

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Zaključna naloga
Racionalne Bézierove krivulje
(Rational Bézier curves)

Ime in priimek: Vesna Volaš
Študijski program: Matematika
Mentor: doc. dr. Vito Vitrih

Koper, april 2013

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Vesna VOLAŠ

Naslov zaključne naloge: Racionalne Bézierove krivulje

Kraj: Koper

Leto: 2013

Število listov: 50

Število slik: 12

Število prilog: 4

Število strani prilog: 8

Število referenc: 12

Mentor: doc. dr. Vito Vitrih

UDK:

Ključne besede: racionalne Bézierove krivulje, polinomske Bézierove krivulje, de Casteljaujev algoritem, Octave

Math. Subj. Class. (2010): 65D17, 65D18, 65D07

Izvleček:

Zaključna naloga z naslovom »Racionalne Bézierove krivulje« obravnava objekte, ki so zelo pomembni na področju računalniško podprtega geometrijskega načrtovanja (angl. Computer Aided Geometric Design oz. CAGD). Sprva je naloga posvečena polinomskim Bézierovim krivuljam, kjer je opisan de Casteljaujev algoritem, izpeljana je Bernsteinova oblika polinomskih Bézierovih krivulj ter dokazane številne lepe lastnosti teh krivulj. V nadaljevanju je pozornost preusmerjena na racionalne Bézierove krivulje. Pokazano je, da lahko vsako stožnico eksaktno predstavimo z racionalno Bézierovo krivuljo stopnje dva, pri čemer si pomagamo s konceptom baricentričnih koordinat v ravnini. Nato so obravnavane splošne racionalne Bézierove krivulje (torej poljubnih stopenj) in znova izpeljan de Casteljaujev algoritem. Izpeljano je, katere lepe lastnosti, ki veljajo za polinomske krivulje, ter pod kakšnimi pogoji veljajo tudi za racionalne Bézierove krivulje. Večina snovi je povzeta po [1]. Naloga je obogatena s številnimi primeri, skonstruiranimi s programskim jezikom Octave.

Key words documentation

Name and SURNAME: Vesna VOLAŠ

Title of final project paper: Rational Bézier curves

Place: Koper

Year: 2013

Number of pages: 50

Number of figures: 12

Number of appendices: 4

Number of appendix pages: 8

Number of references:

12

Mentor: Assist. Prof. Vito Vitrih

UDC:

Keywords: rational Bézier curves, polynomial Bézier curves, de Casteljau algorithm, Octave

Math. Subj. Class. (2010): 65D17, 65D18, 65D07

Abstract:

This thesis with the title "Rational Bézier curves" describes objects, which are very important in the field of Computer Aided Geometric Design (CAGD). Initially, the thesis is devoted to polynomial Bézier curves, where the de Casteljau algorithm is described, the Bernstein form of Bézier curves is derived and many nice properties of these curves are proven. In the following, attention is focused to the rational Bézier curves. Firstly, we show, with the help of the concept of barycentric plane coordinates, that every conic can be described as a rational Bézier curve of degree two. Then we consider general rational Bézier curves, for which we derive the de Casteljau algorithm and show some nice properties which are inherited from polynomial Bézier curves. The basic literature used is [1]. The thesis is enriched with numerous examples, constructed by Octave programming language.

Zahvala

Rada bi se zahvalila svojemu mentorju doc. dr. Vitu Vitrihu za strokovno svetovanje, potrpežljivost in spodbudo pri nastajanju zaključne naloge. Iskrena hvala tudi družini za vso podporo pri študiju, prijateljem, ki so podpirali mojo kreativnost ter vsem ostalim, ki ste mi vsa ta leta stali ob strani.

Kazalo

Seznam slik	VI
Seznam kratic	VII
1 Uvod	1
2 Polinomske Bézierove krivulje	3
2.1 De Casteljauev algoritem	4
2.2 Bernsteinova oblika polinomske Bézierove krivulje	5
2.3 Lastnosti polinomskih Bézierovih krivulj	8
2.4 Lastnosti odvajanja	11
3 Racionalne Bézierove krivulje	14
3.1 Stožnice	14
3.1.1 Baricentrične koordinate	15
3.1.2 Stožnice kot kvadratne racionalne Bézierove krivulje	16
3.1.3 De Casteljauev algoritem in lastnosti odvajanja	18
3.1.4 Implicitna oblika	19
3.1.5 Uporabni problemi	20
3.1.6 Klasifikacija	23
3.2 Splošne racionalne Bézierove krivulje	25
3.2.1 Definicija in opis	25
3.2.2 De Casteljauev algoritem	26
3.2.3 Lastnosti odvajanja	28
3.2.4 Reparametrizacija	30
4 Zaključek	31
Literatura	32
Priloge	34
Priloga A	36

Priloga B	38
Priloga C	40
Priloga D	41

Seznam slik

2.1	Primer parametrične krivulje.	3
2.2	Bézierova krivulja skupaj s kontrolnim poligonom iz primera 2.4, skonstruirana z de Casteljauvim algoritmom. Na krivulji je označena tudi točka pri parametru $t = \frac{1}{2}$	6
2.3	Primer konveksne (levo) in nekonveksne (desno) množice.	9
2.4	Primer konveksne ovojnice točk $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ in \mathbf{b}_3	10
3.1	Umestitev racionalnih in polinomskih Bézierovih krivulj.	14
3.2	Trikotnik predstavlja koordinatni sistem v ravnini. Če so vse tri baricentrične koordinate u, v, w določenih točk pozitivne, potem te točke ležijo znotraj trikotnika. Če sta dve koordinati negativni in ena pozitivna, potem takšne točke ležijo v zelenem delu slike. Točke v rdečem delu pa dobimo, če je ena kordinata negativna in dve pozitivni. Opomnimo, da vse koordinate ne morejo biti negativne, saj se morajo sešteti v ena.	17
3.3	Skonstruirali smo odsek stožnice iz primera (a).	21
3.4	Skonstruirali smo odsek stožnice iz primera (b).	22
3.5	Celotna krožnica, dobljena kot zlepek treh enakih krožnih lokov.	24
3.6	Klasifikacija stožnic.	24
3.7	Racionalne Bézierove krivulje pri različnih parametrih w_1 : če je $w_1 = 1$, ostane Bézierova krivulja (modra barva) nespremenjena v okolici točke \mathbf{b}_1 . Če pa je $w_1 = 2$, se krivulja približa točki \mathbf{b}_1 (rdeča barva), če pa je $w_1 = \frac{1}{2}$, se krivulja oddalji od točke \mathbf{b}_1 (zeleno barva).	27
3.8	Racionalna Bézierova krivulja iz primera 3.12.	28

Seznam kratic

t.i. tako imenovani

CAD Computer Aided Design

CAGD Computer Aided Geometric Design

1 Uvod

Z razvojem tehnologije in računalnikov se je v poznih petdesetih letih dvajsetega stoletja v Franciji začelo oblikovanje s pomočjo krivulj. Največji razcvet se je zgodil v avtomobilski in letalski panogi. Francoski matematik Paul de Casteljau, ki je bil zaposlen v tovarni Citroën, je leta 1958 razvil metodo za načrtovanje parametričnih krivulj, baziranih na lastnostih Bernsteinovih polinomov. V Citroënu niso dovolili objavljajanja tehničnih novosti, zato so bile raziskave de Casteljaua le poslovna skrivnost. Njegovo delo je bilo objavljeno šele leta 1978. Istočasno je v znanem avtomobilskem podjetju Renault v Franciji delal ambiciozen matematik Pierre Bézier, katerega delo je potekalo neodvisno od dela de Casteljaua. Zaradi svobodomiselnosti, ki jo je premoglo podjetje Renault, je bilo njegovo delo hitreje objavljeno, zato te krivulje in ploskve nosijo njegovo ime.

Oblikovanje s parametričnimi krivuljami in ploskvami kot posebna metoda oblikovanja s pomočjo računalnika (CAD ali Computer Aided Design) se je začelo razvijati v šestdesetih letih prejšnjega stoletja. Leta 1974 so ta pristop poimenovali računalniško podprto geometrijsko načrtovanje (CAGD ali Computer Aided Geometric Design). Glavna uporabna lastnost Bézierovih krivulj je ta, da je za njihov opis dovolj podati le nekaj tako imenovanih kontrolnih točk, ki krivuljo enolično določajo. Ta lastnost tudi omogoča, da lahko enostavno in nazorno spreminjamo obliko krivulje ter implicira številne uporabne lastnosti, ki so pomembne pri računalniški predstavitvi. Za razliko od polinomskih so racionalne Bézierove krivulje določene še z nekaj dodatnimi parametri, t.i. utežmi, ki omogočajo še boljše in natančnejše oblikovanje.

V enaindvajsetem stoletju se Bézierove krivulje uporabljajo za številne namene v industrijskem oblikovanju (dizajniranje avtomobilov, ladij, letal), vodenje robotov, pisanje črk (PostScript) in tudi za zabavo (animirani filmi, risanke ...).

Nadaljevanje zaključne projektne naloge je zgrajeno iz dveh večjih poglavij:

- V drugem poglavju bomo obravnavali polinomske Bézierove krivulje: spoznali bomo de Casteljauov algoritem, Bernsteinovo obliko Bézierovih krivulj, opisali bomo nekatere pomembne lastnosti teh krivulj ter si pogledali lastnosti odvajanja.
- V tretjem poglavju bomo spoznali racionalne Bézierove krivulje. To poglavje je skonstruirano iz dveh podpoglavij, in sicer:

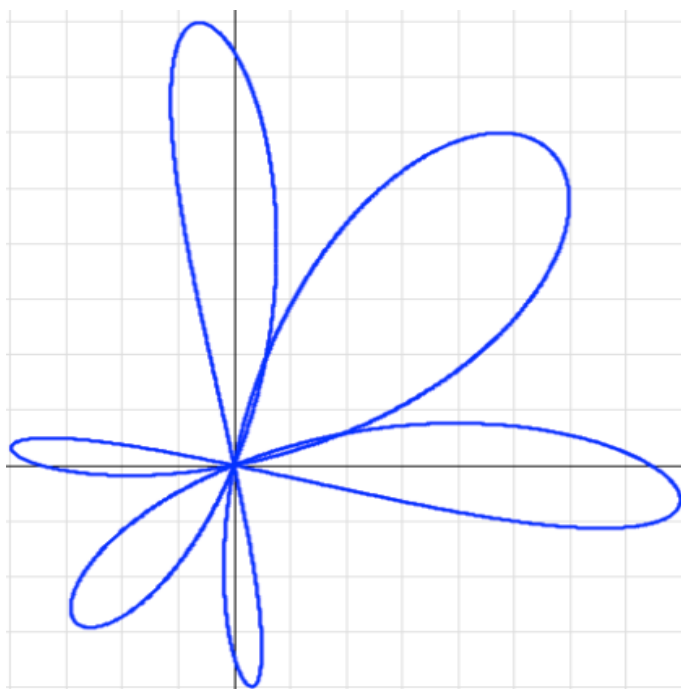
- v prvem se bomo osredotočili na stožnice, kjer bomo podrobneje opisali baricentrične koordinate, stožnice kot kvadratne racionalne Bézierove krivulje, de Casteljauev algoritem, lastnosti odvajanja, spoznali implicitno obliko ter si pogledali dva uporabna problema in klasifikacijo,
- v drugem pa bomo definirali in opisali splošne racionalne Bézierove krivulje, pozornost bomo zopet namenili de Casteljauevemu algoritmu, spoznali bomo lastnosti odvajanja ter posebno raparametrizacijo.

Zaključna naloga vsebuje tudi štiri priloge, v katerih so navedene programske kode, s katerimi smo implementirali de Casteljauev algoritem ter pristop preko Bernsteinovih polinomov za polinomske in racionalne Bézierove krivulje. Kode so napisane s programskim jezikom Octave, ki je dostopen na spletni strani <http://www.gnu.org/software/octave/>.

2 Polinomske Bézierove krivulje

Polinomske Bézierove krivulje so poseben primer parametričnih krivulj, ki so zelo pomembne v CAGD.

Definicija 2.1. Preslikavi $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t)) : I \mapsto \mathbb{R}^3, I \subseteq \mathbb{R}$, rečemo parametrizacija krivulje $p(I)$. Sliki te preslikave rečemo **parametrična krivulja**, interval I pa imenujemo domena parametra.



Slika 2.1: Primer parametrične krivulje.

Izraz polinomska Bézierova krivulja pomeni zgolj to, da so komponente krivulje namesto v monomski zapisane v posebni, t.i. Bernsteinovi, bazi. Torej to ni le nek podrazred polinomskih parametričnih krivulj, ampak so to dejansko vse polinomske parametrične krivulje.

V nadaljevanju bomo potrebovali koncept prostorske linearne interpolacije pri definiciji Bézierovih krivulj, zato jo dajmo na tem mestu definirati.

Definicija 2.2. Naj bosta \mathbf{a}, \mathbf{b} točki v \mathbb{R}^3 . Množico točk $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, ki zadošča

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}, \quad t \in \mathbb{R},$$

imenujemo premica skozi točki \mathbf{a} in \mathbf{b} . Velja še:

- pri $t = 0$ dobimo točko $\mathbf{x} = \mathbf{a}$,
- pri $t = 1$ dobimo točko $\mathbf{x} = \mathbf{b}$,
- če $0 < t < 1$, dobimo točko $\mathbf{x}(t)$, ki leži na daljici med \mathbf{a} in \mathbf{b} ,
- če $t \notin [0, 1]$, dobimo točko $\mathbf{x}(t)$, ki leži zunaj daljice med \mathbf{a} in \mathbf{b} , ampak na premici skozi točki \mathbf{a} in \mathbf{b} .

Definicija 2.3. Prostorska linearna interpolacija je afina preslikava, ki preslika realno premico v premico skozi dani točki v tridimenzionalnem realnem prostoru.

2.1 De Casteljaujev algoritem

To je eden izmed dveh načinov, kako lahko skonstruiramo Bézierovo krivuljo. Ta algoritem je zelo stabilen in se zaradi tega tudi uporablja v praksi.

De Casteljaujev algoritem:

Podane imamo t.i. kontrolne točke $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^3$, ki določajo Bézierovo krivuljo \mathbf{b}^n in parameter $t \in \mathbb{R}$. Kontrolne točke tvorijo t.i. kontrolni poligon krivulje \mathbf{b}^n . Nato izračunamo točke

$$\mathbf{b}_i^r(t) := (1 - t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t), \quad i = 0, 1, \dots, n - r, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

kjer smo definirali $\mathbf{b}_i^0(t) := \mathbf{b}_i$. Pri danem parametru t nam $\mathbf{b}_0^n(t)$ predstavlja točko $\mathbf{b}^n(t)$ na Bézierovi krivulji \mathbf{b}^n . Vse vmesne točke v enačbi (2.1) lahko zapišemo v trikotno shemo, ki ji rečemo **de Casteljaujeva shema**:

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{b}_0^0 & = & \mathbf{b}_0 & \\
 & & & \\
 \mathbf{b}_1^0 & = & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1(t) \\
 & & & \ddots \\
 \mathbf{b}_2^0 & = & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1(t) \\
 & & \vdots & \vdots \quad \ddots \\
 & & & & \mathbf{b}_0^{n-1}(t) \\
 \mathbf{b}_n^0 & = & \mathbf{b}_n & \mathbf{b}_{n-1}^1(t) & \mathbf{b}_1^{n-1}(t) & \mathbf{b}_0^n(t)
 \end{array}$$

De Casteljauovo shemo torej sestavimo tako, da v prvi stolpec zapišemo vse kontrolne točke, v drugi stolpec vnesemo točke $\mathbf{b}_i^1(t)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, v tretji stolpec točke za $\mathbf{b}_i^2(t)$, $i = 0, 1, \dots, n-2$, itd. V zadnjem stolpcu dobimo točko $\mathbf{b}_0^n(t)$, ki, kot rečeno, predstavlja točko na krivulji \mathbf{b}^n pri parametru t . Ko de Casteljauov algoritem implementiramo, je dovolj že uporaba enega samega stolpca velikosti $n+1$. Geometrijsko gledano je de Casteljauov algoritem le ponavljanje linearnih interpolacij.

Primer 2.4. Izračunajmo točko na (kubični) Bézierovi krivulji pri parametru $t = 1/2$. Kontrolne točke Bézierove krivulje \mathbf{b}^3 naj bodo $\mathbf{b}_0 = (4, 0, 2)^T$, $\mathbf{b}_1 = (0, 2, 0)^T$, $\mathbf{b}_2 = (6, 0, 0)^T$ in $\mathbf{b}_3 = (2, 0, 0)^T$. De Casteljauova shema pri tem parametru je oblike

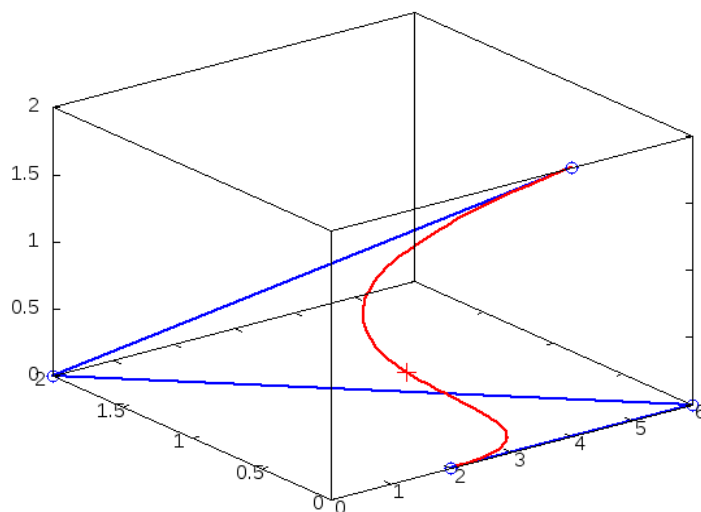
$$\begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} & & & \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & & \\ \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} & \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 0.75 \\ 0.25 \end{bmatrix} \end{array} .$$

2.2 Bernsteinova oblika polinomske Bézierove krivulje

Bernsteinova oblika polinomske Bézierove krivulje je alternativni način, kako definirati Bézierove krivulje. Ta pristop ima prednost v tem, ker nam da formulo za Bézierovo krivuljo v zaključeni obliki.

Definicija 2.5. Polinome

$$B_i^n(t) := \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad t \in [0, 1],$$



Slika 2.2: Bézierova krivulja skupaj s kontrolnim poligonom iz primera 2.4, skonstruirana z de Casteljauvim algoritmom. Na krivulji je označena tudi točka pri parametru $t = \frac{1}{2}$.

kjer je

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!}, & 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases}$$

imenujemo Bernsteinovi polinomi.

Bernsteinovi polinomi imajo številne lepe lastnosti. Navedimo le nekaj izmed teh.

Izrek 2.6. *Bernsteinovi polinomi zadoščajo naslednji rekurzivni zvezi:*

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t),$$

pri čemer je

$$B_0^n(t) \equiv 1, \quad B_j^n(t) \equiv 0, \quad j \notin \{0, 1, \dots, n\}.$$

Dokaz. Uporabimo lastnost binomskega simbola:

$$\begin{aligned} B_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t). \end{aligned}$$

□

Izrek 2.7. *Bernsteinovi polinomi tvorijo particijo enote:*

$$\sum_{j=0}^n B_j^n(t) \equiv 1. \quad (2.2)$$

Dokaz. Formulo (2.2) dokažemo s pomočjo binomskega izreka:

$$1 = 1^n = (t + (1 - t))^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^j (1 - t)^{n-j} = \sum_{j=0}^n B_j^n(t).$$

□

Opazimo, da so Bernsteinovi polinomi B_i^n nenegativni na intervalu $[0, 1]$.

Izrek 2.8. *Za Bernsteinove polinome velja simetrija na intervalu $[0, 1]$:*

$$B_j^n(t) = B_{n-j}^n(1 - t).$$

Dokaz.

$$B_j^n(t) = \binom{n}{j} t^j (1 - t)^{n-j} = \binom{n}{n-j} (1 - t)^{n-j} t^{n-(n-j)} = B_{n-j}^n(1 - t).$$

□

Izrek 2.9. *Naj bodo $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3, i = 0, 1, \dots, n$, kontrolne točke Bézierove krivulje \mathbf{b}^n . Potem velja*

$$\mathbf{b}^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t).$$

Dokaz. Dovolj je pokazati, da se elementi k -tega stolpca v de Casteljauovi shemi izražajo kot

$$\mathbf{b}_j^k(t) = \sum_{\ell=j}^{j+k} \mathbf{b}_\ell B_{\ell-j}^k(t), \quad j = 0, 1, \dots, n - k. \quad (2.3)$$

Če to dokažemo, potem to velja za vse stolpce v de Casteljauovi shemi, torej tudi za n -ti stolpec. Vstavimo v enačbo (2.3) $k = n$ in $j = 0$ in dobimo

$$\mathbf{b}^n = \mathbf{b}_0^n(t) = \sum_{\ell=0}^n \mathbf{b}_\ell B_\ell^n(t).$$

Torej, dokažimo formulo (2.3). Uporabimo indukcijo po k . Naj bo najprej $k = 0$. Dobimo

$$\mathbf{b}_j^0(t) = \sum_{\ell=j}^j \mathbf{b}_\ell B_{\ell-j}^0(t) = \mathbf{b}_j B_0^0(t) = \mathbf{b}_j.$$

Pošljimo sedaj $k \rightarrow k + 1$ in dokažimo, da velja

$$\mathbf{b}_j^{k+1}(t) = \sum_{\ell=j}^{j+k+1} \mathbf{b}_\ell B_{\ell-j}^{k+1}(t).$$

Upoštevajmo lastnosti Bernsteinovih polinomov in dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_j^{k+1}(t) &= (1-t)\mathbf{b}_j^k(t) + t\mathbf{b}_{j+1}^k(t) \\ &= (1-t) \sum_{\ell=j}^{j+k} \mathbf{b}_\ell B_{\ell-j}^k(t) + t \sum_{\ell=j+1}^{j+1+k} \mathbf{b}_\ell B_{\ell-j-1}^k(t) \\ &= (1-t)\mathbf{b}_j B_0^k(t) + (1-t) \sum_{\ell=j+1}^{j+k} \mathbf{b}_\ell B_{\ell-j}^k(t) + t \sum_{\ell=j+1}^{j+k} \mathbf{b}_\ell B_{\ell-j-1}^k(t) \\ &\quad + t\mathbf{b}_{j+1+k} B_k^k(t) = \sum_{\ell=j+1}^{j+k} \mathbf{b}_\ell B_{\ell-j}^{k+1}(t) + \mathbf{b}_j B_0^{k+1} + \mathbf{b}_{j+1+k} B_{k+1}^{k+1}(t) \\ &= \sum_{\ell=j}^{j+k+1} \mathbf{b}_\ell B_{\ell-j}^{k+1}(t). \end{aligned}$$

□

2.3 Lastnosti polinomskih Bézierovih krivulj

Polinomske Bézierove krivulje imajo številne lepe lastnosti, zaradi katerih so tako zelo uporabne. Nekaj jih bomo našteali in opisali.

1. Afina invariantnost.

Lastnost afine invariantnosti za Bézierove krivulje velja zaradi dejstva, da poljubno točko Bézierove krivulje dobimo kot končno zaporedje linearnih interpolacij, saj je de Casteljaujev algoritem ravno zaporedje linearnih interpolacij. Naj bo ϕ afina preslikava. Potem naslednja postopka dasta ista rezultata:

- (1) Izračunamo točke na Bézierovi krivulji $\mathbf{b}^n(t)$ in vsako točko afino preslikamo s preslikavo ϕ .
- (2) Afino preslikavo uporabimo samo na kontrolnih točkah. Na preslikanih kontrolnih točkah $\phi(\mathbf{b}_0), \phi(\mathbf{b}_1), \dots, \phi(\mathbf{b}_n)$ izračunamo točke na Bézierovi krivulji.

Primer 2.10. Narisati želimo črko C, ki je določena s štirimi kontrolnimi točkami, v poševnem zapisu. To lahko rešimo na dva načina. V prvem izvedemo de Casteljaujev algoritem, ki nam izriše pokončen C, nato pa na vseh točkah pokončnega C izvedemo afino preslikavo. V drugem primeru pa najprej afino preslikamo le

kontrolne točke pokončne črke C, potem pa uporabimo de Casteljauev algoritem. Opazimo, da je drugi postopek precej hitrejši od prvega.

2. Invarianca za afine transformacije parametra.

Ponavadi za definicijsko območje uporabimo interval $[0, 1]$, ni pa to obvezno. Za Bézierovo krivuljo nad poljubnim intervalom $a \leq u \leq b$ vpeljemo lokalno parametrizacijo $t = (u - a)/(b - a)$ in uporabimo de Casteljauev algoritem oblike

$$\mathbf{b}_i^r(u) = \frac{b-u}{b-a} \mathbf{b}_i^{r-1}(u) + \frac{u-a}{b-a} \mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(u).$$

Velja tudi

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n\left(\frac{u-a}{b-a}\right), \quad t \in [0, 1], \quad u \in [a, b].$$

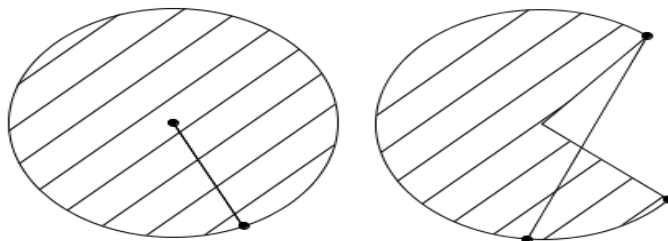
3. Lastnost konveksne ovojnice.

Poglejmo si najprej definicijo konveksne množice (glej sliko 2.3).

Definicija 2.11. Množica K je **konveksna** množica \iff vsak $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ velja :

$$(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in K, \quad t \in [0, 1].$$

Sedaj lahko definiramo tudi pojem konveksne ovojnice točk.



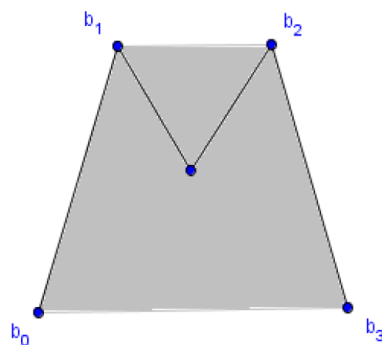
Slika 2.3: Primer konveksne (levo) in nekonveksne (desno) množice.

Definicija 2.12. **Konveksna ovojnica** točk $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ je najmanjša konveksna množica, ki vsebuje te točke.

Izrek 2.13. *Bézierova krivulja \mathbf{b}^n leži v konveksni ovojnici svojih kontrolnih točk.*

Dokaz. Krivulja \mathbf{b}^n leži v konveksni ovojnici svojih kontrolnih točk, saj so točke $\mathbf{b}_i^r(t)$ iz de Casteljauevega algoritma konveksne kombinacije točk iz predhodnih stolpcev v de Casteljauevi shemi. Vsaka nova točka v de Casteljauevi shemi leži na daljici med dvema že obstoječimi točkama v shemi. Isto torej velja tudi za zadnjo točko v shemi, ki pa je ravno točka na Bézierovi krivulji. \square

Opomba: Omenimo še, da lastnost ne velja, če vzamemo parameter $t \notin [0, 1]$.

Slika 2.4: Primer konveksne ovojnice točk $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ in \mathbf{b}_3 .

4. Interpolacija robnih kontrolnih točk.

Bézierova krivulja stopnje n interpolira kontrolni točki \mathbf{b}_0 in \mathbf{b}_n . Velja namreč $\mathbf{b}^n(0) = \mathbf{b}_0$ in $\mathbf{b}^n(1) = \mathbf{b}_n$. To je posledica enačb:

$$B_i^n(0) = \delta_{i,0}, \quad B_i^n(1) = \delta_{i,n},$$

pri čemer je

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Kroneckerjeva delta funkcija.

5. Simetrija.

Simetrija je lastnost, ki nam pove, da dobimo isti Bézierovi krivulji, če zaporedje kontrolnih točk razporedimo kot $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ ali $\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n-1}, \dots, \mathbf{b}_0$. Razlika je zgolj v smeri parametrizacije, kar lahko s formulo zapišemo kot

$$\sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{n-j} B_j^n(1-t). \quad (2.4)$$

Enakost (2.4) sledi iz lastnosti Bernsteinovih polinomov

$$B_j^n(t) = B_{n-j}^n(1-t).$$

6. Invarianca za baricentrične kombinacije.

Za $\alpha + \beta = 1$ velja

$$\sum_{j=0}^n (\alpha \mathbf{b}_j + \beta \mathbf{c}_j) B_j^n(t) = \alpha \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) + \beta \sum_{j=0}^n \mathbf{c}_j B_j^n(t).$$

Uteženo povprečje dveh Bézierovih krivulj lahko dobimo tako, da izračunamo uteženo povprečje ustreznih točk na krivulji (desni izraz), ali pa vzamemo uteženo povprečje ustreznih kontrolnih točk (levi izraz) in nato izračunamo krivuljo.

7. Psevdo - lokalni nadzor.

Izračunajmo najprej stacionarne točke Bernsteinovega polinoma B_i^n . V naslednjem podpoglavju bomo pokazali, da je

$$\frac{d}{dt}B_i^n(t) = n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)),$$

zato velja

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}B_i^n(t) = 0 &\iff n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) = 0 \\ &\iff B_{i-1}^{n-1}(t) = B_i^{n-1}(t) \\ &\iff \binom{n-1}{i-1}t^{i-1}(1-t)^{n-i} = \binom{n-1}{i}t^i(1-t)^{n-1-i} \\ &\iff t^{-1}(1-t) = \frac{\binom{n-1}{i}}{\binom{n-1}{i-1}} \iff \frac{1-t}{t} = \frac{n-i}{i} \\ &\iff t = \left(\frac{n}{i}\right)^{-1} = \frac{i}{n}. \end{aligned}$$

Ker velja $\frac{d^2}{dt^2}B_i^n(t)|_{t=\frac{i}{n}} < 0$ sledi, da polinom B_i^n doseže lokalni maksimum v točki $t = \frac{i}{n}$ na intervalu $[0, 1]$. V praksi ima ta lastnost velik pomen pri oblikovanju Bézierovih krivulj. Če premaknemo eno od kontrolnih točk \mathbf{b}_i potem se oblika krivulje najbolj spremeni v okolici točke s parametrom $\frac{i}{n}$. Toda, ker sprememba vpliva na celotno krivuljo, temu pravimo psevdo-lokalni nadzor. Če bi želeli dobiti povsem lokalni nadzor, bi bilo potrebno uporabiti posplošitev Bézierovih krivulj na t.i. B-zlepke ([4]).

2.4 Lastnosti odvajanja

V tem poglavju bomo podrobneje spoznali lastnosti odvajanja. Izračunajmo sedaj najprej odvod Bernsteinovega baznega polinoma B_i^n :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}B_i^n(t) &= \frac{d}{dt} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= \binom{n}{i} (it^{i-1}(1-t)^{n-i} - (n-i)t^i(1-t)^{n-i-1}) \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} (t^{i-1}(1-t)^{n-i} - (n-i)t^i(1-t)^{n-i-1}) \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1}(1-t)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i-1)!} t^i(1-t)^{n-i-1} \\ &= n \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1}(1-t)^{n-i} - n \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^i(1-t)^{n-i-1} \\ &= n \left(\binom{n-1}{i-1} t^{i-1}(1-t)^{n-i} - \binom{n-1}{i} t^i(1-t)^{n-i-1} \right) \\ &= n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)). \end{aligned}$$

Sedaj lahko izračunamo odvod Bézierove krivulje \mathbf{b}^n . Velja

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{b}^n(t) &= n \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j (B_{j-1}^{n-1}(t) - B_j^{n-1}(t)) \\ &= n \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_j B_{j-1}^{n-1}(t) - n \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{b}_j B_j^{n-1}(t).\end{aligned}$$

V prvi vsoti premaknemo indeks in dobimo

$$\frac{d}{dt}\mathbf{b}^n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j) B_j^{n-1}(t).$$

Z definicijo premih končnih diferenc

$$\Delta \mathbf{b}_j := \mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j$$

lahko zapis zgornje formule poenostavimo ter dobimo odvod Bézierove krivulje v obliki:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{b}^n(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta \mathbf{b}_j B_j^{n-1}(t), \quad \Delta \mathbf{b}_j \in \mathbb{R}^3.$$

Odvod Bézierove krivulje je zopet Bézierova krivulja, katere kontrolni poligon je sestavljen iz diferenc kontrolnih točk originalnega kontrolnega poligona.

Če zgornji postopek večkrat uporabimo, dobimo še višje odvode Bézierove krivulje:

$$\frac{d^r}{dt^r}\mathbf{b}^n(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \Delta^r \mathbf{b}_j B_j^{n-r}(t),$$

kjer je

$$\Delta^r \mathbf{b}_j := \Delta^{r-1} \mathbf{b}_{j+1} - \Delta^{r-1} \mathbf{b}_j = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-1)^{r-i} \mathbf{b}_{j+i}.$$

Poglejmo si dva posebna primera. Zanima nas, kaj se dogaja pri parametrih $t = 0$ in $t = 1$. Velja

$$\frac{d^r}{dt^r}\mathbf{b}^n(0) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \mathbf{b}_0$$

in

$$\frac{d^r}{dt^r}\mathbf{b}^n(1) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \mathbf{b}_{n-r},$$

kar pomeni, da je $r - ti$ odvod Bézierove krivulje pri parametru $t = 0$ odvisen le od kontrolnih točk $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$. Medtem, ko je pri parametru $t = 1$ odvisen od kontrolnih točk $\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n-1}, \dots, \mathbf{b}_{n-r}$. Za $r = 0$ dobimo lastnost interpolacije robnih kontrolnih točk

$$\frac{d^0}{dt^0}\mathbf{b}^n(0) = \mathbf{b}_0, \quad \frac{d^0}{dt^0}\mathbf{b}^n(1) = \mathbf{b}_n.$$

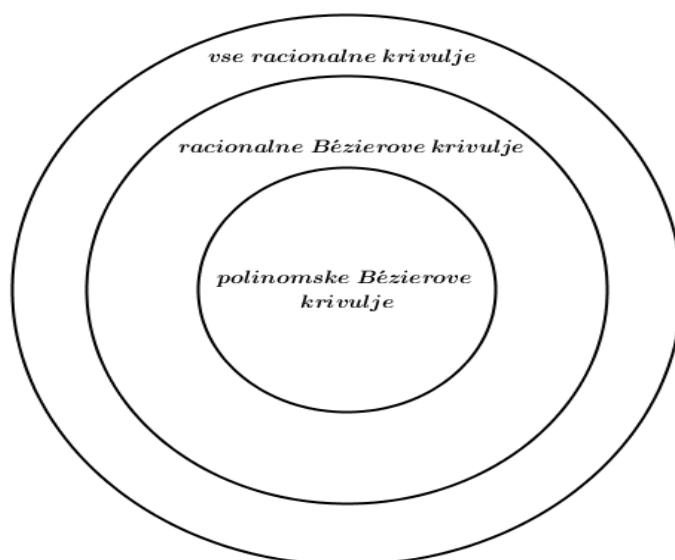
V primeru $r = 1$ dobimo:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{b}^n(0) = n(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0), \quad \frac{d}{dt}\mathbf{b}^n(1) = n(\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}).$$

Ob predpostavki $\mathbf{b}_0 \neq \mathbf{b}_1$ je tangentni vektor na Bézierovo krivuljo v točki \mathbf{b}_0 v smeri vektorja $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0$. Podobna predpostavka $\mathbf{b}_n \neq \mathbf{b}_{n-1}$ implicira, da je tangentni vektor na Bézierovo krivuljo v točki \mathbf{b}_n v smeri vektorja $\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}$. Ta lastnost je zelo pomembna pri določanju pogojev gladkosti za konstrukcijo zlepkov Bézierovih krivulj.

3 Racionalne Bézierove krivulje

Racionalne Bézierove krivulje so le poseben podrazred vseh parametričnih racionalnih krivulj (glej sliko 3.1), saj zahtevamo, da imajo vse komponente isti imenovalec. Poleg tega imajo v primerjavi s polinomskimi Bézierovimi krivuljami več svobodnih parametrov, zato so bolj primerne za oblikovanje. Pri racionalnih Bézierovih krivuljah lahko ohranimo isti kontrolni poligon, pri tem pa krivuljo vseeno preoblikujemo.



Slika 3.1: Umestitev racionalnih in polinomskih Bézierovih krivulj.

3.1 Stožnice

Stožnice so bile zgodovinsko gledano vedno zelo zanimive za matematike in fizike. Stožnice ali krivulje drugega reda so objekti, ki so zelo pomembni pri oblikovanju s krivuljami. V skupino stožnic spadajo elipse, parabole in hiperbole. V tem podpoglavju bomo videli, da lahko vse stožnice eksaktno opišemo kot kvadratne racionalne Bézierove krivulje, medtem ko lahko s polinomskimi Bézierovimi krivuljami opišemo le parabole.

3.1.1 Baricentrične koordinate

V tem podpoglavju bomo opisali baricentrične koordinate v ravnini, saj jih bomo potrebovali v nadaljevanju. Vzemimo neizrojen trikotnik z oglišči $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ ter dodatno četrto točko $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$. Točko \mathbf{p} lahko vedno zapišemo kot *baricentrično kombinacijo* točk $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ kot

$$\mathbf{p} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c}; \quad u + v + w = 1, \quad u, v, w \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Koeficiente $\mathbf{u} := (u, v, w)$ imenujemo **baricentrične koordinate** točke \mathbf{p} glede na oglišča $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

Z oznako $pl(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ bomo v nadaljevanju označevali ploščino trikotnika z oglišči $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

Izrek 3.1. *Naj bodo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ nekolinearne točke v ravnini in \mathbf{p} poljubna točka. Baricentrične koordinate točke \mathbf{p} glede na točke $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ so oblike*

$$u = \frac{pl(\mathbf{p}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{pl(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, \quad v = \frac{pl(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{c})}{pl(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, \quad w = \frac{pl(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p})}{pl(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}. \quad (3.2)$$

Dokaz. Pišimo $\mathbf{a} = (x_a, y_a)$, $\mathbf{b} = (x_b, y_b)$ in $\mathbf{c} = (x_c, y_c)$. Ploščino trikotnika lahko izračunamo s pomočjo determinante kot

$$pl(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Enačbe (3.1) zapišimo v matrični obliki:

$$\begin{pmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Neznanke u, v, w sedaj izračunamo tako, da uporabimo Cramerjevo pravilo ([9]) in dobimo

$$u = \frac{\begin{vmatrix} x_p & x_b & x_c \\ y_p & y_b & y_c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2pl(\mathbf{p}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{2pl(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} = \frac{pl(\mathbf{p}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{pl(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})},$$

$$v = \frac{\begin{vmatrix} x_a & x_p & x_c \\ y_a & y_p & y_c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2pl(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{c})}{2pl(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} = \frac{pl(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{c})}{pl(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})},$$

$$w = \frac{\begin{vmatrix} x_a & x_b & x_p \\ y_a & y_b & y_p \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2pl(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p})}{2pl(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} = \frac{pl(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p})}{pl(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}.$$

□

Pomembna lastnost baricentričnih koordinat je, da so invariantne glede na afine preslikave. Recimo, da ima točka \mathbf{p} baricentrične koordinate u, v, w glede na točke $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Če uporabimo afino preslikavo ϕ , ima točka $\phi(\mathbf{p})$ iste baricentrične koordinate u, v, w glede na točke $\phi(\mathbf{a}), \phi(\mathbf{b}), \phi(\mathbf{c})$. Baricentrični koordinatni sistem v ravnini definirajo katerekoli tri nekolinearne točke $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Točka \mathbf{p} bo ležala znotraj trikotnika z oglišči $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, če bodo vse njene baricentrične koordinate pozitivne. Če je katera njena baricentrična koordinata negativna, bo točka \mathbf{p} ležala izven trikotnika (glej sliko 3.2).

3.1.2 Stožnice kot kvadratne racionalne Bézierove krivulje

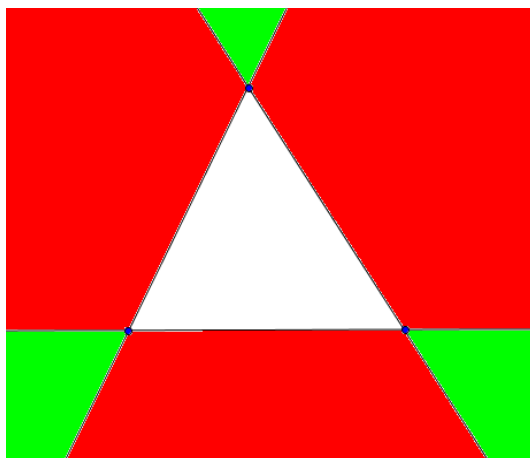
Definicija 3.2. Projekcija $P_z : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ na ravnino $z = 1$ je preslikava, ki vsaki točki $(x, y, z)^T$ priredi točko $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)^T$. To točko bomo identificirali s točko $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})^T \in \mathbb{R}^2$.

Trditev 3.3. Naj bo $\mathbf{c}(t) \in \mathbb{R}^2$ točka, ki leži na stožnici. Potem obstajajo točke $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^2$ in parametri $w_0, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$, da velja

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\mathbf{p}(t)}{w(t)} = \frac{w_0 \mathbf{b}_0 B_0^2(t) + w_1 \mathbf{b}_1 B_1^2(t) + w_2 \mathbf{b}_2 B_2^2(t)}{w_0 B_0^2(t) + w_1 B_1^2(t) + w_2 B_2^2(t)}. \quad (3.3)$$

Dokaz. Točka $\mathbf{c}(t) \in \mathbb{R}^2$, ki jo lahko identificiramo s točko $(\mathbf{c}(t), 1)^T \in \mathbb{R}^3$ je projekcija točke $(w(t)\mathbf{c}(t), w(t))^T$, ki leži na paraboli. V Bézierovi obliki lahko tretjo komponento $w(t)$, ki mora biti kvadratna funkcija v t , zapišemo kot

$$w(t) = w_0 B_0^2(t) + w_1 B_1^2(t) + w_2 B_2^2(t).$$



Slika 3.2: Trikotnik predstavlja koordinatni sistem v ravnini. Če so vse tri baricentrične koordinate u, v, w določenih točk pozitivne, potem te točke ležijo znotraj trikotnika. Če sta dve koordinati negativni in ena pozitivna, potem takšne točke ležijo v zelenem delu slike. Točke v rdečem delu pa dobimo, če je ena kordinata negativna in dve pozitivni. Opomnimo, da vse koordinate ne morejo biti negativne, saj se morajo sešteti v ena.

Formulo preoblikujemo v

$$w(t) \begin{pmatrix} \mathbf{c}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}(t) \sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t) \\ \sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t) \end{pmatrix}.$$

Ker levi izraz enačbe označuje parabolo, velja

$$\sum_{i=0}^2 \begin{pmatrix} \mathbf{p}_i \\ w_i \end{pmatrix} B_i^2(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{c}(t) \sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t) \\ \sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^2,$$

in dobimo

$$\sum_{i=0}^2 \mathbf{p}_i B_i^2(t) = \mathbf{c}(t) \sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t). \quad (3.4)$$

Iz enačbe (3.4) sedaj sledi

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\mathbf{p}_0 B_0^2(t) + \mathbf{p}_1 B_1^2(t) + \mathbf{p}_2 B_2^2(t)}{w_0 B_0^2(t) + w_1 B_1^2(t) + w_2 B_2^2(t)}.$$

Definirajmo $\mathbf{b}_i := \frac{1}{w_i} \mathbf{p}_i$ in izrek je dokazan. □

Točke \mathbf{b}_i znova imenujemo *kontrolne točke*, parametre w_i pa imenujemo *uteži*. Enačbo (3.3) imenujemo kvadratna racionalna oblika odseka stožnice.

Če so vse uteži w_i enake, potem dobimo polinomske kvadratne krivulje. Če vse uteži pomnožimo z istim neničelnim faktorjem, to ne spremeni oblike stožnice. Če je utež w_0 neničelna, lahko dobimo $w_0 = 1$, tako da z w_0 delimo uteži w_1 in w_2 .

3.1.3 De Casteljauev algoritem in lastnosti odvajanja

Podobno kot za polinomske Bézierove krivulje tudi za racionalne Bézierove krivulje obstaja de Casteljauev algoritem. Standardni de Casteljauev algoritem uporablja razmerje treh točk, racionalni de Casteljauev algoritem pa uporablja križno razmerje štirih točk, ki ga bomo označili s cr .

Definicija 3.4. Razmerje treh kolinearnih točk $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ je definirano kot:

$$\text{razmerje}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}}. \quad (3.5)$$

Definicija 3.5. Križno razmerje štirih točk $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$, ki ležijo na isti premici, je definirano kot

$$cr(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \frac{\text{razmerje}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})}{\text{razmerje}(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})}. \quad (3.6)$$

Naj bodo $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^3$ kontrolne točke in t dan parameter. Točko $\mathbf{c}(t)$ na stožnici \mathbf{c} lahko izračunamo tako, da najprej izračunamo imenovalec, nato pa števec (ali obratno). S projekcijo vsake vmesne de Casteljaueve točke $(w_i^r b_i^r, w_i^r)^T$ na \mathbb{R}^2 pa lahko dobimo bolj geometrijski algoritem, ki je oblike

$$\mathbf{b}_i^r(t) := (1-t) \frac{w_i^{r-1}}{w_i^r} \mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t \frac{w_{i+1}^{r-1}}{w_i^r} \mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t), \quad i = 0, 1, \dots, 2-r; \quad r = 1, 2, \quad (3.7)$$

kjer so

$$w_i^r := (1-t)w_i^{r-1}(t) + tw_{i+1}^{r-1}(t), \quad i = 0, \dots, 2-r; \quad r = 1, 2. \quad (3.8)$$

V nadaljevanju bomo potrebovali t.i. utežne točke, ki so definirane kot

$$\mathbf{q}_i^r(t) := \frac{w_i^r \mathbf{b}_i^r + w_{i+1}^r \mathbf{b}_{i+1}^r}{w_i^r + w_{i+1}^r}. \quad (3.9)$$

Izrek 3.6. Velja

$$cr(\mathbf{b}_i^r, \mathbf{q}_i^r, \mathbf{b}_i^{r+1}, \mathbf{b}_{i+1}^r) = \frac{1-t}{t}, \quad \forall i, r. \quad (3.10)$$

Dokaz. Najprej uporabimo enakost (3.6), kjer upoštevajmo (3.5) in dobimo

$$cr(\mathbf{b}_i^r, \mathbf{q}_i^r, \mathbf{b}_i^{r+1}, \mathbf{b}_{i+1}^r) = \frac{(\mathbf{q}_i^r - \mathbf{b}_i^r)(\mathbf{b}_{i+1}^r - \mathbf{b}_i^{r+1})}{(\mathbf{b}_{i+1}^r - \mathbf{q}_i^r)(\mathbf{b}_i^{r+1} - \mathbf{b}_i^r)}. \quad (3.11)$$

V enačbo (3.11) vstavimo relaciji (3.9) in (3.7) za \mathbf{q}_i^r in \mathbf{b}_i^{r+1} . Preoblikujemo in dobimo

$$\frac{w_{i+1}^r (w_i^{r+1} \mathbf{b}_{i+1}^r - (1-t)w_i^r \mathbf{b}_i^r - tw_{i+1}^r \mathbf{b}_{i+1}^r)}{w_i^r ((1-t)w_i^r \mathbf{b}_i^r + tw_{i+1}^r \mathbf{b}_{i+1}^r - w_i^{r+1} \mathbf{b}_i^r)}. \quad (3.12)$$

Sedaj vstavimo v izraz (3.12) zvezo (3.8) za w_i^{r+1} in formula (3.10) sledi. \square

Poglejmo si sedaj še, kaj lahko povemo za odvod krivulje \mathbf{c} . Preoblikujemo enačbo (3.4) in dobimo $\mathbf{p}(t) = w(t)\mathbf{c}(t)$. Sedaj uporabimo pravilo za odvajanje produkta

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}(t) = \frac{dw}{dt}(t)\mathbf{c}(t) + w(t)\frac{d\mathbf{c}}{dt}(t)$$

ter izrazimo $\frac{d\mathbf{c}}{dt}(t)$:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt}(t) = \frac{1}{w(t)} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}(t) - \frac{dw}{dt}(t)\mathbf{c}(t) \right). \quad (3.13)$$

V enačbo (3.13) vstavimo parameter $t = 0$:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt}(0) = \frac{2}{w_0} (w_1\mathbf{b}_1 - w_0\mathbf{b}_0 - (w_1 - w_0)\mathbf{b}_0).$$

Preoblikujemo in dobimo

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt}(0) = \frac{2w_1}{w_0} \Delta \mathbf{b}_0.$$

Enako storimo za $t = 1$ in dobimo

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt}(1) = \frac{2w_1}{w_2} \Delta \mathbf{b}_1.$$

Torej vidimo, da za tangenti v robnih točkah stožnice velja podobno kot za polinom-ske Bézierove krivulje. To lastnost bomo kasneje posplošili še na poljubno stopnjo racionalne Bézierove krivulje.

3.1.4 Implicitna oblika

Vsako stožnico $\mathbf{c}(t)$ lahko zapišemo v implicitni obliki kot

$$f(x, y) = 0,$$

kjer je f kvadratni polinom v spremenljivkah x in y . Ker lahko vsako stožnico konstruiramo iz petih različnih točk, ki ne ležijo na isti premici in imajo koordinate dane kot $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_5, y_5)$, je implicitna oblika stožnice dana kot

$$f(x, y) = \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Trditev 3.7. Za baricentrične koordinate poljubne točke $\mathbf{c}(t)$ na stožnici \mathbf{c} , definirani s kontrolnimi točkami $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ in utežmi w_0, w_1, w_2 glede na $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$:

$$\mathbf{c}(t) = \tau_0 \mathbf{b}_0 + \tau_1 \mathbf{b}_1 + \tau_2 \mathbf{b}_2, \quad \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 = 1, \quad (3.14)$$

velja

$$\frac{\tau_1^2}{\tau_0 \tau_2} = \frac{4w_1^2}{w_0 w_2}. \quad (3.15)$$

Dokaz. Ker lahko stožnico zapišemo kot racionalno Bézierovo krivuljo, definirano v (3.3), velja

$$\tau_0 = w_0(1-t)^2/w(t), \quad (3.16)$$

$$\tau_1 = 2w_1 t(1-t)/w(t), \quad (3.17)$$

$$\tau_2 = w_2 t^2/w(t), \quad (3.18)$$

kjer je $w(t) := \sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t)$. Nato iz enačb (3.16) in (3.18) izrazimo t^2 in $(1-t)^2$ in oba izraza vstavimo v enačbo (3.17). Dobimo

$$\tau_1^2 = 4 \frac{\tau_0 \tau_2 w_1^2}{w_0 w_2}.$$

□

Primer 3.8. Poglejmo si sedaj en primer, ko je bolje imeti krivuljo zapisano v implicitni obliki. Podana je stožnica \mathbf{c} ter točka $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Ali točka \mathbf{x} leži na stožnici \mathbf{c} ? Če je stožnica \mathbf{c} podana v implicitni obliki, je to trivialno odgovoriti. Če pa je podana v parametrični obliki (torej z $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ in w_0, w_1, w_2) pa je odgovor težje dobiti. Najprej moramo po formuli (3.2) izračunati baricentrične koordinate τ_0, τ_1, τ_2 točke \mathbf{x} glede na $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. Nato τ_0, τ_1, τ_2 vstavimo v enačbo (3.15). Če enakost drži, potem točka \mathbf{x} leži na stožnici \mathbf{c} , sicer pa ne.

3.1.5 Uporabni problemi

Sedaj si bomo pogledali dva uporabna problema, kako določiti odsek stožnice iz danih podatkov.

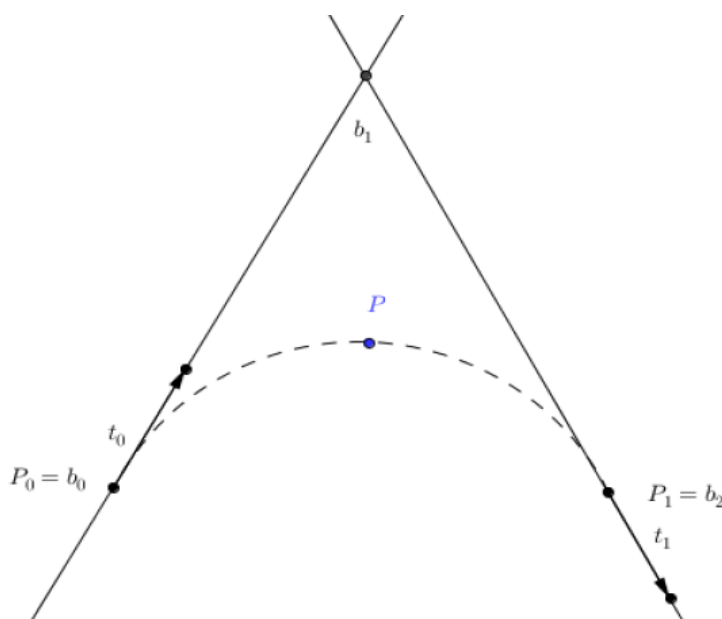
- (a) Skonstruirati želimo odsek stožnice, ki interpolira točki \mathbf{P}_0 in \mathbf{P}_1 , tangenti \mathbf{t}_0 in \mathbf{t}_1 v teh dveh točkah in še eno dodatno točko \mathbf{P} (glej sliko 3.3).

Kontrolne točke $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ lahko določimo direktno iz danih podatkov. Prva kontrolna točka \mathbf{b}_0 je kar enaka \mathbf{P}_0 , zadnja kontrolna točka \mathbf{b}_2 pa je enaka \mathbf{P}_1 . Tam, kjer se sekata nosilni premici tangent \mathbf{t}_0 in \mathbf{t}_1 , je kontrolna točka \mathbf{b}_1 . Predpostavimo, da je stožnica podana v standardni obliki, t.j., $w_0 = w_2 = 1$. Izračunati

moramo še utež w_1 , ki pa jo določimo iz točke \mathbf{P} . Izračunajmo baricentrične koordinate τ_0, τ_1, τ_2 točke \mathbf{P} glede na $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. Dobimo linearni sistem treh neznank (glej enačbo (3.14)) in izračunamo τ_0, τ_1, τ_2 . Ker točka \mathbf{P} leži na stožnici, lahko neznanu utež w_1 sedaj izračunamo tako, da vstavimo τ_0, τ_1 in τ_2 v enčbo (3.15) ter izrazimo utež w_1 . Dobimo

$$w_1 = \frac{\tau_1}{2\sqrt{\tau_0\tau_2}}. \quad (3.19)$$

Če točka \mathbf{P} leži v trikotniku $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$, potem rešitev enačbe (3.19) vedno obstaja. Če pa je $\tau_0\tau_2 < 0$, potem enačba (3.19) nima rešitve.



Slika 3.3: Skonstruirali smo odsek stožnice iz primera (a).

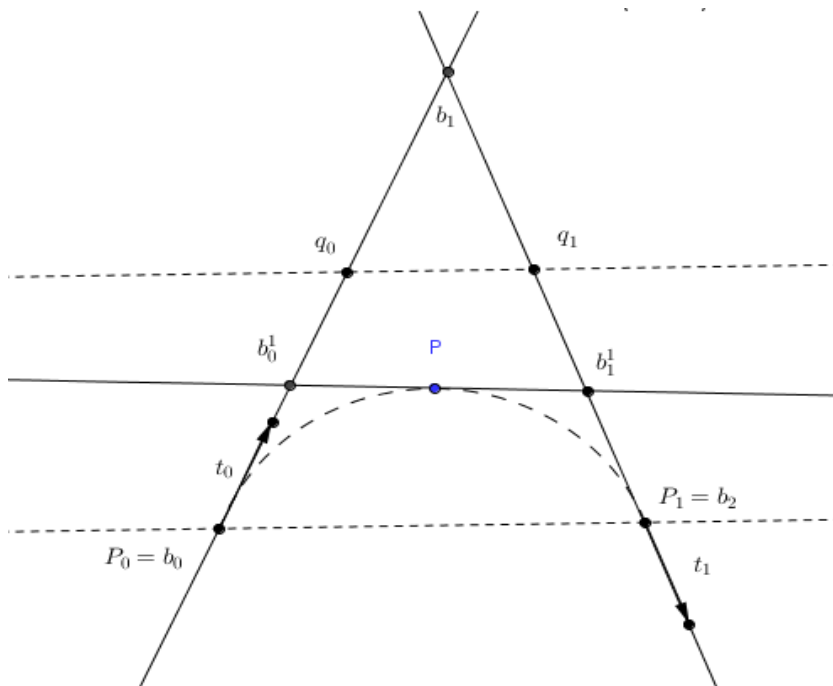
- (b) *Skonstruirati želimo odsek stožnice, ki interpolira točki \mathbf{P}_0 in \mathbf{P}_1 , tangenti \mathbf{t}_0 in \mathbf{t}_1 v točkah \mathbf{P}_0 in \mathbf{P}_1 ter dodatno tangentno premico (glej sliko 3.4).*

Kontrolne točke $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ lahko zopet določimo direktno iz danih podatkov, kot smo to storili v točki (a). Zopet predpostavimo, da je stožnica v standardni obliki ter želimo poiskati notranjo utež w_1 . Notranja utež w_1 , ki je sicer neznan, določa dve utežni točki \mathbf{q}_0 in \mathbf{q}_1 . Uporabimo formulo (3.9) in dobimo utežno točko \mathbf{q}_0

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_0^0 = \frac{w_0\mathbf{b}_0 + w_1\mathbf{b}_1}{w_0 + w_1} = \frac{\mathbf{b}_0 + w_1\mathbf{b}_1}{1 + w_1},$$

ter utežno točko \mathbf{q}_1

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1^0 = \frac{w_1\mathbf{b}_1 + w_2\mathbf{b}_2}{w_1 + w_2} = \frac{\mathbf{b}_2 + w_1\mathbf{b}_1}{1 + w_1}.$$



Slika 3.4: Skonstruirali smo odsek stožnice iz primera (b).

Lema 3.9. *Daljici $\overline{q_0q_1}$ in $\overline{b_0b_2}$ sta vzporedni.*

Dokaz. Dokazati želimo, da sta vektorja $\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0$ in $\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_0$ vzporedna. Vstavimo podatke in dobimo

$$\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0 = \frac{\mathbf{b}_2 + w_1\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0 - w_1\mathbf{b}_1}{1 + w_1} = \frac{1}{1 + w_1}(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_0).$$

□

Sedaj lahko iz danih podatkov izračunamo

$$r_0 := \text{razmerje}(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0^1, \mathbf{b}_1) \quad \text{in} \quad r_1 := \text{razmerje}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1^1, \mathbf{b}_2).$$

Nadalje velja

$$\text{razmerje}(\mathbf{b}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{b}_1) = \frac{\mathbf{q}_0 - \mathbf{b}_0}{\mathbf{b}_1 - \mathbf{q}_0} = \frac{\frac{\mathbf{b}_0 + w_1\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_0w_1}{1 + w_1}}{\frac{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_1w_1 - \mathbf{b}_0 - w_1\mathbf{b}_1}{1 + w_1}} = \frac{w_1(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)}{\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0} = w_1$$

in podobno $\text{razmerje}(\mathbf{b}_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{b}_2) = \frac{1}{w_1}$. Zaradi lastnosti križnega razmerja in enačbe (3.10) dobimo

$$\frac{r_0}{w_1} = r_1w_1. \quad (3.20)$$

Dokažimo, da enakost (3.20) res velja.

$$\begin{aligned}
\frac{r_0}{w_1} &= r_1 w_1 \\
&\Leftrightarrow \text{razmerje}(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0^1, \mathbf{b}_1) \text{razmerje}(\mathbf{b}_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{b}_2) \\
&= \text{razmerje}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1^1, \mathbf{b}_2) \text{razmerje}(\mathbf{b}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{b}_1) \\
&\Leftrightarrow \frac{\text{razmerje}(\mathbf{b}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{b}_1)}{\text{razmerje}(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0^1, \mathbf{b}_1)} = \frac{\text{razmerje}(\mathbf{b}_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{b}_2)}{\text{razmerje}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1^1, \mathbf{b}_2)} \\
&\Leftrightarrow cr(\mathbf{b}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{b}_0^1, \mathbf{b}_1) = cr(\mathbf{b}_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{b}_1^1, \mathbf{b}_2).
\end{aligned}$$

Če sedaj v izreku (3.10) vstavimo $r = 0, i = 0$ in nato še $r = 0, i = 1$, dobimo:

$$cr(\mathbf{b}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{b}_0^1, \mathbf{b}_1) = \frac{1-t}{t} = cr(\mathbf{b}_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{b}_1^1, \mathbf{b}_2).$$

Izrazimo sedaj iz (3.20) w_1 in dobimo

$$w_1 = \sqrt{\frac{r_0}{r_1}}.$$

Enačba ima rešitev pod pogojem, da je $r_0 r_1 > 0$.

3.1.6 Klasifikacija

V afini geometriji stožnice delimo na tri razrede: hiperbole, parabole in elipse. Elipse se z afinimi preslikavami preslikajo v elipse, parabole v parabole in hiperbole v hiperbole. Kako določiti vrsto stožnice? Preden odgovorimo na zastavljeno vprašanje, definirajmo, kaj je *komplementaren odsek* stožnice $\hat{\mathbf{c}}$. Komplementaren odsek stožnice izračunamo tako, da spremenimo predznak pri w_1 , ob predpostavki, da je stožnica podana v standardni obliki. Ker se zveza (3.15) s tem ne spremeni, imamo še vedno isto stožnico, le drugače je predstavljena. Točke $\mathbf{b}_1, \mathbf{c}(t)$ in $\hat{\mathbf{c}}(t)$ so kolinerane, če točka $\mathbf{c}(t)$ leži na originalnem odseku stožnice in točka $\hat{\mathbf{c}}(t)$ na komplementarnem odseku. Če predpostavimo, da je $w_1 > 0$, potem iz obnašanja stožnice $\hat{\mathbf{c}}(t)$ razberemo v katerem razredu je. Stožnica je elipsa, če $\hat{\mathbf{c}}(t)$ nima singularnosti na $[0,1]$, če je parabola mora imeti eno singularnost, če je hiperbola pa ima dve singularnosti. Singularnost v tem primeru pomeni ničle imenovalca v zapisu odseka stožnice $\hat{\mathbf{c}}(t)$. Singularnosti (ki ustrezajo točkam v neskončnosti krivulje $\hat{\mathbf{c}}$) so določene kot realne ničle imenovalca $w(t)$ krivulje $\hat{\mathbf{c}}(t)$. V bistvu sta največ dve realni ničli, ki sta definirani kot

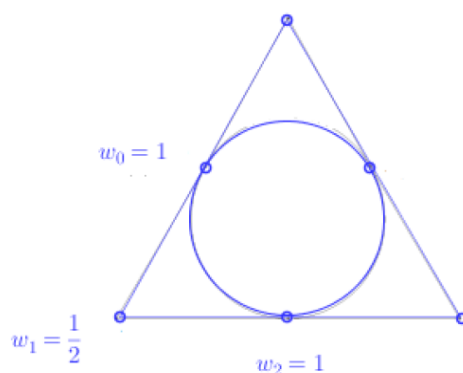
$$t_{1,2} = \frac{1 + w_1 \pm \sqrt{w_1^2 - 1}}{2 + 2w_1}.$$

Če povzamemo, potem je stožnica elipsa, če je $w_1 < 1$, parabola, če je utež $w_1 = 1$, in hiperbola, če je $w_1 > 1$.

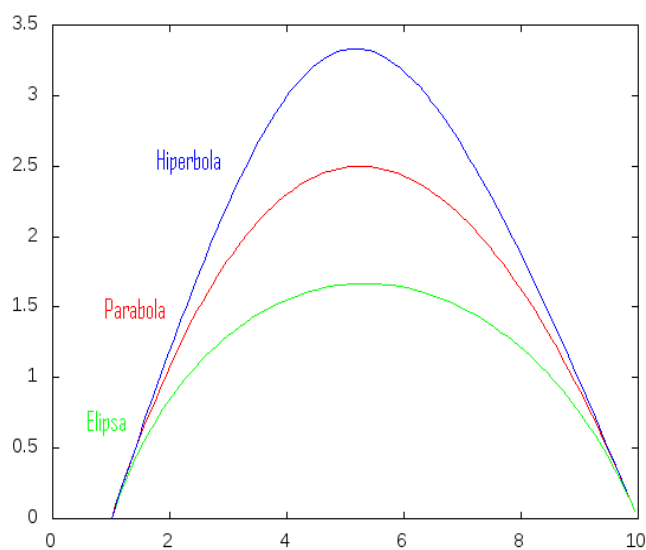
Med stožnice seveda spada tudi krožnica. V bistvu je krožnica poseben primer elipse. Del krožnice bo opisala racionalna kvadratna krivulja, ki ima za utež $w_1 < 1$. Kontrolni poligon ima obliko enakokrakega trikotnika zaradi simetrije krožnice. Utež w_1 lahko določimo, če poznamo kot $\alpha = \angle(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1)$ tako, da velja

$$w_1 = \cos \alpha.$$

Da dobimo celotno krožnico, moramo npr. skupaj zlepiti tri enake koščke (glej sliko 3.5).



Slika 3.5: Celotna krožnica, dobljena kot zlepek treh enakih krožnih lokov.



Slika 3.6: Klasifikacija stožnic.

Slika 3.6 prikazuje tri tipe stožnic, ki jih dobimo z variacijo vmesne uteži w_1 , pri predpostavki $w_0 = w_2 = 1$.

3.2 Splošne racionalne Bézierove krivulje

Racionalne Bézierove krivulje so v zadnjem času postale zelo pomembne pri konstrukciji s krivuljami v CAGD. Prednost racionalnih Bézierovih krivulj je ta, da lahko krivuljo preoblikujemo, pri čemer še vedno ohranimo isti kontrolni poligon. Tega ni možno doseči s polinomskimi Bézierovimi krivuljami.

3.2.1 Definicija in opis

Definicija 3.10. Racionalna Bézierova krivulja stopnje n v \mathbb{R}^3 je projekcija polinomske Bézierove krivulje stopnje n iz \mathbb{R}^4 na hiperravnino $w = 1$.

Izrek 3.11. Racionalna Bézierova krivulja stopnje n je podana kot:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{w_0 \mathbf{b}_0 B_0^n(t) + w_1 \mathbf{b}_1 B_1^n(t) + \dots + w_n \mathbf{b}_n B_n^n(t)}{w_0 B_0^n(t) + w_1 B_1^n(t) + \dots + w_n B_n^n(t)}, \quad \mathbf{r}(t), \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3; w_i \in \mathbb{R}. \quad (3.21)$$

Dokaz. Projekcija na ravnino preslika točko $(x, y, z, w)^T$ v točko $(x/w, y/w, z/w, 1)^T$. Fiksirajmo t . Točko na krivulji $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ lahko gledamo kot $(\mathbf{r}(t), 1)^T \in \mathbb{R}^4$, kar je ravno projekcija točke $(w(t)\mathbf{r}(t), w(t))^T$, ki leži na polinomski Bézierovi krivulji stopnje n v \mathbb{R}^4 . Sedaj lahko izrazimo zadnjo komponento kot

$$w(t) = \sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)$$

in zapišemo

$$(w(t)\mathbf{r}(t), w(t))^T = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t) \sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) \\ \sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Leva stran enačbe (3.22) predstavlja točko na polinomski Bézierovi krivulji stopnje n v \mathbb{R}^4 , zato velja

$$\sum_{i=0}^n \begin{pmatrix} \mathbf{p}_i \\ w_i \end{pmatrix} B_i^n(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t) \sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) \\ \sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3. \quad (3.23)$$

Prva komponenta v enačbi (3.23) nam da enačbo

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_i^n(t) = \mathbf{r}(t) \sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t),$$

iz česar izrazimo

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{p}_0 B_0^n(t) + \mathbf{p}_1 B_1^n(t) + \dots + \mathbf{p}_n B_n^n(t)}{w_0 B_0^n(t) + w_1 B_1^n(t) + \dots + w_n B_n^n(t)}.$$

Če definiramo $\mathbf{b}_i := \frac{1}{w_i} \mathbf{p}_i$, je izrek dokazan. □

Kontrolne točke $\mathbf{b}_i, i = 0, 1, \dots, n$, tvorijo kontrolni poligon, ki je projekcija kontrolnega poligona $(w_i \mathbf{b}_i, w_i)^T, i = 0, 1, \dots, n$, polinomske Bézierove krivulje v \mathbb{R}^4 . Če vzamemo vse uteži enake 1, je imenovalec izraza (3.21) enak 1 in dobimo navadno polinomsko Bézierovo krivuljo.

Če ima racionalna Bézierova krivulja vse uteži pozitivne, potem zanjo veljajo podobne lastnosti kot za polinomske Bézierove krivulje: lastnost konveksne ovojnice, interpolacija robnih kontrolnih točk, simetrija, afina invariantnost in invariantnost za afine transformacije parametra.

V praksi uteži w_i uporabljamo kot dodatne proste parametre, s katerimi lahko bolj vplivamo na obliko krivulje. Če neko utež w_i povečamo, se krivulja približa k pripadajoči kontrolni točki \mathbf{b}_i . Če pa utež w_i zmanjšamo, se Bézierova krivulja oddalji od pripadajoče kontrolne točke \mathbf{b}_i . Skupni faktor povečanja uteži ne vpliva na krivuljo, saj se krivulja z enako rastočimi utežmi w_i ne spreminja (s skupnim faktorjem lahko celotno krivuljo pomnožimo).

Na spodnji sliki ponazorimo, kaj se zgodi z Bézierovo krivuljo, če spreminjamo neko utež, kontrolne točke pa pustimo iste.

3.2.2 De Casteljauev algoritem

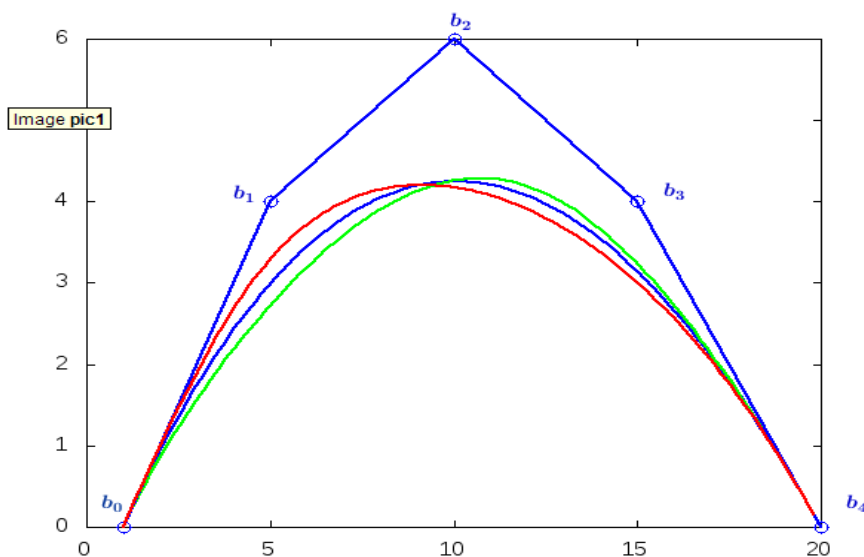
De Casteljauev algoritem lahko uporabimo takrat, ko želimo izračunati neko točko na Bézierovi krivulji. To lahko naredimo tako, da posebej izračunamo števec ter imenovalec, nato pa rezultata delimo. Takšen način je numerično nestabilen, čeprav je preprost. Namreč, če so uteži različnih velikostnih razredov, lahko za velike uteži w_i vmesne točke de Casteljauevega algoritma izpadejo iz konveksne ovojnice kontrolnega poligona.

Poznamo pa tudi metodo, ki je zahtevnejša, vendar stabilna. Ta metoda projicira vsako vmesno točko de Casteljauevega algoritma $(w_i \mathbf{b}_i, w_i)^T$ na hiperravnino $w = 1$. Racionalni de Casteljauev algoritem kot podatke dobi kontrolne točke \mathbf{b}_i , uteži $w_i, i = 0, 1, \dots, n$, in parameter $t \in [0, 1]$, ter izračuna:

$$\mathbf{b}_i^r(t) := (1-t) \frac{w_i^{r-1}}{w_i^r} \mathbf{b}_i^{r-1} + t \frac{w_{i+1}^{r-1}}{w_i^r} \mathbf{b}_{i+1}^{r-1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-r, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (3.24)$$

pri čemer je $\mathbf{b}_i^0 := \mathbf{b}_i$ in velja

$$w_i^r := (1-t)w_i^{r-1}(t) + tw_{i+1}^{r-1}(t), \quad w_i^0 := w_i. \quad (3.25)$$



Slika 3.7: Racionalne Bézierove krivulje pri različnih parametrih w_1 : če je $w_1 = 1$, ostane Bézierova krivulja (modra barva) nespremenjena v okolici točke \mathbf{b}_1 . Če pa je $w_1 = 2$, se krivulja približa točki \mathbf{b}_1 (rdeča barva), če pa je $w_1 = \frac{1}{2}$, se krivulja oddalji od točke \mathbf{b}_1 (zeleno barva).

Točka na krivulji \mathbf{r} pri parametru t je potem dana kot $\mathbf{r}(t) := \mathbf{b}_0^r(t)$.

Poglejmo si še geometrijsko razlago algoritma. Na premici, na kateri ležita točki \mathbf{b}_i^r in \mathbf{b}_{i+1}^r , bomo med njiju postavili utežno točko \mathbf{q}_i^r tako, da bo veljalo:

$$\text{razmerje}(\mathbf{b}_i^r, \mathbf{q}_i^r, \mathbf{b}_{i+1}^r) = \frac{w_{i+1}^r}{w_i^r}. \quad (3.26)$$

Ko uporabimo enačbi (3.6) in (3.26), iz enačbe (3.24) dobimo

$$cr(\mathbf{b}_i^r, \mathbf{q}_i^r, \mathbf{b}_{i+1}^r, \mathbf{b}_{i+1}^r) = \frac{1-t}{t}, \quad \text{za vse } r, i.$$

kar smo dokazali v izreku (3.10). Če v enačbo (3.26) vstavimo parameter $r = 0$, dobimo

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_i^0 = \frac{w_i \mathbf{b}_i + w_{i+1} \mathbf{b}_{i+1}}{w_i + w_{i+1}}.$$

Torej: ko točke \mathbf{q}_i pomikamo po ustreznih delih kontrolnega poligona, se posledično spreminjajo tudi uteži w_i , ki vplivajo na obliko krivulje.

Primer 3.12. Skonstruirajmo točko na racionalni Bézierovi krivulji, podani s kontrolnimi točkami $\mathbf{b}_0 = (0, 0, 0)^T$, $\mathbf{b}_1 = (2, 0, 0)^T$, $\mathbf{b}_2 = (0, 2, 0)^T$ in $\mathbf{b}_3 = (1, 0, 1)^T$ ter utežmi $w_0 = 1, w_1 = 2, w_2 = 3, w_3 = 4$ pri parametru $t = \frac{2}{3}$.

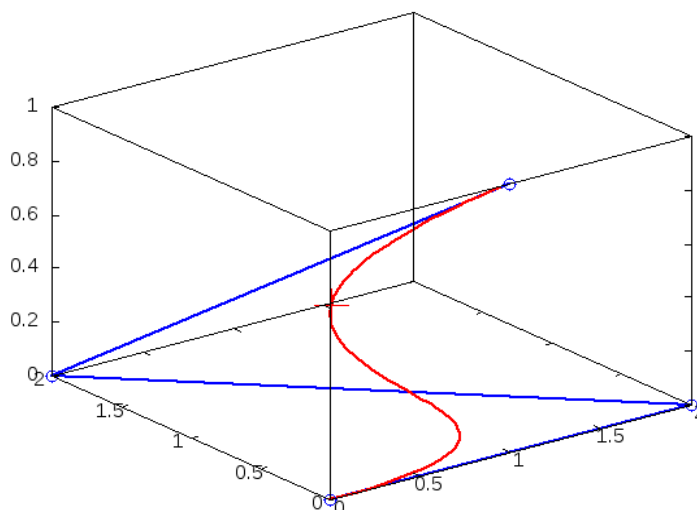
Najprej izračunajmo vmesne uteži w_i^r po de Casteljauevi shemi (3.25):

1			
2	1.67		
3	2.67	2.34	
4	3.67	3.34	3

Sedaj po enačbi (3.24) izračunajmo vmesne kontrolne točke v de Casteljauevi shemi:

$$\mathbf{b}_0^1 = \frac{2 w_0^0}{3 w_0^1} \mathbf{b}_0^0 + \frac{1 w_1^0}{3 w_0^1} \mathbf{b}_1^0 = (8/5, 0, 0)^T.$$

Po istem postopku izračunajmo še preostale vmesne kontrolne točke. Tako na koncu dobimo točko $\left(\frac{56}{81}, \frac{8}{9}, \frac{32}{81}\right)^T$, ki leži na Bézierovi krivulji pri parametru $t = \frac{2}{3}$.



Slika 3.8: Racionalna Bézierova krivulja iz primera 3.12.

3.2.3 Lastnosti odvajanja

V tem podpoglavju si bomo ogledali lastnosti odvajanja racionalnih Bézierovih krivulj. Najprej želimo izračunati prvi odvod racionalne Bézierove krivulje. Odvajajmo enačbo

$$\mathbf{p}(t) = w(t)\mathbf{r}(t) \tag{3.27}$$

in dobimo

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}(t) = \frac{dw}{dt}(t)\mathbf{r}(t) + w(t)\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t).$$

Izrazimo prvi odvod racionalne Bézierove krivulje:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \frac{1}{w(t)} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}(t) - \frac{dw}{dt}(t)\mathbf{r}(t) \right). \quad (3.28)$$

Za odvode višjega reda enačbo (3.27) k -krat odvajamo in po Leibnitzovem pravilu dobimo

$$\mathbf{p}^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} w^{(j)}(t) \mathbf{r}^{(k-j)}(t).$$

Tako smo dobili rekurzivno formulo za k -ti odvod racionalne Bézierove krivulje

$$\mathbf{r}^{(k)}(t) = \frac{1}{w(t)} \left(\mathbf{p}^{(k)}(t) - \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} w^{(j)}(t) \mathbf{r}^{(k-j)}(t) \right).$$

Poglejmo si konkretna primera pri parametrih $t = 0$ in $t = 1$. Vstavimo v enačbo (3.28) najprej parameter $t = 0$ in dobimo

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(0) = \frac{1}{w(0)} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}(0) - \frac{dw}{dt}(0)\mathbf{r}(0) \right),$$

pri parametru $t = 1$ pa dobimo

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(1) = \frac{1}{w(1)} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}(1) - \frac{dw}{dt}(1)\mathbf{r}(1) \right).$$

Vemo, da velja $\mathbf{r}(0) = \mathbf{b}_0$ ter $\mathbf{r}(1) = \mathbf{b}_n$. Prav tako je preprosto videti, da velja $w(0) = w_0$ in $w(1) = w_n$. Iz zveze

$$\frac{dw}{dt} = n(w_0(B_{-1}^{n-1} - B_0^{n-1}) + w_1(B_0^{n-1} - B_1^{n-1}) + \dots + w_n(B_{n-1}^{n-1} - B_n^{n-1}))$$

pri parametru $t = 0$ dobimo

$$\frac{dw}{dt}(0) = n(-w_0 + w_1) = n(w_1 - w_0)$$

in pri parametru $t = 1$

$$\frac{dw}{dt}(1) = n(w_n - w_{n-1}).$$

Izračunajmo sedaj še $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$. Pri parametru $t = 0$ dobimo

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}(0) = n(\mathbf{b}_1 w_1 - \mathbf{b}_0 w_0),$$

pri $t = 1$ pa

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}(1) = n(\mathbf{b}_n w_n - \mathbf{b}_{n-1} w_{n-1}).$$

Sedaj vse izračunane količine vstavimo v enačbo (3.28). Pri parametru $t = 0$ dobimo

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(0) = \frac{1}{w_0}(n(\mathbf{b}_1 w_1 - \mathbf{b}_0 w_0) - n(w_1 - w_0)\mathbf{b}_0) = n \frac{w_1}{w_0}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0).$$

Pri parametru $t = 1$ pa

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(1) = \frac{1}{w_n}(n(\mathbf{b}_n w_n - \mathbf{b}_{n-1} w_{n-1}) - n(w_n - w_{n-1})\mathbf{b}_n) = n \frac{w_{n-1}}{w_n}(\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}).$$

Opazimo, da v primeru, ko so vse uteži enake 1, dobimo dobro znani zvezi, ki veljata za polinomske Bézierove krivulje.

3.2.4 Reparametrizacija

Reparametrizacija pomeni spremembo parametrizacije krivulje, pri čemer se ne spremeni ne položaj ne oblika krivulje. V podpoglavju 3.1.2 smo povedali, da lahko racionalno Bézierovo krivuljo običajno zapišemo v standardni obliki, kar pomeni, da lahko prvo in zadnjo utež postavimo na ena. Pokažimo sedaj, kdaj in kako lahko to dosežemo. Zamenjajmo uteži w_i z utežmi

$$\hat{w}_i := c^i w_i, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad c \neq 0.$$

Izkaže se, da v tem primeru oblika krivulje ostane enaka. Nove uteži določajo nove utežne točke $\hat{\mathbf{q}}_i$. Križno razmerje točk $(\mathbf{b}_i, \mathbf{q}_i, \hat{\mathbf{q}}_i, \mathbf{b}_{i+1})$ je enako za vsak poligon, saj so nove in stare utežne točke povezane. Racionalno Bézierovo krivuljo lahko preoblikujemo v standardno obliko, če uporabimo linearno racionalno transformacijo parametra, ki jo določa izbor

$$c = \sqrt[n]{\frac{w_0}{w_n}}.$$

Očitno sedaj velja $\hat{w}_0 = \hat{w}_n$. Standardno obliko $\hat{w}_0 = \hat{w}_n = 1$ dobimo, če vse uteži delimo z w_0 . Vidimo, da lahko ta postopek izvedemo le, če velja $w_0 w_n > 0$.

4 Zaključek

V zaključni nalogi smo raziskovali matematično in računalniško ozadje polinomskih in racionalnih Bézierovih krivulj, saj so te parametrične krivulje atraktivne predvsem v industriji za oblikovanje avtomobilov, letal ter v svetu zabave.

Morda omenimo še enkrat, da polinomske Bézierove krivulje predstavljajo poseben način zapisa parametričnih polinomskih krivulj, ki so v tem zapisu določene le s kontrolnimi točkami. Po drugi strani pri racionalnih Bézierovih krivuljah potrebujemo dve družini podatkov, to so kontrolne točke in uteži. Kot smo videli v nalogi, lahko Bézierove krivulje izračunamo z dvema ekvivalentnima matematičnima metodama, t.j. z de Casteljauevim algoritmom in preko Bernsteinovih polinomov. Spoznali in obravnavali smo številne lepe lastnosti teh krivulj, nekatere izmed njih pa smo tudi grafično predstavili in dokazali. Za več informacij je na voljo knjiga G. Farina *Curves and surfaces for CAGD*. Krivulje smo še bolje spoznali, ko smo jih sprogramirali v programu **Octave**, ki je dostopen na spletni strani <http://www.gnu.org/software/octave/>. Odkar sta P. Bézier in P. de Casteljaeu neodvisno drug od drugega definirala te krivulje, so le-te doživele velik razcvet in številne posplošitve ter modifikaciji, ki jim dajejo pomembno uporabno vrednost še dandanes in omogočajo nadaljni razvoj v prihodnosti.

Literatura

- [1] Farin G. FARIN, *Curves and surfaces for CAGD, Fifth ed.*, Morgan Kaufmann publishers, San Francisco, 2006. (*Citirano na strani I.*)
- [2] G. JAKLIČ, *Krivulje in ploskve v računalniško podprtem geometrijskem oblikovanju, skripta*, Fakulteta za matematiko in fiziko, Ljubljana, 2011. (*Ni citirano.*)
- [3] J. LAPUH BELE, *Predstavitev krivulj in ploskev v geometrijskem načrtovanju s pomočjo računalnika*, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, Ljubljana, 1990. (*Ni citirano.*)
- [4] H. PRAUTZSCH, W. BOEHM, M. PALUSZNY, *Bézier and B-spline techniques*, Springer cop., Berlin, 2002. (*Citirano na strani 11.*)
- [5] M. TUTA, *Bézierove krivulje in ploskve: od teoretičnega ozadja do računalniških aplikacij*, Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije, Koper, 2012. (*Ni citirano.*)
- [6] <http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2000/ura/ecimovic/seminar/node-2.html>, dostopno na spletu 2. oktobra 2012 (*Ni citirano.*)
- [7] http://graph-srv.uni-mb.si/CGAI/slo/RG_dokumenti/RG-4-Krivulje.pdf, dostopno na spletu 2. oktobra 2012 (*Ni citirano.*)
- [8] <http://mathstudio.net/share/1697-292>, dostopno na spletu 19. februarja 2012 (*Ni citirano.*)
- [9] <http://mathworld.wolfram.com/CramersRule.html>, dostopno na spletu 4. oktobra 2012 (*Citirano na strani 15.*)
- [10] http://ucilnica.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/3835/mod_resource/content/2/Skripta_UVMN_051012.pdf, dostopno na spletu 20. septembra 2012 (*Ni citirano.*)
- [11] <http://www.fmf.uni-lj.si/~jaklicg/ReseneNalogeNM2.pdf>, dostopno na spletu 10. oktobra 2012 (*Ni citirano.*)

- [12] <http://ucilnica1011.fmf.uni-lj.si/course/view.php?id=8>, dostopno na spletu 10. oktobra 2012 (*Ni citirano.*)

Priloge

V prilogah A, B, C in D so podane kode v programskem jeziku Octave za konstrukcijo Bézierove krivulje.

Pred klicem funkcij v prilogah moramo najprej vnesti dva podatka. To sta parameter 'm', ki nam pove kako na gosto računamo točke na krivulji, in kontrolne točke 'b'. Spodaj je naveden primer s tremi kontrolnimi točkami.

```
1
2 m=100;
3 %Kontrolne tocke so sestavljene iz starih komponent.
4 %Prva komponenta predstavlja x-koordinato, drugo
5 %y-koordinato in tretja z-koordinato. Zadnja komponenta
6 %predstavlja utez.
7 b0=[1;0;0;1];
8 b1=[0;1;0;1];
9 b2=[0;0;1;1];
10 b=[b0,b1,b2];
```

Priloga A

Funkcija `bezier` izračuna za dane kontrolne točke polinomsko Bézierovo krivuljo z de Casteljaujevim algoritmom in jo nariše.

```

1
2 function bezier(b,m)
3 % b predstavlja kontrolne točke (skupaj z utezmi, ki so v
4 % tem primeru vse enake 1), m pa pove v koliko tockah
5 % naracunamo krivuljo
6 n=columns(b);
7 A=zeros(3,m);
8 x=b(1,1);
9 br=0;
10 t=0;
11 while(br<m)
12     Q=b;
13     w=b(4,:);
14     k=1;
15     while k<n
16         x1=1;
17         while x1<=(n-k)
18             Q(1,x1)=(1-t)*Q(1,x1)+t*Q(1,x1+1);
19             Q(2,x1)=(1-t)*Q(2,x1)+t*Q(2,x1+1);
20             Q(3,x1)=(1-t)*Q(3,x1)+t*Q(3,x1+1);
21             x1=x1+1;
22         endwhile
23         k++;
24     endwhile
25     A(1,br+1)=Q(1,1);
26     A(2,br+1)=Q(2,1);
27     A(3,br+1)=Q(3,1);
28     x=x+(b(1,n)-b(1,1))/m;
29     t=(x-b(1,1))/(b(1,n)-b(1,1));

```

```
30     br++;  
31 endwhile  
32 plot3(A(1,:),A(2,:),A(3,:))  
33 endfunction
```

Priloga B

Funkcija `bezier_rac` izračuna za dane kontrolne točke racionalno Bézierovo krivuljo z de Cesteljaouvim algoritmom in jo nariše.

```
1
2 function bezier_rac(b,m)
3 % b predstavlja kontrolne tocke (skupaj z utezmi), m pa
4 % pove v koliko tockah naracunamo krivuljo
5 n=columns(b);
6 A=zeros(3,m);
7 x=b(1,1);
8 br=0;
9 t=0;
10 while (br<=m)
11     Q=b;
12     w=b(4,:);
13     k=1;
14     while k<n
15         x1=1;
16         while x1<=(n-k)
17             w1=w(1,x1)/(w(1,x1)*(1-t)+t*w(1,x1+1));
18             w2=w(1,x1+1)/(w(1,x1)*(1-t)+t*w(1,x1+1));
19             Q(1,x1)=(1-t)*w1*Q(1,x1)+t*w2*Q(1,x1+1);
20             Q(2,x1)=(1-t)*w1*Q(2,x1)+t*w2*Q(2,x1+1);
21             Q(3,x1)=(1-t)*w1*Q(3,x1)+t*w2*Q(3,x1+1);
22             w(1,x1)=((1-t)*w(1,x1)+t*w(1,x1+1));
23             x1=x1+1;
24         endwhile
25         k++;
26     endwhile
27     A(1,br+1)=Q(1,1);
28     A(2,br+1)=Q(2,1);
29     A(3,br+1)=Q(3,1);
```

```
30     x=x+(b(1,n)-b(1,1))/m;  
31     t=(x-b(1,1))/(b(1,n)-b(1,1));  
32     br++;  
33 endwhile  
34 plot3(A(1,:),A(2,:),A(3,:))  
35 endfunction
```

Priloga C

Funkcija `bezier_bern` izračuna za dane kontrolne točke polinomsko Bézierovo krivuljo s pomočjo Bernsteinovih polinomov in jo nariše.

```
1
2 function bezier_bern(b,m)
3 % b predstavlja kontrolne točke (skupaj z utezmi, ki so v
4 % tem primeru vse enake 1), m pa pove v koliko tockah
5 % naracunamo krivuljo
6 n=columns(b)-1;
7 A=zeros(3,m+1);
8 t=0;
9 x=b(1,1);
10 br=0;
11 while (br<=m)
12     i=0;
13     R_kor=[0,0,0]';
14     while (i<=n)
15         pom=nchoosek(n,i)*t^i*(1-t)^(n-i)*b(1:3,i+1);
16         R_kor= R_kor+ pom;
17         i++;
18     endwhile
19     A(1,br+1)=R_kor(1);
20     A(2,br+1)=R_kor(2);
21     A(3,br+1)=R_kor(3);
22     x =x+(b(1,n+1)-b(1,1))/m;
23     t=(x-b(1,1))/(b(1,n+1)-b(1,1));
24     br++;
25 endwhile
26 plot3(A(1,:),A(2,:),A(3,:))
27 endfunction
```


Priloga D

Funkcija `bezier_rac_bern` izračuna za dane kontrolne točke racionalno Bézierovo krivuljo s pomočjo Bernsteinovih polinomov in jo nariše.

```
1
2 function bezier_rac_bern(b,m)
3 % b predstavlja kontrolne tocke (skupaj z utezmi), m pa
4 % pove v koliko tockah naracunamo krivuljo
5 n=columns(b)-1;
6 A=zeros(3,m);
7 t=0;
8 x=b(1,1);
9 br=0;
10 while (br<=m)
11     i=0;
12     R_kor=[0,0,0]';
13     while (i<=n)
14         j=0;
15         B_kor=[0,0,0]';
16         while (j<=n)
17             B_kor= B_kor+ nchoosek(n,j)*t^j*(1-t)^(n-j)
18                 *b(4,j+1);
19             j++;
20         endwhile
21         pom= nchoosek(n,i)*t^i*(1-t)^(n-i)*b(4,i+1)
22             *b(1:3,i+1);
23         R_kor=R_kor+pom./B_kor;
24         i++;
25     endwhile
26     A(1,br+1)=R_kor(1);
27     A(2,br+1)=R_kor(2);
28     A(3,br+1)=R_kor(3);
29     x=x+(b(1,n+1)-b(1,1))/m;
```

```
30     t=(x-b(1,1))/(b(1,n+1)-b(1,1));  
31     br++;  
32 endwhile  
33 plot3(A(1,:),A(2,:),A(3,:))  
34 endfunction
```