakostraničnega trikotnika

Čisto drugačen pa je tretji način, pri katerem enakostraničnemu trikotniku  $ABC$  s stranico dolžine 2 očrtamo krožnico (glej sliko 12). Naj bosta  $D$  in  $E$  razpolovišči stranic  $AC$  in  $BC$ . Nosilka daljice  $DE$  seka trikotniku  $ABC$  očrtano krožnico v točkah  $M$  in  $N$ . Ti dve presečišči razkrijeta obrat zlatega števila.



**Slika 12:** Konstrukcija zlatega reza s pomočjo enakostraničnega trikotnika.

Izračunajmo dolžino daljice  $MD$ ; označimo jo z  $x$ . Z  $y$  pa označimo dolžino daljice  $MC$ . Najprej uporabimo sinusni izrek v trikotniku  $MDC$ :

$$\frac{y}{\sin 120^\circ} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \alpha}.$$

Trikotnika  $ABC$  in  $ACM$  imata enak polmer očrtanega kroga  $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ . Po sinusnem

izreku v trikotniku  $ACM$  velja

$$\frac{y}{\sin \alpha} = 2R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$y = \frac{4\sqrt{3} \sin \alpha}{3}.$$

Če to dvoje združimo, dobimo

$$\sin^2 \alpha = \frac{3}{8},$$

kar nam da

$$y = \sqrt{2}.$$

Po Pitagorovem izreku je nato

$$\left(\frac{1}{2} + x\right)^2 + \frac{3}{4} = 2$$

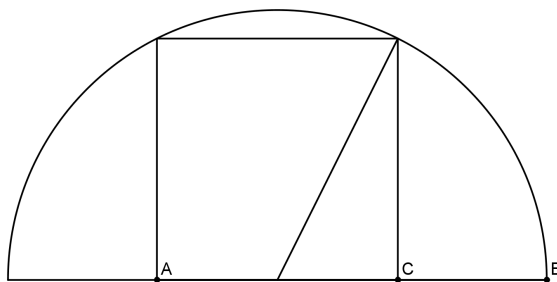
$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1}{\varphi}.$$

## 5.4 Zlati rez v geometriji

V geometriji pogosto srečujemo zlati rez. Poglejmo nekaj primerov, ki jih najdemo v [19].

### Polkrog

Vzemimo na primer polkrog in mu včrtajmo kvadrat (glej sliko 13). Naj bosta  $A$  in  $C$  oglišči kvadrata, ki ležita na osnovnici polkroga in naj bo  $B$  desno oglišče osnovnice polkroga. Izkaže se, da točka  $C$  deli daljico  $AB$  v zlatem razmerju.



Slika 13: Zlati rez v polkrogu.

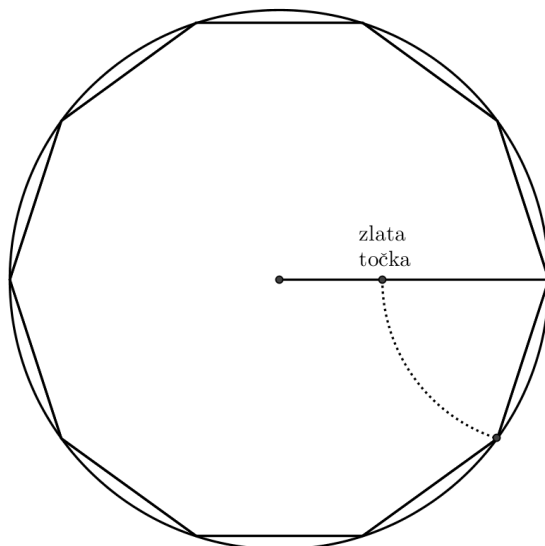
Preverimo. Naj bo  $|AC| = x$  in  $|CB| = 1$ . Polmer polkroga meri  $1 + \frac{x}{2}$ . Pitagorov izrek nam pove:

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 &= x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ 1 + x + \frac{x^2}{4} &= x^2 + \frac{x^2}{4} \\ x^2 - x - 1 &= 0\end{aligned}$$

Za to enačbo pa že vemo, da nam da rešitev  $x = \varphi$ .

## Desetkotnik

Z malo več truda pa najdemo zlato razmerje tudi v pravilnem desetkotniku (glej sliko 14).



Slika 14: Zlati rez v pravilnem desetkotniku.

Njegova stranica meri  $2R \sin 18^\circ$ , kjer je  $R$  polmer desetkotniku očrtanega kroga. S pomočjo kotnih funkcij dvojnih kotov hitro ugotovimo:

$$\sin 72^\circ = 2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ = 4 \sin 18^\circ \cos 18^\circ (1 - 2 \sin^2 18^\circ).$$

Vemo tudi, da je  $\sin 72^\circ = \cos 18^\circ \neq 0$ , zato je

$$1 = 4 \sin 18^\circ (1 - 2 \sin^2 18^\circ).$$

Torej  $\sin 18^\circ$  je ena izmed rešitev enačbe

$$1 = 4x (1 - 2x^2).$$



To enačbo lahko poenostavimo in razstavimo

$$8x^3 - 4x + 1 = 0$$

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x - 1) = 0$$

ter dobimo rešitve

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

Vemo tudi, da je  $\sin 18^\circ$  pozitivno število, ki ni  $\frac{1}{2}$ , torej je

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{1}{2\varphi}.$$

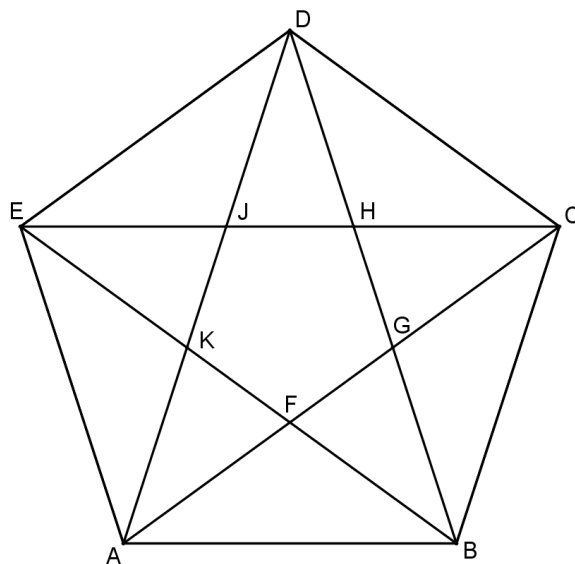
Od tod pa sledi, da je

$$\varphi = \frac{R}{a_{10}}, \text{ kjer je } a_{10} \text{ stranica desetkotnika,}$$

oziroma da je razmerje med polmerom  $R$  in stranico  $a_{10}$  zlato.

### Petkotnik

V petkotniku se zlati rez pojavi še večkrat. Vzemimo petkotnik  $ABCDE$  in naj bodo  $F, G, H, J, K$  presečišča diagonal kot na sliki 15.



**Slika 15:** Zlati rez v pravilnem petkotniku.

Kot  $EFC$  meri  $108^\circ$ , kot  $ECF$  pa  $36^\circ$ . S pomočjo prejšnjih izračunov vemo, da je

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ &= 1 - 2 \sin^2 18^\circ = 1 - 2 \frac{1}{4\varphi^2} = \frac{2\varphi^2 - 1}{2\varphi^2} = \\ &= \frac{2 + 2\varphi - 1}{2\varphi^2} = \frac{2\varphi + 1}{2\varphi^2} = \frac{\varphi^3}{2\varphi^2} = \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Sinusni izrek pa nam da razmerje

$$\frac{|EC|}{|EF|} = \frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = 2 \cos 36^\circ = \varphi.$$

Očitno je  $|EF| = |EH|$ , torej velja

$$\frac{|EC|}{|EF|} = \frac{|EC|}{|EH|} = \varphi$$

in točka  $H$  deli daljico  $EC$  v zlatem rezu. Iz definicije zlatega reza pa potem sledi še

$$\frac{|EH|}{|HC|} = \varphi.$$

Vemo pa tudi, da je  $|EJ| = |HC|$ , torej velja

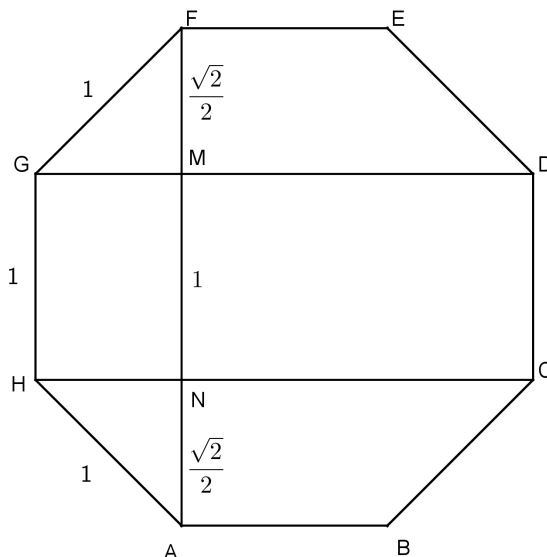
$$\frac{|EH|}{|EJ|} = \frac{|EJ|}{|JH|} = \varphi.$$

Zaradi simetričnosti vsa presečišča diagonal delijo diagonale v zlatem razmerju.

Ker je  $|ED| = |EH|$ , velja tudi, da sta v petkotniku stranica in diagonala v zlatem razmerju.

## Osemkotnik

Zlato število ni edino, ki se pojavi v geometriji. Srebrno število  $1 + \sqrt{2}$  se pojavi v osemkotniku kot dolžina druge diagonale.



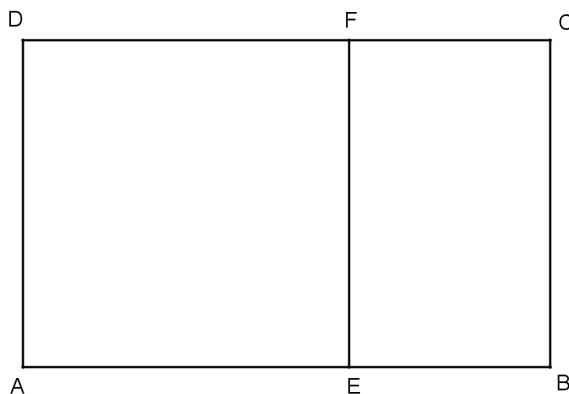
Slika 16: Srebrno število v pravilnem osemkotniku.

Vzemimo pravilni osemkotnik  $ABCDEFGH$  s stranico dolžine 1 (glej sliko 16). Naj se diagonali  $AF$  in  $GD$  sekata v točki  $M$ , diagonali  $AF$  in  $HC$  pa v točki  $N$ . Dolžini  $FM$  in  $NA$  po Pitagorovem izreku merita  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $MN$  pa je enaka stranici osemkotnika. Torej  $AF$  meri  $|AF| = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \sqrt{2} + 1$ .

## Zlati pravokotnik

**Definicija 5.4.1.** Pravokotniku, katerega stranici sta v zlatem razmerju, pravimo *zlati pravokotnik*.

Zlat pravokotnik ima lepo lastnost. Če mu včrtamo največji možni kvadrat, je ostanek spet zlat pravokotnik (glej sliko 17).



**Slika 17:** Zlati pravokotnik.

Vzemimo pravokotnik  $ABCD$  in naj bo  $EF$  četrta stranica včrtanega kvadrata. Naj bo torej  $\frac{|AB|}{|AD|} = \varphi$ . Izračunajmo razmerje stranic manjšega pravokotnika.

$$\frac{|EF|}{|EB|} = \frac{1}{\varphi - 1} = \frac{\varphi^2 - \varphi}{\varphi - 1} = \varphi$$

Torej je tudi mali pravokotnik zlat.

## Zlati trikotniki

Na podoben način lahko definiramo tudi dve vrsti zlatih trikotnikov.

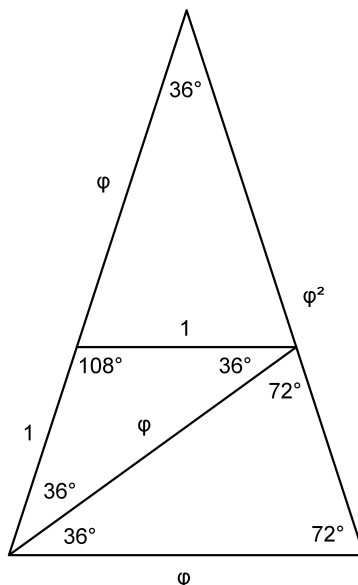
**Definicija 5.4.2.** *Ostrokotni zlati trikotnik* je trikotnik z notranjimi koti  $36^\circ$ ,  $72^\circ$  in  $72^\circ$ , *topokoti zlati trikotnik* pa je trikotnik z notranjimi koti  $108^\circ$ ,  $36^\circ$  in  $36^\circ$ .

Vsak ostrokotni zlati trikotnik lahko razdelimo na tri manjše zlate trikotnike kot kaže slika 18.

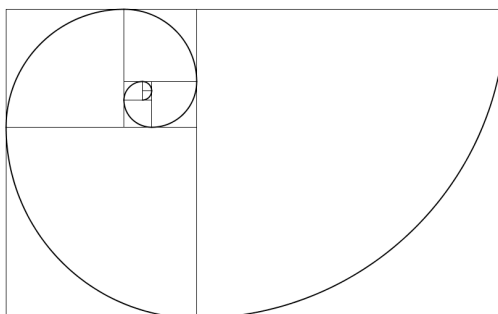
## 5.5 Spirale

Z zlatim, srebrnim in bronastim številom, ki smo jih srečali že v razdelku 5.2, so povezane tudi spirale. Poglejmo nekaj spiral, ki so povzete iz [18].

Zlato spiralo konstruiramo tako, da zlati pravokotnik razdelimo na kvadrat in novi manjši zlati pravokotnik in postopek ponavljamo dokler lahko. V vsakega izmed kvadratov nato včrtamo četrt kroga, kot kaže slika 19. Če je spirala včrtana v pravokotnik



Slika 18: Zlati trikotnik.



Slika 19: Zlata spirala.

s stranicama 1 in  $\varphi$ , je njena dolžina enaka vsoti geometrijske vrste

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(\varphi - 1) + \frac{\pi}{2}(\varphi - 1)^2 + \dots = \frac{\pi}{2}(\varphi + 1).$$

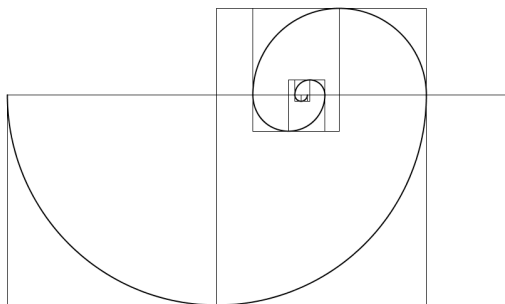
Na podoben način narišemo srebrno spiralo.

**Definicija 5.5.1.** *Srebrni pravokotnik* je pravokotnik, ki ima stranici v razmerju  $1 : \sigma_2^1$  (glej stran 31).

Če v srebrni pravokotnik včrtamo dva kvadrata, dobimo manjši pravokotnik s stranicama v enakem razmerju  $1 : \sigma_2^1$ . Tega zrcalimo preko nosilke diagonale sosednjega kvadrata in postopek ponovimo (glej sliko 20). V dobljene kvadrate včrtamo četrtine krogov. Dolžina take spirale je spet vsota geometrijske vrste

$$\pi + \pi(\sigma_2^1 - 2) + \pi(\sigma_2^1 - 2)^2 + \dots = \frac{\pi}{2}(\sigma_2^1 + 1).$$

Bronasto spiralo bomo narisali s pomočjo dveh bronastih pravokotnikov.

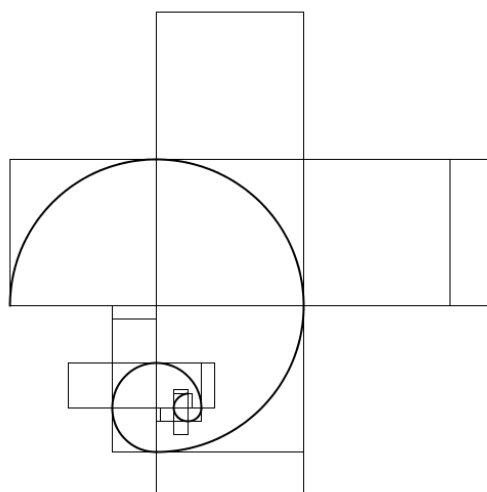


**Slika 20:** Srebrna spirala.

**Definicija 5.5.2.** *Bronasti pravokotnik* je pravokotnik, ki ima stranici v razmerju  $1 : \sigma_3^1$  (glej stran 31).

Dva bronasta pravokotnika razdelimo na tri kvadrate in manjši bronasti pravokotnik (glej sliko 21). Postavimo ju pravokotno, da se ujemata v srednjem kvadratu, nato zrcalimo mali bronasti pravokotnik kot pri srebrni spirali in postopek ponovimo. Dolžina spirale je vsota geometrijske vrste

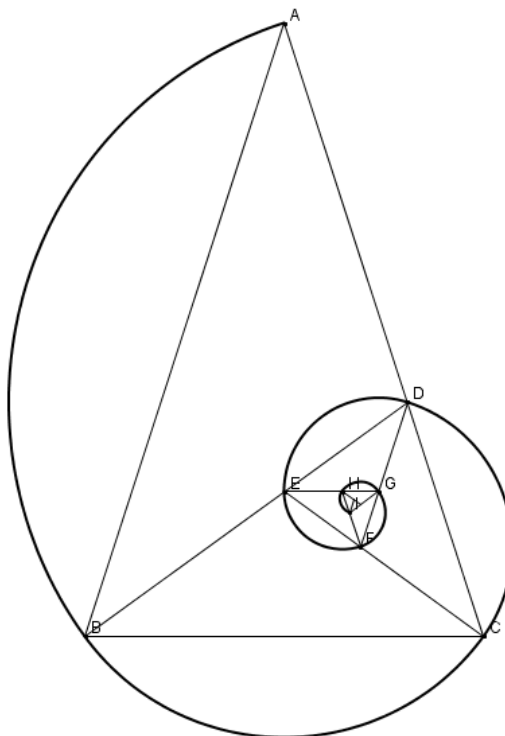
$$\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} (\sigma_3^1 - 3) + \frac{3\pi}{2} (\sigma_3^1 - 3)^2 + \dots = \frac{\pi}{2} (\sigma_3^1 + 1).$$



**Slika 21:** Bronasta spirala.

Opazimo, da imajo vse tri spirale dolžino na enak način odvisno od kovinskega števila, ki mu pripadajo.

Spiralo lahko očrtamo tudi zlatemu trikotniku  $ABC$  (glej stran 40). Narišemo krožni lok med  $A$  in  $B$  s središčem v  $D$ , zatem med  $B$  in  $C$  s središčem v  $E$ , itd. (glej sliko 22). Vsakič narišemo  $\frac{3}{10}$  kroga. Če je osnovnica dolžine 1 in kraka dolžine  $\varphi$ ,



Slika 22: Zlati trikotnik z očrtano spiralo.

potem je dolžina spirale vsota geometrijske vrste

$$\frac{3\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} \cdot \frac{1}{\varphi} + \frac{3\pi}{5} \cdot \frac{1}{\varphi^2} + \dots = \frac{3\pi}{5} \varphi^2.$$

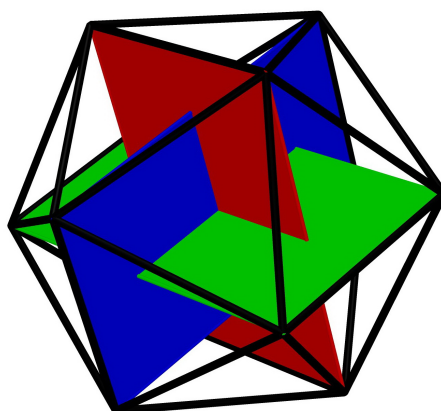
## 5.6 Platonska telesa

Platonska telesa so pravilna telesa ali konveksni poliedri, katerih ploskve so skladni pravilni večkotniki. Takih teles je pet - tetraeder, kocka oziroma heksaeder, oktaeder, dodekaeder in ikozaeder. Poznali so jih že v antiki, opisal jih je Platon in jih povezoval z osnovnimi elementi - tetraeder z ognjem, kocko z zemljo, oktaeder z zrakom in ikozaeder z vodo, dodekaeder pa naj bi predstavljal vesolje oziroma tisto, iz česar so sestavljena ozvezdja.

Platonska telesa so povezana tudi z zlatim številom. Če pogledamo poljubno oglišče ikozaedra in njemu sosednje ploskve, vidimo piramido, katere osnovna ploskev je petkotnik. Če izberemo poljubni nasprotni si stranici ikozaedra, ti pripadata pravokotniku, ki ima daljšo stranico na diagonali prej omenjenega petkotnika. Vemo že, da je diagonala petkotnika  $\varphi$ -kratnik stranice petkotnika, torej je pravokotnik zlat. Taki pravokotniki so trije in ležijo na med seboj pravokotnih ravninah (glej sliko 23). Od tu tudi hitro vidimo, da lahko postavimo oglišča ikozaedra na koordinate  $(0, \pm 1, \pm \varphi)$ ,  $(\pm 1, \pm \varphi, 0)$  in  $(\pm \varphi, 0, \pm 1)$ .

**Tabela 4:** Platonska telesa z osnovnimi lastnostmi.

ime	tetraeder	heksaeder (kocka)	oktaeder	dodekaeder	ikozaeder
osnovna ploskev	trikotnik	kvadrat	trikotnik	petkotnik	trikotnik
število ploskev	4	6	8	12	20
število stranic	6	12	12	30	30
število oglišč	4	8	6	20	12

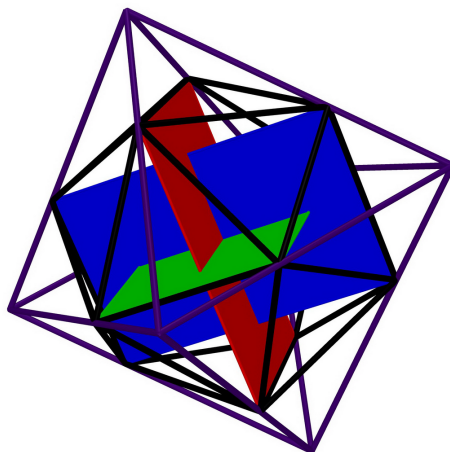


**Slika 23:** Ikozaeder z včrtanimi zlatimi pravokotniki.

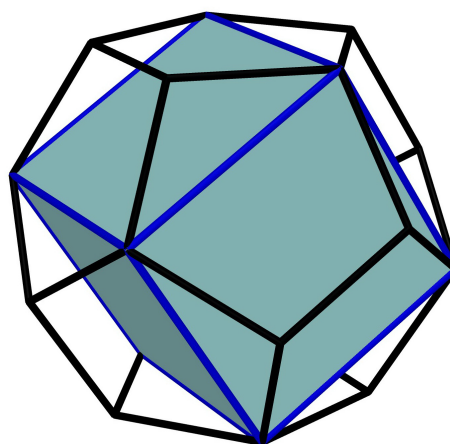
Iz izrekov o podobnosti sledi, da lahko zlat pravokotnik včrtamo kvadratu tako, da bodo njegova oglišča delila stranice kvadrata v razmerju  $1 : \varphi$ . Če včrtamo ikozaedrove tri zlate pravokotnike v kvadrate, ki jih dobimo z različnimi prerezi po sredini oktaedra, pravzaprav oktaedru včrtamo ikozaeder tako, da vsako oglišče ikozaedra deli stranico oktaedra v razmerju  $1 : \varphi$  (glej sliko 24). (Povzeto po [3].)

Dodekaedru lahko včrtamo kocko tako, da položimo stranice kocke na diagonale petkotnikov (glej sliko 25). Iz že prej omenjenih razlogov so stranice dodekaedra in kocke v razmerju  $1 : \varphi$ . (Povzeto po [13].)

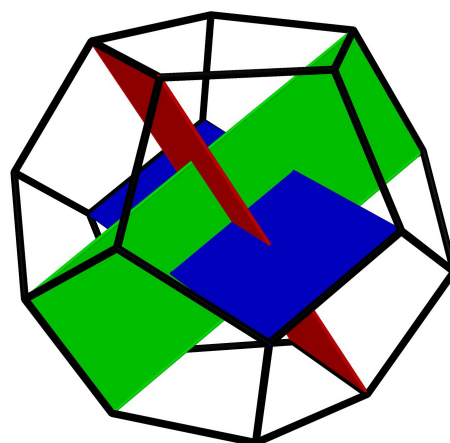
Podobno kot pri ikozaedru lahko tudi dodekaedru včrtamo tri pravokotnike, ki so med seboj pravokotni, njihove stranice pa so v razmerju  $1 : \varphi^2$  (glej sliko 26).



Slika 24: Ikozaedru očrtan oktaeder.



Slika 25: Dodekaeder z včrtano kocko.



Slika 26: Dodekaeder z včrtanimi pravokotniki.



## 6 Fibonaccijeva števila in zlati rez v umetnosti

Idej o prepletanju umetnosti in zlatega števila je v številni literaturi in predvsem na svetovnem spletu ogromno. Te so si včasih tudi nasprotujoče ali pa predstavljene iz povsem različnih zornih kotov. Kje se torej srečata zlato število in umetnost?

Najprej moramo ločiti dela, katerih avtorji so zavedno uporabili zlati rez ali Fibonaccijeva števila, od tistih, kjer se zlati rez pojavi naključno. Tu pa seveda naletimo na težave z merjenjem. Od vprašanja, kaj bomo merili, kot to predstavi Gardner v [5]:

*Če se lotimo merjenja tako zapletene strukture, kot je Keopsova piramida, hitro pridemo do velike količine dolžin, s katerimi se lahko poigramo. Z dovolj potrpežljivim žongliranjem, zagotovo dobimo veliko števil, ki se ujemajo s pomembnimi zgodovinskimi datumi ali števili, ki so prisotna v znanosti.*<sup>1</sup>

Pa vse do merskih napak. Če pri meritvah dovolimo napako  $\pm 1\%$ , se ta pri izračunu količnika podvoji. Torej lahko z majhno spremembo meritev pridemo za 2% bližje zlatemu številu. To lepo razložita tudi Markowsky [15] in Livio [14].

Iskanja zlatega števila se moramo torej lotiti z zrnom soli, da tega ne bomo našli v vsakem predmetu, ki nas obkroža.

### 6.1 Likovna umetnost

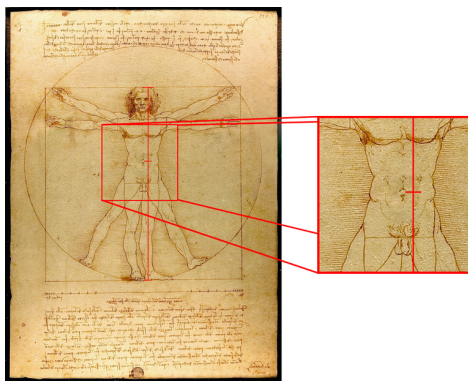
#### Leonardo da Vinci

Eno izmed prvih del, ki jih povezujejo z zlatim razmerjem, je Leonardova študija "Razmerja človeškega telesa po Vitruvijem" približno iz leta 1487. Popek naj bi delil višino človeka v zlatem razmerju. Če dobro pogledamo, so v Leonardovi študiji tri pike, kjer bi moral biti popek in zlati rez pade med spodnji dve piki, kot je prikazano na sliki 27.

S to študijo je tesno povezan tudi drugi del razprave *De Divina Proportione*, ki jo je objavil Luca Pacioli leta 1509. Prvi del razprave je posvečen predvsem lastnostim zlatega reza in študiji Platonskih teles. V petem poglavju namreč našteje razloge, zakaj naj se zlato razmerje imenuje *božansko razmerje*. V drugem delu pa razpravlja o razmerjih in uporabi teh v arhitekturi ter o strukturi človeškega telesa. V nasprotju s pogostimi trditvami Pacioli ne vztraja pri zlatem rezu kot edinem razmerju v umetnosti, ampak zagovarja Vitruvijev sistem razmerij, ki temelji na preprostih racionalnih razmerjih. (Povzeto po [14].)

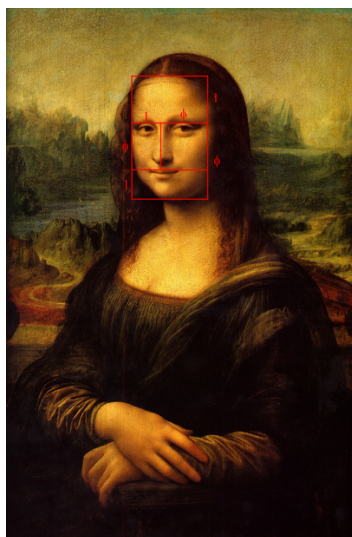
---

<sup>1</sup>"If you set about measuring a complicated structure like the Pyramid, you will quickly have on hand a great abundance of lengths to play with. If you have sufficient patience to juggle them about in various ways, you are certain to come out with many figures which coincide with important historical dates or figures in the sciences."



Slika 27: Zlati rez v Leonardovi študiji človeškega telesa.

Da Vincijevo najbolj znano delo - Mona Liza - je že samo predmet mnogih ugibanj. Glede na to, da je Leonardo da Vinci sodeloval z Luco Pacioliem, njegova dela povezujejo z zlatim rezom, kar pa seveda ni nujno. Na sliki 28 je prikazano, kako se razmerja Mona Lizinega obraza prilegajo zlatemu pravokotniku.



Slika 28: Mona Liza.

V več Leonardovih študijah se pojavljajo razmerja obraznih mer, a zlatega razmerja med njimi ni moč najti (glej sliko 29).

### Albrecht Dürer

Albrecht Dürer je v svojih potovanjih po Evropi spoznal Paciolijeva matematična dela in postal prepričan, da je matematika pomemben del umetnosti. Veliko se je ukvarjal z geometrijo, med drugim je konstruiral logaritmične spirale, petkotnik in opisoval Platonska telesa, ki so vsi povezani z zlatim številom. (Povzeto po [14].)



**Slika 29:** Leonardove študije obrazov.

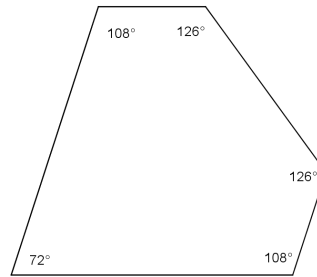


**Slika 30:** Dürerjeva Melanholijska.

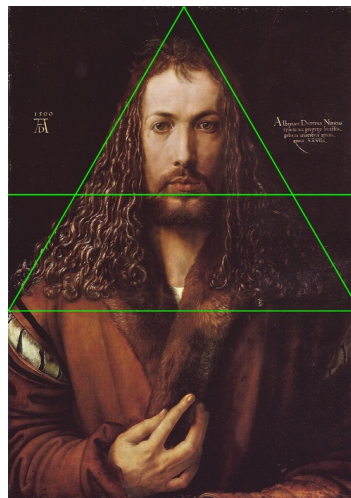
Največ prahu je dvigovala njegova grafika Melanholijska (glej sliko 30), v kateri je več matematičnih elementov. Magični kvadrat desno zgoraj, pri katerem je vsota v vseh vrsticah in stolpcih enaka 34 (po naključju je to Fibonaccijevo število) in na levi strani dve telesi, krogla in t.i. Dürerjevo telo. Dürerjevo telo je bilo predmet mnogih razprav in poizkusov rekonstrukcije. V literaturi se pojavljata dve razlagi. Največkrat je to kar kocka, ki smo ji prisekali dve nasprotni oglišči. Po Liviu [14] pa je to romboeder (enakorobi paralelepiped), ki je bil prisekan, tako da mu lahko očrtamo kroglo.

Tudi tu se pojavljata kota  $72^\circ$  in  $108^\circ$  (glej sliko 31), ki smo ju že srečali v zlatem trikotniku. To pa je najverjetneje spet srečno naključje.

V [17] je v povezavi z zlatim rezom omenjen še Dürerjev avtoportret, kjer naj bi bila njegova glava z lasmi v enakostraničnem trikotniku (glej sliko 32). Osnovnica trikotnika in višina brade naj bi delili sliko v zlatem razmerju vsaka v svoji smeri.



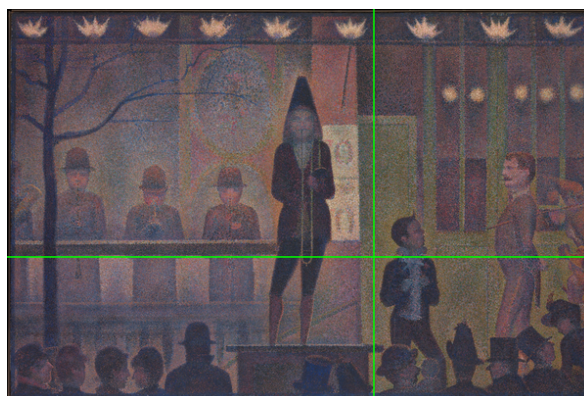
**Slika 31:** Stranica Dürerjevega telesa.



**Slika 32:** Dürerjev avtoportret.

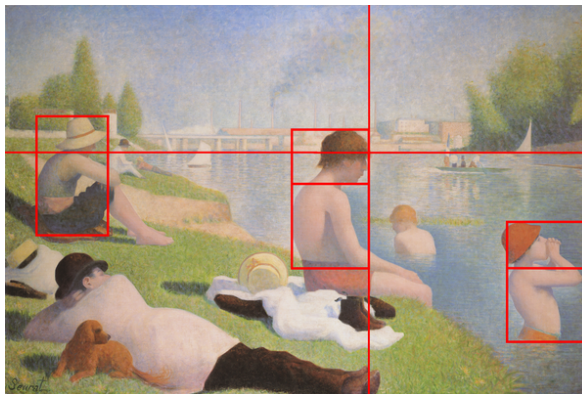
## Georges Seurat

Velikokrat je med uporabniki zlatega reza omenjen Georges Seurat, pa temu najverjetneje ni tako. Res se je ukvarjal z geometrijskimi lastnostmi svojih slik, a je bila zanj bolj pomembna izbira pravih barv.



**Slika 33:** La parade.

V njegovi *La parade* (glej sliko 33) res lahko najdemo razmerja blizu zlatega, bolj natančno  $\frac{8}{5}$ . Prav tako lahko z zlatimi pravokotniki opremimo *Une baignade à Asnières* (glej sliko 34). A to je ponovno žongliranje s podatki. (Povzeto po [14, 17].)



Slika 34: Une baignade à Asnières.

## Paul Sérusier

Prvi, ki naj bi se ukvarjal z zlatim rezom, je najverjetneje Paul Sérusier. Po Liviu [14] in Herz-Fischlerju [7] naj bi slišal za zlati rez na obisku pri nizozemskem slikarju Janu Verkadeju. Zlati rez je omenil v svoji knjigi *ABC de la peinture* (ABC slikarstva, 1921) v povezavi s Keopsovo piramido in grško umetnostjo. Poleg tega sta dokaza njegovega poznavanja zlatega reza le še formula za zlato število, ki jo je Sérusier zapisal na steno svojega doma v Bretaniji, ter petkotnik in pentagram, ki sta na njegovem grobu.

Maurice Denis je v Sérusierovi biografiji zapisal (povzeto po [7]):

*Način, kako uporablja merjenje kotov in zlati rez, mu služi le za nadzor in včasih za omilitev izumljenih oblik, kompozicije in izvirnosti risbe. V tistem trenutku, ko obsodi tankočutnost posameznika in hvali matematiko, se njegov temperament spontano odzove, njegova osebnost pa se uveljavi v slikah tega obdobja.*<sup>2</sup>

Za Sérusiera je bilo zlato število le filozofski ideal in ne matematična količina, ki bi jo uporabljal pri kompoziciji svojih slik.

<sup>2</sup> L'usage qu'il fait de la mesure des angles et de la divine proportion ne lui sert qu'à contrôler, et parfois à refroidir, ses inventions de formes, sa composition, l'originalité de son dessin. Au moment même où il condamne la sensibilité individuelle et vante la mathématique, son tempérament réagit spontanément, sa personnalité s'affirme dans les tableaux de cette époque.

## Kubisti

Nekaj zgodnjih kubistov, med njimi Jacques Villon, brata Marcel in Raymond Duchamp-Villon, Albert Gleizes in Francis Picabia so leta 1912 v Parizu organizirali razstavo z naslovom "Section d'or", a v delih zlati rez sploh ni bil uporabljen.

Vseeno pa so nekateri kubisti, npr. slikar Juan Gris in kipar Jacques Lipchitz, uporabljali zlati rez v kasnejših delih. Lipchitz je zapisal:

*V tistem obdobju so me kot ostale kubiste zelo zanimala teorije o razmerjih in poskušal sem jih uporabiti v skulpturah. Radovedno smo se spogledovali z idejo zlatega pravila ali zlatega reza, ki naj bi bil osnova za umetnost in arhitekturo stare Grčije.*<sup>3</sup>

Italijanski slikar Gino Severini je stremel k popolnosti in iskal zanj znanstveno razlago. Zato je v svojih skicah velikokrat uporabljal zlati rez.

Ruska kubistka Maria Voroběva je v svoji knjigi *Life with the Painters of La Ruche* zapisala, da so zlati rez uporabljali tudi Pablo Picasso, Diego Rivera in Juan Gris. (Povzeto po [14].)

## Jay Hambidge

Jay Hambidge, ameriški umetnik, je raziskoval simetrije v klasični in moderni umetnosti. Razdelil jih je na dva dela. "Statična simetrija" je temeljila na pravilnih večkotnikih (kvadratu, enakostraničnemu trikotniku) in naj bi predstavljala neživo umetnost. "Dinamična simetrija" pa je temeljila na pravokotnikih, ki so bili v razmerjih  $1 : \varphi$ ,  $1 : \sqrt{\varphi}$ ,  $1 : \varphi^2$ ,  $1 : \sigma_2^1$ ,  $1 : \sqrt{2}$ ,  $1 : \sqrt{3}$ ,  $1 : \sqrt{5}$ , itd. Iz takšnih pravokotnikov naj bi izhajale najbolj pestre in harmonične kombinacije, ki porodijo živahno in gibljivo umetnost. (Povzeto po [6] in [14].)

## Piet Mondrian

Uporabo zlatega reza pripisujejo tudi nizozemskemu slikarju Pietu Mondrianu. Veliko njegovih del je sestavljenih iz navpičnih in vodoravnih črt, vmesni pravokotniki oz. kvadrati pa so občasno pobarvani z živimi osnovnimi barvami. Po Liviu [14] je taka kompozicija vaba za iskalce zlatega reza. Kljub temu pa Yves-Alain Bois, avtor knjige o Mondrianu, kategorično zanika uporabo kakršnega koli sistema proporcev. Mondrian naj bi se celo posmehoval izračunom, povezanim z njegovimi deli.

---

<sup>3</sup>At the time, I was very interested in theories of mathematical proportions, like other cubists, and I tried to apply them to my sculptures. We all had a great curiosity for that idea of a golden rule or Golden Section, a system which was reputed to lay under the art and architecture of ancient Greece.

## Salvador Dalí

Salvador Dalí je v svoji *Zadnji večerji* iz leta 1955 posredno uporabil zlato število. Nad mizo namreč lebdi ogromen dodekaeder, ki v sebi skriva zlato število, kot že omenjeno v poglavju 5.6. Poleg tega so tudi dimenzije slike ( $267\text{cm} \times 166.7\text{cm}$ ) blizu zlatega razmerja (1.6017). (Povzeto po [14].)

## 6.2 Kiparstvo

Prvi kipi, kjer različni avtorji iščejo zlati rez, izhajajo že iz antike. Taka je na primer Miloška Venera. Vendar so tu razmerja tesno povezana z razmerji človeškega telesa. O položaju popka smo že govorili v razdelku o Leonardu da Vinciju. Ponovno se tudi srečamo z večjim številom različnih dolžin, ki jih lahko primerjamo in bržkone med njimi najdemo take, ki so v zlatem razmerju.

### Étienne Beöthy

Étienne Beöthy je v nekaj svojih delih zagotovo uporabil zlati rez, kar nakazujejo njegove študije in knjiga *La serie d'or*. Zlati rez je na primer prisoten v njegovih delih *Le baiser* (op. 22), *Danse cosaque* (op. 45) in *Essor II* (op. 77). Raziskoval pa je tudi razmerja v arhitekturi in industrijskem oblikovanju. (Povzeto po [1] in [17].)

### Mario Merz

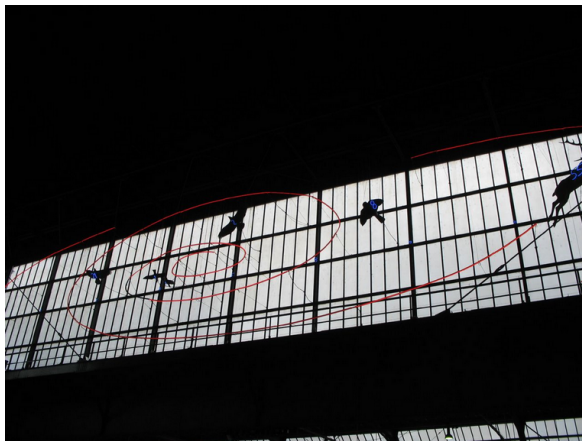
Italijanski umetnik Mario Merz je bil predstavnik gibanja Arte povera. Veliko njegovih skulptur je v obliki igluja (glej sliko 35), katerega ogrodje je iz cevi, katerih dolžine so v enakem razmerju kot Fibonaccijeva števila. Temu so potem dodani napisi iz neonskih luči in drugi materiali.



**Slika 35:** Merzova skulptura v obliki igluja v Torinu.



V svojih razstavah je večkrat uporabil Fibonaccijeva števila. Njegovo delo “Fibonacci Napoli” je serija desetih slik vedno več delavcev v menzi. Njihovo število je vedno Fibonaccijevo - od enega samega do skupine 55. Železniško postajo v Zurichu je okrašil s spiralami in Fibonaccijevimi števili (glej sliko 36), prav tako dimnika v Unni v Nemčiji in v Turku na Finskem (glej sliko 37). (Povzeto po [17].)



**Slika 36:** Merzova spirala s ptiči, ki nosijo Fibonaccijeva števila, na železniški postaji v Zurichu.



**Slika 37:** Dimnik v mestu Turku na Finskem, okrašen s Fibonaccijevimi števili.

## 6.3 Arhitektura

### Keopsova piramida

Začnimo pri Keopsovi piramidi (glej sliko 38). Preučevali so jo številni piramidologi in v njej iskali poleg zlatega števila še število  $\pi$ , preroške značilnosti njenih hodnikov in podobne “skrivnosti”. Največjo izmed zmot, na kateri sloni ideja o pojavu zlatega



števila, citira celo Gardner [5, str. 178]. Po Herodotu naj bi bila ploščina stranskih ploskev piramide enaka kvadratu njene višine.



Slika 38: Keopsova piramida.

Ta napačna interpretacija namreč implicira pojav zlatega števila. Naj bo  $a$  osnovni rob piramide,  $h_\delta$  stranska višina,  $h_p$  pa višina piramide. Zapišimo trditev v matematičnem jeziku:

$$\frac{ah_\delta}{2} = h_p^2.$$

Če uporabimo še Pitagorov izrek

$$h_\delta^2 = \frac{a^2}{4} + h_p^2,$$

dobimo zvezo

$$\frac{a}{2}h_\delta = h_\delta^2 - \frac{a^4}{4},$$

ki jo lahko delimo z  $\frac{a}{2}h_\delta$  in dobimo

$$1 = \frac{h_\delta}{\frac{a}{2}} - \frac{\frac{a}{2}}{h_\delta}.$$

Če zamenjamo  $\frac{h_\delta}{\frac{a}{2}}$  z  $x$ , to ni nič drugega kot enačba, ki jo že poznamo, z rešitvijo  $\varphi$ . Razmerje med stransko višino in polovico piramidine stranice naj bi bilo enako zlatemu številu. (Povzeto po [17].)

To izjavo, ki jo citira več različnih avtorjev, je podrobneje raziskal Fischler v [4]. Izkaže se, da je izvorna Herodotova izjava povsem drugačna:

*Piramido so gradili dvajset let. Je kvadratna, osemsto [grških] čevljev v vsako smer in enake višine.* <sup>4</sup>

Fischler še pove, da jo je prvi narobe interpretiral John Taylor v svojem delu *The Great Pyramid: Why Was It Built and Who Built It?* iz leta 1859, drugi pa so jo po njem povzeli.

<sup>4</sup>Izviren zapis je na voljo v [15, str. 7]

Po drugi strani pa lahko pogledamo meritve piramide, ki jih je opravil priznani britanski egiptolog W. M. F. Petrie, povzete po Posamentieru [17, str. 236]:

$$\frac{a}{2} \approx 114.95m$$

$$h_p \approx 146.30m$$

$$h_\delta \approx 186.01m$$

Če še enkrat preverimo razmerje  $\frac{h_\delta}{\frac{a}{2}}$  se to do tisočinke ujema z zlatim številom. To pa je najverjetneje le srečno naključje.

## Partenon

Drugi v vrsti je zagotovo Partenon. Tudi zanj trdijo, da se njegove mere tesno prilegajo zlatemu pravokotniku in da so celo njegovi elementi razporejeni v zlatem razmerju, kot je prikazano na sliki 39. (Povzeto po [17].)



Slika 39: Partenon.

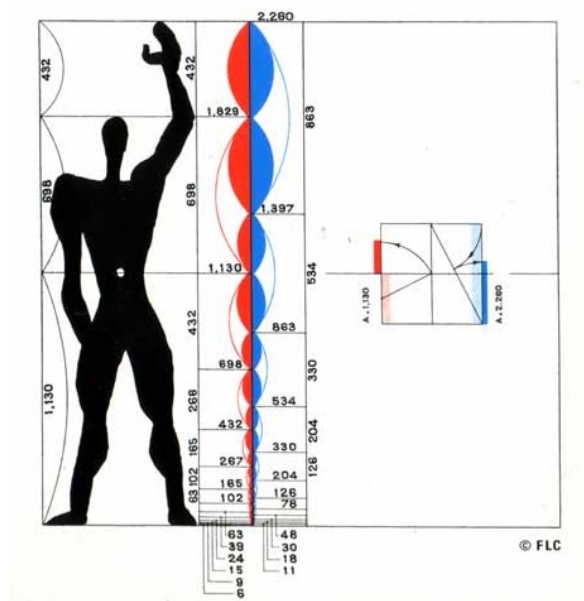
Res je višina timpanona s streho vred približno v zlatem razmerju z višino stebrov s trojnimi podstavki vred, a tu se zatakne. Kako naj “pravilno” postavimo zlati pravokotnik? Naj upoštevamo celotno višino od dna podstavka do rekonstruirane strehe? Na ta način je spodnji podstavek preširok. Če upoštevamo širino timpanona, iz pravokotnika pogleda še drugi podstavek. Če pa podstavek izpustimo, je Partenon “preširok” za cel steber.

Na podoben način ideje o uporabi zlatega števila izpodbija tudi Markowsky v [15]. In če pogledamo podatke o višini ( $69.5m$ ) in širini ( $30.9m$ ) Partenona, nam ti dajo razmerje  $\approx 2.25$ , kar je seveda daleč od števila  $\varphi$ .

## Le Corbusier

Švicarsko francoski arhitekt Le Corbusier je bil najprej proti uporabi zlatega reza v umetnosti, ker naj bi “zamenjal mysticizem občutljivosti”. Roger Herz-Fischler [7]

je analiziral njegova zgodnja dela in ugotovil, da ni pred letom 1927 nikoli uporabljal zlatega reza. Le Corbusierovo navdušenje nad zlatim rezom izvira po eni strani iz zanimanja za osnovne oblike in strukture za naravnimi pojavi, po drugi strani pa je cenil pitagorejsko stremenje k skladnosti, ki jo prinašajo razmerja med števili. Posledično je ustvaril sistem proporcev "Modulor". Ta temelji na razmerjih pri človeku in naj bi bil univerzalno uporaben v arhitekturi in industrijskem oblikovanju. (Povzeto po [14].)



Slika 40: Modulor.

Višina človeka je razdeljena v zlatem razmerju pri popku. Višina človeka z dvignjeno roko pa pri zapestju spuščene roke. Obe razmerji sta nato dodatno razdeljeni tako, da ustrezata pravilu Fibonaccijevega zaporedja - vsota prejšnjih dveh števil da naslednje. Tako dobimo dve zaporedji, rdeče:

6, 9, 15, 24, 39, 63, 102, 165, 267, 432, 698, 1130, 1829

in modro:

11, 18, 30, 48, 78, 126, 204, 330, 534, 863, 1397, 2260,

ki sta približno trikratnik in šestkratnik Fibonaccijevega zaporedja (Posamentier, [17]).

Na teh razmerjih naj bi temeljili stanovanjski bloki v Marseille-u in Rezé-ju, tovarna Claude et Duval v Franciji, več stavb v mestu Čandigarh v Indiji, Villa La Roche in Villa Stein v Parizu, njegova počitniška hišica na Azurni obali itd.

## 6.4 Glasba

Nekaj povezav med Fibonaccijevimi števili in glasbo je pogosto omenjenih. Od najbolj prepostega pogleda na klavirske tipke, ki razkriva ponavljanje vzorca vsakih

osem tipk in črne tipke razdeljene v skupine po dve in tri do bolj zapletene konstrukcije Stradivarijeve violine.

Glede na to, da klaviatura, kot jo danes poznamo, izhaja iz petnajstega stoletja in da so Fibonaccijeva števila raziskovali bistveno kasneje, je to srečno naključje. Poleg tega pa je običajna lestvica iz osmih tonov dobljena tako, da se prva nota ponovi čez eno oktavo, torej se slika na klaviaturi ponavlja pravzaprav s periodo dolžine sedem.

Stradivarijeva godala pa naj bi bila načrtovana s pomočjo zlatega reza. King [11, 12] razlaga, da je položaj f-odprtin, točneje zgornjega in spodnjega "očesa" določen z zlatim rezom. Nekaj nejasnosti je le v različnih meritvah pri večjih oz. manjših instrumentih.

### Wolfgang Amadeus Mozart

Za Mozarta je znano, da so ga poleg glasbe zanimala tudi števila in da je pri skladanju stremel k uravnoteženosti svojih del. Ali to pomeni, da je uporabljal zlato število? Mozartove sonate za klavir so sestavljene iz dveh glavnih delov in kot take primerne za raziskovanje razmerja med deloma. Posamentier [17] predstavi dolžine delov in pogleda razmerje prvega dela napram celotni dolžini sonate. Na ta način najde šest sonat, ki ustrezajo zlatemu razmerju, in še osem takih, ki so mu blizu. Po drugi strani pa Livio [14] citira raziskavo Johna F. Putza, ki trdi nasprotno in celo dokaže, da je razmerje, ki ga je uporabil Posamentier vedno bližje številu  $\frac{1}{\varphi}$ :

$$\left| \frac{b}{a+b} - \frac{1}{\varphi} \right| \leq \left| \frac{a}{b} - \frac{1}{\varphi} \right| \text{ za vsak } 0 \leq a \leq b.$$

Torej ni trdnih dokazov za uporabo zlatega razmerja v Mozartovih sonatah.

### Béla Bartók

Bartókova uporaba zlatega razmerja je nejasna. Livio [14] citira več avtorjev, ki nimajo enakega mnenja. Po eni strani je v Bartókovi *Glasbi za godala, tolkala in čelesto* prvi del sestavljen iz 89 taktov, ki se razdelijo na 55 in 34 taktov in nadalje na 34 in 21 taktov ter 13 in 21 taktov, kar so vse Fibonaccijeva števila. Delitve so razporejene glede na vstop ali izstop posameznih instrumentov. Podobno lahko Fibonaccijeva števila najdemo tudi v razvoju teme v *Sonati za dva klavirja in tolkala*. Po drugi strani pa ni nikjer dokazov, da bi Bartók zavestno uporabljal Fibonaccijeva števila. Tudi sam je trdil, da naj njegova glasba govori zase.

### Claude Debussy

Debussy se je ukvarjal z barvo zvokov, zato je morda čudno, da bi se pri skladanju zatekal k uporabi števil. To namreč trdi Roy Howat [10]. V njegovih delih *Reflets dans l'eau*, *La mer* in drugih se na podoben način kot pri Bartóku teme zaključujejo tako,

da delitve po taktih dajo zlato razmerje. Howat priznava, da v Debussyjevih rokopisih ni dokazov o računanju, kar se tiče strukture, podaja pa kot dokaz Debussyjevo pismo, kjer priloženim popravkom njegovih *Jardins sous la pluie* dodaja, da manjka takt, ki “je nujen zaradi števila, zlatega števila”<sup>5</sup>.

## 6.5 Zlati rez kot estetsko merilo?

Trditev o tem, da uporaba zlatega reza privede do očem najprijetnejših rezultatov, je v najrazličnejši literaturi veliko. Ali je v tem tudi kaj resnice?

Oba, Posamentier [17] in Livio [14], povzemata raziskavo Gustava Fechnerja, ki je osebam pokazal deset pravokotnikov različnih razmerij (od 1 : 1 do 2 : 5) in jih vprašal, kateri jim je najbolj všeč in kateri najmanj. Rezultati so prikazani v tabeli 5.

**Tabela 5:** Rezultati Fechnerjeve raziskave.

Razmerje med stranicama	Odstotek odgovorov za najlepši pravokotnik	Odstotek odgovorov za najgrši pravokotnik
1 : 1 = 1.00000	3.0	27.8
5 : 6 = 0.83333	0.2	19.7
4 : 5 = 0.80000	2.0	9.4
3 : 4 = 0.75000	2.5	2.5
20 : 29 = 0.68966	7.7	1.2
2 : 3 = 0.66667	20.6	0.4
21 : 34 = 0.61765	35.0	0.0
13 : 23 = 0.56522	20.0	0.8
1 : 2 = 0.50000	7.5	2.5
2 : 5 = 0.40000	1.5	35.7

Rezultati so zanimivi, saj je kot najlepši največkrat izbran pravokotnik z razmerjem stranic 21 : 34, kar je najbližje zlatemu razmerju in hkrati ni nikoli izbran za najgršega. Vseeno pa Fechnerju očitajo pristranskost zaradi njegovega navdušenja nad zlatim razmerjem in dejstva, da ni objavil podobne raziskave z elipsami, ki pa ni dala tako vzpodbudnih rezultatov.

Livio [14] našteje še nekaj eksperimentov z različnimi metodologijami in seveda različnimi rezultati. Zato ni mogoče z gotovostjo trditi, da so pravokotniki v zlatem razmerju lepši oz. očesu prijetnejši od ostalih.

<sup>5</sup>elle est nécessaire, quant au nombre; le divin nombre

## 7 Zaključek

Fibonaccijevo zaporedje je med bolj znanimi rekurzivno definiranimi zaporedji. Manj znane pa so vse njegove lastnosti, posplošitve in uporabe. Obilica zvez med Fibonaccijevimi števili ima tudi preprosto geometrijsko ali kombinatorično razlago.

Fibonaccijeva števila in še bolj zlati rez se v geometriji pojavljajo na različne načine. Še bolj skrivnostno pa je njihovo pojavljanje v umetnosti. Najdemo jih pri kipih iz antike, Keopsovi piramidi, Mona Lizi, Bartókovi glasbi in še kje. So se tam znašli po naključju ali namenoma?

Redki so primeri umetnikov, za katere obstajajo dokazi o uporabi zlatega reza. Opaziti je, da se to zgodi predvsem pri modernejših umetnikih. Nekateri izmed njih Fibonaccijeva števila ali zlati rez uporabljajo kot osnovo ustvarjanja. Kljub lepemu ujemanju števil pa to ne drži za starejša dela.

Poraja se tudi vprašanje estetskosti zlatega reza. Ta je v literaturi o umetnosti predstavljen kot ideal lepote. Kljub temu pa ni raziskave, ki bi to z gotovostjo potrdila.

Razen redkih izjem umetniki raje vihtijo čopiče in dleta kot šestilo in ravnilo. O lepoti in inovativnosti njihovih del ni nobenega dvoma. Zlato število pa naj iščejo tisti, ki raje gledajo številke.

## Literatura

- [1] A. Anceau, <http://www.istvanbeothy.fr>, dostopno na spletu 12. 11. 2012.
- [2] A. T. Benjamin in J. J. Quinn, The Fibonacci numbers - exposed more discretely, *Math. Mag.* **76** (2003), 182 – 192.
- [3] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, New York, 1969.
- [4] R. Fischler, What did Herodotus really say? or how to build (a theory of) the Great Pyramid, *Environ. Plann. B* **6** (1979), 89 – 93.
- [5] M. Gardner, *Fads and Fallacies in the name of science*, Dover Publications, New York, 1957.
- [6] M. Ghyka, *The Geometry of Art and Life*, Dover Publications, New York, 1977.
- [7] R. Herz-Fischler, Le nombre d'or en France de 1896 à 1927, *Rev. art* **118** (1997), 9 – 16.
- [8] A. F. Horadam, Basic properties of a certain generalized sequence of numbers, *Fibonacci Quart.* **3** (1965), 161 – 176.
- [9] A. F. Horadam, Special properties of the sequence  $W_n(a, b; p, q)$ , *Fibonacci Quart.* **5** (1967), 424 – 434.
- [10] R. Howat, *Debussy in Proportion*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [11] A. T. King, How Stradivari positioned the F-holes, *Strad*, January 2005, [http://www.fiddleheadstrings.com/microsoft\\_word\\_\\_\\_for\\_the\\_strad\\_part\\_2\\_8\\_sept.pdf](http://www.fiddleheadstrings.com/microsoft_word___for_the_strad_part_2_8_sept.pdf), dostopno na spletu 20. 11. 2012.
- [12] A. T. King, The Cremonese system for positioning the F-holes, *Strad*, December 2004, [http://www.fiddleheadstrings.com/microsoft\\_word\\_\\_\\_for\\_the\\_strad\\_part\\_1\\_8\\_sept.pdf](http://www.fiddleheadstrings.com/microsoft_word___for_the_strad_part_1_8_sept.pdf), dostopno na spletu 20. 11. 2012.
- [13] R. Knott, *Fibonacci numbers and the golden section*, <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/>, dostopno na spletu 15. 9. 2012.
- [14] M. Livio, *The golden ratio: the story of phi, the world's most astonishing number*, Broadway Books, New York, 2002.
- [15] G. Markowsky, Misconceptions about the golden ratio, *Coll. Math. J.* **23** (1992), 2 – 19.

- [16] A. R. Meyer, R. Rubinfeld, Generating functions, *MIT Course notes*, 2005, <http://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-042j-mathematics-for-computer-science-fall-2005/readings/ln11.pdf>, dostopno na spletu 12. 1. 2012.
- [17] A. S. Posamentier, I. Lehmann, *The fabulous Fibonacci numbers*, Prometheus Books, New York, 2007.
- [18] V. W. de Spinadel, The metallic means family and art, *Aplimat - J. Appl. Math.* **3** (2010), 53 – 64.
- [19] N. N. Vorobiev, *Fibonacci numbers*, Birkhäuser Verlag, Berlin, 2002.
- [20] M. J. Whinihan, Fibonacci nim, *Fibonacci Quart.* **1** (1963), 9 – 13.