

UNIVERZA NA PRIMORSKEM  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN  
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Magistrsko delo

**Metoda prepoznavanja matematičnih vzorcev  
in zgledi uporabe v teoriji grafov**

(The Math Pattern Recognition Method and Application Examples in Graph Theory)

Ime in priimek: Kenny Štorgel

Študijski program: Matematične znanosti, 2. stopnja

Mentor: prof. dr. Martin Milanič

**Koper, september 2019**

## Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Kenny ŠTORDEL

Naslov magistrskega dela: Metoda prepoznavanja matematičnih vzorcev in zgledi uporabe v teoriji grafov

Kraj: Koper

Leto: 2019

Število listov: 69

Število slik: 17

Število tabel: 1

Število referenc: 15

Mentor: prof. dr. Martin Milanič

Ključne besede: graf, hipergraf, Boolova funkcija, metoda prepoznavanja matematičnih vzorcev, dualen sistem

Math. Subj. Class. (2010): 00A35, 05C65, 06E30, 05C75, 05C17

UDK: 519.17(043.2)

### Izveček:

Glavni namen magistrskega dela je predstaviti teorijo, potrebno za razumevanje delovanja metode prepoznavanja matematičnih vzorcev, ki sta jo leta 1983 razvila Gurvich in Gvishiani, in ponazoriti uporabo metode za razvoj določenih kompozicijskih izrekov za nekatere družine grafov, ki jih lahko opišemo s pomočjo družin prepovedanih induciranih podgrafov. Metodo so leta 1990 uporabili Chvátal, Lenhart in Sbihi za opis vseh možnih načinov, kako z dodajanjem povezav disjunktni uniji dveh popolnih grafov vselej dobimo popoln graf, pri čemer so omejitve opisane z uporabo induciranih poti  $P_4$  v tako nastalem grafu. V delu bodo prikazani tudi zgledi uporabe same metode in z njo pridobljeni rezultati v povezavi s popolnimi grafi in tremi drugimi družinami grafov. Pridobljene omejitve bodo opisane ne le z uporabo induciranih poti  $P_4$ , temveč tudi z uporabo induciranih poti  $P_3$ . Metoda deluje tako, da za iskano skupino objektov, znotraj določene univerzalne množice, z množico lastnosti, ki jih iskana skupina objektov lahko ima, določi vse podmnožice množice lastnosti, za katere vsak objekt iz univerzalne množice pripada iskani skupini objektov, če ima vse lastnosti iz dane podmnožice lastnosti.

## Key words documentation

Name and SURNAME: Kenny ŠTORGEL

Title of master's thesis: The Math Pattern Recognition Method and Application Examples in Graph Theory

Place: Koper

Year: 2019

Number of pages: 69

Number of figures: 17

Number of tables: 1

Number of references: 15

Mentor: Prof. Martin Milanič, PhD

Keywords: graph, hypergraph, Boolean function, math pattern recognition method, dual system

Math. Subj. Class. (2010): 00A35, 05C65, 06E30, 05C75, 05C17

UDK: 519.17(043.2)

**Abstract:** The main idea of this masters thesis is to present the theory necessary to understand the math pattern recognition method, developed by Gurvich and Gvishiani in 1983, and to present its use to develop composition theorems for certain graph classes described using sets of forbidden induced subgraphs. This method was used in 1990 by Chvátal, Lenhart, and Sbihi to describe all possible ways in which adding edges to the disjoint union of two perfect graphs yields a new graph that is again perfect, where the conditions were described using induced paths  $P_4$ . In this thesis we will apply the method to perfect graphs and to three other graph classes. The conditions will be described by induced paths  $P_4$  as well as by induced paths  $P_3$ . The method takes a set of target objects from a universal set of objects, and looking at the properties that those objects have, we can find all subsets of the set of properties such that every object from the universal set of objects also belongs to the target set of objects.

# Kazalo vsebine

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
1.1	Grafi in hipergrafi . . . . .	1
1.2	Boolove funkcije . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Dualnost predstavljena na dva načina</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Metoda prepoznavanja matematičnih vzorcev</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Algoritem Fredmana in Khachiyana za preverjanje dualnosti monotonih Boolovih funkcij</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Uvodne definicije za uporabo metode</b>	<b>24</b>
<b>6</b>	<b>Popolni grafi</b>	<b>28</b>
6.1	Omejitve za barvanja točk induciranih poti $P_3$ . . . . .	28
6.2	Omejitve za barvanja točk induciranih poti $P_4$ . . . . .	34
<b>7</b>	<b>Grafi brez induciranih sodih ciklov</b>	<b>45</b>
7.1	Omejitve za barvanja točk induciranih poti $P_3$ . . . . .	45
7.2	Omejitve za barvanja točk induciranih poti $P_4$ . . . . .	47
<b>8</b>	<b><math>\{C_3, C_6, C_9, \dots\}</math>-prosti grafi</b>	<b>51</b>
8.1	Omejitve za barvanja točk induciranih poti $P_3$ . . . . .	51
8.2	Omejitve za barvanja točk induciranih poti $P_4$ . . . . .	52
<b>9</b>	<b><math>\{C_4, C_5, C_7, C_8 \dots\}</math>-prosti grafi</b>	<b>54</b>
9.1	Omejitve za barvanja točk induciranih poti $P_3$ . . . . .	54
9.2	Omejitve za barvanja točk induciranih poti $P_4$ . . . . .	57
<b>10</b>	<b>Pregled rezultatov in nekaj strukturnih posledic</b>	<b>64</b>
<b>11</b>	<b>Zaključek</b>	<b>67</b>
<b>12</b>	<b>Literatura</b>	<b>68</b>

# Kazalo preglednic

- 1 Tabela množic prepovedanih vzorcev (slike 2 – 17) za inducirane poti  $P_3$  (definicija 5.4) in  $P_4$  (definicija 5.5) za določene družine grafov, pridobljenih z uporabo metode prepoznavanja matematičnih vzorcev. . . . . 64

# Kazalo slik

1	Prikaz delovanja permutacij $\sigma$ (črtkana črta) in $\tau$ (polna črta) na množici tipov induciranih poti $P_4$ . . . . .	27
2	Prikaz množice $\{2, 5\}$ prepovedanih tipov induciranih poti $P_3$ . . . . .	30
3	Prikaz množice $\{2, 4\}$ prepovedanih tipov induciranih poti $P_3$ . . . . .	31
4	Prikaz množice $\{1, 3, 5, 6\}$ prepovedanih tipov induciranih poti $P_3$ . . . . .	33
5	Prikaz množice $\{2, 7, 9\}$ prepovedanih tipov induciranih poti $P_4$ . . . . .	37
6	Prikaz množice $\{2, 3, 8, 9\}$ prepovedanih tipov induciranih poti $P_4$ . . . . .	38
7	Prikaz množice $\{1, 6, 7, 10\}$ prepovedanih tipov induciranih poti $P_4$ . . . . .	39
8	Prikaz množice $\{2, 3, 6, 7, 10\}$ prepovedanih tipov induciranih poti $P_4$ . . . . .	40
9	Prikaz množice $\{2, 5, 6, 7, 8\}$ prepovedanih tipov induciranih poti $P_4$ . . . . .	42
10	Prikaz množice $\{2, 5, 6, 7, 10\}$ prepovedanih tipov induciranih poti $P_4$ . . . . .	43
11	Prikaz množice $\{2, 5, 7, 9\}$ prepovedanih tipov induciranih poti $P_4$ . . . . .	48
12	Prikaz množice $\{3, 4, 5, 9\}$ prepovedanih tipov induciranih poti $P_4$ . . . . .	49
13	Prikaz množice $\{2, 3, 6\}$ prepovedanih tipov induciranih poti $P_3$ . . . . .	56
14	Prikaz množice $\{2, 4, 5, 8\}$ prepovedanih tipov induciranih poti $P_4$ . . . . .	59
15	Prikaz množice $\{2, 4, 5, 9\}$ prepovedanih tipov induciranih poti $P_4$ . . . . .	60
16	Prikaz množice $\{2, 5, 7, 8\}$ prepovedanih tipov induciranih poti $P_4$ . . . . .	61
17	Prikaz množice $\{1, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$ prepovedanih tipov induciranih poti $P_4$ . . . . .	62

## Seznam kratic

*idr.* in drugi

*npr.* na primer

*oz.* oziroma

*tj.* to je

## Zahvala

Iskreno se zahvaljujem mentorju prof. dr. Martin Milanič za vso pomoč, nasvete in razlage pri izdelavi magistrskega dela in odlično vodenje skozi vsa leta študija na UP FAMNIT.

Posebno zahvalo si zaslužita tudi izr. prof. dr. Ademir Hujdurović in prof. dr. Štefko Miklavič za dodatno pomoč pri izdelavi magistrskega dela.

Posebno se zahvaljujem tudi preostalim profesorjem na UP FAMNIT, ki so mi bili v veliko pomoč skozi vsa leta izobraževanja in mi bili v veliko podporo.

Zahvala pa gre tudi moji družini, sošudentom, ter preostalim prijateljem, ki so mi stali ob strani in me podpirali skozi vsa leta študija.



# 1 Uvod

V magistrskem delu si bomo ogledali metodo prepoznavanja matematičnih vzorcev, ki so jo leta 1990 uporabili Chvátal, Lenhart in Sbihi [7]. Metodo sta leta 1983 razvila Gurvich in Gvishiani [10] in je uporabna ne le v teoriji grafov, ampak tudi v drugih smereh matematike, na primer v geometriji [10] in v teoriji iger [3, 4].

V nadaljevanju bo vsebina razdeljena na dva dela. Prvi del bo namenjen opisu metode prepoznavanja matematičnih vzorcev in z njo povezanih teoretičnih konceptov. V nadaljevanju tega poglavja bodo definirani osnovni pojmi tako iz teorije grafov kot tudi hipergrafov [1] ter pomembne osnove o Boolovih funkcijah [8], ki predstavljajo pomemben koncept za razumevanje delovanja zgoraj omenjene metode. V drugem poglavju sledi definicija dualnih sistemov hipergrafov, ki so tesno povezani s problemom dualizacije monotonih Boolovih funkcij, glej npr. [11], nato pa v tretjem poglavju sledi še predstavitev same metode prepoznavanja matematičnih vzorcev. V četrtem poglavju bo predstavljen eden izmed algoritmov Fredmana in Khachiyana [9] za problem določitve, ali dve monotoni Boolovi funkciji, podani v popolni disjunktivni normalni obliki, tvorita par dualnih funkcij ali ne.

Drugi del magistrskega dela (poglavja od petega do desetega) bo namenjen zgledom uporabe naslovne metode v teoriji grafov. Na začetku omenjeni avtorji so metodo uporabili za družino popolnih grafov, pri čemer so se vprašali, katere množice vzorcev barvanja točk vsake inducirane poti  $P_4$  z dvema barvama moramo prepovedati, da je graf  $G$ , katerega točke so obarvane z dvema barvama, popoln natanko takrat, ko je vsak od podgrafov induciranih z eno izmed barv popoln. V magistrskem delu bo podobno vprašanje obravnavano še za nekaj drugih družin grafov. Pri tem pa omejitve ne bodo predstavljene zgolj s pomočjo induciranih poti  $P_4$ , ampak bodo obravnavane tudi inducirane poti  $P_3$ . V desetem poglavju bodo zajeti rezultati iz predhodnih poglavij drugega dela in nekatere strukturne posledice, ki jih lahko izpeljemo s pomočjo pridobljenih rezultatov.

## 1.1 Grafi in hipergrafi

*Graf* je matematična struktura, namenjena prikazovanju binarnih relacij med objekti. V splošnem bomo grafe označevali z  $G$ . Graf definiramo kot  $G = (V, E)$ ,

kjer  $V$  označuje množico točk grafa  $G$ ,  $E$  pa označuje multimnožico povezav grafa  $G$  oblike  $\{u, v\} = e \in E$ , kjer sta  $u, v \in V$ . Točki  $u$  in  $v$  sta *sosednji* v grafu  $G$ , če tvorita povezavo. Za  $G = (V, E)$  pišemo tudi  $V(G) = V$  in  $E(G) = E$ .

Naj bo  $G$  graf. Pravimo, da je  $G$  *končen*, če sta  $V$  in  $E$  končni množici. Dve povezavi  $e, f \in E$  sta *vzporedni*, če je  $e \neq f$  in obe povezujeta enak par točk grafa  $G$ . *Zanka* je povezava oblike  $\{v, v\}$  za nek  $v \in V$ . Graf  $G$  je *enostaven*, če nima vzporednih povezav in zank. V nadaljevanju bomo besedo graf uporabili zgolj za končne in enostavne grafe.

Z  $\overline{G}$  bomo označevali *komplement* grafa  $G$ , ki je definiran z množico točk  $V(\overline{G}) := V(G)$  in z množico povezav  $E(\overline{G}) := \{\{u, v\} \mid u, v \in V(\overline{G}), u \neq v \text{ in } \{u, v\} \notin E(G)\}$ . Pot na  $n \in \mathbb{N}$  točkah je graf, katerega množico točk lahko zapišemo v takem zaporedju  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , da je množica povezav enaka  $\{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ . Pot na  $n$  točkah bomo označevali s  $P_n$ . *Dolžina* poti  $P_n$  je po definiciji enaka  $n-1$ . *Cikel* na  $n$  točkah, kjer je  $n \geq 3$ , je graf, katerega množico točk lahko zapišemo v takem zaporedju  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , da je množica povezav enaka  $\{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i \leq n\}$ , kjer je  $v_{n+1} = v_1$ . Cikel na  $n$  točkah bomo označevali s  $C_n$ . *Dolžina* cikla  $C_n$  je po definiciji enaka  $n$ . Z  $N_G(v)$  bomo označevali množico točk grafa  $G$ , ki so sosednje s točko  $v$ .

**Definicija 1.1.** Naj bo  $G$  graf. Graf  $H$  je *podgraf* grafa  $G$ , če in samo če velja:

$$(i) \quad V(H) \subseteq V(G),$$

$$(ii) \quad E(H) \subseteq E(G).$$

Oznaka  $H \subseteq G$  pomeni, da je graf  $H$  podgraf grafa  $G$ .

Naj bo  $v \in V(G)$ , z  $G - v$  bomo označevali podgraf grafa  $G$  definiran z množico točk  $V(G - v) := V(G) \setminus \{v\}$  in množico povezav  $E(G - v) := \{e \in E(G) \mid v \notin e\}$ .

**Definicija 1.2.** Naj bo  $G$  graf. Graf  $H$  je *induciran podgraf* grafa  $G$ , če in samo če velja:

$$(i) \quad H \text{ je podgraf grafa } G \text{ in}$$

$$(ii) \quad \text{za vse } u, v \in V(H) \text{ velja, če je } \{u, v\} \in E(G), \text{ potem je } \{u, v\} \in E(H).$$

Oznaka  $H \subseteq_i G$  pomeni, da je graf  $H$  induciran podgraf grafa  $G$ .

**Definicija 1.3.** Naj bosta  $G$  in  $H$  grafa. Pravimo, da je graf  $G$  *izomorfen* grafu  $H$  natanko tedaj, ko obstaja taka bijekcija  $f : V(G) \rightarrow V(H)$ , da za vsaki dve točki  $u, v \in V(G)$  velja:  $\{u, v\} \in E(G)$  natanko tedaj, ko je  $\{f(u), f(v)\} \in E(H)$ . Če je graf  $G$  izomorfen grafu  $H$ , bomo to označevali z  $G \cong H$ .

**Definicija 1.4.** Naj bo  $\mathcal{F}$  poljubna množica grafov. Pravimo, da je graf  $G$   *$\mathcal{F}$ -prost*, če za vsak graf  $H \subseteq_i G$  velja, da  $H$  ni izomorfen nobenemu izmed grafov iz množice  $\mathcal{F}$ .

Poglejmo si še tako imenovane “popolne grafe”, ki jih bomo obravnavali v petem poglavju. Leta 1961 je francoski matematik Claude Berge predlagal, da se izraz popoln graf uporabi za graf, v katerem je kromatično število vsakega njegovega inducirane podgrafa  $H$  enako kličnemu številu podgrafa  $H$ . Kasneje, leta 1972, je László Lovász dokazal (šibki) izrek o popolnih grafih [12, 13].

**Izrek 1.5** (Šibki izrek o popolnih grafih). *Komplement popolnega grafa je popoln.*

Za nas najpomembnejši pa je krepki izrek o popolnih grafih, ki popolne grafe opiše s pomočjo prepovedanih induciranih podgrafov.

**Izrek 1.6** (Krepki izrek o popolnih grafih). *Graf  $G$  je popoln, če in samo če ne vsebuje induciranih lihih ciklov dolžine vsaj 5 in njihovih komplementov.*

Krepki izrek o popolnih grafih, ki ga je leta 1961 v obliki domneve predstavil Claude Berge, so leta 2002 dokazali Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour in Robin Thomas. Dokaz je bil objavljen leta 2006 v članku [6].

Spoznali smo osnovne definicije iz teorije grafov, ki jih bomo v nadaljevanju potrebovali. Sedaj pa si oglejmo še posplošeno obliko grafov, tako imenovane hipergrafe. Definicije bodo povzete po knjigi [1].

*Hipergraf  $\mathcal{H} = (V, E)$  je definiran z množico točk  $V(\mathcal{H}) = V$  in množico hiperpovezav  $E(\mathcal{H}) = E$ , kjer za vsako hiperpovezavo  $e \in E(\mathcal{H})$  velja, da je  $e \subseteq V(\mathcal{H})$ . Hipergraf  $\mathcal{H}$  je *končen*, če sta množici  $V(\mathcal{H})$  in  $E(\mathcal{H})$  končni. V nadaljevanju bomo obravnavali le končne hipergrafe.*

Iz definicije sledi, da je graf natanko hipergraf, katerega vsaka hiperpovezava je velikosti 2.

**Definicija 1.7.** Hipergraf  $\mathcal{H}$  je *Spernerjev*, če za vsak par hiperpovezav  $e, e' \in E(\mathcal{H})$  velja: če je  $e \subseteq e'$ , potem je  $e = e'$ .

**Definicija 1.8.** *Transverzala* hipergrafa  $\mathcal{H}$  je množica  $t \subseteq V(\mathcal{H})$ , za katero velja, da je  $t \cap e \neq \emptyset$  za vsako hiperpovezavo  $e \in E(\mathcal{H})$ . Transverzala  $t$  je *minimalna*, če nobena prava podmnožica množice  $t$  ni transverzala.

Množico vseh minimalnih transverzal hipergrafa  $\mathcal{H}$  bomo označevali z  $\min\text{Tr}(\mathcal{H})$ .

**Definicija 1.9.** *Transverzalni hipergraf* hipergrafa  $\mathcal{H}$ , z oznako  $\mathcal{H}^T$ , je definiran na naslednji način:

- (i)  $V(\mathcal{H}^T) := V(\mathcal{H})$  in
- (ii)  $E(\mathcal{H}^T) := \min\text{Tr}(\mathcal{H})$ .

## 1.2 Boolove funkcije

*Boolove funkcije* so funkcije oblike  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , kjer je  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\{0, 1\}^n$  pa označuje  $n$ -kratni kartezični produkt množice  $\{0, 1\}$  same s seboj. Funkcija  $f$  torej za argument vzame binarni vektor dolžine  $n$  in mu priredi binarno vrednost 0 ali 1. Število  $n$  je število binarnih spremenljivk, na katerih je funkcija definirana. Funkcijo  $f$  lahko zapišemo tudi kot  $f : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \{0, 1\}$ , kjer so  $x_i$  binarne spremenljivke.

Eden izmed osnovnih načinov za definicijo Boolove funkcije je s pomočjo resničnostne tabele [8]. Resničnostna tabela Boolove funkcije na  $n$  spremenljivkah je popoln seznam vseh  $2^n$  binarnih vektorjev, podan skupaj z vrednostjo funkcije v vsakem izmed vektorjev. Vektor  $x$ , v katerem je vrednost dane Boolove funkcije  $f$  enaka 1, bomo imenovali *resnična točka* funkcije  $f$ . Opazimo lahko, da sta dve Boolovi funkciji enaki natanko tedaj, ko imata enaki resničnostni tabeli (v tem primeru imata seveda tudi enaki množici resničnih točk).

Osnovni Boolovi operandi so konjunkcija ( $x \wedge y$  ali krajše  $xy$ ), disjunkcija ( $x \vee y$ ) in negacija ( $\neg x$  oz.  $\bar{x}$ ). Negacija binarnega vektorja  $x = (x_1, \dots, x_n)$  je podana z zapisom  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . V nadaljevanju pa bomo potrebovali še nekaj pomembnih pravil za delo z Boolovimi funkcijami, ki so opisana v naslednjem izreku.

**Izrek 1.10.** *Za vse  $x, y, z \in \{0, 1\}$  veljajo naslednje identitete:*

- $x \vee 1 = 1$  in  $x \wedge 0 = 0$ ,
- $x \vee 0 = x$  in  $x \wedge 1 = x$ ,
- $x \vee y = y \vee x$  in  $xy = yx$  (*komutativnost*),
- $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$  in  $(xy)z = x(yz)$  (*asociativnost*),
- $x \vee x = x$  in  $xx = x$  (*idempotentnost*),
- $x \vee xy = x$  (*absorbicija*),
- $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$  in  $x(y \vee z) = xy \vee xz$  (*distributivnost*),
- $\overline{\bar{x}} = x$ ,
- $\overline{(x \vee y)} = \bar{x} \wedge \bar{y}$  in  $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$  (*De Morganova zakona*).

Poglejmo si sedaj še nekaj pomembnih definicij.

**Definicija 1.11.** Boolova funkcija  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  je v *disjunktivni normalni obliki* (krajše DNO), če ima obliko

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{k=1}^n c_k,$$

kjer je vsak člen  $c_k$  *elementarna konjunkcija*, tj. konjunkcija nekaj spremenljivk in njihovih negacij,

$$c_k = \bigwedge_{i \in A_k} x_i \wedge \bigwedge_{j \in B_k} \bar{x}_j,$$

pri čemer sta  $A_k$  in  $B_k$  disjunktni podmnožici množice indeksov  $\{1, \dots, n\}$ .

Podobno lahko definiramo tudi konjunktivno normalno obliko (krajše KNO), kjer v izrazu zamenjamo vlogi konjunkcij in disjunkcij.

Dokaz naslednje trditve je povzet po [8].

**Trditev 1.12.** *Vsako Boolovo funkcijo lahko zapišemo v disjunktivni normalni obliki.*

*Dokaz.* Naj bo  $f$  poljubna Boolova funkcija in naj bo  $T$  množica njenih resničnih točk. Poglejmo si sedaj funkcijo z naslednjo obliko

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{y \in T} \left( \bigwedge_{i|y_i=1} x_i \wedge \bigwedge_{j|y_j=0} \bar{x}_j \right).$$

Opazimo, da je  $z \in \{0, 1\}^n$  resnična točka funkcije  $f^*$ , če in samo če obstaja tak  $y \in T$ , da je

$$\bigwedge_{i|y_i=1} z_i \wedge \bigwedge_{j|y_j=0} \bar{z}_j = 1.$$

Iz tega sledi, da je  $y_i = 1$  natanko takrat, ko je  $z_i = 1$  in, da je  $y_j = 0$  natanko takrat, ko je  $z_j = 0$ . Torej je  $y = z$  in imata funkciji enako množico resničnih točk. Posledično velja  $f = f^*$ .  $\square$

**Definicija 1.13.** Naj bo  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  Boolova funkcija. Pravimo, da je  $f$  *monotona* funkcija, če za vsak par  $x, y \in \{0, 1\}^n$  velja: če je  $x \leq y$ , potem je  $f(x) \leq f(y)$ . Pri tem je  $x \leq y$  natanko tedaj, ko je  $x_i \leq y_i$  za vsak  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Definicija 1.14.** Naj bosta  $f, g : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  Boolovi funkciji. Pravimo, da  $f$  *implicira*  $g$ , če za vse vhodne vektorje  $x \in \{0, 1\}^n$  velja  $f(x) \leq g(x)$ . *Implikant* funkcije  $f$  je poljubna elementarna konjunkcija  $c = \bigwedge_{i \in A} x_i \wedge \bigwedge_{j \in B} \bar{x}_j$ , ki implicira  $f$ . *Praimplikant* funkcije  $f$  je tak implikant funkcije  $f$ , ki ne implicira nobenega drugega implikanta funkcije  $f$ . Boolova funkcija  $f$  je podana v *popolni* DNO, če je podana v DNO, ki je disjunkcija vseh praimplikantov funkcije  $f$ .

## 2 Dualnost predstavljena na dva načina

V nadaljevanju si bomo pogledali dva različna načina za predstavitev dualnosti. En je povezan s Spernerjevimi hipergrafi, drugi pa z Boolovimi funkcijami. Oba načina bomo potrebovali v naslednjem poglavju, kjer si bomo ogledali opis metode prepoznavanja matematičnih vzorcev, in nato tudi v drugem delu magistrskega dela.

Poglejmo si najprej tako imenovano “vertex-colouring” lemo [1].

**Lema 2.1.** *Naj bosta  $\mathcal{H}$  in  $\mathcal{H}'$  Spernerjeva hipergrafa definirana na množici točk  $V$ . Potem je  $\mathcal{H}' = \mathcal{H}^T$  natanko tedaj, ko za vsak par  $(A, B)$ , za katerega je  $A, B \subseteq V$ ,  $A \cup B = V$  in  $A \cap B = \emptyset$  velja: ali obstaja taka hiperpovezava  $e \in E(\mathcal{H})$ , da je  $e \subseteq A$ , ali pa obstaja taka hiperpovezava  $f \in E(\mathcal{H}')$ , da je  $f \subseteq B$ .*

Dokaz leme 2.1 je na voljo v knjigi [1]. Prva pomembna posledica leme 2.1 je naslednja.

**Izrek 2.2.** *Naj bosta  $\mathcal{H}$  in  $\mathcal{H}'$  Spernerjeva hipergrafa. Potem je  $\mathcal{H}' = \mathcal{H}^T$ , če in samo če je  $\mathcal{H} = \mathcal{H}'^T$ .*

Dokaz sledi direktno z uporabo leme 2.1. Naslednji izrek je pomembna posledica izreka 2.2.

**Izrek 2.3.** *Naj bo  $\mathcal{H}$  Spernerjev hipergraf. Potem je  $(\mathcal{H}^T)^T = \mathcal{H}$ .*

*Dokaz.* Po izreku 2.2 sledi, da je  $(\mathcal{H}^T)^T = \mathcal{H}'^T = \mathcal{H}$ . □

Sedaj si lahko pogledamo še definicijo dualnosti Boolovih funkcij, ki jo bomo v nadaljevanju povezali s transverzalnostjo hipergrafov.

**Definicija 2.4.** *Dualna funkcija Boolove funkcije  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  je Boolova funkcija  $f^d : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , definirana s pravilom  $f^d(x) := \overline{f(\overline{x})}$  za vsak  $x \in \{0, 1\}^n$ .*

Po definiciji lahko sedaj zapišemo naslednji izrek.

**Izrek 2.5.** *Naj bo  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  Boolova funkcija. Potem je  $(f^d)^d(x) = f(x)$ .*

*Dokaz.* Po definiciji sledi, da je  $(f^d)^d(x) = \overline{f^d(\overline{x})} = \overline{\overline{f(\overline{\overline{x}})}} = f(x)$ . □

Poglejmo sedaj, kako lahko povežemo izreka 2.3 in 2.5.

**Definicija 2.6.** Naj bosta  $\mathcal{H}_1$  in  $\mathcal{H}_2$  hipergrafa. Pravimo, da je hipergraf  $\mathcal{H}_1$  *izomorfen* hipergrafu  $\mathcal{H}_2$ , če obstaja taka bijekcija  $f : V(\mathcal{H}_1) \rightarrow V(\mathcal{H}_2)$ , da za vsako množico  $e \subseteq V(\mathcal{H}_1)$  velja, da je  $e \in E(\mathcal{H}_1)$  natanko tedaj, ko je  $f(e) = \{f(v) \mid v \in e\} \in E(\mathcal{H}_2)$ . Če je hipergraf  $\mathcal{H}_1$  izomorfen hipergrafu  $\mathcal{H}_2$ , bomo to označevali s  $\mathcal{H}_1 \cong \mathcal{H}_2$ .

Definirajmo sedaj ekvivalenčno relacijo na množici vseh hipergrafov s fiksno množico točk.

**Definicija 2.7.** Naj bosta  $\mathcal{H}_1$  in  $\mathcal{H}_2$  hipergrafa definirana na isti množici točk  $V$ . Potem je hipergraf  $\mathcal{H}_1$  *ekvivalenten* hipergrafu  $\mathcal{H}_2$  natanko tedaj, ko za vsako hiperpovezavo  $e_1 \in E(\mathcal{H}_1)$  obstaja taka hiperpovezava  $e_2 \in E(\mathcal{H}_2)$ , da je  $e_2 \subseteq e_1$ , in za vsako hiperpovezavo  $e_2 \in E(\mathcal{H}_2)$  obstaja taka hiperpovezava  $e_1 \in E(\mathcal{H}_1)$ , da je  $e_1 \subseteq e_2$ . Dejstvo, da je hipergraf  $\mathcal{H}_1$  ekvivalenten hipergrafu  $\mathcal{H}_2$ , bomo označevali s  $\mathcal{H}_1 \sim \mathcal{H}_2$ .

Iz definicije izomorfizma hipergrafov sledi, da  $\mathcal{H}_1 \cong \mathcal{H}_2$  implicira  $\mathcal{H}_1 \sim \mathcal{H}_2$ . Velja tudi, da je relacija  $\sim$  ekvivalenčna relacija. Z  $\min(E(\mathcal{H}))$  bomo označili množico vseh hiperpovezav hipergrafa  $\mathcal{H}$ , ki so minimalne glede na relacijo inkluzije, tj. za  $e \in E(\mathcal{H})$  velja  $e \in \min(E(\mathcal{H}))$ , če in samo če za vse  $e' \in E(\mathcal{H})$  velja: če je  $e' \subseteq e$ , potem je  $e' = e$ .

**Lema 2.8.** Naj bosta  $\mathcal{H}_1$  in  $\mathcal{H}_2$  hipergrafa definirana na isti množici točk. Hipergraf  $\mathcal{H}_1$  je ekvivalenten hipergrafu  $\mathcal{H}_2$  natanko tedaj, ko je  $\min(E(\mathcal{H}_1)) = \min(E(\mathcal{H}_2))$ .

*Dokaz.* Naj velja  $\mathcal{H}_1 \sim \mathcal{H}_2$ . Naj bo  $e_1$  poljubna minimalna hiperpovezava hipergrafa  $\mathcal{H}_1$ . Iz definicije ekvivalentnosti velja, da obstaja taka hiperpovezava  $e_2 \in E(\mathcal{H}_2)$ , da je  $e_2 \subseteq e_1$ . Denimo sedaj, da  $e_2$  ni minimalna hiperpovezava hipergrafa  $\mathcal{H}_2$ , torej obstaja hiperpovezava  $e'_2 \subset e_2$  v hipergrafu  $\mathcal{H}_2$ . Ponovno, po definiciji ekvivalentnosti sledi, da obstaja taka hiperpovezava  $e'_1$  hipergrafa  $\mathcal{H}_1$ , da je  $e'_1 \subseteq e'_2$ . Dobili smo torej  $e'_1 \subseteq e'_2 \subset e_2 \subseteq e_1$ , kar je protislovje s tem, da je hiperpovezava  $e_1$  minimalna v hipergrafu  $\mathcal{H}_1$ . Posledično velja, da je  $\min(E(\mathcal{H}_1)) \subseteq \min(E(\mathcal{H}_2))$ . Podobno pokažemo, da velja tudi  $\min(E(\mathcal{H}_2)) \subseteq \min(E(\mathcal{H}_1))$ . Torej velja, da sta množici minimalnih hiperpovezav hipergrafov  $\mathcal{H}_1$  in  $\mathcal{H}_2$  enaki.

Pokažimo sedaj še implikacijo v obratno smer. Naj bo  $\min(E(\mathcal{H}_1)) = \min(E(\mathcal{H}_2))$ . Naj bo  $e_1$  poljubna hiperpovezava hipergrafa  $\mathcal{H}_1$ . Po definiciji množice  $\min(E(\mathcal{H}_1))$  velja, da obstaja taka hiperpovezava  $e \in \min(E(\mathcal{H}_1))$ , da je  $e \subseteq e_1$ . Ker pa hiperpovezava  $e$  pripada množici  $\min(E(\mathcal{H}_1))$ , po predpostavki velja, da je  $e \in \min(E(\mathcal{H}_2))$ . Torej obstaja taka hiperpovezava hipergrafa  $\mathcal{H}_2$ , bolj natančno kar hiperpovezava  $e$ , da je  $e \subseteq e_1$ . Podobno pokažemo tudi, da za poljubno hiperpovezavo  $e_2$  hipergrafa  $\mathcal{H}_2$  obstaja taka hiperpovezava  $e'$  hipergrafa  $\mathcal{H}_1$ , da je  $e' \subseteq e_2$ . Po definiciji velja, da je  $\mathcal{H}_1 \sim \mathcal{H}_2$ .  $\square$

**Posledica 2.9.** Če sta  $\mathcal{H}_1$  in  $\mathcal{H}_2$  Spernerjeva hipergrafa z isto množico točk, potem je  $\mathcal{H}_1 \sim \mathcal{H}_2$  natanko tedaj, ko je  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ .

Posledica sledi iz dejstva, da v Spernerjevem hipergrafu  $\mathcal{H}$  velja, da je množica njegovih hiperpovezav  $E(\mathcal{H})$  enaka množici  $\min(E(\mathcal{H}))$ . Iz zgornje posledice pa sledi, da množico vseh ekvivalenčnih razredov hipergrafov z množico točk  $V$ , glede na relacijo  $\sim$ , lahko identificiramo z množico vseh Spernerjevih hipergrafov z množico točk  $V$ . Vsak ekvivalenčni razred namreč vsebuje natanko enega od Spernerjevih hipergrafov z množico točk  $V$ , ki ga lahko izberemo za predstavnika njegovega ekvivalenčnega razreda.

Naj bo sedaj  $\mathcal{H}$  poljuben hipergraf z množico točk  $V(\mathcal{H}) = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Za vsako točko  $v_i \in V(\mathcal{H})$  definiramo Boolovo spremenljivko  $x_i$ . Hipergrafu  $\mathcal{H}$  nato priredimo Boolovo funkcijo  $f_{\mathcal{H}} : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , definirano z naslednjo DNO [10]:

$$f_{\mathcal{H}}(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{e \in E(\mathcal{H})} \bigwedge_{v_i \in e} x_i.$$

Naj bo  $\varphi : \mathcal{H} \mapsto f_{\mathcal{H}}$  preslikava, ki vsakemu hipergrafu  $\mathcal{H}$  priredi Boolovo funkcijo  $f_{\mathcal{H}}$ . Naj bo  $F_{\mathcal{H}}$  popolna disjunktivna normalna oblika funkcije  $f_{\mathcal{H}}$ . Iz definicije sledi, da sta  $f_{\mathcal{H}}$  in  $F_{\mathcal{H}}$  monotoni Boolovi funkciji.

*Opomba 2.10.* Iz definicije  $f_{\mathcal{H}}$  sledi, da je  $f_{(V, \emptyset)}(x) = 0$  in  $f_{(V, \{v\})}(x) = 1$  za poljuben vektor  $x \in \{0, 1\}^n$ .

**Lema 2.11.** Preslikava  $\varphi$  preslika Spernerjev hipergraf  $\mathcal{H}$  v  $F_{\mathcal{H}}$ .

*Dokaz.* Dokaz s protislovjem. Naj bo  $\mathcal{H}$  Spernerjev hipergraf. Če je  $f_{\mathcal{H}} \neq F_{\mathcal{H}}$ , tedaj obstajata taki hiperpovezavi  $e, e' \in E(\mathcal{H})$ ,  $e \neq e'$ , da izraz

$$\bigwedge_{v_i \in e} x_i \text{ implicira izraz } \bigwedge_{v_i \in e'} x_i.$$

To pa po definiciji preslikave  $\varphi$  pomeni, da je  $e' \subseteq e$ . Dobili smo protislovje s predpostavko, da je  $\mathcal{H}$  Spernerjev hipergraf, torej preslikava  $\varphi$  preslika Spernerjev hipergraf  $\mathcal{H}$  v  $F_{\mathcal{H}}$ .  $\square$

**Lema 2.12.** Naj bo  $\mathcal{H}$  poljuben hipergraf. Naj bo  $\mathcal{H}'$  hipergraf z množico točk  $V(\mathcal{H})$  in množico hiperpovezav  $E(\mathcal{H}') = \min(E(\mathcal{H}))$ . Potem sta Boolovi funkciji  $F_{\mathcal{H}}$  in  $F_{\mathcal{H}'}$  enaki.

*Dokaz.*  $\mathcal{H}'$  je očitno Spernerjev hipergraf, torej je  $f_{\mathcal{H}'} = F_{\mathcal{H}'}$ . Ker je  $E(\mathcal{H}') \subseteq E(\mathcal{H})$  sledi, da  $F_{\mathcal{H}'}$  implicira  $f_{\mathcal{H}}$ , torej implicira tudi njeno popolno disjunktivno normalno obliko  $F_{\mathcal{H}}$ . Ker pa velja, da za vsako hiperpovezavo  $e \in E(\mathcal{H})$  obstaja taka hiperpovezava  $e' \in E(\mathcal{H}')$ , da je  $e' \subseteq e$ , pa sledi, da  $f_{\mathcal{H}}$  implicira  $F_{\mathcal{H}'}$ , oz.  $F_{\mathcal{H}}$  implicira  $F_{\mathcal{H}'}$ . Torej velja  $F_{\mathcal{H}} = F_{\mathcal{H}'}$ .  $\square$



**Izrek 2.13.** Preslikava  $\varphi$  definirana zgoraj je bijekcija med množico vseh ekvivalenčnih razredov hipergrafov, glede na relacijo  $\sim$ , definiranih na množici točk  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , in množico vseh ekvivalenčnih razredov monotonih Boolovih funkcij na  $n$  spremenljivkah podanih v DNO, glede na relacijo enakosti Boolovih funkcij.

*Dokaz.* Od prej vemo, da lahko za množico ekvivalenčnih razredov hipergrafov, glede na relacijo  $\sim$ , vzamemo kar množico vseh Spernerjevih hipergrafov na množici točk  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Da preslikava  $\varphi$  deluje injektivno na množici vseh Spernerjevih hipergrafov sledi neposredno iz posledice 2.9 in leme 2.11. Pokazati moramo le še, da za vsako monotono Boolovo funkcijo v popolni DNO obstaja Spernerjev hipergraf, ki se vanjo preslika s preslikavo  $\varphi$ . Naj bo  $F$  poljubna monotona Boolova funkcija v popolni DNO, definirana na  $n$  spremenljivkah.

$$F(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{e \in E} \bigwedge_{x_i \in e} x_i,$$

kjer je  $E$  poljubna (morebiti prazna) množica podmnožic množice  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Ker je  $F$  v popolni DNO, velja, da za poljubno množico  $e \in E$  ne obstaja nobena druga množica  $e' \in E$ , da je  $e' \subseteq e$ . Definirajmo sedaj hipergraf  $\mathcal{H}$  na naslednji način. Množica točk je podana s predpisom  $V(\mathcal{H}) = \{x_1, \dots, x_n\}$ , množica povezav pa s predpisom  $E(\mathcal{H}) = E$ . Opazili smo že, da za vsak par različnih množic  $e, e' \in E$  velja:  $e \not\subseteq e'$  in  $e' \not\subseteq e$ . Iz tega sledi, da je hipergraf  $\mathcal{H}$  Spernerjev. Očitno je po definiciji preslikave  $\varphi$ ,  $F_{\mathcal{H}} = F$ . Pokazali smo torej, da preslikava  $\varphi$  na množici Spernerjevih hipergrafov deluje tako injektivno kot surjektivno, torej deluje bijektivno.  $\square$

Izrek 2.13 je pomemben, saj nam omogoča, da delamo z Boolovimi funkcijami namesto s hipergrafi, kar bomo v nadaljevanju večkrat potrebovali. Poglejmo si sedaj naslednjo definicijo dualnega sistema za hipergrafe, ki izhaja iz članka Gurvicha in Gvishianija [10], uporabo pa se lahko najde tudi v člankih [3, 4].

**Definicija 2.14.** Naj bosta  $\mathcal{H}_1$  in  $\mathcal{H}_2$  hipergrafa definirana na isti množici točk (tj.  $V(\mathcal{H}_1) = V(\mathcal{H}_2)$ ). Hipergrafa  $\mathcal{H}_1$  in  $\mathcal{H}_2$  tvorita *dualen sistem*, če velja naslednje:

- (i) za vsako hiperpovezavo  $e_1 \in E(\mathcal{H}_1)$  in za vsako hiperpovezavo  $e_2 \in E(\mathcal{H}_2)$  je  $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$ ,
- (ii) za vsako množico  $t \subseteq V$  velja: če je  $t$  transverzala hipergrafa  $\mathcal{H}_1$ , potem obstaja taka hiperpovezava  $e \in E(\mathcal{H}_2)$ , da je  $e \subseteq t$ ,
- (iii) za vsako množico  $t \subseteq V$  velja: če je  $t$  transverzala hipergrafa  $\mathcal{H}_2$ , potem obstaja taka hiperpovezava  $e \in E(\mathcal{H}_1)$ , da je  $e \subseteq t$ .

Prvi pogoj zahteva, da je vsaka hiperpovezava  $e_1 \in E(\mathcal{H}_1)$  transverzala hipergrafa  $\mathcal{H}_2$  in da je vsaka hiperpovezava  $e_2 \in E(\mathcal{H}_2)$  transverzala hipergrafa  $\mathcal{H}_1$ . Drugi in tretji pogoj pa zahtevata, da  $E(\mathcal{H}_1)$  vsebuje vse minimalne transverzale hipergrafa  $\mathcal{H}_2$  in  $E(\mathcal{H}_2)$  vsebuje vse minimalne transverzale hipergrafa  $\mathcal{H}_1$ . Poglejmo si sedaj še dve pomembni lemi.

**Lema 2.15.** *Naj bo  $\mathcal{H}$  Spernerjev hipergraf. Potem hipergrafa  $\mathcal{H}$  in  $\mathcal{H}^T$  tvorita dualen sistem.*

Dokaz leme sledi neposredno po definiciji dualnega sistema. S pomočjo Boolovih funkcij pa lahko lemo zapišemo na naslednji ekvivalenten način.

**Lema 2.16.** *Naj bo  $\mathcal{H}$  Spernerjev hipergraf. Potem sta Boolovi funkciji  $f_{\mathcal{H}}$  in  $f_{\mathcal{H}^T}$  medsebojno dualni.*

V drugem delu tega magistrskega dela bomo s pomočjo dualnosti Boolovih funkcij poiskali pare hipergrafov, ki tvorijo dualen sistem.

### 3 Metoda prepoznavanja matematičnih vzorcev

V nadaljevanju si bomo ogledali metodo prepoznavanja matematičnih vzorcev. Metoda je tesno povezana z dualnimi sistemi hipergrafov, ki smo jih spoznali v prejšnjem poglavju. Metodo bomo najprej definirali v splošnem po članku [10] in si na koncu poglavja ogledali kratek primer njene uporabe.

Naj bo  $\mathcal{O}$  poljubna množica objektov (struktur, predmetov ipd.). Naj bo  $S \subseteq \mathcal{O}$  množica vseh objektov z določeno iskano lastnostjo  $\ell$ . Naj bo  $P$  množica lastnosti, ki nas zanimajo. Pri tem velja, da je za vsak  $p \in P$  množica  $\mathcal{O}_p \subseteq \mathcal{O}$  množica vseh objektov z lastnostjo  $p$ .

**Definicija 3.1.** Naj bo  $t \subseteq P$ . Potem rečemo, da je  $t$  *S-izrek*, če vsak objekt  $o \in \mathcal{O}$ , za katerega so vse lastnosti  $p \in t$  resnične, pripada množici  $S$ . Naj bo  $e \subseteq P$ . Potem rečemo, da je  $e$  *S-protiprimer* (ali krajše: *S-primer*), če obstaja tak objekt  $o \in \mathcal{O}$ , za katerega so vse lastnosti  $p \in e$  resnične, ki ne pripada množici  $S$ .

Na podlagi tega lahko definiramo dva hipergrafa  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{O}, S, P)$  in  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{O}, S, P)$ , kjer je  $\mathcal{E}$  hipergraf komplementov *S*-primerov in  $\mathcal{T}$  hipergraf *S*-izrekov (glej [3, 4, 10]). In sicer, definiramo ju na naslednji način:

$$(i) \quad V(\mathcal{E}) = V(\mathcal{T}) = P,$$

- (ii) za vsako množico  $t \subseteq P$  velja, da je  $t$  hiperpovezava hipergrafa  $\mathcal{T}$  natanko tedaj, ko je  $t$  *S*-izrek, oz.

$$\bigcap_{p \in t} \mathcal{O}_p \subseteq S,$$

in

- (iii) za vsako množico  $e \subseteq P$  velja, da je  $e$  hiperpovezava hipergrafa  $\mathcal{E}$  natanko tedaj, ko je množica  $P \setminus e$  *S*-primer, oz.

$$\bigcap_{p \in P \setminus e} \mathcal{O}_p \not\subseteq S.$$

Opazimo lahko, da za vsako podmnožico  $P' \subseteq P$  velja, ali je  $P'$  *S*-izrek, ali je  $P'$  *S*-primer. To sledi iz dejstva, da za vsak  $P'$ , ali obstaja objekt  $o \in \mathcal{O} \setminus S$ , za katerega

so vse lastnosti  $p \in P'$  resnične, ali pa ne obstaja noben tak objekt, od koder sledi, da vsak objekt, za katerega so lastnosti  $p \in P'$  resnične, pripada množici  $S$ . V prvem primeru to pomeni, da je  $P'$   $S$ -primer, v drugem pa, da je  $P'$   $S$ -izrek.

**Posledica 3.2.** *Množici vseh  $S$ -izrekov (hiperpovezav  $E(\mathcal{T})$ ) in vseh  $S$ -primerov (komplementi hiperpovezav  $E(\mathcal{E})$ ) razdelita množico vseh podmnožic množice  $P$  na dva disjunktna dela.*

**Izrek 3.3.** *Naj bo  $t \subseteq P$   $S$ -izrek. Če je množica  $t' \subseteq P$  in je  $t \subseteq t'$ , potem velja, da je  $t'$  prav tako  $S$ -izrek.*

*Dokaz.* Naj bo  $t$   $S$ -izrek in naj bo  $t \subseteq t'$ . Ker je  $t$   $S$ -izrek, velja, da je

$$\bigcap_{p \in t} \mathcal{O}_p \subseteq S.$$

Hkrati pa, ker je  $t \subseteq t'$ , velja, da je

$$\bigcap_{p' \in t'} \mathcal{O}_{p'} \subseteq \bigcap_{p \in t} \mathcal{O}_p.$$

To pa pomeni, da je

$$\bigcap_{p' \in t'} \mathcal{O}_{p'} \subseteq S.$$

Torej je tudi  $t'$   $S$ -izrek. □

**Izrek 3.4.** *Naj bo  $e \subseteq P$   $S$ -primer. Če je množica  $e' \subseteq P$  in je  $e' \subseteq e$ , potem velja, da je  $e'$  prav tako  $S$ -primer.*

*Dokaz.* Naj bo  $e$   $S$ -primer in naj bo  $e' \subseteq e$ . Ker je  $e$   $S$ -primer, velja, da

$$\bigcap_{p \in e} \mathcal{O}_p \not\subseteq S.$$

Hkrati pa, ker je  $e' \subseteq e$ , velja, da je

$$\bigcap_{p \in e} \mathcal{O}_p \subseteq \bigcap_{p' \in e'} \mathcal{O}_{p'}.$$

To pa pomeni, da

$$\bigcap_{p' \in e'} \mathcal{O}_{p'} \not\subseteq S.$$

Torej je tudi  $e'$   $S$ -primer. □

**Trditev 3.5.** *Hipergrafa  $\mathcal{T}$  in  $\mathcal{E}$  tvorita dualen sistem.*

Dokaz zgornje trditve je na voljo v članku [10] (poglavje 4, izrek 5).

Ker hipergrafa  $\mathcal{T}$  in  $\mathcal{E}$  predstavljata dualen sistem, iz izrekov 3.3 in 3.4 sledi, da zadošča poiskati vse minimalne  $S$ -izreke (minimalne hiperpovezave hipergrafa  $\mathcal{T}$ ) in vse maksimalne  $S$ -primerne (komplemente minimalnih hiperpovezav hipergrafa  $\mathcal{E}$ ). V nadaljevanju bomo tako večkrat uporabili naslednjo operacijo na hipergrafih.

**Definicija 3.6.** Naj bo  $\mathcal{H}$  hipergraf. Hipergraf  $\text{Min}(\mathcal{H})$  je definiran z množico točk  $V(\text{Min}(\mathcal{H})) := V(\mathcal{H})$  in z množico povezav  $E(\text{Min}(\mathcal{H})) := \min(E(\mathcal{H}))$ .

Za vsak hipergraf  $\mathcal{H}$  je hipergraf  $\text{Min}(\mathcal{H})$  Spernerjev. Posledično sta tudi hipergrafa  $\text{Min}(\mathcal{T})$  in  $\text{Min}(\mathcal{E})$  Spernerjeva.

Da bi zagotovili, da je naše razumevanje množice objektov, ki jih preučujemo in ki pripadajo množici  $S$  natančno opisano glede na množico lastnosti  $P$ , zadošča poiskati hipergrafa  $\text{Min}(\mathcal{T})$  in  $\text{Min}(\mathcal{E})$ , ki tvorita dualen sistem. Iz poglavja 2 vemo, da si lahko za to pomagamo z Boolovimi funkcijami, natančneje z monotonimi Boolovimi funkcijami v popolni disjunktivni normalni obliki. In sicer, zadošča poiskati vse komplemente maksimalnih  $S$ -primerov in nato poiskati dual Boolove funkcije, ki predstavlja hipergraf  $\text{Min}(\mathcal{E})$ . Na koncu pa je potrebno dokazati, da so vsi praimplikanti dualne Boolove funkcije res veljavni, tj. da so (minimalni)  $S$ -izreki.

**Primer 3.7.** Naj bo  $\mathcal{O}$  množica vseh trikotnikov. Naj bo  $S$  množica vseh enakokrakih pravokotnih trikotnikov. Očitno je  $S \subseteq \mathcal{O}$ . Nadalje,  $P = \{p_1, p_2, p_3\}$  je množica lastnosti, kjer velja:

- $p_1$ : ima pravi kot,
- $p_2$ : dve stranici sta enako dolgi,
- $p_3$ : ima kot  $\frac{\pi}{4}$ .

Hipergraf minimalnih  $S$ -izrekov  $\text{Min}(\mathcal{T})$  je za dan primer definiran z  $V(\text{Min}(\mathcal{T})) = P$  in z  $E(\text{Min}(\mathcal{T})) = \{\{p_1, p_2\}, \{p_1, p_3\}\}$ . Hipergraf minimalnih komplementov  $S$ -primerov  $\text{Min}(\mathcal{E})$  pa je definiran na enaki množici točk  $V(\text{Min}(\mathcal{E})) = P$  in z množico  $E(\text{Min}(\mathcal{E})) = \{\{p_1\}, \{p_2, p_3\}\}$ . Očitno je, da hipergrafa predstavljata dualen sistem. Takoj lahko opazimo, da so vsi elementi množice  $E(\text{Min}(\mathcal{T}))$  res vsi minimalni  $S$ -izreki. To pomeni, da če so lastnosti poljubne hiperpovezave  $e \in E(\text{Min}(\mathcal{T}))$  za nek trikotnik resnične, potem je trikotnik zagotovo enakokrak in pravokoten. V nasprotnem primeru, če katero izmed lastnosti pozabimo, lahko najdemo primer trikotnika, ki ni enakokrak ali ni pravokoten. Množica vseh maksimalnih  $S$ -primerov je enaka množici komplementov vseh hiperpovezav iz množice  $E(\text{Min}(\mathcal{E}))$ . V tem primeru je to natanko množica  $E(\text{Min}(\mathcal{E}))$ . Poglejmo si sedaj še primere trikotnikov, ki ne pripadajo množici  $S$  in imajo: prvič

lastnost  $p_1$  in drugič lastnosti  $p_2$  in  $p_3$ . V prvem primeru je to npr. pravokotni trikotnik z dolžinami stranic 3, 4 in 5, ki ni enakokrak, v drugem primeru pa je to npr. enakokrak trikotnik s koti velikosti  $\frac{3\pi}{8}$ ,  $\frac{3\pi}{8}$  in  $\frac{\pi}{4}$ , ki pa ni pravokoten.

Posledično lahko rečemo, da je naše razumevanje množice  $S$  glede na množico  $P$  natančno opisano s hipergrafoma  $\mathcal{T}$  in  $\mathcal{E}$ . ▲

V nadaljevanju si bomo ogledali enega izmed algoritmov za preverjanje dualnosti Boolovih funkcij.

## 4 Algoritem Fredmana in Khachiyana za preverjanje dualnosti monotonih Boolovih funkcij

V tem poglavju bomo spoznali algoritem Fredmana in Khachiyana iz članka [9] objavljenega leta 1996. V njem sta opisana dva algoritma za preverjanje medsebojne dualnosti dveh monotonih Boolovih funkcij podanih v disjunktivni normalni obliki. Prvi algoritem to preveri v času  $n^{\mathcal{O}(\log^2(n))}$ , drugi pa v času  $n^{\mathcal{O}(\log(n))}$ , kjer je  $n$  skupno število vseh členov obeh Boolovih funkcij. Logaritem v zapisu je dvojiški in v nadaljevanju, kjer bomo podrobno spoznali zgolj prvega izmed obeh algoritmov, so vsi logaritmi prav tako dvojiški. Glavni cilj tega poglavja je preverjanje medsebojne dualnosti, vendar pa je omenjen algoritem možno uporabiti tudi za dualiziranje dane monotone Boolove funkcije v disjunktivni normalni obliki. Leme in dokazi so povzeti iz zgoraj omenjenega članka s podrobnejšo obrazložitvijo.

Za naravno število  $N$  naj bo  $[N]$  množica prvih  $N$  naravnih števil. Naj bosta  $f = f(x_1, \dots, x_N)$  in  $g = g(x_1, \dots, x_N)$  monotoni Boolovi funkciji v popolni DNO. Torej ju lahko zapišemo kot:

$$f = \bigvee_{I \in F} \bigwedge_{i \in I} x_i \quad \text{in} \quad g = \bigvee_{J \in G} \bigwedge_{j \in J} x_j,$$

kjer sta  $F$  in  $G$  množici indeksnih množic praimplikantov funkcij  $f$  in  $g$ , množice  $I \in F$  in  $J \in G$  pa so podmnožice množice  $[N]$ . Z algoritmom, ki ga bomo predstavili, želimo narediti naslednje [9, 11]:

- preveriti, ali sta funkciji  $f$  in  $g$  medsebojno dualni:

$$f(x_1, \dots, x_N) = \bar{g}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N) \quad \text{za vsak} \quad x = (x_1, \dots, x_N) \in \{0, 1\}^N, \quad (\mathcal{D})$$

- če nista, pa želimo poiskati tak binarni vektor  $x \in \{0, 1\}^N$ , da velja:

$$f(x_1, \dots, x_N) = g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N). \quad (\mathcal{D}^*)$$

Denimo, da Boolovi funkciji  $f$  in  $g$  nista medsebojno dualni. Denimo še, da je  $G$  podmnožica množice indeksnih množic praimplikantov Boolove funkcije  $f^d$ . V tem primeru lahko poiščemo novo indeksno množico  $J \in F^d \setminus G$ , kjer  $F^d$  označuje množico indeksnih množic praimplikantov Boolove funkcije  $f^d$  (glej npr. [2, 9]). Z zaporednim reševanjem tega problema bomo vselej prišli do dualne funkcije  $f^d$ .

Sedaj si pogledajmo primer, ko sta monotoni Boolovi funkciji  $f$  in  $g$ , vsaka podana v popolni DNO, medsebojno dualni. Potem lahko pokažemo naslednje [9]:

$$I \cap J \neq \emptyset \quad \text{za vsak par } I \in F \quad \text{in} \quad J \in G. \quad (\text{A.1})$$

Denimo, da to ni res. Torej obstajata taki množici  $I$  in  $J$ , da velja  $I \cap J = \emptyset$ . Potem karakteristični vektor množice  $I$  zadošča pogoju  $(\mathcal{D}^*)$ , torej smo prišli do protislovja s predpostavko, da sta funkciji  $f$  in  $g$  medsebojno dualni.

Še več, za medsebojno dualni Boolovi funkciji, obe podani v popolni DNO, veljata tudi naslednji dve lastnosti [9]:

$$\max\{|I| \mid I \in F\} \leq |G| \quad \text{in} \quad \max\{|J| \mid J \in G\} \leq |F|, \quad (\text{A.2})$$

in

$$\bigcup\{I \mid I \in F\} = \bigcup\{J \mid J \in G\}. \quad (\text{A.3})$$

Lastnost (A.2) očitno velja, saj pri iskanju dualne Boolove funkcije lahko pogledamo vse možnosti, kjer iz vsake indeksne množice praimplikantov vzamemo natanko po en element, na koncu pa ohranimo le tiste množice izvzetih elementov, ki so minimalne glede na relacijo inkluzije. S tem smo poiskali natanko vse praimplikante dualne Boolove funkcije, torej tudi dualno Boolovo funkcijo v njeni popolni DNO. Ker je število praimplikantov funkcije  $f$  natanko  $|F|$ , sledi, da za vsako množico  $J$  velja  $|J| \leq |F|$ . Popolnoma simetrično sledi, da za vsako množico  $I$  velja  $|I| \leq |G|$ .

Poglejmo si sedaj še lastnost (A.3). Denimo, da obstaja tak indeks  $i \in I$  za nek  $I \in F$ , da  $i \notin J$  za vsak  $J \in G$ . Potem za karakteristični vektor  $x$  množice  $I \setminus \{i\}$  velja, da je  $f(x) = g(\bar{x}) = 0$  [9]. Po lastnosti (A.1) sledi, da je za poljuben  $J \in G$ ,  $J \cap I \setminus \{i\} \neq \emptyset$ . Torej za karakteristični vektor  $x$  velja, da je  $\overline{g(\bar{x})} = 1$ , oz.  $g(\bar{x}) = 0$ . Ker je  $I$  praimplikant funkcije  $f$ , pa velja, da je  $f(x) = 0$ . Prišli smo torej do protislovja z medsebojno dualnostjo funkcij  $f$  in  $g$ .

V nadaljevanju poglavja bomo tako predpostavili, da funkciji  $f$  in  $g$  zadostujeta lastnostim (A.1), (A.2) in (A.3). Hkrati bomo označili z  $n$  skupno število praimplikantov obeh funkcij, torej  $n = |F| + |G|$ . Naj bo  $x = (x_1, \dots, x_N)$  slučajen Boolov vektor, pri čemer je vsak izmed možnih  $2^N$  Boolovih vektorjev enako verjeten. Verjetnost za vsakega izmed vektorjev je torej enaka  $P(x) = 2^{-N}$ . Definirajmo sedaj naslednjo slučajno



spremenljivko, in sicer:

$$Q(x) = \left| \left\{ I \in F \mid \bigwedge_{i \in I} x_i = 1 \right\} \right| + \left| \left\{ J \in G \mid \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j = 1 \right\} \right|.$$

Poglejmo si sedaj pričakovano vrednost te slučajne spremenljivke. Opazimo, da prvi člen vsote predstavlja število praimplikantov  $I \in F$ , za katere je  $\bigwedge_{i \in I} x_i = 1$ . Definiramo lahko torej indikatorsko slučajno spremenljivko  $A_I(x)$  s predpisom

$$A_I(x) = 1 \text{ natanko tedaj, ko velja } \bigwedge_{i \in I} x_i = 1.$$

Podobno lahko definiramo indikatorsko slučajno spremenljivko  $B_J(x)$  s predpisom

$$B_J(x) = 1 \text{ natanko tedaj, ko velja } \bigwedge_{j \in J} \bar{x}_j = 1.$$

Slučajno spremenljivko  $Q(x)$  lahko sedaj zapišemo kot:

$$Q(x) = \sum_{I \in F} A_I(x) + \sum_{J \in G} B_J(x).$$

Za vse  $I \in F$  je pričakovana vrednost indikatorske spremenljivke  $A_I$  enaka verjetnosti  $P(A_I = 1)$ . Podobno, za vse  $J \in G$  je pričakovana vrednost indikatorske spremenljivke  $B_J$  enaka verjetnosti  $P(B_J = 1)$ . Iz tega pa z uporabo linearnosti pričakovane vrednosti sledi, da je pričakovana vrednost spremenljivke  $Q$  enaka:

$$\begin{aligned} E(Q) &= \sum_{I \in F} P(A_I = 1) + \sum_{J \in G} P(B_J = 1) \\ &= \sum_{I \in F} 2^{-|I|} + \sum_{J \in G} 2^{-|J|}. \end{aligned}$$

Sedaj lahko zapišemo naslednjo lemo iz članka [9], ki jo bomo potrebovali v nadaljevanju.

**Lema 4.1.** *Naj bosta  $f$  in  $g$  dve medsebojno dualni Boolovi funkciji. Potem velja, da je  $E(Q) \geq 1$ .*

*Dokaz.* Predpostavimo, da sta Boolovi funkciji  $f$  in  $g$  medsebojno dualni. Denimo, da velja  $E(Q) < 1$ . Ker je slučajna spremenljivka  $Q$  celoštevilska, sledi, da je  $Q(x) = 0$  za nek vektor  $x \in \{0, 1\}^N$ . Iz definicije slučajne spremenljivke  $Q$  pa sledi, da velja  $f(x) = g(\bar{x}) = 0$ . Torej po enakosti  $(\mathcal{D}^*)$  sledi, da funkciji  $f$  in  $g$  nista medsebojno dualni, kar je v protislovju s predpostavko.  $\square$

Na začetku poglavja smo omenili, da želimo z algoritmom, ki si ga bomo ogledali, bodisi pokazati, da sta Boolovi funkciji  $f$  in  $g$  medsebojno dualni, ali pa poiskati

binarni vektor, ki je protiprimer dualnosti. Pokažimo sedaj, da če funkciji nista medsebojno dualni, potem lahko protiprimer poiščemo v polinomskem času.

Naj bosta  $f$  in  $g$  Boolovi funkciji, za kateri je  $E(Q) < 1$ . Za vsak  $i \in \{1, \dots, N\}$  lahko uporabimo enačbo za pričakovano vrednost  $E(Q)$ , da poračunamo pogojno pričakovano vrednost slučajne spremenljivke  $Q$  za vektorja  $(y_1, \dots, y_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_N)$  in  $(y_1, \dots, y_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_N)$ , glede na izbiro prvih  $i-1$  vrednosti. Za  $y_i \in \{0, 1\}$  nato izberemo tisto vrednost, ki nam da manjšo pričakovano vrednost [9]. Očitno bomo na ta način v  $N$  korakih uspeli poiskati protiprimer, kjer na vsakem koraku poračunamo le dve pričakovani vrednosti s pomočjo enačbe za pričakovano vrednost  $E(Q)$ . Pomembna opazka je, da lahko obstaja vektor  $x$ , za katerega je  $Q(x) = 0$ , in je pričakovana vrednost  $E(Q) \geq 1$ .

Sedaj se moramo osredotočiti le še na dokazovanje, da sta dani Boolovi funkciji resnično dualni. Poglejmo si najprej posledico leme 4.1.

**Posledica 4.2.** *Naj bosta  $f$  in  $g$  medsebojno dualni Boolovi funkciji. Naj bo  $m = \min\{|I| \mid I \in F \cup G\}$ . Potem je  $m \leq \log(n)$ .*

*Dokaz.*

$$n2^{-m} = (|F| + |G|)2^{-m} \geq \sum_{I \in F} 2^{-|I|} + \sum_{J \in G} 2^{-|J|} = E(Q) \geq 1,$$

sledi, da je

$$n2^{-m} \geq 1.$$

Posledično je

$$n \geq 2^m,$$

od koder dobimo

$$\log(n) \geq m. \quad \square$$

Naj bo sedaj  $\epsilon \in (0, 1]$ . Definirajmo

$$\epsilon(f, i) = \frac{|\{I \mid i \in I\}|}{|F|},$$

kot frekvenco pojavitev spremenljivke  $x_i$  v Boolovi funkciji  $f$ . Podobno lahko definiramo tudi frekvenco pojavitev spremenljivke  $x_i$  v Boolovi funkciji  $g$  kot

$$\epsilon(g, i) = \frac{|\{J \mid i \in J\}|}{|G|}.$$

Pravimo, da se spremenljivka  $x_i$  pojavi v funkciji  $f$  s frekvenco vsaj  $\epsilon$ , če je  $\epsilon(f, i) \geq \epsilon$ . Podobno lahko rečemo, da se spremenljivka  $x_i$  pojavi s frekvenco vsaj  $\epsilon$  v paru Boolovih funkcij  $f$  in  $g$ , če je  $|F||G| \geq 1$  in se  $x_i$  pojavi s frekvenco vsaj  $\epsilon$  v  $f$  ali v  $g$ .

**Lema 4.3.** *Naj bosta  $f$  in  $g$  medsebojno dualni Boolovi funkciji in naj velja  $|F||G| \geq 1$ . Potem obstaja spremenljivka  $x_i$ , ki se pojavi s frekvenco vsaj  $1/\log(n)$  v paru funkcij  $f$  in  $g$ .*

*Dokaz.* Iz posledice 4.2 sledi, da v uniji  $F \cup G$  obstaja praimplikant velikosti največ  $\log(n)$ . Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je to množica  $J' \in G$ , sicer lahko vlogi funkcij  $f$  in  $g$  zamenjamo. Iz lastnosti (A.1) sledi, da je  $J' \cap I \neq \emptyset$  za vsak  $I \in F$ . Od tod pa sledi, da se vsaj ena spremenljivka, denimo  $x_i$ , kjer je  $i \in J'$ , pojavi v funkciji  $f$  s frekvenco vsaj  $1/|J'|$ . Ker pa je  $|J'| \leq \log(n)$ , sledi, da je  $\epsilon(f, i) \geq 1/\log(n)$ .  $\square$

Preden spoznamo sam potek delovanja algoritma, si moramo pogledati še eno lastnost Boolovih funkcij, pomembno za delovanje algoritma. In sicer, naj bosta  $f(x)$  in  $g(x)$  dve Boolovi funkciji, obe podani v popolni DNO, kjer je  $x = (x_1, \dots, x_N)$ . Naj bo  $x_i$  ena izmed spremenljivk vektorja  $x$ . Poglejmo si sedaj naslednjo rekurzivno strukturo funkcij  $f$  in  $g$ :

$$f(x) = x_i f_0(y) \vee f_1(y) \quad \text{in} \quad g(x) = x_i g_0(y) \vee g_1(y),$$

kjer je  $y = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N)$ , množice indeksnih množic praimplikantov Boolovih funkcij  $f_0, f_1, g_0$  in  $g_1$  pa so zaporedoma naslednje:

- $F_0 = \{I \setminus \{i\} \mid i \in I, I \in F\}$ ,
- $F_1 = \{I \mid i \notin I, I \in F\}$ ,
- $G_0 = \{J \setminus \{i\} \mid i \in J, J \in G\}$  in
- $G_1 = \{J \mid i \notin J, J \in G\}$ .

**Lema 4.4.** *Boolovi funkciji  $f$  in  $g$  sta medsebojno dualni, če in samo če je  $f_1$  dualna funkciji  $g_0 \vee g_1$  in je  $g_1$  dualna funkciji  $f_0 \vee f_1$ .*

*Dokaz.* Denimo, da sta Boolovi funkciji  $f$  in  $g$  medsebojno dualni. Torej je  $f(x) = \overline{g(\bar{x})}$  za vse  $x \in \{0, 1\}^N$ . Iz tega sledi, da lahko zapišemo:

$$x_i f_0(y) \vee f_1(y) = \overline{\overline{x_i g_0(\bar{y})} \vee \overline{g_1(\bar{y})}},$$

kjer enakost velja za vsak  $y = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \in \{0, 1\}^{N-1}$  in za vsako vrednost, 0 ali 1, spremenljivke  $x_i$ . Denimo, da je  $x_i = 0$ . Iz tega sledi, da je:

$$f_1(y) = \overline{g_0(\bar{y})} \vee \overline{g_1(\bar{y})}.$$

Ker to velja za poljuben  $y \in \{0, 1\}^{N-1}$ , sta funkciji  $f_1$  in  $g_0 \vee g_1$  medsebojno dualni. Denimo sedaj, da je  $x_i = 1$ . Iz tega pa sledi, da je:

$$f_0(y) \vee f_1(y) = \overline{g_1(\bar{y})},$$

od koder sledi, da sta funkciji  $f_0 \vee f_1$  in  $g_1$  medsebojno dualni.

Pokažimo sedaj implikacijo v obratno smer. To bomo storili tako, da bomo predpostavili, da Boolovi funkciji  $f$  in  $g$  nista medsebojno dualni, in pokazali, da od tod sledi, da bodisi funkciji  $f_1$  in  $g_0 \vee g_1$  nista medsebojno dualni ali pa funkciji  $f_0 \vee f_1$  in  $g_1$  nista medsebojno dualni. Ker funkciji  $f$  in  $g$  nista medsebojno dualni, obstaja nek  $x \in \{0, 1\}^N$ , za katerega velja  $f(x) = g(\bar{x})$ , ali, ekvivalento:

$$x_i f_0(y) \vee f_1(y) = \bar{x}_i g_0(\bar{y}) \vee g_1(\bar{y}).$$

Denimo najprej, da je  $x_i = 0$ . Iz tega sledi, da mora veljati:

$$f_1(y) = g_0(\bar{y}) \vee g_1(\bar{y}).$$

To pa pomeni, da funkciji  $f_1$  in  $g_0 \vee g_1$  nista medsebojno dualni. Denimo sedaj, da je  $x_i = 1$ . V tem primeru pa dobimo:

$$f_0(y) \vee f_1(y) = g_1(\bar{y}),$$

od koder sledi, da funkciji  $f_0 \vee f_1$  in  $g_1$  nista medsebojno dualni. □

Sedaj si lahko pogledamo samo delovanje algoritma za preverjanje dualnosti dveh Boolovih funkcij, podanih v popolni DNO [9].

#### ALGORITEM:

Vhodni podatki: par monotoni Boolovih funkcij, podanih v popolni DNO, ki zadoščata pogojem leme (A.1).

1. Iz obeh funkcij  $f$  in  $g$  odstrani vse implikante, ki niso praimplikanti.
2. Preveri pogoje lastnosti (A.2), (A.3) in leme 4.1. Če kateri izmed pogojev ni izpolnjen, potem funkciji nista dualni in lahko po postopku, opisanem za lemo 4.1, poiščemo vektor  $x$ , ki zadošča pogoju enakosti ( $\mathcal{D}^*$ ).
3. Če je  $|F||G| \leq 1$ , potem je  $|F| \leq 1$  in  $|G| \leq 1$  in imamo trivialen primer.
4. Če je  $|F||G| \geq 2$ , potem poišči spremenljivko  $x_i$ , ki se v paru funkcij  $f$  in  $g$  pojavi s frekvenco vsaj  $1/\log(n)$  in zapiši funkciji  $f$  in  $g$  v njuni rekurzivni obliki glede na spremenljivko  $x_i$ . Nato rekuzivno pokliči algoritem na dveh parih Boolovih funkcij ( $f_1, g_0 \vee g_1$ ) in ( $g_1, f_0 \vee f_1$ ).

Očitno je, da so prvi trije koraki izvedljivi v polinomskem času. Posledično si moramo bolj natančno ogledati le četrti korak. Označimo z  $A(f, g)$  število rekurzivnih klicev četrtega koraka. Število  $A(f, g)$  omejimo navzgor na naslednji način, glej [9].

**Lema 4.5.**  $A(f, g) \leq n^{4 \log^2(n)}$  za vsak par vhodnih funkcij  $f$  in  $g$ , kjer je  $n = |F| + |G|$ .

*Dokaz.* Predpostavimo, da je frekvenca  $\epsilon(f, i)$  vsaj  $\epsilon$ , kjer privzamemo, da je  $\epsilon = 1/\log(n)$  in  $n = |F| + |G|$ . Naj bo  $v = |F||G| \geq 2$ , sicer imamo trivialen primer. Posledično je tudi  $n \geq 2$ . V nadaljevanju bomo število rekurzivnih klicev četrtega koraka poiskali v odvisnosti od  $v$ -ja, torej poiskali bomo omejitev za vrednost  $A(v)$ , ki predstavlja maksimalno število rekurzivnih klicev algoritma. Ker je  $\epsilon(f, i)$  vsaj  $\epsilon$ , sledi, da je  $|F_1| \leq |F|(1 - \epsilon)$  in  $|G_0 \cup G_1| \leq |G|$  v prvem rekurzivnem klicu za  $(f_1, g_0 \vee g_1)$ . Za drugi rekurzivni klic  $(g_1, f_0 \vee f_1)$  pa velja, da je  $|F_0 \cup F_1| \leq |F|$  in  $|G_1| \leq |G| - 1$ .

Iz tega lahko sedaj izpeljemo, da je

$$A(v) \leq 1 + A((1 - \epsilon)v) + A(v - 1), \quad \text{kjer je } A(1) = 1.$$

Poglejmo sedaj, kako lahko omejimo vrednost  $A(v - 1)$ . Če namesto  $v$  vstavimo v zgornjo enačbo  $v - 1$ , dobimo naslednjo neenakost:

$$A(v - 1) \leq 1 + A((1 - \epsilon)(v - 1)) + A(v - 2).$$

Ker pa je  $(1 - \epsilon)(v - 1) \leq (1 - \epsilon)v$ , sledi, da je

$$A(v - 1) \leq 1 + A((1 - \epsilon)v) + A(v - 2).$$

Vrednost  $A(v)$  lahko tako omejimo na naslednji način:

$$A(v) \leq 2 + 2A((1 - \epsilon)v) + A(v - 2).$$

Opazimo lahko, da če ta postopek ponovimo  $k$ -krat, pridemo do naslednje neenakosti za poljuben  $k \leq v$ :

$$A(v) \leq k + kA((1 - \epsilon)v) + A(v - k).$$

Postavimo sedaj  $k = v\epsilon$ . Iz tega pa naprej sledi, da je

$$A(v) \leq v\epsilon + v\epsilon A((1 - \epsilon)v) + A(v - v\epsilon),$$

kar je zagotovo manjše ali enako

$$(1 + 2v\epsilon)A((1 - \epsilon)v).$$

Posledično dobimo neenakost  $A(v) \leq (1 + 2v\epsilon)^{\log(v)/\epsilon}$ . Sedaj pa, ker je  $v = |F||G| \leq (|F| + |G|)^2/4 = n^2/4$  in ker je  $\epsilon = 1/\log(n)$ , sledi, da je

$$1 + 2v\epsilon \leq 1 + (2n^2/4)(1/\log(n)) \leq n^2.$$

Hkrati pa velja tudi, da je

$$\begin{aligned}
 \log(v)/\epsilon &= \log(n^2/4) \log(n) \\
 &= (\log(n^2) - \log(4)) \log(n) \\
 &= (2 \log(n) - \log(4)) \log(n) \\
 &= 2 \log^2(n) - \log(4) \log(n) \\
 &\leq 2 \log^2(n).
 \end{aligned}$$

Iz tega pa sledi, da je  $A(v) \leq (1 + 2v\epsilon)^{\log(v)/\epsilon} \leq n^{4 \log^2(n)}$ .  $\square$

Poglejmo si sedaj primer delovanja predstavljenega algoritma do prvega rekurzivnega klica.

**Primer 4.6.** Naj bo  $x = (x_1, \dots, x_6)$  Boolov vektor in naj bosta Boolovi funkciji  $f$  in  $g$  definirani na naslednji način:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x_1 x_2 x_4 \vee x_2 x_4 x_6 \vee x_2 x_3 \vee x_4 x_5, \\
 g(x) &= x_2 x_4 \vee x_2 x_5 \vee x_3 x_4 \vee x_1 x_3 x_5 x_6.
 \end{aligned}$$

Funkciji  $f$  in  $g$  sta že v popolni DNO, zato lahko nadaljujemo na drugi korak algoritma. Iz zapisa funkcij sledi, da je  $|F| = |G| = 4$ . Torej velja, da je  $n = 8$ . Preverimo sedaj pogoja (A.2) in (A.3) ter pogoj iz leme 4.1.

Opazimo, da velja  $\max\{|I| \mid I \in F\} = 3 \leq 4 = |G|$  in  $\max\{|J| \mid J \in G\} = 4 \leq 4 = |F|$ . Pogoj (A.2) je torej izpolnjen. Nadalje, obe funkciji vsebujeta indekse od 1 do 6, torej je tudi pogoj (A.3) izpolnjen. Poglejmo si sedaj še lemo 4.1.  $E(Q) = \frac{25}{16} \geq 1$ , torej je tudi ta pogoj izpolnjen. Ker je  $|F||G| > 1$ , lahko sedaj nadaljujemo na četrti korak algoritma. Frekvenca je sledeča:  $\epsilon = 1/\log(8) = \frac{1}{3}$ . Sedaj moramo poiskati spremenljivko, ki se v paru funkcij  $f$  in  $g$  pojavi s frekvenco vsaj  $\epsilon$ .

- $\epsilon(f, 1) = \frac{1}{4} \leq \epsilon$  in  $\epsilon(g, 1) = \frac{1}{4} \leq \epsilon$ ,
- $\epsilon(f, 2) = \frac{3}{4} \geq \epsilon$  in  $\epsilon(g, 2) = \frac{1}{2} \geq \epsilon$ .

Spremenljivka  $x_2$  se torej v paru funkcij  $f$  in  $g$  pojavi s frekvenco vsaj  $\epsilon$ . Iz tega sledi, da za Boolov vektor  $y = (x_1, x_3, \dots, x_6)$  funkciji  $f$  in  $g$  lahko zapišemo v naslednji obliki:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x_2 f_0(y) \vee f_1(y) \\
 &= x_2 (x_1 x_4 \vee x_4 x_6 \vee x_3) \vee (x_4 x_5), \\
 g(x) &= x_2 g_0(y) \vee g_1(y) \\
 &= x_2 (x_4 \vee x_5) \vee (x_3 x_4 \vee x_1 x_3 x_5 x_6).
 \end{aligned}$$

Naslednji korak algoritma sta dva rekurzivna klica, en na paru Boolovih funkcij  $(f_1, g_0 \vee g_1)$  in en na paru Boolovih funkcij  $(f_0 \vee f_1, g_1)$ . V prvem primeru bo nova vrednost parametra  $n$  enaka  $n = 1 + 4 = 5$ , v drugem primeru pa bo nova vrednost parametra  $n$  enaka  $n = 4 + 2 = 6$ . Ob rekurzivnih klicih moramo zato ustrezno popraviti tudi vrednosti posameznih parametrov. Za dan primer bi z rekurzivnim ponavljanjem ugotovili, da sta funkciji  $f$  in  $g$  medsebojno dualni. ▲

## 5 Uvodne definicije za uporabo metode

V tem poglavju si bomo ogledali splošne definicije glede uporabe metode prepoznavanja matematičnih vzorcev na nekaterih določenih družinah grafov, ki jih bomo potrebovali v nadaljnjih poglavjih. V nadaljevanju magistrskega dela bomo grafe pogosto obravnavali kot opremljene z nekim 2-barvanjem, tj. z neko poljubno, a fiksno funkcijo iz množice točk grafa  $G$  v množico barv  $\{R, B\}$  (pri čemer ni nujno, da sta vsaki sosednji točki obarvani različno). Ali je graf 2-obarvan ali ne, bo vselej razvidno iz konteksta.

V dokazovanju lem in izrekov v poglavjih od šestega do desetega si bomo pomagali z naslednjo definicijo.

**Definicija 5.1.** Naj bo  $H$  inducirani podgraf 2-obarvanega grafa  $G$ . Pravimo, da je graf  $H$  *monokromatičen*, če so vse točke grafa  $H$  pobarvane z isto barvo. V nasprotnem primeru je *bikromatičen*.

Množico lastnosti  $P$  bomo v nadaljevanju definirali prvič z množico vseh 2-obarvanih poti  $P_3$  in drugič z množico vseh 2-obarvanih poti  $P_4$ . Z  $\mathcal{G}$  bomo označevali splošno družino grafov (tj. množico grafov, ki imajo določeno skupno lastnost). Oblika izrekov, ki nas zanimajo, je v obeh primerih naslednja.

**Izrek 5.2** (Model iskanega izreka [7]). *Naj bo  $T \subseteq P$  in naj bo  $G$  poljuben 2-obarvan graf, ki za vsak  $i \in T$  ne vsebuje nobene inducirane poti  $P_3$  (oziroma  $P_4$ ) tipa  $i$ . Potem graf  $G$  pripada družini  $\mathcal{G}$  natanko tedaj, ko vsak izmed podgrafov grafa  $G$ , inducirani s točkami iste barve, pripada družini  $\mathcal{G}$ .*

Vprašanje, na katerega bomo v nadaljevanju odgovorili, je sledeče: *Za katere množice  $T \subseteq P$  dobimo izrek po zgornjem modelu, če je  $\mathcal{G}$  ena izmed naslednjih družin grafov: popolni grafi, grafi brez induciranih sodih ciklov,  $\{C_3, C_6, C_9, \dots\}$ -prosti grafi in  $\{C_4, C_5, C_7, C_8, \dots\}$ -prosti grafi? Z uporabo metode prepoznavanja matematičnih vzorcev bomo za vsako izmed teh družin in za obe možni množici lastnosti  $P$  poiskali vse možne podmnožice  $T$ , za katere dobimo izrek po zgornjem modelu.*



**Lema 5.3.** *Naj bo  $G$  graf, ki pripada eni izmed naslednjih družin grafov: popolni grafi, grafi brez induciranih sodih ciklov,  $\{C_3, C_6, C_9, \dots\}$ -prosti grafi in  $\{C_4, C_5, C_7, C_8, \dots\}$ -prosti grafi. Naj bo  $H \subseteq_i G$ . Potem graf  $H$  pripada isti družini grafov.*

Če je torej  $G$  poljuben 2-obarvan graf, ki pripada eni izmed zgornjih družin grafov, potem vsak izmed podgrafov grafa  $G$ , induciran s točkami iste barve, pripada isti družini grafov. Zanimiva je torej implikacija v obratno smer. Posledično bomo vsakič predpostavili, da vsak izmed podgrafov grafa  $G$ , induciran s točkami iste barve, pripada izbrani družini grafov. Pomembna opazka je, da so za nas monokromatični cikli ustreznih dolžin, v primeru popolnih grafov pa tudi monokromatični komplementi ciklov ustreznih dolžin (glej izrek 1.6), nezanimivi, saj je naša predpostavka, da vsak izmed podgrafov induciranih s točkami iste barve pripada izbrani družini grafov. V naslednjih poglavjih bomo poiskali vse omejitve za barvanja induciranih poti  $P_3$  (oziroma  $P_4$ ) za prej omenjene družine grafov. Da bi to storili, pa moramo najprej definirati tipe induciranih poti  $P_3$  oz.  $P_4$ , ki se lahko pojavijo.

## Tipi induciranih poti $P_3$

**Definicija 5.4.** Tipi vseh možnih različnih 2-obarvanih poti na treh točkah  $a, b$  in  $c$  in s povezavama  $ab$  in  $bc$  so naslednji:

tip 1:  $RRR$ , tj. točke  $a, b, c$  so rdeče,

tip 2:  $RRB$ , tj. točki  $a, b$  sta rdeči in točka  $c$  je bela,  
ali  $BRR$ , tj. točka  $a$  je bela in točki  $b, c$  sta rdeči,

tip 3:  $RBR$ , tj. točki  $a, c$  sta rdeči in točka  $b$  je bela,

tip 4:  $RBB$ , tj. točka  $a$  je rdeča in točki  $b, c$  sta beli,  
ali  $BBR$ , tj. točki  $a, b$  sta beli in točka  $c$  je rdeča,

tip 5:  $BRB$ , tj. točka  $b$  je rdeča in točki  $a, c$  sta beli,

tip 6:  $BBB$ , tj. točke  $a, b, c$  so bele.

S tem smo definirali vse možne različne tipe 2-obarvanih induciranih poti  $P_3$ , ki se lahko pojavijo, in lahko sedaj definiramo še množico lastnosti  $P = \{p_1, \dots, p_6\}$ , kjer  $p_i$  označuje lastnost grafa, da prepovemo pojavitev poti tipa  $i$  v grafu. Za lažji zapis bomo v tem in v vseh nadaljnjih poglavjih lastnost  $p_i$  označevali kar z indeksom  $i$  tipa poti, ki je prepovedan.

Poglejmo si sedaj naslednjo permutacijo množice  $P$  v ciklični obliki:

$$\rho : (1, 6)(2, 4)(3, 5).$$

Permutacija  $\rho$  preslika množico tipov 2-obarvanih poti  $P_3$  samo nase tako, da vsakemu tipu poti priredi tip poti, ki ga dobimo, če zamenjamo vloži barv.

## Tipi induciranih poti $P_4$

V definiciji tipov poti na štirih točkah, ki se lahko pojavijo, sledimo članku Chvátala idr. [7].

**Definicija 5.5.** Tipi vseh možnih različnih 2-obarvanih poti na štirih točkah  $a, b, c$  in  $d$  in s povezavami  $ab, bc$  in  $cd$  so naslednji:

- tip 1:  $RRRR$ , tj. točke  $a, b, c, d$  so rdeče,
- tip 2:  $RRRB$ , tj. točke  $a, b, c$  so rdeče in točka  $d$  je bela,  
ali  $BRRR$ , tj. točka  $a$  je bela in točke  $b, c, d$  so rdeče,
- tip 3:  $RRBR$ , tj. točke  $a, b, d$  so rdeče in točka  $c$  je bela,  
ali  $RBRR$ , tj. točke  $a, c, d$  so rdeče in točka  $b$  je bela,
- tip 4:  $RRBB$ , tj. točki  $a, b$  sta rdeči in točki  $c, d$  sta beli,  
ali  $BBRR$ , tj. točki  $a, b$  sta beli in točki  $c, d$  sta rdeči,
- tip 5:  $RBRB$ , tj. točki  $a, c$  sta rdeči in točki  $b, d$  sta beli,  
ali  $BRBR$ , tj. točki  $a, c$  sta beli in točki  $b, d$  sta rdeči,
- tip 6:  $RBBR$ , tj. točki  $a, d$  sta rdeči in točki  $b, c$  sta beli,
- tip 7:  $BRRB$ , tj. točki  $b, c$  sta rdeči in točki  $a, d$  sta beli,
- tip 8:  $RBBB$ , tj. točka  $a$  je rdeča in točke  $b, c, d$  so bele,  
ali  $BBBR$ , tj. točke  $a, b, c$  so bele in točka  $d$  je rdeča,
- tip 9:  $BRBB$ , tj. točka  $b$  je rdeča in točke  $a, c, d$  so bele,  
ali  $BBRB$ , tj. točka  $c$  je rdeča in točke  $a, b, d$  so bele,
- tip 10:  $BBBB$ , tj. točke  $a, b, c, d$  so bele.

S tem smo definirali vse možne različne tipe 2-obarvanih induciranih poti  $P_4$ , ki se lahko pojavijo, in lahko sedaj definiramo še množico lastnosti  $P^* = \{p_1^*, \dots, p_{10}^*\}$ , kjer  $p_i^*$  označuje lastnost grafa, da prepovemo pojavitev poti tipa  $i$  v grafu. Za lažji zapis bomo v tem in v vseh nadaljnjih poglavjih lastnost  $p_i^*$  označevali kar z indeksom  $i$  tipa

poti, ki je prepovedan.

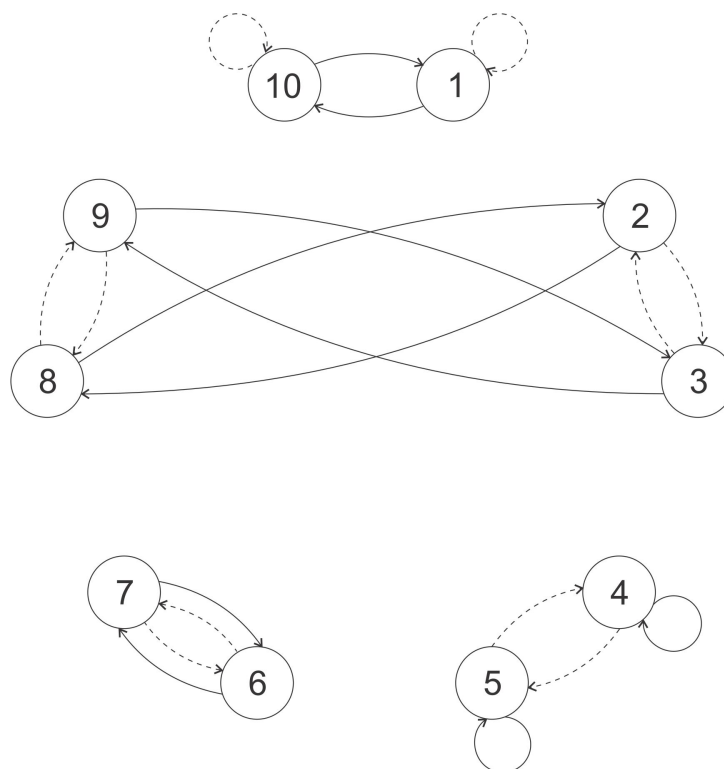
Poglejmo si sedaj naslednji dve permutaciji množice  $P^*$  v ciklični obliki [7]:

$$\sigma : (2, 3)(4, 5)(6, 7)(8, 9)(1)(10),$$

ki preslika množico tipov 2-obarvanih poti  $P_4$  samo nase tako, da določen tip poti preslika v komplementarni tip poti (tj. tip poti, ki ga dobimo, če vzamemo komplement 2-obarvane poti  $P_4$  določenega izbranega tipa) in:

$$\tau : (1, 10)(2, 8)(3, 9)(6, 7)(4)(5),$$

ki preslika množico tipov 2-obarvanih poti  $P_4$  samo nase tako, da vsakemu tipu poti priredi tip poti, ki ga dobimo, če zamenjamo vlogi barv. Opazimo lahko, da sta permutaciji  $\sigma$  in  $\tau$  involuciji (tj.  $\sigma^2$  in  $\tau^2$  sta identični permutaciji) in da permutaciji komutirata. Obe lastnosti sta jasno razvidni na sliki 1.



Slika 1: Prikaz delovanja permutacij  $\sigma$  (črtkana črta) in  $\tau$  (polna črta) na množici tipov induciranih poti  $P_4$ .

Permutacije  $\rho$ ,  $\sigma$  in  $\tau$  bomo v nadaljnjih poglavjih večkrat uporabili. Prav tako bomo v nadaljevanju večkrat uporabili oznako  $RB$ , oz.  $BR$ , za par sosednjih točk, kjer je prva točka pobarvana s prvo barvo iz oznake, druga točka pa z drugo barvo iz oznake. Sedaj pa si lahko ogledamo rezultate, pridobljene s pomočjo definicij iz tega poglavja in s pomočjo uporabe metode prepoznavanja matematičnih vzorcev.

## 6 Popolni grafi

V tem poglavju si bomo ogledali rezultate članka z naslovom “*Two-Colourings that Decompose Perfect Graphs*” [7]. Omenjen članek predstavlja poglavitno motivacijo za delo, predstavljeno v nadaljevanju tega magistrskega dela. Krepki izrek o popolnih grafih (izrek 1.6) bomo uporabili za izpeljavo novih dokazov že znanih rezultatov iz članka [7], iz leta 1990, in za dokazovanje novih rezultatov, pridobljenih s pomočjo uporabe metode prepoznavanja matematičnih vzorcev. V tem poglavju bomo za množico  $\mathcal{O}$  vzeli množico vseh 2-obarvanih grafov. Za množico  $S$  pa bomo vzeli množico vseh 2-obarvanih grafov, za katere velja naslednja ekvivalenca: graf  $G$  je popoln natanko tedaj, ko je vsak izmed podgrafov grafa  $G$ , induciran s točkami iste barve popoln graf.

### 6.1 Omejitve za barvanja točk induciranih poti $P_3$

Za množico lastnosti  $P$ , ki nas zanimajo, bomo najprej vzeli množico vseh tipov induciranih poti  $P_3$  (definicija 5.4). Za izpeljavo  $S$ -izrekov s pomočjo krepkega izreka o popolnih grafih moramo najprej poiskati vse množice tipov induciranih poti  $P_3$ , ki se lahko pojavijo na 2-obarvanih lihih ciklih dolžine vsaj 5 ali na njihovih komplementih. Na ta način bomo dobili množico vseh komplementov  $S$ -primerov.

**Primer 6.1.** Naj bo  $C$  cikel dolžine 5 pobarvan z dvema barvama  $R$  in  $B$  na naslednji način (v cikličnem vrstnem redu):

$$RRBBR.$$

Inducirane poti  $P_3$ , ki se na tem ciklu pojavijo, so zaporedoma naslednje:  $RRB$  tipa 2,  $RBB$  tipa 4,  $BBR$  tipa 4,  $BRR$  tipa 2 in  $RRR$  tipa 1. Množica tipov induciranih poti  $P_3$  na ciklu  $C$  je torej  $\{1, 2, 4\}$ . ▲

Opazimo, da moramo prepovedati vsaj enega izmed tipov poti  $P_3$ , ki se pojavijo na posameznem ciklu, da bi zagotovili, da se tak cikel v grafu ne more pojaviti. Nadalje zadošča obravnavati zgolj tiste lihe cikle dolžine vsaj 5, oz. njihove komplemente, za katere je množica tipov induciranih poti  $P_3$  minimalna glede na relacijo inkluzije.

Poglejmo si sedaj, katere so vse minimalne množice tipov induciranih poti  $P_3$ , ki se pojavijo na lihih ciklih dolžine vsaj 5 in njihovih komplementih. Z analizo ciklov

dolžine 5, 7, 9 in njihovih komplementov lahko postavimo domnevo, da so minimalne množice tipov induciranih poti  $P_3$  natanko naslednje:

- $\{1, 2, 4\}$  – 5 cikel  $RRRBB$ ,
- $\{2, 4, 6\} = \rho(\{1, 2, 4\})$ ,
- $\{2, 3\}$  – 9 cikel  $RRBRRBRRB$ ,
- $\{4, 5\} = \rho(\{2, 3\})$ .

Navedene 4 množice predstavljajo hiperpovezave hipergrafa  $\text{Min}(\mathcal{E})$  definirane na množici točk  $P$ . Hipergrafu pripadajoča Boolova funkcija v popolni DNO je tako sledeča:

$$F_{\text{Min}(\mathcal{E})} : \{0, 1\}^6 \rightarrow \{0, 1\},$$

$$F_{\text{Min}(\mathcal{E})}(x) = x_1x_2x_4 \vee x_2x_4x_6 \vee x_2x_3 \vee x_4x_5.$$

Z uporabo pravil za računanje z Boolovimi funkcijami (izrek 1.10) lahko sedaj poračunamo dualno Boolovo funkcijo  $F_{\text{Min}(\mathcal{E})}^d : \{0, 1\}^6 \rightarrow \{0, 1\}$ .

$$F_{\text{Min}(\mathcal{E})}^d(x) = (x_1 \vee x_2 \vee x_4)(x_2 \vee x_4 \vee x_6)(x_2 \vee x_3)(x_4 \vee x_5)$$

$$= x_2x_4 \vee x_2x_5 \vee x_3x_4 \vee x_1x_3x_5x_6$$

Množice  $\{2, 4\}$ ,  $\{2, 5\}$ ,  $\{3, 4\}$  in  $\{1, 3, 5, 6\}$  so po lemah 2.15 in 2.16 hiperpovezave hipergrafa minimalnih  $S$ -izrekov  $\text{Min}(\mathcal{T})$ . V nadaljevanju bomo dokazali, da so to res  $S$ -izreki.

**Izrek 6.2.** *Naj bo  $T$  ena izmed naslednjih podmnožic množice  $P$ :*

1.  $\{2, 4\}$ ,
2.  $\{2, 5\}$ ,
3.  $\{3, 4\}$ ,
4.  $\{1, 3, 5, 6\}$ .

*Naj bodo točke grafa  $G$  pobarvane z dvema barvama, rdečo ( $R$ ) in belo ( $B$ ), tako, da graf  $G$  ne vsebuje nobene inducirane poti  $P_3$  tipa  $i \in T$ . Potem velja, da je  $G$  popoln graf natanko tedaj, ko je vsak izmed podgrafov grafa  $G$ , induciranih s točkami iste barve, popoln graf.*

Spomnimo, da izrek zadošča pokazati le v eni smeri, saj vemo, da če je celoten graf  $G$  popoln, potem je tudi vsak njegov inducirani podgraf popoln.

**Lema 6.3.** Če je množica  $T \subseteq P$   $S$ -izrek, potem je množica  $\rho(T)$  tudi  $S$ -izrek.

Lema očitno drži, saj če zamenjamo vloži rdeče in bele barve, nismo spremenili ničesar bistvenega v zvezi s popolnostjo. Torej velja, da je množica  $\rho(T)$  res  $S$ -izrek.

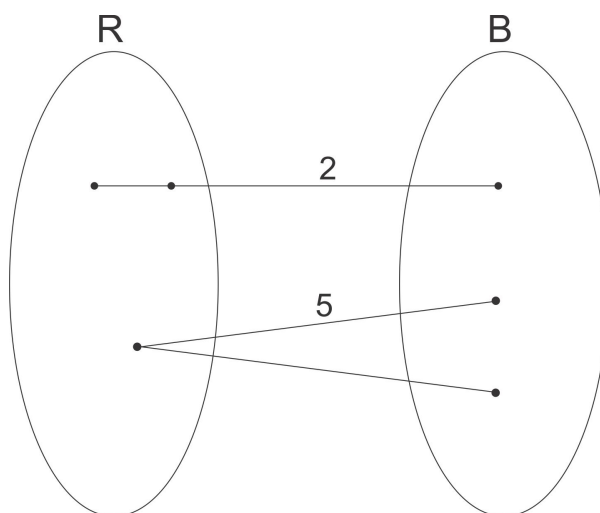
**Lema 6.4.** Bikromatičen lih cikel  $C_n$  dolžine vsaj 5 vsebuje vsaj eno izmed zaporedij točk  $RRB$  ali  $BBR$ .

Lema drži, saj bi v nasprotnem primeru moral biti cikel monokromatičen, ali pa bi moral imeti enako število rdečih in belih točk, kar bi pomenilo, da je cikel sod.

**Lema 6.5.** Naj bo graf  $C$  cikel dolžine vsaj 6. Tedaj je graf  $C_4$  induciran podgraf grafa  $\overline{C}$ .

*Dokaz.* Naj bo  $C$  cikel dolžine vsaj 6. Poglejmo si prvih 5 zaporednih točk tega cikla in jih označimo zaporedoma z  $v_1, v_2, v_3, v_4$  in  $v_5$ . Točki  $v_1$  in  $v_2$  sta sosednji in točki  $v_4$  in  $v_5$  prav tako. Hkrati pa velja, da nobena izmed točk  $v_1$  in  $v_2$  ni sosednja z nobeno izmed točk  $v_4$  in  $v_5$ . Če si sedaj pogledamo komplement cikla  $C$ , to pomeni, da je v komplementu točka  $v_1$  sosednja s točkama  $v_4$  in  $v_5$ . Prav tako pa je tudi točka  $v_2$  sosednja s točkama  $v_4$  in  $v_5$  v komplementu. Hkrati pa velja, da v komplementu točki  $v_1$  in  $v_2$  nista sosednji in tudi točki  $v_4$  in  $v_5$  nista sosednji. Našli smo torej induciran cikel dolžine 4 v komplementu cikla  $C$ . In sicer  $(v_1, v_4, v_2, v_5)$ .  $\square$

**Lema 6.6.** Množici  $\{2, 5\}$  in  $\{3, 4\}$  sta  $S$ -izreka.



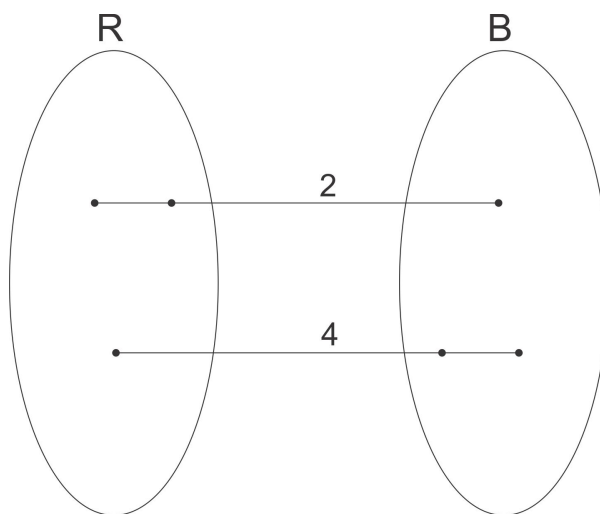
Slika 2: Prikaz množice  $\{2, 5\}$  prepovedanih tipov induciranih poti  $P_3$ .

*Dokaz.* Po lemi 5.3 vemo, da implikacija v eno smer velja. Pokažimo še implikacijo v obratno smer. Naj bo  $G$  poljuben 2-obarvan graf, za katerega sta oba monokromatična

inducirana podgrafa popolna in za katerega je  $\{2, 5\} = \{RRB, BRB\}$  množica prepovedanih tipov induciranih poti  $P_3$  v grafu  $G$ . Da je  $G$  popoln, bomo pokazali z uporabo krepkega izreka o popolnih grafih (izrek 1.6). Predpostavimo, da  $G$  ni popoln. Iz krepkega izreka o popolnih grafih sledi, da  $G$  vsebuje bodisi induciranih lih cikel dolžine vsaj 5 ali induciranih komplement lihega cikla dolžine vsaj 5. Ker sta oba monokromatična inducirana podgrafa popolna, mora biti tak lih cikel ali njegov komplement bikromatičen. Obravnavajmo najprej primer, ko  $G$  vsebuje bikromatičen induciranih cikel  $C_{2k+1}$  za nek  $k \geq 2$ . Na takem ciklu zagotovo obstaja povezava  $BR$ . Zaradi prepovedi poti tipa 2 naslednja točka na ciklu ne more biti pobarvana z barvo  $R$ . Zaradi prepovedi poti tipa 5 pa naslednja točka ne more biti pobarvana z barvo  $B$ . Posledično to pomeni, da v grafu  $G$  ne moremo poiskati nobenega bikromatičnega induciranege cikla dolžine vsaj 4. Torej, prav tako ne moremo poiskati nobenega bikromatičnega lihega induciranege cikla dolžine vsaj 5.

Poglejmo sedaj bikromatične inducirane komplemente lihih ciklov dolžine vsaj 5. Cikel  $C_5$  je izomorfen svojemu komplementu. Torej lahko obravnavamo zgolj komplemente lihih ciklov dolžine vsaj 7. Po lemi 6.5 vemo, da v vsakem izmed njih zagotovo obstaja induciranih cikel dolžine vsaj 4. Od prej vemo, da takega cikla ne moremo poiskati. Pokazali smo, da  $G$  ne more vsebovati induciranege lihega cikla dolžine vsaj 5 ali induciranege komplementa lihega cikla dolžine vsaj 5. Po izreku 1.6 je to v protislovju s predpostavko, da graf  $G$  ni popoln. Množica  $\{2, 5\}$  je torej res  $S$ -izrek. Po lemi 6.3 sledi, da je množica  $\{3, 4\}$  tudi  $S$ -izrek.  $\square$

**Lema 6.7.** *Množica  $\{2, 4\}$  je  $S$ -izrek.*



Slika 3: Prikaz množice  $\{2, 4\}$  prepovedanih tipov induciranih poti  $P_3$ .

*Dokaz.* Po lemi 5.3 vemo, da implikacija v eno smer velja. Pokažimo še implikacijo v obratno smer. Naj bo  $G$  poljuben 2-obarvan graf, za katerega sta oba monokromatična inducirana podgrafa popolna in za katerega je  $\{2, 4\} = \{RRB, RBB\}$  množica prepovedanih tipov induciranih poti  $P_3$  v grafu  $G$ . Denimo, da lahko sedaj v grafu  $G$  najdemo inducirani bikromatičen lih cikel dolžine vsaj 5 ali inducirani bikromatičen komplement lihega cikla dolžine vsaj 5.

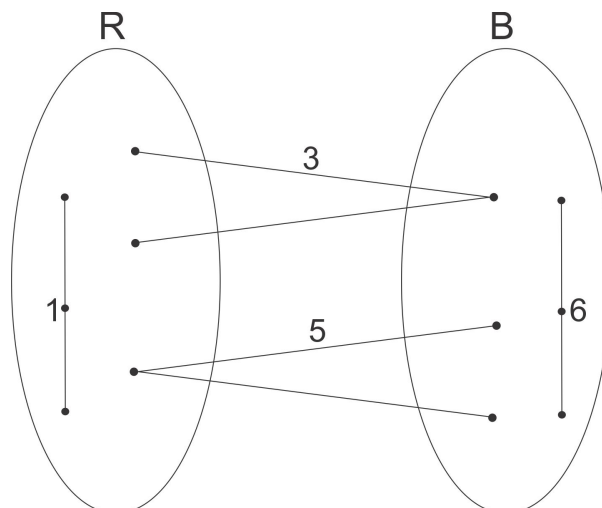
Po lemi 6.4 vemo, da mora na lihem ciklu zagotovo obstajati eno izmed zaporedij  $RRB$  ali  $RBB$ . Če torej oba tipa poti  $P_3$  prepovemo, potem zagotovo ne moremo najti lihega cikla dolžine vsaj 5 v grafu  $G$ . Torej moramo obravnavati le še komplemente lihih ciklov dolžine vsaj 7, saj je  $C_5 \cong \overline{C_5}$ . Naj bo  $C$  lih cikel dolžine vsaj 7 s točkami  $v_1, \dots, v_{2k+1}$  za nek  $k \geq 3$ . Poglejmo, kaj se zgodi, če v komplementu takega cikla, ki je inducirani podgraf grafa  $G$ , najdemo dve sosednji točki,  $v_i$  in  $v_j$ , pobarvani z isto barvo. Vemo, da lahko zagotovo v komplementu cikla najdemo inducirani cikel dolžine 4, ki vsebuje točki  $v_i$  in  $v_j$ . Iz prepovedi poti tipov 2 in 4 sledi, da morata biti tudi preostali dve točki tega 4-cikla, točka  $v_{i'}$ , ki je v ciklu sosednja s točko  $v_j$ , in točka  $v_{j'}$ , ki je v 4-ciklu sosednja s točko  $v_i$ , pobarvani z isto barvo. Sedaj pa lahko ta cikel "zasukamo" tako, da vzamemo točke  $v_{i+1}, v_{j+1}, v_{i'+1}$  in  $v_{j'+1}$  (indeksi po modulu  $2k+1$ ). Zagotovo velja, da bomo s takim zasukom ponovno dobili inducirani cikel dolžine 4, ki bo zagotovo vseboval tudi eno izmed povezav cikla  $(v_i, v_j, v_{i'}, v_{j'})$ . Od tod pa sledi, da morajo biti vse točke novega cikla prav tako pobarvane z isto barvo. Če to nadaljujemo, pridemo do zaključka, da morajo v tem primeru biti vse točke  $v_1, \dots, v_{2k+1}$  pobarvane z isto barvo. V komplementu cikla dolžine vsaj 7 lahko vedno najdemo tri take točke  $x, y, z$ , ki so v komplementu medsebojno sosednje. Torej, kakorkoli želimo pobarvati točke  $x, y, z$  z dvema barvama, bomo dobili dve, ki sta v komplementu sosednji in pobarvani z isto barvo. Prišli smo torej do protislovja, ker od prej vemo, da če imamo v komplementu lihega cikla, dolžine vsaj 7, dve sosednji točki pobarvani z isto barvo, to pomeni, da morajo biti vse točke pobarvane z isto barvo. To je v protislovju s predpostavko, da sta oba podgrafa grafa  $G$ , inducirana s točkami iste barve, popolna grafa. Po izreku 1.6 je torej graf  $G$  popoln in je množica  $\{2, 4\}$  res  $S$ -izrek.  $\square$

**Lema 6.8.** *Množica  $\{1, 3, 5, 6\}$  je  $S$ -izrek.*

*Dokaz.* Po lemi 5.3 vemo, da implikacija v eno smer velja. Pokažimo še implikacijo v obratno smer. Naj bo  $G$  poljuben 2-obarvan graf, za katerega sta oba monokromatična inducirana podgrafa popolna in za katerega je  $\{1, 3, 5, 6\} = \{RRR, RBR, BRB, BBB\}$  množica prepovedanih tipov induciranih poti  $P_3$  v grafu  $G$ . Denimo, da lahko sedaj v grafu  $G$  najdemo bikromatičen inducirani lih cikel dolžine vsaj 5 ali bikromatičen inducirani komplement lihega cikla dolžine vsaj 5.

Po lemi 6.4 vemo, da na bikromatičnem lihem ciklu zagotovo obstaja eno izmed



Slika 4: Prikaz množice  $\{1, 3, 5, 6\}$  prepovedanih tipov induciranih poti  $P_3$ .

zaporedij  $RRB$  ali  $BBR$ . Denimo, da na induciranjem bikromatičnem ciklu dolžine vsaj 5 obstaja zaporedje  $RRB$ . Iz prepovedi poti tipa 3 sledi, da mora biti četrta zaporedna točka na ciklu pobarvana z barvo  $B$ . Iz prepovedi poti tipa 6 pa sledi, da mora biti peta zaporedna točka na ciklu pobarvana z barvo  $R$ . Cikel pa se zaradi prepovedi poti tipa 1 ne more zaključiti z barvo  $R$ , saj sta prvi dve točki prav tako pobarvani z barvo  $R$ . Če sedaj s tem nadaljujemo, mora biti šesta zaporedna točka na ciklu prav tako rdeča, zaradi prepovedi poti tipa 3. Torej pridemo do tega, da imamo na ciklu izmenično zaporedje po dveh rdečih in dveh belih točk. Od tod sledi, da cikel ne more biti lih. Enako velja, če predpostavimo, da na ciklu obstaja zaporedje  $BBR$ , saj smo zamenjali le vlogi barv. Od tod sledi, da ne moremo poiskati lihega bikromatičnega induciraneega cikla dolžine vsaj 5.

Sedaj moramo pokazati še, da v grafu  $G$  ne obstaja inducirani bikromatičen komplet lihega cikla dolžine vsaj 7. Naj bo  $C$  lih cikel dolžine vsaj 7 s točkami  $v_1, \dots, v_{2k+1}$  za nek  $k \geq 3$ . Poglejmo, kaj se zgodi, če v takem ciklu najdemo dve sosednji točki,  $v_i$  in  $v_{i+1}$  (indeksi po modulu  $2k+1$ ), pobarvani z različno barvo, denimo  $v_i$  je pobarvana z  $R$  in  $v_{i+1}$  je pobarvana z  $B$ . Ti dve točki v komplementu cikla  $C$  nista sosednji. Vemo pa, da sestavljata inducirani cikel dolžine 4 s točkama  $v_{i+3}$  in  $v_{i+4}$ . Iz prepovedi poti tipov 1, 3, 5 in 6 sledi, da mora biti natanko ena od teh dveh točk pobarvana z barvo  $R$  in natanko ena z barvo  $B$ . Sedaj pa, ker točke  $v_i, v_{i+1}, v_{i+4}, v_{i+5}$  prav tako tvorijo inducirani cikel dolžine 4 v komplementu cikla  $C$ , to pomeni, da mora biti točka  $v_{i+5}$  pobarvana z isto barvo kot točka  $v_{i+3}$ . Sedaj lahko točko  $v_i$  zamenjamo s točko  $v_{i+2}$  in dobimo, da morata biti obe pobarvani z isto barvo. Od tod sledi, da se morata barvi poljubnih dveh nesosednjih točk v komplementu cikla  $C$  razlikovati, kar pa ni možno, saj je število vseh točk liho. V nasprotnem primeru, če ne obstajata dve na ciklu sose-

dnji točki, obarvani z različnima barvama, pa sledi, da morajo biti vse točke pobarvane z isto barvo, kar pa je v protislovju s predpostavko, da je vsak izmed podgrafov grafa  $G$ , induciran s točkami iste barve, popoln graf. Torej lahko po izreku 1.6 zaključimo, da je graf  $G$  popoln in je množica  $\{1, 3, 5, 6\}$  res  $S$ -izrek.  $\square$

S pomočjo lem 6.6, 6.7 in 6.8 smo pokazali, da izrek 6.2 velja. Po metodi prepoznavanja matematičnih vzorcev pa lahko zaključimo, da poznamo vse  $S$ -izreke in vse  $S$ -primerne za dan problem. V naslednjem podpoglavju si bomo tako ogledali še primer za omejitve barvanja za točk induciranih poti  $P_4$  za razred popolnih grafov.

## 6.2 Omejitve za barvanja točk induciranih poti $P_4$

Sedaj ko smo spoznali omejitve glede na barvanja točk induciranih poti  $P_3$ , si pogledjmo še omejitve za barvanja točk induciranih poti  $P_4$ . Za množico lastnosti  $P$ , ki nas zanimajo, bomo tokrat vzeli množico  $P^*$  vseh tipov induciranih poti  $P_4$  (definicija 5.5).

Za izpeljavo  $S$ -izrekov s pomočjo krepkega izreka o popolnih grafih moramo najprej poiskati vse množice tipov induciranih poti  $P_4$ , ki se lahko pojavijo na 2-obarvanih lihih ciklih dolžine vsaj 5 ali na njihovih komplementih. Na ta način bomo dobili množico vseh komplementov  $S$ -primerov.

**Primer 6.9.** Naj bo  $C$  cikel dolžine 7 pobarvan z dvema barvama  $R$  in  $B$  na naslednji način (v cikličnem vrstnem redu):

$$RRRBRBB.$$

Inducirane poti  $P_4$ , ki se na tem ciklu pojavijo so zaporedoma naslednje:  $RRRB$  tipa 2,  $RRBR$  tipa 3,  $RBRB$  tipa 5,  $BRBB$  tipa 9,  $RBBR$  tipa 6,  $BBRR$  tipa 4 in  $BRRR$  tipa 2. Množica tipov induciranih poti  $P_4$  na ciklu  $C$  je torej  $\{2, 3, 4, 5, 6, 9\}$ .  $\blacktriangle$

Ker je komplement inducirane poti  $P_4$  ponovno inducirana pot  $P_4$  in nas zanimajo minimalne množice tipov induciranih poti  $P_4$  na lihih ciklih dolžine vsaj 5 in njihovih komplementih, zadošča poiskati zgolj minimalne množice tipov poti na ciklih dolžine vsaj 5 in na njih uporabiti permutacijo  $\sigma$  [7].

Poglejmo si sedaj, katere so vse minimalne množice tipov induciranih poti  $P_4$ , ki se pojavijo na lihih ciklih dolžine vsaj 5 in na njihovih komplementih. Z analizo ciklov dolžine 5, 7, 9 in njihovih komplementov lahko postavimo domnevo, da so minimalne množice tipov induciranih poti  $P_4$  natanko naslednje:

- $\{3, 7\}$  – 9 cikel  $RRBRRBRRB$ ,

- $\{6, 9\} = \tau(\{3, 7\})$ ,
- $\{2, 6\} = \sigma(\{3, 7\})$ ,
- $\{7, 8\} = \sigma(\{6, 9\})$ ,
- $\{1, 2, 3\}$  – 5 cikel  $RRRRB$ ,
- $\{8, 9, 10\} = \tau(\{1, 2, 3\})$ ,
- $\{1, 2, 4, 8\}$  – 9 cikel  $RRRRRRBBB$ ,
- $\{2, 4, 8, 10\} = \tau(\{1, 2, 4, 8\})$ ,
- $\{1, 3, 5, 9\} = \sigma(\{1, 2, 4, 8\})$ ,
- $\{3, 5, 9, 10\} = \sigma(\{2, 4, 8, 10\})$ .

Zgoraj navedenih 10 množic predstavlja hiperpovezave hipergrafa  $\text{Min}(\mathcal{E})$  definirane na množici točk  $P^*$ . Njemu pripadajoča Boolova funkcija v popolni DNO je nato sledeča:

$$\begin{aligned}
 F_{\text{Min}(\mathcal{E})} & : \{0, 1\}^{10} \rightarrow \{0, 1\}, \\
 F_{\text{Min}(\mathcal{E})}(x) & = x_3x_7 \vee x_6x_9 \vee x_2x_6 \vee x_7x_8 \vee x_1x_2x_3 \vee x_8x_9x_{10} \vee \\
 & \quad x_1x_2x_4x_8 \vee x_2x_4x_8x_{10} \vee x_1x_3x_5x_9 \vee x_3x_5x_9x_{10}.
 \end{aligned}$$

Z uporabo pravil za računanje z Boolovimi funkcijami (izrek 1.10) lahko sedaj poračunamo dualno Boolovo funkcijo  $F_{\text{Min}(\mathcal{E})}^d : \{0, 1\}^{10} \rightarrow \{0, 1\}$ .

$$\begin{aligned}
 F_{\text{Min}(\mathcal{E})}^d(x) & = (x_3 \vee x_7)(x_6 \vee x_9)(x_2 \vee x_6)(x_7 \vee x_8) \wedge \\
 & \quad (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_8 \vee x_9 \vee x_{10})(x_1 \vee x_2 \vee x_4 \vee x_8) \wedge \\
 & \quad (x_2 \vee x_4 \vee x_8 \vee x_{10})(x_1 \vee x_3 \vee x_5 \vee x_9)(x_3 \vee x_5 \vee x_9 \vee x_{10}) \\
 & = x_2x_7x_9 \vee x_3x_6x_8 \vee x_2x_3x_8x_9 \vee x_1x_6x_7x_{10} \vee x_2x_3x_6x_7x_{10} \vee \\
 & \quad x_1x_6x_7x_8x_9 \vee x_2x_5x_6x_7x_{10} \vee x_1x_5x_6x_7x_8 \vee x_3x_4x_6x_7x_{10} \vee \\
 & \quad x_1x_4x_6x_7x_9 \vee x_2x_5x_6x_7x_8 \vee x_3x_4x_6x_7x_9.
 \end{aligned}$$

Iz tega sledi, da so množice  $\{2, 7, 9\}$ ,  $\{3, 6, 8\}$ ,  $\{2, 3, 8, 9\}$ ,  $\{1, 6, 7, 10\}$ ,  $\{2, 3, 6, 7, 10\}$ ,  $\{1, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $\{2, 5, 6, 7, 10\}$ ,  $\{1, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $\{3, 4, 6, 7, 10\}$ ,  $\{1, 4, 6, 7, 9\}$ ,  $\{2, 5, 6, 7, 8\}$  in  $\{3, 4, 6, 7, 9\}$  po lemah 2.15 in 2.16 hiperpovezave hipergrafa minimalnih  $S$ -izrekov  $\text{Min}(\mathcal{T})$ . Iz članka [7] vemo, da so vsi izmed navedenih  $S$ -izrekov resnični. V nadaljevanju jih bomo dokazali s pomočjo uporabe krepkega izreka o popolnih grafih.

**Izrek 6.10.** *Naj bo  $T$  ena izmed naslednjih podmnožic množice  $P^*$ :*

1.  $\{2, 7, 9\}$ ,
2.  $\{3, 6, 8\}$ ,
3.  $\{2, 3, 8, 9\}$ ,
4.  $\{1, 6, 7, 10\}$ ,
5.  $\{2, 3, 6, 7, 10\}$ ,
6.  $\{1, 6, 7, 8, 9\}$ ,
7.  $\{2, 5, 6, 7, 10\}$ ,
8.  $\{1, 5, 6, 7, 8\}$ ,
9.  $\{3, 4, 6, 7, 10\}$ ,
10.  $\{1, 4, 6, 7, 9\}$ ,
11.  $\{2, 5, 6, 7, 8\}$ ,
12.  $\{3, 4, 6, 7, 9\}$ .

Naj bodo točke grafa  $G$  pobarvane z dvema barvama, rdečo ( $R$ ) in belo ( $B$ ), tako, da graf  $G$  ne vsebuje nobene inducirane poti  $P_4$  tipa  $i \in T$ . Potem velja, da je  $G$  popoln graf natanko tedaj, ko je vsak izmed podgrafov grafa  $G$ , induciranih s točkami iste barve, popoln graf.

Od prej vemo, da zadošča pokazati implikacijo le v eni smeri. In sicer, predpostavili bomo, da je vsak izmed podgrafov 2-obarvanega grafa  $G$ , induciranih s točkami iste barve, popoln graf, in pokazali, da je ob prepovedi določenih induciranih poti  $P_4$  celoten graf  $G$  prav tako popoln. Izrek bomo dokazali s pomočjo nekaj naslednjih lem, ki jih bomo dokazovali s protislovjem, kjer bomo predpostavili obstoj inducirane bikromatičnega lihega cikla dolžine vsaj 5 ali njegovega komplementa v grafu  $G$ . Najprej pa si pogledjmo še eno pomembno lemo.

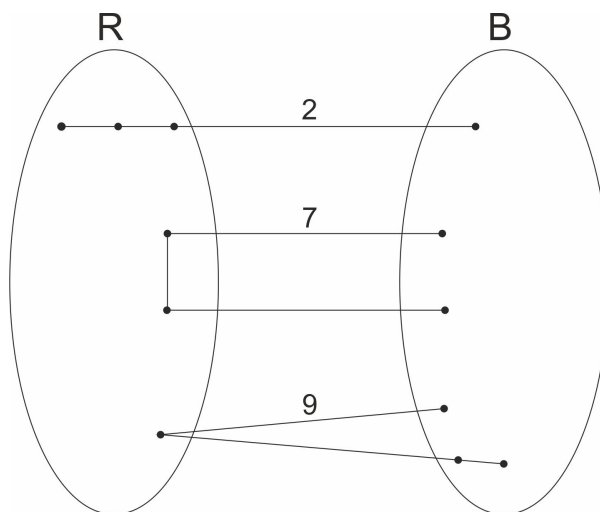
**Lema 6.11.** Če je množica  $T \subseteq P^*$   $S$ -izrek, potem sta tudi množici  $\sigma(T)$  in  $\tau(T)$   $S$ -izreka.

*Dokaz.* Naj bo  $T$   $S$ -izrek. Očitno, če samo zamenjamo vlogi barv  $R$  in  $B$  je  $\tau(T)$  res  $S$ -izrek. Pogledjmo si sedaj še  $\sigma(T)$ . Ker je  $T$   $S$ -izrek, to pomeni, da v grafu  $G$ , ki ne vsebuje inducirane poti  $P_4$  nobenega tipa iz množice  $T$ , ne obstaja noben bikromatičen induciranih ciklov dolžine 5 ali več oz. njegov komplement. Sedaj, ker  $\rho(T)$  vsako 2-obarvano inducirano pot  $P_4$  preslika v njen komplement, ki je prav tako 2-obarvana

inducirana pot  $P_4$  v komplementu cikla, to pomeni, da tudi za množico  $\sigma(T)$  ne obstaja noben bikromatičen inducirani lih cikel dolžine 5 ali več, oz. njegov komplement. Torej sta  $\sigma(T)$  in  $\tau(T)$  tudi  $S$ -izreka.  $\square$

Lemo 6.11 bomo v dokazovanju naslednjih izrekov večkrat uporabili tako, da bomo za neki množici  $T$  in  $\rho(T)$  pokazali, da za nobeno izmed njiju ne moremo najti inducirane bikromatičnega lihega cikla dolžine vsaj 5, kar bo pomenilo, da za nobeno izmed njiju ne moremo najti niti inducirane bikromatičnega lihega cikla dolžine vsaj 5. V kolikor bomo imeli opravka z množico  $\tau(T)$ , pa bo zadoščalo pokazati, da je množica  $T$  sama  $S$ -izrek.

**Lema 6.12.** *Množici  $\{2, 7, 9\}$  in  $\{3, 6, 8\}$  sta  $S$ -izreka.*



Slika 5: Prikaz množice  $\{2, 7, 9\}$  prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$ .

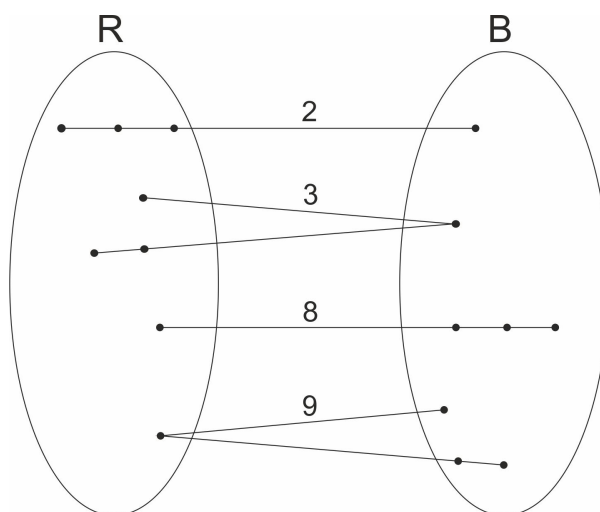
*Dokaz.* Po lemi 5.3 vemo, da implikacija v eno smer velja. Pokažimo še implikacijo v obratno smer. Naj bo  $G$  poljuben 2-obarvan graf, za katerega sta oba monokromatična inducirana podgrafa popolna in za katerega je  $\{2, 7, 9\} = \{BRRR, BRRB, BRBB\}$  množica prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$  v grafu  $G$ .

Denimo, da lahko sedaj v grafu  $G$  najdemo inducirani bikromatičen lih cikel dolžine vsaj 5. Denimo, da ima cikel dolžino  $2k + 1$  za nek  $k \geq 2$ . Na takem ciklu zagotovo obstaja povezava  $BR$ . Po prepovedanih tipih poti 2, 7 in 9 sledi, da morata biti naslednji dve zaporedni točki na ciklu, za točko pobarvano z barvo  $R$ , pobarvani  $BR$  v tem zaporedju. Ta argument moramo ponavljati natanko  $(k - 1)$ -krat, od koder pridemo do zaporedja  $BRBR \dots BR$  dolžine  $2k$ . Po istem argumentu mora biti zadnja točka na ciklu pobarvana z barvo  $B$ . Iz zadnje točke in prvih treh točk, od koder smo začeli sestavljati cikel, sedaj dobimo zaporedje  $BRRB$ . To pa je v protislovju s predpostavko,

da je prepovedana inducirana pot  $P_4$  tipa 9. Tak cikel torej ne more obstajati.

Sedaj, ker je  $\{3, 6, 8\} = \tau(\{2, 7, 9\})$  velja, da tudi za množico  $\{3, 6, 8\}$  tak cikel ne more obstajati. Ker pa velja tudi  $\{3, 6, 8\} = \sigma(\{2, 7, 9\})$ , po lemi 6.11 sledi, da za nobeno od obeh podmnožic ne more obstajati niti komplement bikromatičnega lihega cikla dolžine vsaj 5. Po izreku 1.6 je graf  $G$  popoln in sta množici  $\{2, 7, 9\}$  in  $\{3, 6, 8\}$  res  $S$ -izreka.  $\square$

**Lema 6.13.** *Množica  $\{2, 3, 8, 9\}$  je  $S$ -izrek.*



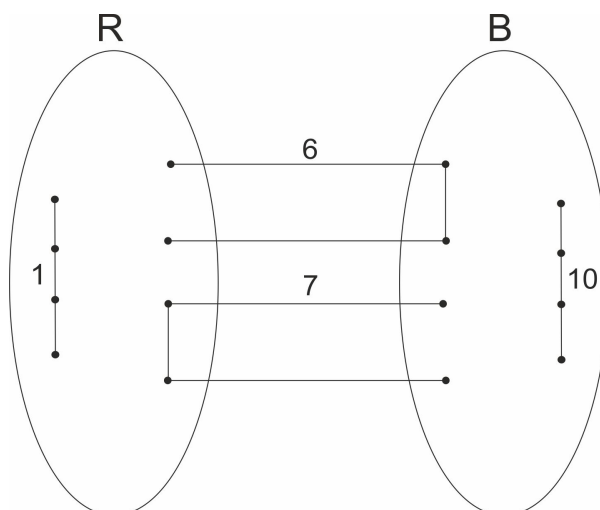
Slika 6: Prikaz množice  $\{2, 3, 8, 9\}$  prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$ .

*Dokaz.* Po lemi 5.3 vemo, da implikacija v eno smer velja. Pokažimo še implikacijo v obratno smer. Naj bo  $G$  poljuben 2-obarvan graf, za katerega sta oba monokromatična inducirana podgrafa popolna in za katerega je  $\{2, 3, 8, 9\} = \{RRRB, RRBR, RBBB, BRBB\}$  množica prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$  v grafu  $G$ .

Denimo, da lahko sedaj v grafu  $G$  najdemo induciranih lih cikel dolžine vsaj 5. Denimo, da ima cikel dolžino  $2k+1$  za nek  $k \geq 2$ . Na takem ciklu gotovo obstaja povezava  $RB$ . Po prepovedanih tipih poti 3 in 8 sledi, da morata biti naslednji dve zaporedni točki na ciklu nujno pobarvani z različnima barvama. Denimo, da sta naslednji dve točki pobarvani  $RB$  zaporedoma. Iz prepovedi tipov poti 3 in 9 nato sledi, da morata naslednji dve točki biti prav tako pobarvani  $RB$ . Ta argument pa lahko nato ponavljamo, vse dokler ne dobimo zaporedja  $RBRB \dots RB$  dolžine  $2k$ . Zadnja točka pa mora biti zaradi prepovedi tipa poti 9 biti pobarvana z barvo  $R$ . Od tod sledi, da zadnja točka skupaj s prvimi tremi točkami zaporedja sestavlja tip 3 poti  $P_4$  na ciklu, kar pa je v protislovju s predpostavko. Torej morata biti tretja in četrta točka v zaporedju pobarvani  $BR$  zaporedoma. Od tod pa sledi, da se nato zaporedje izmenično

nadaljuje z  $RB$ , zaradi prepovedi tipov poti 2 in 9, in  $BR$ , zaradi prepovedi tipov poti 3 in 8. Iz istega razloga se mora barva zadnje točke cikla ujemati z barvo predzadnje točke cikla. Tako zaporedje se torej konča z  $RR$ , če je  $k$  sodo število, oz. z  $BB$ , če je  $k$  liho število. V prvem primeru nam zadnji dve točki, skupaj s prvima dvema točkama, dajo zaporedje  $RRRB$ , kar je v protislovju s prepovedjo tipa 2 poti  $P_4$ , v drugem primeru pa nam dajo zaporedje  $BBRB$ , kar pa je v protislovju s prepovedjo tipa 9 poti  $P_4$ . Dobili smo protislovje, torej tak cikel ne more obstajati. Ker velja, da je množica  $\sigma(\{2, 3, 8, 9\})$  enaka množici  $\{2, 3, 8, 9\}$ , po lemi 6.11 sledi in po izreku 1.6 sledi, da je graf  $G$  popoln in je množica  $\{2, 3, 8, 9\}$  res  $S$ -izrek.  $\square$

**Lema 6.14.** *Množica  $\{1, 6, 7, 10\}$  je  $S$ -izrek.*



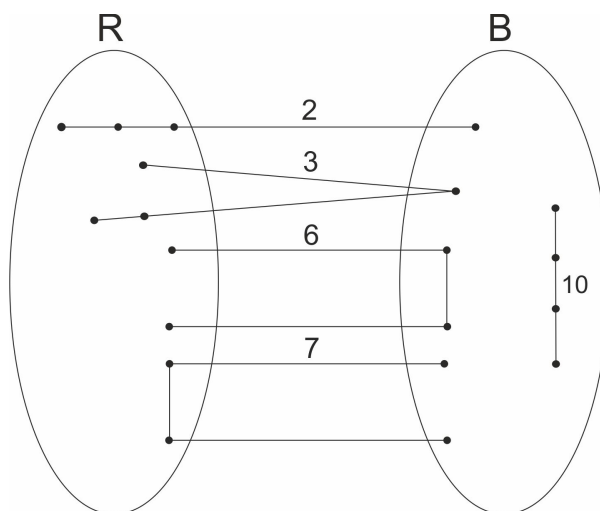
Slika 7: Prikaz množice  $\{1, 6, 7, 10\}$  prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$ .

*Dokaz.* Po lemi 5.3 vemo, da implikacija v eno smer velja. Pokažimo še implikacijo v obratno smer. Naj bo  $G$  poljuben 2-obarvan graf, za katerega sta oba monokromatična inducirana podgrafa popolna in za katerega je  $\{1, 6, 7, 10\} = \{RRRR, RBBR, BRRB, BBBB\}$  množica prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$  v grafu  $G$ .

Denimo, da lahko sedaj v grafu  $G$  najdemo bikromatičen induciranih ciklov dolžine vsaj 5. Vzemimo induciranih ciklov  $C$  dolžine vsaj 5 v grafu  $G$ . Na takem ciklu zagotovo obstaja povezava  $RB$ . Oglejmo si najdaljšo inducirano pot  $P$  sode dolžine, ki se začne in konča z  $RB$  in ki je v celoti vsebovana v ciklu  $C$ . Taka pot zagotovo vedno obstaja, saj že sama povezava  $RB$  zadošča tem pogojem. Poglejmo si sedaj nadaljevanje te poti glede na prepovedane tipe induciranih poti  $P_4$ . Iz pogojev prepovedanih tipov poti 6 in 7 sledi, da moramo zaporedje barv poti na ciklu nadaljevati z enim izmed treh možnih načinov: z  $RB$ , z  $RR$  ali z  $BB$ . Če nadaljujemo zaporedje z  $RB$ ,

potem smo prišli do protislovja s predpostavko, da je  $P$  najdaljša inducirana pot sode dolžine na ciklu  $C$ . Denimo drugič, da nadaljujemo zaporedje z  $RR$ . Denimo, da se zaporedje z naslednjo zaporedno točko konča. Ta točka mora biti, zaradi prepovedi tipa poti 7, nujno pobarvana z barvo  $R$ , to pa je v protislovju s prepovedjo tipa poti 1. Posledično se zaporedje barv točk cikla  $C$  nadaljuje. Zaradi prepovedi tipa 1 pa je naslednja zaporedna točka cikla pobarvana z  $B$ . Ponovno smo prišli do protislovja z maksimalnostjo poti  $P$ . Posledično se mora zaporedje barv točk poti  $P$  nadaljevati z  $BB$ . V tem primeru mora biti, zaradi prepovedi poti tipa 10, naslednja zaporedna točka cikla pobarvana z barvo  $R$ . Zaradi prepovedi poti tipa 7 pa moramo zaporedje nadaljevati. Sedaj, če je naslednja zaporedna točka pobarvana z barvo  $B$ , pridemo ponovno do protislovja z maksimalnostjo poti  $P$ . Posledično mora biti ta točka pobarvana z barvo  $R$ . Tedaj pa mora biti takoj naslednja zaporedna točka cikla, zaradi prepovedi poti tipa 7 nujno pobarvana z barvo  $R$ . Zaradi prepovedi poti tipa 10 zaporedja na tem mestu ne moremo končati, hkrati pa nam pove, da ga moramo nadaljevati z barvo  $B$ . Na ta način smo ponovno prišli do protislovja s predpostavko o maksimalnosti poti  $P$ . Iz tega sledi, da v grafu  $G$  ne obstaja noben lih cikel dolžine vsaj 5. Ker pa velja tudi, da je  $\{1, 6, 7, 10\} = \sigma(\{1, 6, 7, 10\})$ , po lemi 6.11 sledi, da v grafu  $G$  ne moremo najti nobenega bikromatičnega induciranelega komplementa lihega cikla dolžine vsaj 5 in je po izreku 1.6 graf  $G$  popoln in je posledično množica  $\{1, 6, 7, 10\}$  res  $S$ -izrek.  $\square$

**Lema 6.15.** *Množici  $\{2, 3, 6, 7, 10\}$  in  $\{1, 6, 7, 8, 9\}$  sta  $S$ -izreka.*



Slika 8: Prikaz množice  $\{2, 3, 6, 7, 10\}$  prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$ .

*Dokaz.* Po lemi 5.3 vemo, da implikacija v eno smer velja. Pokažimo še implikacijo v obratno smer. Naj bo  $G$  poljuben 2-obarvan graf, za katerega sta oba monokromatična



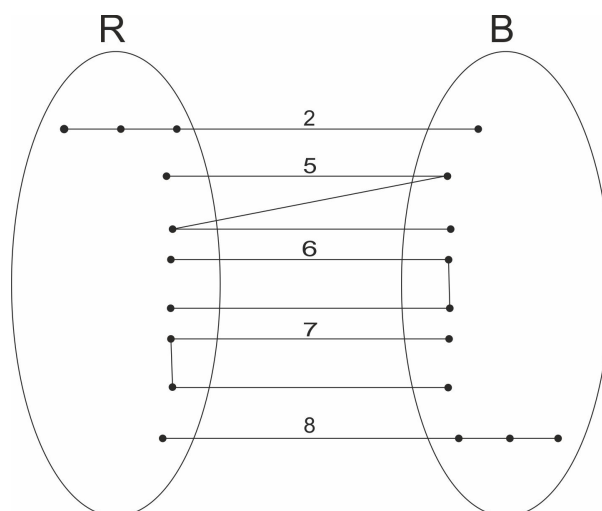
inducirana podgrafa popolna in za katerega je  $\{2, 3, 6, 7, 10\} = \{RRRB, RRRB, RBBR, BRRB, BBBB\}$  množica prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$  v grafu  $G$ .

Denimo, da lahko sedaj v grafu  $G$  najdemo bikromatičen induciranih lih cikel dolžine vsaj 5. Vzemimo induciranih lih cikel  $C$  dolžine vsaj 5 v grafu  $G$ . Na takem ciklu zagotovo obstaja povezava  $RB$ . Oglejmo si najdaljšo inducirano pot  $P$  sode dolžine, ki se začne in konča z  $RB$  in ki je v celoti vsebovana v ciklu  $C$ . Poglejmo si sedaj nadaljevanje te poti glede na prepovedane tipe induciranih poti  $P_4$ . Iz pogojev prepovedanih tipov poti 3 in 6 sledi, da moramo zaporedje barv poti na ciklu nadaljevati z  $RB$  ali z  $BB$ . V prvem primeru pridemo do protislovja z maksimalnostjo poti  $P$ . Torej moramo zaporedje nadaljevati z  $BB$ . Naslednja zaporedna točka cikla mora nato biti pobarvana z barvo  $R$ , sicer pridemo do protislovja s prepovedjo poti tipa 10. Zaporedja pa ne moremo končati na tem mestu, saj dobimo z zadnjima dvema točkama zaporedja in prvima dvema točkama zaporedja pot tipa 7, kar je v protislovju s predpostavko. Sedaj imamo ponovno dve možnosti. Ali je naslednja zaporedna točka pobarvana z  $B$  ali z  $R$ . Če je pobarvana z  $B$ , pridemo do protislovja z maksimalnostjo poti  $P$ . Torej mora biti ta točka pobarvana z barvo  $R$ . Denimo sedaj, da je takoj naslednja zaporedna točka pobarvana z barvo  $R$ . V tem primeru nam zadnje štiri točke dajo protislovje s prepovedjo poti tipa 2. Če pa je ta točka pobarvana z barvo  $B$ , pa nam zadnje štiri točke dajo protiprimer s prepovedjo poti tipa 7. Dobili smo torej zaporedje sode dolžine  $RB \dots RBBBRR$ , ki ga ne moremo nadaljevati. Posledično ne moremo najti nobenega lihega inducirane cikla v grafu  $G$ . Če uporabimo permutacijo  $\sigma$  na množici  $\{2, 3, 6, 7, 10\}$ , dobimo ponovno isto množico in, ker je množica  $\{1, 6, 7, 8, 9\}$  enaka množici  $\tau(\{2, 3, 6, 7, 10\})$ , po lemi 6.11 in po izreku 1.6 sledi, da je graf  $G$  popoln in sta množici  $\{2, 3, 6, 7, 10\}$  in  $\{1, 6, 7, 8, 9\}$  res  $S$ -izreka.  $\square$

**Lema 6.16.** *Množici  $\{2, 5, 6, 7, 8\}$  in  $\{3, 4, 6, 7, 9\}$  sta  $S$ -izreka.*

*Dokaz.* Po lemi 5.3 vemo, da implikacija v eno smer velja. Pokažimo še implikacijo v obratno smer. Naj bo  $G$  poljubni 2-obarvani graf, za katerega sta oba monokromatična inducirana podgrafa popolna in za katerega je  $\{2, 5, 6, 7, 8\} = \{RRRB, RRRB, RBBR, BRRB, BBBB\}$  množica prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$  v grafu  $G$ .

Denimo, da lahko sedaj v grafu  $G$  najdemo bikromatičen induciranih lih cikel dolžine vsaj 5. Vzemimo induciranih lih cikel  $C$  dolžine vsaj 5 v grafu  $G$ . Na takem ciklu zagotovo obstaja povezava  $RB$ . Oglejmo si najdaljšo inducirano pot  $P$  sode dolžine, ki se začne in konča z  $RB$  in ki je v celoti vsebovana v ciklu  $C$ . Poglejmo si sedaj nadaljevanje te poti glede na prepovedane tipe induciranih poti  $P_4$ . Zaradi prepovedi poti tipov 6 in 7 sledi, da zaporedja na tem mestu ne moremo zaključiti. Zaradi prepovedi poti tipov 5, 6 in 8 pa sledi, da moramo zaporedje barv poti na ciklu nadaljevati z  $RR$ . Denimo sedaj, da je naslednja zaporedna točka cikla pobarvana z barvo  $R$ . Od

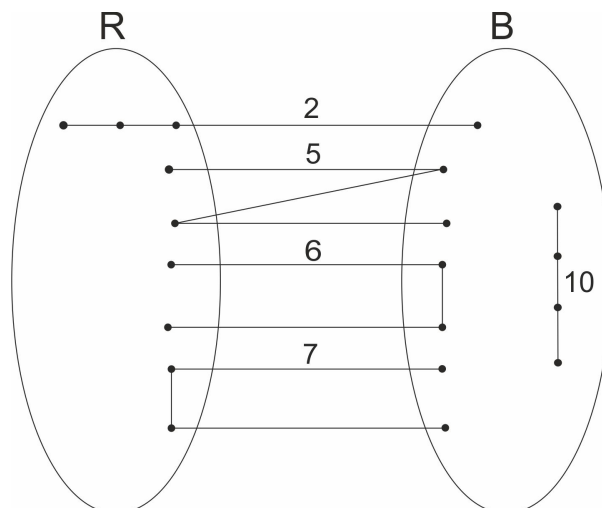
Slika 9: Prikaz množice  $\{2, 5, 6, 7, 8\}$  prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$ .

to sledi, da dobimo zaporedje  $BRRR$ , kar je v protislovju s prepovedjo poti tipa 2. Če pa je ta točka pobarvana z barvo  $B$ , pa dobimo zaporedje  $BRRB$ , od koder sledi protislovje s prepovedjo poti tipa 7. Torej ne moremo poiskati nobenega induciranelega lihega cikla dolžine vsaj 5 v grafu  $G$ .

Naj bo sedaj  $\{3, 4, 6, 7, 9\} = \{RRBR, RRBB, RBBR, BRRB, BRBB\}$  množica prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$  v grafu  $G$ . Denimo, da lahko sedaj v grafu  $G$  najdemo bikromatičen induciranih ciklov dolžine vsaj 5. Vzemimo induciranih ciklov  $C$  dolžine vsaj 5 v grafu  $G$ . Na takem ciklu zagotovo obstaja povezava  $RB$ . Oglejmo si najdaljšo inducirano pot  $P$  sode dolžine, ki se začne in konča z  $RB$  in ki je v celoti vsebovana v ciklu  $C$ . Zaradi prepovedi poti tipov 3 in 6 sledi, da moramo zaporedje nadaljevati z eno izmed dveh možnosti,  $RB$  ali  $BB$ . V prvem primeru pridemo do protislovja z maksimalnostjo poti  $P$ . Torej moramo zaporedje nadaljevati z  $BB$ . Če je sedaj naslednja zaporedna točka cikla pobarvana z barvo  $R$ , pridemo zaradi prepovedi poti tipa 7, do tega, da moramo nadaljevati zaporedje. Če sedaj zaporedje nadaljujemo z barvo  $R$  pridemo do protislovja s prepovedjo poti tipa 4, če pa zaporedje nadaljujemo z barvo  $B$  pridemo do protislovja s prepovedjo poti tipa 9. Torej mora biti točka takoj za  $BB$  pobarvana z barvo  $B$ . Od tukaj lahko opazimo, da zaradi prepovedi poti tipov 4, 7 in 9 zaporedja ne moremo nikoli končati, ali pa pridemo v protislovje z maksimalnostjo poti  $P$ . Sledi, da tak induciranih ciklov dolžine vsaj 5 v grafu  $G$  ne obstaja.

Če združimo dokaza za obe množici  $\{2, 5, 6, 7, 8\}$  in  $\{3, 4, 6, 7, 9\}$ , dobimo po izreku 1.6, da sta ti dve množici res  $S$ -izreka, saj velja, da je  $\sigma(\{2, 5, 6, 7, 8\}) = \{3, 4, 6, 7, 9\}$  in obratno.  $\square$

**Lema 6.17.** *Množice  $\{2, 5, 6, 7, 10\}$ ,  $\{1, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $\{3, 4, 6, 7, 10\}$  in  $\{1, 4, 6, 7, 9\}$  so  $S$ -izreki.*

Slika 10: Prikaz množice  $\{2, 5, 6, 7, 10\}$  prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$ .

*Dokaz.* Po lemi 5.3 vemo, da implikacija v eno smer velja. Pokažimo še implikacijo v obratno smer. Naj bo  $G$  poljuben 2-obarvan graf, za katerega sta oba monokromatična inducirana podgrafa popolna in za katerega je  $\{2, 5, 6, 7, 10\} = \{RRRB, RBRB, RBBR, BRRB, BBBB\}$  množica prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$  v grafu  $G$ .

Denimo, da lahko sedaj v grafu  $G$  najdemo bikromatičen induciranih lih cikel dolžine vsaj 5. Vzemimo induciranih lih cikel  $C$  dolžine vsaj 5 v grafu  $G$ . Na takem ciklu zagotovo obstaja povezava  $BR$ . Oglejmo si najdaljšo inducirano pot  $P$  sode dolžine, ki se začne in konča z  $BR$  in ki je v celoti vsebovana v ciklu  $C$ . Poglejmo si sedaj nadaljevanje te poti glede na prepovedane tipe induciranih poti  $P_4$ . Iz pogojev prepovedanih poti tipov 2, 5, 6 in 7 sledi, da lahko zaporedje barv točk poti  $P$  nadaljujemo le z  $BB$ . Zaradi prepovedi poti tipa 6 more biti naslednja zaporedna točka cikla pobarvana z barvo  $B$ . Zaradi prepovedi poti tipa 10 pa moramo zaporedje nadaljevati in sicer z barvo  $R$ . Od tod pridemo do protislovja z maksimalnostjo poti  $P$ .

Naj bo sedaj  $\{3, 4, 6, 7, 10\} = \{RRBR, RRBB, RBBR, BRRB, BBBB\}$  množica prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$  v grafu  $G$ . Denimo, da lahko sedaj v grafu  $G$  najdemo bikromatičen induciranih lih cikel dolžine vsaj 5. Vzemimo induciranih lih cikel  $C$  dolžine vsaj 5 v grafu  $G$ . Na takem ciklu zagotovo obstaja povezava  $RB$ . Oglejmo si najdaljšo inducirano pot  $P$  sode dolžine, ki se začne in konča z  $RB$  in ki je v celoti vsebovana v ciklu  $C$ . Zaradi prepovedi poti tipov 3 in 6 sledi, da moramo zaporedje barv točk poti  $P$  nadaljevati, in sicer z  $RB$  ali  $BB$ . Denimo, da nadaljujemo s prvo možnostjo. V tem primeru pridemo do protislovja z maksimalnostjo poti  $P$ . Nadaljevati moramo torej z drugo možnostjo  $BB$ . Če je sedaj naslednja zaporedna točka cikla pobarvana z barvo  $B$ , potem pridemo zaradi prepovedi poti tipa 10 v protislovje. Denimo torej, da je ta točka pobarvana z barvo  $R$ . Zaradi prepovedi poti tipa 7 moramo

zaporedje nadaljevati. Zaradi prepovedi poti tipa 4 pa sledi, da mora biti naslednja zaporedna točka pobarvana z barvo  $B$ . Od tod ponovno pridemo do protislovja z maksimalnostjo poti  $P$ . Tak cikel torej ne more obstajati.

Če združimo dokaza za obe množici  $\{2, 5, 6, 7, 10\}$  in  $\{3, 4, 6, 7, 10\}$ , po izreku 1.6 dobimo, da sta ti dve množici res  $S$ -izreka, saj velja, da je  $\sigma(\{2, 5, 6, 7, 10\}) = \{3, 4, 6, 7, 10\}$  in obratno. Prav tako pa sta po lemi 6.11  $S$ -izreka tudi množici  $\{1, 5, 6, 7, 8\}$  in  $\{1, 4, 6, 7, 9\}$ , saj velja, da je  $\{1, 5, 6, 7, 8\} = \tau(\{2, 5, 6, 7, 10\})$  in  $\{1, 4, 6, 7, 9\} = \tau(\{3, 4, 6, 7, 10\})$ .  $\square$

S tem smo zaključili dokazovanje izreka 6.10. Po metodi prepoznavanja matematičnih vzorcev zaključimo, da smo poiskali vse  $S$ -izreke in vse  $S$ -primere.

## 7 Grafi brez induciranih sodih ciklov

V prejšnjem poglavju smo metodo matematičnih vzorcev uporabili na družini popolnih grafov. V nadaljnjih poglavjih pa se bomo osredotočili na nekatere izbrane množice grafov, ki ne vsebujejo določenih induciranih ciklov. Naj bo  $\mathcal{F}_1 = \{C_4, C_6, C_8, \dots\}$  množica vseh sodih ciklov. V tem poglavju se bomo osredotočili na 2-obarvane  $\mathcal{F}_1$ -proste grafe.

Grafi brez induciranih sodih ciklov se v angleščini imenujejo *even-hole-free graphs*. Radoveden bralec bo več o njih našel v preglednem članku Kristine Vušković [15].

Tudi sedaj bomo ponazorili uporabo metode prepoznavanja matematičnih vzorcev glede na dve vrsti omejitev. Glede na omejitve, ki jih dobimo za barvanja točk induciranih poti  $P_3$  in nato še glede na omejitve, ki jih dobimo za barvanja točk induciranih poti  $P_4$  v  $\mathcal{F}_1$ -prostem 2-obarvanem grafu.

### 7.1 Omejitve za barvanja točk induciranih poti $P_3$

Naj bo  $\mathcal{O}$  množica vseh 2-obarvanih grafov. Naj bo  $S$  množica vseh 2-obarvanih grafov, za katere velja naslednja ekvivalenca: graf  $G$  je  $\mathcal{F}_1$ -prost natanko tedaj, ko je vsak izmed podgrafov grafa  $G$ , induciranih s točkami iste barve  $\mathcal{F}_1$ -prost. Za izpeljavo  $S$ -izrekov moramo najprej poiskati vse minimalne množice tipov induciranih poti  $P_3$  (definicija 5.4), ki se lahko pojavijo na 2-obarvanih sodih ciklih. Z analizo ciklov  $C_4$  in  $C_6$  postavimo domnevo, da so minimalne množice tipov induciranih poti  $P_3$  natanko naslednje:

- $\{2, 4\}$  – 4 cikel  $RRBB$ ,
- $\{3, 5\}$  – 4 cikel  $RBRB$ ,
- $\{2, 3\}$  – 6 ciklov  $RRBRRB$ ,
- $\{4, 5\} = \omega(\{2, 3\})$ .

Iz tega sledi, da so zgoraj našteje množice hiperpovezave hipergrafa  $\text{Min}(\mathcal{E})$ , definirane na množici točk  $P$ . Njemu pripadajoča Boolova funkcija v popolni DNO je

nato sledeča:

$$F_{\text{Min}(\mathcal{E})} : \{0, 1\}^6 \rightarrow \{0, 1\},$$

$$F_{\text{Min}(\mathcal{E})}(x) = x_2x_4 \vee x_3x_5 \vee x_2x_3 \vee x_4x_5.$$

Z uporabo pravil za računanje z Boolovimi funkcijami (izrek 1.10) lahko sedaj poračunamo dualno Boolovo funkcijo  $F_{\text{Min}(\mathcal{E})}^d : \{0, 1\}^6 \rightarrow \{0, 1\}$ .

$$F_{\text{Min}(\mathcal{E})}^d(x) = (x_2 \vee x_4)(x_3 \vee x_5)(x_2 \vee x_3)(x_4 \vee x_5)$$

$$= x_2x_5 \vee x_3x_4.$$

Množici  $\{2, 5\}$  in  $\{3, 4\}$  sta torej edina kandidata za  $S$ -izreke, ki ju je potrebno dokazati.

**Izrek 7.1.** *Naj bo  $T$  ena izmed naslednjih podmnožic množice  $P$ :*

1.  $\{2, 5\}$ ,
2.  $\{3, 4\}$ .

*Naj bodo točke grafa  $G$  pobarvane z dvema barvama, rdečo ( $R$ ) in belo ( $B$ ), tako, da graf  $G$  ne vsebuje nobene inducirane poti  $P_3$  tipa  $i \in T$ . Potem velja, da je  $G$   $\mathcal{F}_1$ -prost graf natanko tedaj, ko je vsak izmed podgrafov grafa  $G$ , inducirani s točkami iste barve,  $\mathcal{F}_1$ -prost graf.*

*Dokaz.* Po lemi 5.3 vemo, da implikacija v eno smer velja. Pokažimo še implikacijo v obratno smer. Naj bo  $G$  poljuben 2-obarvan graf, za katerega sta oba monokromatična inducirana podgrafova brez induciranih sodih ciklov, in za katerega sta 2 ( $RRB$ ) in 5 ( $BRB$ ) prepovedana tipa induciranih poti  $P_3$  (glej sliko 2). Kot vemo, je dovolj pokazati naslednje. Če sta oba inducirana podgrafova grafa  $G$ , inducirana s točkami iste barve,  $\mathcal{F}_1$ -prosta grafa, potem je tudi  $G$   $\mathcal{F}_1$  prost graf.

Predpostavimo, da ni. Torej v grafu  $G$  obstaja inducirani cikel sode dolžine. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da na tem ciklu obstaja povezava  $BR$ . (Če ne bi obstajala, bi prišli do protislovja s predpostavko, da je vsak izmed induciranih podgrafov z belo, oz. rdečo, barvo  $\mathcal{F}_1$ -prost.) Poglejmo si sedaj tretjo zaporedno točko na tem ciklu, ki je sosednja s točko pobarvano z barvo  $R$ . Zaradi prepovedi poti tipa 2 vemo, da tretja točka ne more biti pobarvana z rdečo barvo. Zaradi prepovedi poti tipa 5 pa vemo, da tretja točka ne more biti pobarvana niti z belo barvo. Torej smo prišli do protislovja, saj ne moremo skonstruirati nobenega cikla sode dolžine. Ker pa velja, da je množica  $\{2, 5\}$  enaka množici  $\rho(\{3, 4\})$ , sledi, da enako velja tudi za množico  $\{3, 4\}$ . Obe množici sta torej res  $S$ -izreka.  $\square$

Z uporabo metode prepoznavanja matematičnih vzorcev sledi, da smo poiskali vse  $S$ -izreke in  $S$ -primere, glede na omejitve barvanja točk induciranih poti  $P_3$ , za grafe brez induciranih sodih ciklov.

## 7.2 Omejitve za barvanja točk induciranih poti $P_4$

Vzemimo sedaj množico lastnosti  $P^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  glede na definicijo 5.5. Ker nas zanimajo le inducirane poti  $P_4$ , cikel  $C_4$  pa je najmanjši sod cikel, ki ne vsebuje nobene poti  $P_4$  kot inducirani podgraf, moramo obstoj inducirane cikle  $C_4$  eksplicitno prepovedati. Tako bo množica  $\mathcal{O}$  enaka množici vseh 2-obarvanih grafov brez inducirane cikle  $C_4$ . Množico  $S$  pa vzamemo kot v prejšnjem podpoglavju, le da tudi za grafe v njej prepovemo pojavitev inducirane cikle  $C_4$ .

Sedaj moramo poiskati vse minimalne množice tipov poti  $P_4$ , ki se lahko pojavijo na 2-obarvanih sodih ciklih, vendar z dolžino vsaj 6. S podrobno analizo sodih ciklov dolžin 6, 8 in 10 lahko postavimo domnevo, da so minimalne množice tipov induciranih poti  $P_4$  naslednje:

- $\{5\}$  – 6-cikel  $RBRBRB$ ,
- $\{3, 7\}$  – 6-cikel  $RRBRRB$ ,
- $\{6, 9\} = \tau(\{3, 7\})$ ,
- $\{2, 4, 8\}$  – 6-cikel  $RRRBBB$ ,
- $\{2, 3\}$  – 8-cikel  $RRRBRRRB$ ,
- $\{8, 9\} = \tau(\{2, 3\})$ ,
- $\{4, 6, 7\}$  – 8-cikel  $RRBBRRBB$ ,
- $\{2, 4, 6\}$  – 10-cikel  $RRRBRRRRBB$ ,
- $\{4, 7, 8\} = \tau(\{2, 4, 6\})$ .

Zgoraj navedene množice so natanko vse minimalne množice tipov poti  $P_4$  (definicija 5.5), ki se lahko pojavijo na sodih ciklih. Te množice sedaj tvorijo hiperpovezave hipergrafa  $\text{Min}(\mathcal{E})$ . Boolova funkcija tega hipergrafa v popolni DNO je tako sledeča:

$$F_{\text{Min}(\mathcal{E})} : \{0, 1\}^{10} \rightarrow \{0, 1\},$$

$$F_{\text{Min}(\mathcal{E})}(x) = x_5 \vee x_3x_7 \vee x_6x_9 \vee x_2x_3 \vee x_8x_9 \vee x_2x_4x_8 \vee x_4x_6x_7 \vee x_2x_4x_6 \vee x_4x_7x_8.$$

Z uporabo pravil za računanje z Boolovimi funkcijami (izrek 1.10) lahko sedaj poračunamo dualno Boolovo funkcijo  $F_{\text{Min}(\mathcal{E})}^d : \{0, 1\}^{10} \rightarrow \{0, 1\}$ .

$$\begin{aligned} F_{\text{Min}(\mathcal{E})}^d(x) &= x_5(x_3 \vee x_7)(x_6 \vee x_9)(x_2 \vee x_3)(x_8 \vee x_9)(x_2 \vee x_4 \vee x_8) \\ &\quad (x_4 \vee x_6 \vee x_7)(x_2 \vee x_4 \vee x_6)(x_4 \vee x_7 \vee x_8) \\ &= x_2x_5x_7x_9 \vee x_3x_5x_6x_8 \vee x_3x_4x_5x_9 \vee x_2x_5x_6x_7x_8. \end{aligned}$$

Štiri množice  $\{2, 5, 7, 9\}$ ,  $\{3, 5, 6, 8\}$ ,  $\{3, 4, 5, 9\}$  in  $\{2, 5, 6, 7, 8\}$  so po lemah 2.15 in 2.16 natanko kandidati za minimalne  $S$ -izreke, ki jih bomo v nadaljevanju tudi dokazali.

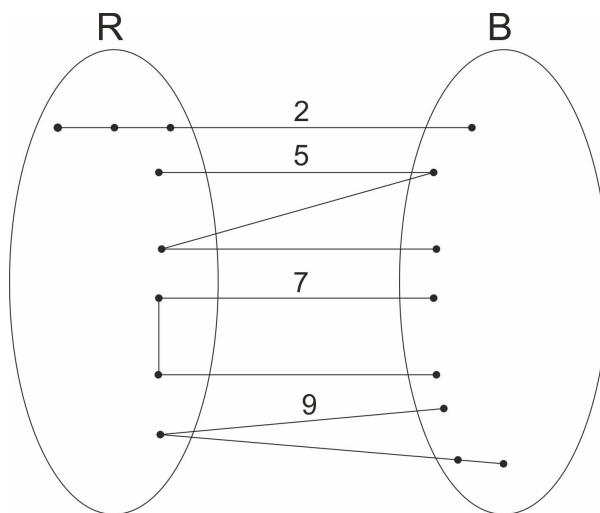
**Izrek 7.2.** Naj bo  $T$  ena izmed naslednjih podmnožic množice  $P^*$ :

1.  $\{2, 5, 7, 9\}$ ,
2.  $\{3, 5, 6, 8\}$ ,
3.  $\{3, 4, 5, 9\}$ ,
4.  $\{2, 5, 6, 7, 8\}$ .

Naj bodo točke  $\{C_4\}$ -prostega grafa  $G$  pobarvane z dvema barvama, rdečo ( $R$ ) in belo ( $B$ ), tako, da graf  $G$  ne vsebuje nobene inducirane poti  $P_4$  tipa  $i \in T$ . Potem velja, da je  $G$   $\mathcal{F}_1$ -prost graf natanko tedaj, ko je vsak izmed podgrafov grafa  $G$ , inducirani s točkami iste barve,  $\mathcal{F}_1$ -prost graf.

Zgornji izrek bomo dokazali s pomočjo treh lem, kjer bomo poskusili poiskati bikromatičen cikel sode dolžine v grafu  $G$ .

**Lema 7.3.** Množici  $\{2, 5, 7, 9\}$  in  $\{3, 5, 6, 8\}$  sta  $S$ -izreka.



Slika 11: Prikaz množice  $\{2, 5, 7, 9\}$  prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$ .

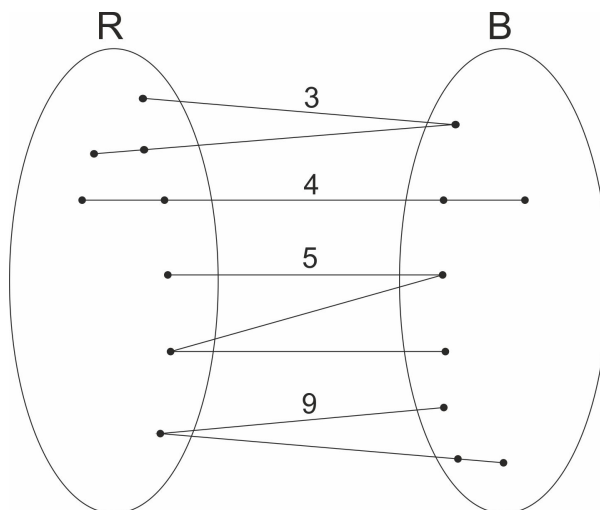
*Dokaz.* Po lemi 5.3 vemo, da implikacija v eno smer velja. Pokažimo še implikacijo v obratno smer. Naj bo  $G$  poljuben 2-obarvan  $\{C_4\}$ -prost graf, za katerega sta oba monokromatična inducirana podgrafa  $\mathcal{F}_1$ -prosta in, ki ne vsebuje nobene inducirane



poti tipa 2, 5, 7 in 9 ( $RRRB$ ,  $RBRB$ ,  $BRRB$  in  $BRBB$ ). Kot vemo, je dovolj pokazati naslednjo implikacijo. Če sta oba inducirana podgrafa grafa  $G$ , inducirana s točkami iste barve,  $\mathcal{F}_1$ -prosta, potem je  $G$  prav tako  $\mathcal{F}_1$ -prost.

Denimo, da v grafu  $G$  obstaja bikromatičen inducirani sod cikel dolžine vsaj 6. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da imamo na ciklu dve sosednji točki, kjer je prva točka pobarvana z barvo  $B$  in druga z barvo  $R$ . Vsa možna barvanja za tretjo in četrto točko zaporedja so  $RR$ ,  $RB$ ,  $BR$  in  $BB$ . Zaradi prepovedi poti tipa 2, ne moremo imeti kombinacije  $RR$ , saj bi dobili zaporedje  $BRRR$ . Zaradi prepovedi poti tipa 5, ne moremo imeti kombinacije  $BR$ , saj bi dobili zaporedje  $BRBR$ . Zaradi prepovedi poti tipa 7, ne moremo imeti kombinacije  $RB$ , saj bi dobili zaporedje  $BRRB$ . Zaradi prepovedi poti tipa 9, pa ne moremo imeti kombinacije  $BB$ , saj bi v tem primeru dobili zaporedje  $BRBB$ . Posledično ne moremo poiskati nobenega protiprimera, saj z dano množico prepovedanih tipov poti  $P_4$  ne moremo sestaviti nobenega bikromatičnega inducirane sodega cikla dolžine vsaj 6 v grafu  $G$ . Ker velja, da je množica  $\{3, 5, 6, 8\}$  enaka množici  $\tau(\{2, 5, 7, 9\})$  sledi, da sta množici  $\{2, 5, 7, 9\}$  in  $\{3, 5, 6, 8\}$  res  $S$ -izreka.  $\square$

**Lema 7.4.** Množica  $\{3, 4, 5, 9\}$  je  $S$ -izrek.



Slika 12: Prikaz množice  $\{3, 4, 5, 9\}$  prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$ .

*Dokaz.* Po lemi 5.3 vemo, da implikacija v eno smer velja. Pokažimo še implikacijo v obratno smer. Naj bo  $G$  poljuben 2-obarvan  $\{C_4\}$ -prost graf, za katerega sta oba monokromatična inducirana podgrafa  $\mathcal{F}_1$ -prosta in, ki ne vsebuje nobene inducirane poti tipa 3, 4, 5 in 9 ( $RRBR$ ,  $RRBB$ ,  $RBRB$  in  $BRBB$ ). Kot vemo, je dovolj pokazati naslednje. Če sta oba inducirana podgrafa grafa  $G$ , inducirana s točkami iste barve,

$\mathcal{F}_1$ -prosta, potem je  $G$  prav tako  $\mathcal{F}_1$ -prost.

Denimo, da v grafu  $G$  obstaja bikromatičen inducirani sod cikel dolžine vsaj 6. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da imamo na ciklu dve sosednji točki, kjer je prva točka pobarvana z barvo  $R$  in druga z barvo  $B$ . Naj bo  $x$  točka na ciklu, ki je sosednja prvi točki in različna od druge točke, in naj bo  $y$  točka na ciklu, ki je sosednja drugi točki in različna od prve točke. Poglejmo si sedaj, kako lahko točki  $x$  in  $y$  pobarvamo. Zaradi prepovedi poti tipov 3 in 9, sledi, da morata imeti točki različno barvo. Iz prepovedi poti tipov 4 in 9 pa sledi, da morata imeti točki  $x$  in  $y$  različno barvo. Sledi, da s tako množico prepovedanih tipov poti  $P_4$  ne moremo poiskati nobenega bikromatičnega inducirane sodega cikla dolžine 6 ali več v grafu  $G$ . Torej velja, da je množica  $\{3, 4, 5, 9\}$  res  $S$ -izrek.  $\square$

**Lema 7.5.** *Množica  $\{2, 5, 6, 7, 8\}$  je  $S$ -izrek.*

*Dokaz.* Po lemi 5.3 vemo, da implikacija v eno smer velja. Pokažimo še implikacijo v obratno smer. Naj bo  $G$  poljuben 2-obarvan  $\{C_4\}$ -prost graf, za katerega sta oba monokromatična inducirana podgrafa  $\mathcal{F}_1$ -prosta in, ki ne vsebuje nobene inducirane poti tipa 2, 5, 6, 7 in 8 ( $RRRB$ ,  $RBRB$ ,  $RBBR$ ,  $BRRB$  in  $RBBB$  – glej sliko 9). Kot vemo, je dovolj pokazati, da če sta oba inducirana podgrafa grafa  $G$ , inducirana s točkami iste barve,  $\mathcal{F}_1$ -prosta, potem je  $G$  prav tako  $\mathcal{F}_1$ -prost.

Denimo, da v grafu  $G$  obstaja bikromatičen inducirani sod cikel dolžine vsaj 6. Brez škode za splošnost predpostavimo, da imamo na ciklu povezavo  $RB$ . Ker smo prepovedali poti tipov 5, 6 in 8, sledi, da morata naslednji dve zaporedni točki na ciklu imeti barvo  $R$  in pridemo do zaporedja  $RBBR$ . Sedaj pa lahko pogledamo peto zaporedno točko cikla. Denimo, da je peta točka pobarvana z barvo  $R$ . Od tod pridemo do protislovja s prepovedjo poti tipa 2, saj nam točke od druge do pete zapored dajo zaporedje  $BRRR$ . Če pa je peta točka pobarvana z barvo  $B$ , dobimo zaporedje barv  $BRRB$ , ki je v protislovju s prepovedjo poti tipa 7. Torej tudi v tem primeru ne moremo poiskati nobenega bikromatičnega inducirane sodega cikla dolžine vsaj 6. Posledično je množica  $\{2, 5, 6, 7, 8\}$  res  $S$ -izrek.  $\square$

S tem smo dokazali izrek 7.2. Posledično lahko trdimo, da poznamo vse  $S$ -izreke in  $S$ -primere za problem iskanja omejitev barvanja točk induciranih poti  $P_4$  za grafe brez induciranih sodih ciklov.

## 8 $\{C_3, C_6, C_9, \dots\}$ -prosti grafi

V tem poglavju si bomo pogledali še eno skupino grafov, in sicer grafe, v katerih so prepovedani inducirani cikli, ki imajo dolžino kongruentno 0 (mod 3) (glej npr. [5]). Naj bo  $\mathcal{F}_2 = \{C_3, C_6, C_9, \dots\}$  množica ciklov z dolžino kongruentno 0 (mod 3). Ker cikel  $C_3$  ne vsebuje inducirane poti  $P_3$  ali inducirane poti  $P_4$ , ga moramo izključno prepovedati. Naj bo torej  $\mathcal{O}$  množica vseh 2-obarvanih  $\{C_3\}$ -prostih grafov. Naj bo  $\mathcal{S}$  množica vseh 2-obarvanih  $\{C_3\}$ -prostih grafov, za katere velja naslednja ekvivalenca: graf  $G$  je  $\mathcal{F}_2$ -prost natanko tedaj, ko je vsak izmed podgrafov grafa  $G$ , inducirani s točkami iste barve  $\mathcal{F}_2$ -prost. Poglejmo sedaj omejitve, ki jih dobimo za barvanja točk induciranih poti  $P_3$  in  $P_4$  v  $\mathcal{F}_2$ -prostem 2-obarvanem grafu.

### 8.1 Omejitve za barvanja točk induciranih poti $P_3$

Za izpeljavo  $\mathcal{S}$ -izrekov moramo najprej poiskati vse minimalne množice tipov induciranih poti  $P_3$ , ki se lahko pojavijo na 2-obarvanih ciklih iz množice  $\mathcal{F}_2 \setminus \{C_3\}$ . Z analizo ciklov  $C_6$ ,  $C_9$  in  $C_{12}$  postavimo domnevo, da so minimalne množice tipov induciranih poti  $P_3$  natanko naslednje:

- $\{2, 3\}$  – 6-cikel  $RRBRRB$ ,
- $\{4, 5\} = \omega(\{2, 3\})$ ,
- $\{3, 5\}$  – 6-cikel  $RBRBRB$ ,
- $\{2, 4\}$  – 12-cikel  $RRBBRRBBRRBB$ .

Kot lahko opazimo, so množice natanke enako množicam, ki smo jih dobili v poglavju 7.1, ko smo preučevali grafe brez induciranih sodih ciklov. Posledično je tudi Boolova funkcija v popolni DNO hipergrafa  $\text{Min}(\mathcal{E})$  za dane množice (hiperpovezave) enaka kot v prejšnjem poglavju. Iz tega pa sledi, da dobimo podoben izrek in sicer v naslednji obliki.

**Izrek 8.1.** *Naj bo  $T$  ena izmed naslednjih podmnožic množice  $P$ :*

1.  $\{2, 5\}$ ,
2.  $\{3, 4\}$ .

Naj bodo točke  $C_3$ -prostega grafa  $G$  pobarvane z dvema barvama, rdečo ( $R$ ) in belo ( $B$ ), tako, da graf  $G$  ne vsebuje nobene inducirane poti  $P_3$  tipa  $i \in T$ . Potem velja, da je  $G$   $\mathcal{F}_2$ -prost natanko tedaj, ko je vsak izmed podgrafov grafa  $G$ , induciranih s točkami iste barve,  $\mathcal{F}_2$ -prost.

Če si ponovno ogledamo dokaz izreka 7.1 iz prejšnjega poglavja, lahko opazimo, da v dokazu nismo uspeli poiskati nobenega cikla dolžine vsaj 4. Edino, kar se v dokazu spremeni, je, da predpostavimo, da je graf  $G$   $\{C_3\}$ -prost. Posledično sledi, da je tudi izrek 8.1 resničen. Torej so vsi  $S$ -izreki in  $S$ -primeri, za omejitve barvanj točk induciranih poti  $P_3$ , natanko enaki kot v poglavju 7.1.

## 8.2 Omejitve za barvanja točk induciranih poti $P_4$

Sedaj moramo za izpeljavo  $S$ -izrekov poiskati še vse minimalne množice tipov induciranih poti  $P_4$  (definicija 5.5), ki se lahko pojavijo na 2-obarvanih ciklih iz množice  $\mathcal{F}_2 \setminus \{C_3\}$ . Z analizo ciklov  $C_6$ ,  $C_9$ ,  $C_{12}$  in  $C_{15}$  postavimo domnevo, da so naslednje množice vse minimalne množice tipov poti  $P_4$ , ki se lahko pojavijo:

- $\{5\}$  – 6-cikel  $RBRBRB$ ,
- $\{3, 7\}$  – 6-cikel  $RRBRRB$ ,
- $\{6, 9\} = \tau(\{3, 7\})$ ,
- $\{2, 4, 8\}$  – 6-cikel  $RRRBBB$ ,
- $\{2, 3\}$  – 12-cikel  $RRRBRRRBRRRB$ ,
- $\{8, 9\} = \tau(\{2, 3\})$ ,
- $\{4, 6, 7\}$  – 12-cikel  $RRBBRRBBRRBB$ ,
- $\{2, 4, 6\}$  – 15-cikel  $RRRBRRRRBBRRRRBB$ ,
- $\{4, 7, 8\} = \tau(\{2, 4, 6\})$ .

Enako kot pri iskanju omejitev za inducirane poti  $P_3$ , tudi tukaj velja, da so minimalne množice tipov poti, ki jih dobimo, kar enake kot v poglavju 7.2. Te množice torej tvorijo hiperpovezave hipergrafa  $\text{Min}(\mathcal{E})$ . Boolova funkcija tega hipergrafa v popolni DNO pa je enaka kot v poglavju 7.2. Iz tega pa sledi, da dobimo podoben izrek in sicer v naslednji obliki.

**Izrek 8.2.** Naj bo  $T$  ena izmed naslednjih podmnožic množice  $P^*$ :

1.  $\{2, 5, 7, 9\}$ ,
2.  $\{3, 5, 6, 8\}$ ,
3.  $\{3, 4, 5, 9\}$ ,
4.  $\{2, 5, 6, 7, 8\}$ .

*Naj bodo točke  $\{C_3\}$ -prostega grafa  $G$  pobarvane z dvema barvama, rdečo ( $R$ ) in belo ( $B$ ), tako, da graf  $G$  ne vsebuje nobene inducirane poti  $P_4$  tipa  $i \in T$ . Potem velja, da je  $G$   $\mathcal{F}_2$ -prost natanko tedaj, ko je vsak izmed podgrafov grafa  $G$ , induciran s točkami iste barve,  $\mathcal{F}_2$ -prost.*

Tudi sedaj si lahko ponovno ogledamo vse dokaze iz poglavja 7.2 za inducirane poti  $P_4$  in opazimo, da v dokazu nismo uspeli najti nobenega cikla dolžine vsaj 5. Posledično sledi, da je tudi izrek 8.2 resničen, le da moramo v tem primeru pri dokazovanju predpostaviti, da graf  $G$  ne vsebuje inducirane cikla  $C_3$ . Torej so vsi  $S$ -izreki in  $S$ -primeri, za omejitve barvanj točk induciranih poti  $P_4$ , natanko enaki kot v prejšnjem poglavju.

## 9 $\{C_4, C_5, C_7, C_8 \dots\}$ -prosti grafi

Zadnja skupina grafov, ki jo bomo obravnavali, so grafi brez ciklov dolžine, ki je kongruentna 1 ali 2 po modulu 3. Naj bo  $\mathcal{F}_3 = \{C_4, C_5, C_7, C_8, \dots\}$ . Poglejmo si sedaj omejitve, ki jih dobimo za barvanja točk induciranih poti  $P_3$  in  $P_4$  v  $\mathcal{F}_3$ -prostem grafu. Več na to temo je na voljo v članku [14], kjer so obravnavani grafi, kjer je množica prepovedanih induciranih podgrafov podobna množici  $\mathcal{F}_3$ , le da je razširjena s prepovedjo dveh dodatnih grafov.

### 9.1 Omejitve za barvanja točk induciranih poti $P_3$

Naj bo  $\mathcal{O}$  množica vseh 2-obarvanih grafov. Naj bo  $S$  množica vseh 2-obarvanih grafov, za katere velja naslednja ekvivalenca: graf  $G$  je  $\mathcal{F}_3$ -prost natanko tedaj, ko je vsak izmed podgrafov grafa  $G$ , induciranih s točkami iste barve  $\mathcal{F}_3$ -prost. Ponovno moramo poiskati vse minimalne množice tipov induciranih poti  $P_3$  (definicija 5.4), ki se lahko pojavijo na 2-obarvanih ciklih iz množice  $\mathcal{F}_3$ , definirane zgoraj. In sicer, z analizo prvih nekaj najmanjših ciklov iz množice  $\mathcal{F}_3$  dobimo naslednje minimalne množice tipov induciranih poti  $P_3$ :

- $\{2, 4\}$  – 4-cikel  $RRBB$ ,
- $\{3, 5\}$  – 4-cikel  $RBRB$ ,
- $\{1, 2, 3\}$  – 4-cikel  $RRRB$ ,
- $\{4, 5, 6\} = \omega(\{1, 2, 3\})$ .

Zgoraj naštetje množice so torej hiperpovezave hipergrafa  $\text{Min}(\mathcal{E})$ . Njena pripadajoča Boolova funkcija v popolni DNO pa je nato sledeča:

$$F_{\text{Min}(\mathcal{E})} : \{0, 1\}^6 \rightarrow \{0, 1\},$$

$$F_{\text{Min}(\mathcal{E})}(x) = x_2x_4 \vee x_3x_5 \vee x_1x_2x_3 \vee x_4x_5x_6.$$

Z uporabo pravil za računanje z Boolovimi funkcijami (izrek 1.10) lahko sedaj poračunamo dualno Boolovo funkcijo  $F_{\text{Min}(\mathcal{E})}^d : \{0, 1\}^6 \rightarrow \{0, 1\}$ .

$$\begin{aligned} F_{\text{Min}(\mathcal{E})}^d(x) &= (x_2 \vee x_4)(x_3 \vee x_5)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_4 \vee x_5 \vee x_6) \\ &= x_2x_5 \vee x_3x_4 \vee x_2x_3x_6 \vee x_1x_4x_5 \end{aligned}$$

Množice  $\{2, 5\}$ ,  $\{3, 4\}$ ,  $\{2, 3, 6\}$  in  $\{1, 4, 5\}$  so torej po lemah 2.15 in 2.16 natanko kandidati za minimalne  $S$ -izreke, ki jih je potrebno dokazati.

**Izrek 9.1.** *Naj bo  $T$  ena izmed naslednjih podmnožic množice  $P$ :*

1.  $\{2, 5\}$ ,
2.  $\{3, 4\}$ ,
3.  $\{2, 3, 6\}$ ,
4.  $\{1, 4, 5\}$ .

*Naj bodo točke grafa  $G$  pobarvane z dvema barvama, rdečo ( $R$ ) in belo ( $B$ ), tako, da graf  $G$  ne vsebuje nobene inducirane poti  $P_3$  tipa  $i \in T$ . Potem velja, da je  $G$   $\mathcal{F}_3$ -prost natanko tedaj, ko je vsak izmed podgrafov grafa  $G$ , inducirani s točkami iste barve,  $\mathcal{F}_3$ -prost.*

Izrek bomo dokazali s pomočjo naslednjih dveh lem.

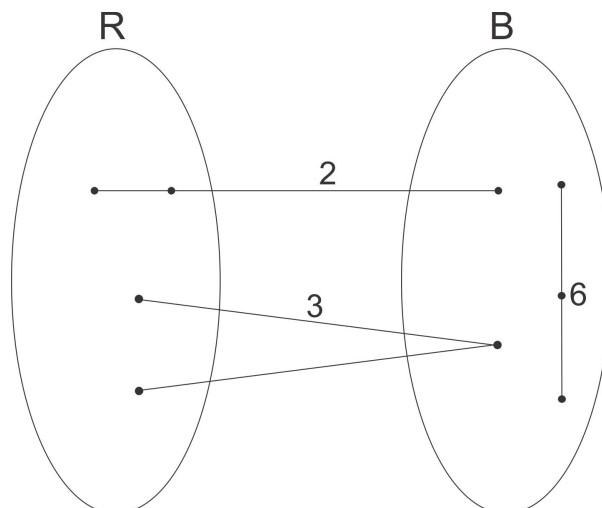
**Lema 9.2.** *Množici  $\{2, 5\}$  in  $\{3, 4\}$  sta  $S$ -izreka.*

*Dokaz.* Po lemi 5.3 vemo, da implikacija v eno smer velja. Pokažimo še implikacijo v obratno smer. Naj bo  $G$  poljuben 2-obarvan graf, za katerega sta oba monokromatična inducirana podgrafa  $\mathcal{F}_3$ -prosta in za katerega je  $\{2, 5\} = \{RRB, BRB\}$  (glej sliko 2) množica prepovedanih tipov induciranih poti  $P_3$  v grafu  $G$ . Kot vemo, je dovolj pokazati naslednje. Če sta oba inducirana podgrafa grafa  $G$ , inducirana s točkami iste barve,  $\mathcal{F}_3$ -prosta, potem je  $G$  prav tako  $\mathcal{F}_3$ -prost.

Predpostavimo torej, da ni. V grafu  $G$  torej obstaja bikromatičen inducirani cikel iz množice  $\mathcal{F}_3$ . Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da na tem ciklu obstaja povezava  $BR$ . Poglejmo si sedaj tretjo zaporedno točko na tem ciklu, ki je sosednja točki, ki je pobarvano z barvo  $R$ . Zaradi prepovedi poti tipa 2 vemo, da tretja točka ne more biti pobarvana z rdečo barvo. Zaradi prepovedi poti tipa 5 pa vemo, da tretja točka ne more biti pobarvana niti z belo barvo. Prišli smo do protislovja, saj ne moremo skonstruirati nobenega inducirane cikla dolžine vsaj 4, torej tudi nobenega cikla iz množice  $\mathcal{F}_3$ . Ker velja, da je množica  $\{2, 5\}$  enaka množici  $\rho(\{3, 4\})$ , pa sledi, da sta obe množici  $S$ -izreka.  $\square$

**Lema 9.3.** *Množici  $\{2, 3, 6\}$  in  $\{1, 4, 5\}$  sta  $S$ -izreka.*

*Dokaz.* Po lemi 5.3 vemo, da implikacija v eno smer velja. Pokažimo še implikacijo v obratno smer. Naj bo  $G$  poljuben 2-obarvan graf, za katerega sta oba monokromatična inducirana podgrafa  $\mathcal{F}_3$ -prosta in za katerega je  $\{2, 3, 6\} = \{RRB, RBR, BBB\}$

Slika 13: Prikaz množice  $\{2, 3, 6\}$  prepovedanih tipov induciranih poti  $P_3$ .

množica prepovedanih tipov induciranih poti  $P_3$  v grafu  $G$ .

Denimo, da lahko sedaj v grafu  $G$  najdemo bikromatičen inducirani cikel dolžine kongruentne 1 ali 2 (mod 3). Naj bo  $C$  poljuben tak cikel v grafu  $G$ . Na takem ciklu zagotovo obstaja povezava  $RB$ . Iz prepovedi poti tipa 3 vemo, da se bo vsako zaporedje  $RB$  nadaljevalo z  $B$ . Oglejmo si sedaj najdaljšo inducirano pot  $P$  dolžine kongruentne 0 (mod 3), ki se začne in konča z  $RBB$  in ki je v celoti vsebovana v ciklu  $C$ . Poglejmo si sedaj nadaljevanje te poti glede na prepovedane tipe induciranih poti  $P_3$ . Zaradi prepovedi poti tipa 6 vemo, da se mora zaporedje barv točk poti  $P$  nadaljevati, in sicer z barvo  $R$ . Zaradi prepovedi poti tipa 2 pa vemo, da zaporedja na tem mestu ne moremo zaključiti, saj bi prišli v protislovje. Torej sledi, da je naslednja zaporedna točka na ciklu  $C$  pobarvana z barvo  $B$ . Sedaj pa iz prepovedi poti tipa 3 sledi, da zaporedja ne moremo končati, in da mora biti naslednja točka pobarvana z barvo  $B$ . Prišli smo do protislovja z maksimalnostjo poti  $P$ . Torej vemo, da v grafu  $G$  ne moremo najti nobenega bikromatičnega inducirane cikla dolžine kongruentne 1 ali 2 (mod 3). Ker velja tudi, da je množica  $\{1, 4, 5\}$  enaka množici  $\rho(\{2, 3, 6\})$ , pa sledi, da podobno velja tudi za množico  $\{1, 4, 5\}$ , le da se vlogi barv zamenjata. Obe množici sta torej res  $S$ -izreka.  $\square$

S tem ko smo pokazali resničnost obeh lem, sledi, da je tudi izrek 9.1 veljaven. Poiskati smo torej vse  $S$ -izreke in  $S$ -primere, glede na omejitve barvanja točk induciranih poti  $P_3$ , za grafe brez ciklov dolžine kongruentne 1 ali 2 po modulu 3.



## 9.2 Omejitve za barvanja točk induciranih poti $P_4$

Poglejmo si sedaj omejitve za barvanja točk induciranih poti  $P_4$  za  $\mathcal{F}_3$ -proste grafe. Ker nas zanimajo le inducirane poti  $P_4$ , cikel  $C_4$  pa ne vsebuje nobene inducirane poti  $P_4$ , moramo obstoj inducirane poti  $C_4$  izključno prepovedati. Naj bo torej  $\mathcal{O}$  množica vseh 2-obarvanih  $\{C_4\}$ -prostih grafov. Naj bo  $S$  množica vseh 2-obarvanih  $\{C_4\}$ -prostih grafov, za katere velja naslednja ekvivalenca: graf  $G$  je  $\mathcal{F}_3$ -prost natanko tedaj, ko je vsak izmed podgrafov grafa  $G$ , induciranih s točkami iste barve  $\mathcal{F}_3$ -prost. Sedaj moramo poiskati le še vse minimalne množice tipov poti  $P_4$  (definicija 5.5), ki se lahko pojavijo na 2-obarvanih ciklih iz množice  $\mathcal{F}_3 \setminus \{C_4\}$ . Z analizo ciklov dolžin 5, 7 in 8 postavimo domnevo, da so minimalne množice tipov poti, ki se lahko pojavijo, naslednje množice:

- $\{2, 4, 6\}$  – 5-cikel  $RRRBB$ ,
- $\{4, 7, 8\} = \tau(\{2, 4, 6\})$ ,
- $\{1, 2, 4, 8\}$  – 7-cikel  $RRRRBBB$ ,
- $\{2, 4, 8, 10\} = \tau(\{1, 2, 4, 8\})$ ,
- $\{5\}$  – 8-cikel  $RBRBRBRB$
- $\{2, 3\}$  – 8-cikel  $RRRBRRRB$ ,
- $\{8, 9\} = \tau(\{2, 3\})$ ,
- $\{4, 6, 7\}$  – 8-cikel  $RRBBRRBB$ .

Zgoraj navedene množice so natanko vse minimalne množice tipov poti  $P_4$ , ki se lahko pojavijo na ciklih iz množice  $\mathcal{F}_3 \setminus \{C_4\}$ . Te množice sedaj tvorijo hiperpovezave hipergrafa  $\text{Min}(\mathcal{E})$ . Boolova funkcija tega hipergrafa v popolni DNO je tako sledeča:

$$F_{\text{Min}(\mathcal{E})} : \{0, 1\}^{10} \rightarrow \{0, 1\},$$

$$F_{\text{Min}(\mathcal{E})}(x) = x_5 \vee x_2x_3 \vee x_8x_9 \vee x_2x_4x_6 \vee x_4x_7x_8 \vee x_4x_6x_7 \vee x_1x_2x_4x_8 \vee x_2x_4x_8x_{10}.$$

Z uporabo pravil za računanje z Boolovimi funkcijami (izrek 1.10) lahko sedaj poračunamo dualno Boolovo funkcijo  $F_{\text{Min}(\mathcal{E})}^d : \{0, 1\}^{10} \rightarrow \{0, 1\}$ .

$$\begin{aligned} F_{\text{Min}(\mathcal{E})}^d(x) &= x_5(x_2 \vee x_3)(x_8 \vee x_9)(x_2 \vee x_4 \vee x_6)(x_4 \vee x_7 \vee x_8) \\ &\quad (x_4 \vee x_6 \vee x_7)(x_1 \vee x_2 \vee x_4 \vee x_8)(x_2 \vee x_4 \vee x_8 \vee x_{10}) \\ &= x_2x_4x_5x_8 \vee x_3x_4x_5x_9 \vee x_2x_4x_5x_9 \vee x_3x_4x_5x_8 \vee x_2x_5x_6x_8 \\ &\quad \vee x_2x_5x_7x_8 \vee x_2x_5x_7x_9 \vee x_3x_5x_6x_8 \vee x_1x_3x_5x_6x_7x_9x_{10}. \end{aligned}$$

Množice  $\{2, 4, 5, 8\}$ ,  $\{3, 4, 5, 9\}$ ,  $\{2, 4, 5, 9\}$ ,  $\{3, 4, 5, 8\}$ ,  $\{2, 5, 6, 8\}$ ,  $\{2, 5, 7, 8\}$ ,  $\{2, 5, 7, 9\}$ ,  $\{3, 5, 6, 8\}$  in  $\{1, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$  so po lemah 2.15 in 2.16 natanko kandidati za minimalne  $S$ -izreke.

**Izrek 9.4.** *Naj bo  $T$  ena izmed naslednjih podmnožic množice  $P^*$ :*

1.  $\{2, 4, 5, 8\}$ ,
2.  $\{3, 4, 5, 9\}$ ,
3.  $\{2, 4, 5, 9\}$ ,
4.  $\{3, 4, 5, 8\}$ ,
5.  $\{2, 5, 6, 8\}$ ,
6.  $\{2, 5, 7, 8\}$ ,
7.  $\{2, 5, 7, 9\}$ ,
8.  $\{3, 5, 6, 8\}$ ,
9.  $\{1, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$ .

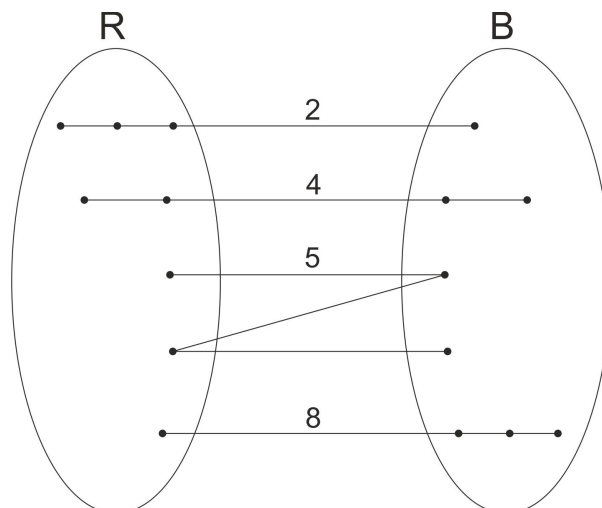
*Naj bodo točke grafa  $G$  pobarvane z dvema barvama, rdečo ( $R$ ) in belo ( $B$ ), tako, da graf  $G$  ne vsebuje nobene inducirane poti  $P_4$  tipa  $i \in T$ . Potem velja, da je  $G$   $\mathcal{F}_3$ -prost natanko tedaj, ko je vsak izmed podgrafov grafa  $G$ , induciranih s točkami iste barve,  $\mathcal{F}_3$ -prost.*

Zgornji izrek bomo dokazali s pomočjo naslednjih nekaj lem.

**Lema 9.5.** *Množica  $\{2, 4, 5, 8\}$  je  $S$ -izrek.*

*Dokaz.* Po lemi 5.3 vemo, da implikacija v eno smer velja. Pokažimo še implikacijo v obratno smer. Naj bo  $G$  poljuben 2-obarvan  $\{C_4\}$ -prost graf, za katerega sta oba monokromatična inducirana podgrafa  $\mathcal{F}_3$ -prosta, in za katerega je  $\{2, 4, 5, 8\} = \{RRRB, RRBB, RBRB, RBBB\}$  množica prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$  v grafu  $G$ .

Denimo, da lahko sedaj v grafu  $G$  najdemo bikromatičen inducirani cikel dolžine kongruentne 1 ali 2 (mod 3). Vzemimo tak cikel  $C$  dolžine vsaj 5 v grafu  $G$ . Na takem ciklu zagotovo obstaja povezava  $RB$ . Iz prepovedi poti tipov 4 in 8 sledi, da morata biti naslednji dve zaporedni točki na ciklu pobarvani ali z  $RR$  ali z  $BR$ . Denimo, da sta pobarvani z  $RR$ . Zaradi prepovedi poti tipov 2 in 5 se mora zaporedje barv točk

Slika 14: Prikaz množice  $\{2, 4, 5, 8\}$  prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$ .

nadaljevati z  $BR$  in dobimo zaporedje  $RBRRBR$ . Poglejmo si sedaj najdaljšo inducirano pot  $P$  dolžine kongruentne  $0 \pmod{3}$ , ki se začne in konča z  $RBR$  in ki je v celoti vsebovana v ciklu  $C$ . Zaradi prepovedi poti tipa 5 se zaporedje barv točk poti  $P$  nadaljuje z  $R$ . Zaradi prepovedi poti tipa 2, pa zaporedja na tem mestu ne moremo zaključiti in se mora nadaljevati z barvo  $B$ . Sedaj pa zaradi prepovedi poti tipov 5 in 4 sledi, da se mora zaporedje nadaljevati in sicer z barvo  $R$ . Prišli smo torej do protislovja z maksimalnostjo poti  $P$ .

Po drugi strani, naj se zaporedje barv, namesto z  $RR$ , nadaljuje z  $BR$ . Zaradi prepovedi poti tipa 4 vemo, da se mora zaporedje sedaj nadaljevati, in sicer z  $B$ . Zaradi prepovedi poti tipa 5 pa vemo, da se mora zaporedje na tem mestu nadaljevati prav tako z  $B$ , da dobimo zaporedje  $RBBRBB$ . Poglejmo si sedaj najdaljšo inducirano pot  $P'$  dolžine kongruentne  $0 \pmod{3}$ , ki se začne in konča z  $RBB$  in ki je v celoti vsebovana v ciklu  $C$ . Po enakem razmisleku kot smo dobili zaporedje  $RBBRBB$ , lahko pokažemo, da pridemo tudi v tem primeru do protislovja, in sicer z maksimalnostjo poti  $P'$ . Posledično je množica  $\{2, 4, 5, 8\}$   $S$ -izrek.  $\square$

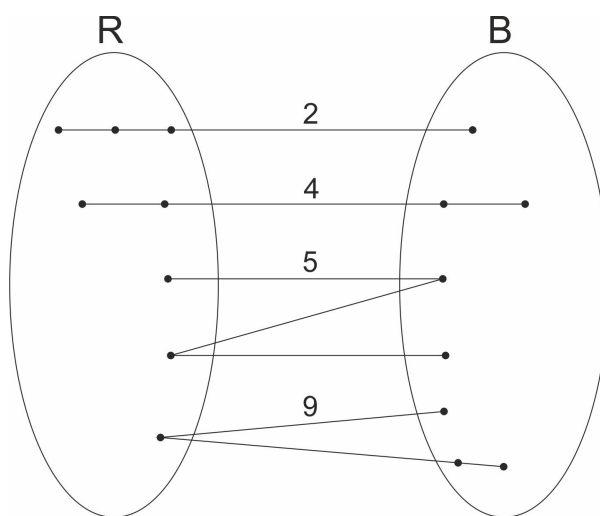
**Lema 9.6.** Množica  $\{3, 4, 5, 9\}$  je  $S$ -izrek.

*Dokaz.* Po lemi 5.3 vemo, da implikacija v eno smer velja. Pokažimo še implikacijo v obratno smer. Naj bo  $G$  poljuben 2-obarvan  $\{C_4\}$ -prost graf, za katerega sta oba monokromatična inducirana podgrafa  $\mathcal{F}_3$ -prosta, in za katerega je  $\{3, 4, 5, 9\} = \{RRBR, RRBB, RBRB, BRBB\}$  (glej sliko 12) množica prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$  v grafu  $G$ .

Denimo, da lahko sedaj v grafu  $G$  najdemo bikromatičen inducirani cikel dolžine kongruentne 1 ali 2  $\pmod{3}$ . Vzemimo tak cikel  $C$  dolžine vsaj 5 v grafu  $G$ . Na takem

ciklu zagotovo obstaja povezava  $RB$ . Če si pogledamo prepovedana tipa poti 3 in 5 opazimo, da mora biti tretja zaporedna točka na ciklu nujno pobarvana z barvo  $B$ . Od tod dobimo zaporedje prvih treh točk  $RBB$ . Denimo sedaj, da se zaporedje konča z barvo  $R$ . V tem primeru pridemo do protislovja s prepovedjo poti tipa 4, saj nam zadnja točka skupaj s prvimi tremi da zaporedje  $RRBB$ . Torej se mora zaporedje končati z barvo  $B$ . Vendar v tem primeru pridemo do protislovja s prepovedjo poti tipa 9, saj iz zadnje točke in prvih treh točk dobimo zaporedje  $BRBB$ . Posledično je množica  $\{3, 4, 5, 9\}$  res  $S$ -izrek.  $\square$

**Lema 9.7.** Množici  $\{2, 4, 5, 9\}$  in  $\{3, 4, 5, 8\}$  sta  $S$ -izreka.



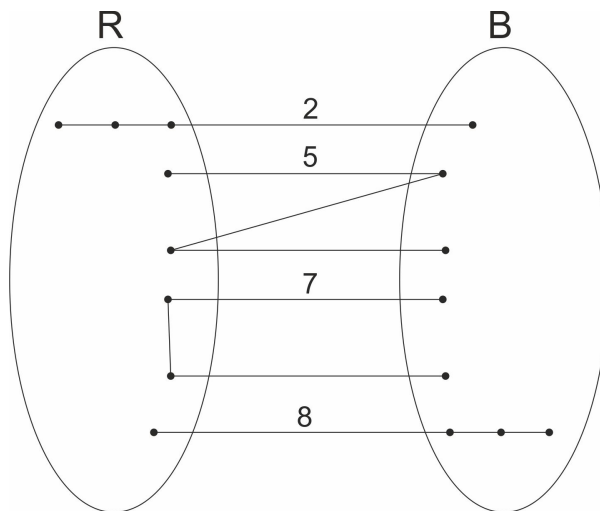
Slika 15: Prikaz množice  $\{2, 4, 5, 9\}$  prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$ .

*Dokaz.* Po lemi 5.3 vemo, da implikacija v eno smer velja. Pokažimo še implikacijo v obratno smer. Naj bo  $G$  poljuben 2-obarvan  $\{C_4\}$ -prost graf, za katerega sta oba monokromatična inducirana podgrafa  $\mathcal{F}_3$ -prosta, in za katerega je  $\{2, 4, 5, 9\} = \{RRRB, RRBB, RBRB, BRBB\}$  množica prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$  v grafu  $G$ .

Denimo, da lahko sedaj v grafu  $G$  najdemo bikromatičen inducirani cikel dolžine kongruentne 1 ali 2 (mod 3). Vzemimo tak cikel  $C$  dolžine vsaj 5 v grafu  $G$ . Na takem ciklu zagotovo obstaja povezava  $BR$ . Zaradi prepovedi poti tipov 2, 5 in 9, sledi, da se mora zaporedje nadaljevati z  $RB$ . Poglejmo si sedaj najdaljšo inducirano pot  $P$  dolžine kongruentne 0 (mod 3), ki se začne in konča z  $BRR$  in ki je v celoti vsebovana v ciklu  $C$ . Zaradi prepovedi poti tipa 2 se mora zaporedje barv točk poti  $P$  nadaljevati z  $B$ . Zaradi prepovedi poti tipa 4 se zaporedje na tem mestu na more končati, ampak se nadaljuje z barvo  $R$ . Sedaj pa se zaradi prepovedi poti tipa 5 zaporedje nadaljuje z barvo  $R$ . Prišli smo do protislovja z maksimalnostjo poti  $P$ . Ker velja, da je

množica  $\{3, 4, 5, 8\}$  enaka množici  $\tau(\{2, 4, 5, 9\})$  pa sledi, da sta obe množici  $\{2, 4, 5, 9\}$  in  $\{3, 4, 5, 8\}$   $S$ -izreka.  $\square$

**Lema 9.8.** *Množici  $\{2, 5, 6, 8\}$  in  $\{2, 5, 7, 8\}$  sta  $S$ -izreka.*



Slika 16: Prikaz množice  $\{2, 5, 7, 8\}$  prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$ .

*Dokaz.* Po lemi 5.3 vemo, da implikacija v eno smer velja. Pokažimo še implikacijo v obratno smer. Naj bo  $G$  poljuben 2-obarvan  $\{C_4\}$ -prost graf, za katerega sta oba monokromatična inducirana podgrafa  $\mathcal{F}_3$ -prosta, in za katerega je  $\{2, 5, 6, 8\} = \{RRRB, RBRB, RBBR, RBBB\}$  množica prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$  v grafu  $G$ .

Denimo, da lahko sedaj v grafu  $G$  najdemo bikromatičen inducirani cikel dolžine kongruentne 1 ali 2 (mod 3). Vzemimo tak cikel  $C$  dolžine vsaj 5 v grafu  $G$ . Na takem ciklu zagotovo obstaja povezava  $RB$ . Zaradi prepovedi poti tipov 5, 6 in 8, sledi, da se mora zaporedje nadaljevati z  $RR$ . Poglejmo si sedaj najdaljšo inducirano pot  $P$  dolžine kongruentne 0 (mod 3), ki se začne in konča z  $RBR$  in ki je v celoti vsebovana v ciklu  $C$ . Zaradi prepovedi poti tipa 5 se mora zaporedje barv točk poti  $P$  nadaljevati z barvo  $R$ . Zaradi prepovedi poti tipa 2, pa se mora zaporedje nato nadaljevati z barvo  $B$ . Zaradi prepovedi poti tipov 5, 6 in 8, sledi, da se zaporedje na tem mestu ne more zaključiti in se mora nadaljevati z barvo  $R$ . Prišli smo do protislovja z maksimalnostjo poti  $P$ . Množica  $\{2, 5, 7, 8\}$  je ravno množica  $\tau(\{2, 5, 6, 8\})$  in zato sta posledično obe množici  $S$ -izreka.  $\square$

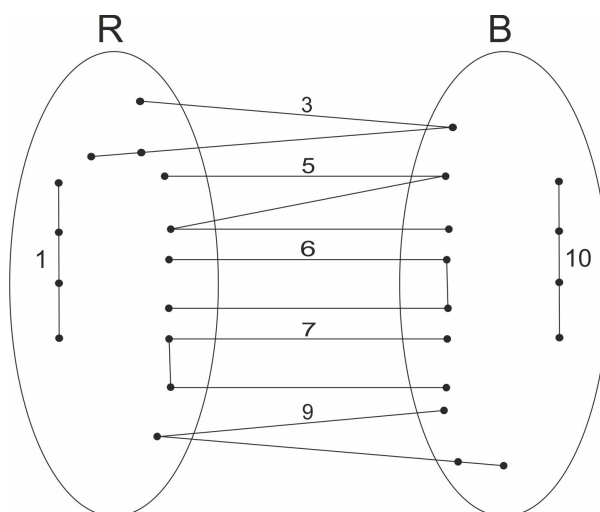
**Lema 9.9.** *Množici  $\{2, 5, 7, 9\}$  in  $\{3, 5, 6, 8\}$  sta  $S$ -izreka.*

*Dokaz.* Po lemi 5.3 vemo, da implikacija v eno smer velja. Pokažimo še implikacijo v obratno smer. Naj bo  $G$  poljuben 2-obarvan  $\{C_4\}$ -prost graf, za katerega sta

oba monokromatična inducirana podgrafa  $\mathcal{F}_3$ -prosta, in za katerega je  $\{2, 5, 7, 9\} = \{RRRB, RBRB, BRRB, BRBB\}$  (glej sliko 11) množica prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$  v grafu  $G$ .

Denimo, da lahko sedaj v grafu  $G$  najdemo bikromatičen inducirani cikel dolžine kongruentne 1 ali 2 (mod 3). Vzemimo tak cikel  $C$  dolžine vsaj 5 v grafu  $G$ . Na takem ciklu zagotovo obstaja povezava  $BR$ . Iz prepovedi poti tipa 2 in 7 sledi, da tretja zaporedna točka na ciklu ne more biti pobarvana z barvo  $R$ . Iz prepovedi poti tipa 5 in 9 pa sledi, da tretja zaporedna točka na ciklu ne more biti pobarvana z barvo  $B$ . Od tod sledi, da ne moremo poiskati nobenega cikla dolžine vsaj 5. Posledično, ker je množica  $\tau(\{2, 5, 7, 9\})$  enaka množici  $\{3, 5, 6, 8\}$ , sta obe množici  $S$ -izreka.  $\square$

**Lema 9.10.** *Množica  $\{1, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$  je  $S$ -izrek.*



Slika 17: Prikaz množice  $\{1, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$  prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$ .

*Dokaz.* Po lemi 5.3 vemo, da implikacija v eno smer velja. Pokažimo še implikacijo v obratno smer. Naj bo  $G$  poljuben 2-obarvan  $\{C_4\}$ -prost graf, za katerega sta oba monokromatična inducirana podgrafa  $\mathcal{F}_3$ -prosta, in za katerega je  $\{2, 4, 5, 8\} = \{RRRB, RRBB, RBRB, RBBB\}$  množica prepovedanih tipov induciranih poti  $P_4$  v grafu  $G$ .

Denimo, da lahko sedaj v grafu  $G$  najdemo bikromatičen inducirani cikel dolžine kongruentne 1 ali 2 (mod 3). Vzemimo tak cikel  $C$  dolžine vsaj 5 v grafu  $G$ . Na takem ciklu zagotovo obstaja povezava  $RB$ . Iz prepovedi poti tipov 3, 5 in 6 sledi, da morata biti tretja in četrta zaporedna točka na ciklu pobarvani z barvo  $B$ . Hkrati pa zaradi prepovedi poti tipov 5, 7 in 9 velja, da se mora zaporedje končati z  $RR$ . Na ciklu  $C$  torej obstaja zaporedje  $RRRBBB$ . Sedaj pa zaradi prepovedi poti tipa 10 sledi,

da mora biti naslednja točka tega zaporedja na ciklu pobarvana z barvo  $R$ . Zaradi prepovedi poti tipa 1 zaporedja ne moremo končati in mora biti zaradi prepovedi poti tipa 9 naslednja zaporedna točka ponovno pobarvana z  $R$ . Iz istega razloga kot prej zaporedja na tem mestu ne moremo končati. Zaradi prepovedi poti tipa 7 pa mora biti naslednja točka ponovno pobarvana z barvo  $R$ . Sedaj pa lahko opravimo podobno analizo, le da tipe poti 1, 5, 7, 9 in 10 zamenjamo s tipi poti, ki jih dobimo, če na njih uporabimo permutacijo  $\tau$ , da ugotovimo, da se mora zaporedje ponovno nadaljevati s tremi zaporednimi  $B$ -ji. Iz tega sledi, da imamo na ciklu  $C$  ponavljajoče zaporedje po treh rdečih in treh belih točk. Posledično mora imeti cikel  $C$  dolžino kongruentno  $0 \pmod{3}$ . Prišli smo do protislovja z dolžino cikla  $C$ . Množica  $\{1, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$  je torej res  $S$ -izrek.  $\square$

S tem smo dokazali izrek 9.4. Posledično lahko trdimo, da poznamo vse  $S$ -izreke in  $S$ -primere za problem iskanja omejitev barvanja točk induciranih poti  $P_4$  za grafe brez ciklov dolžine kongruentne 1 ali 2 po modulu 3.

## 10 Pregled rezultatov in nekaj strukturnih posledic

V predhodnih štirih poglavjih smo na posameznih družinah grafov uporabili metodo prepoznavanja matematičnih vzorcev, kjer smo se vprašali, katere množice vzorcev barvanja točk vsake inducirane poti  $P_3$ , oz.  $P_4$ , z dvema barvama moramo prepovedati, da graf  $G$ , katerega točke so obarvane z dvema barvama, pripada določeni družini grafov natanko takrat, ko vsak od podgrafov induciranih z eno izmed barv pripada isti družini grafov. Rezultati predhodnih štirih poglavij so povzeti v tabeli 1. Številke znotraj tabele predstavljajo tipe poti, kakor smo jih definirali v poglavju 5, definiciji 5.4 in 5.5.

Obravnane družine grafov	Prepovedani vzorci za inducirane poti $P_3$	Prepovedani vzorci za inducirane poti $P_4$
Popolni grafi	$\{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 5, 6\}$	$\{2, 7, 9\}, \{3, 6, 8\}, \{2, 3, 8, 9\}, \{1, 6, 7, 10\}, \{2, 3, 6, 7, 10\}, \{1, 6, 7, 8, 9\}, \{2, 5, 6, 7, 10\}, \{1, 5, 6, 7, 8\}, \{3, 4, 6, 7, 10\}, \{1, 4, 6, 7, 9\}, \{2, 5, 6, 7, 8\}, \{3, 4, 6, 7, 9\}$
Grafi brez induciranih sodih ciklov in $\{C_3, C_6, C_9, \dots\}$ -prosti grafi	$\{2, 5\}, \{3, 4\}$	$\{2, 5, 7, 9\}, \{3, 5, 6, 8\}, \{3, 4, 5, 9\}, \{2, 5, 6, 7, 8\}$
$\{C_4, C_5, C_7, C_8, \dots\}$ -prosti grafi	$\{2, 5\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}$	$\{2, 4, 5, 8\}, \{3, 4, 5, 9\}, \{2, 4, 5, 9\}, \{3, 4, 5, 8\}, \{2, 5, 6, 8\}, \{2, 5, 7, 8\}, \{2, 5, 7, 9\}, \{3, 5, 6, 8\}, \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$

Tabela 1: Tabela množic prepovedanih vzorcev (slike 2 – 17) za inducirane poti  $P_3$  (definicija 5.4) in  $P_4$  (definicija 5.5) za določene družine grafov, pridobljenih z uporabo metode prepoznavanja matematičnih vzorcev.



Ne smemo pozabiti, da so to le minimalne množice prepovedanih vzorcev in da vsaka nadmnožica glede na relacijo inkluzije prav tako zadostuje preučevanim pogojem. Sedaj pa si pogledajmo še nekaj primerov strukturnih posledic pridobljenih rezultatov. Za razumevanje prve posledice bomo potrebovali naslednjo definicijo.

**Definicija 10.1.** *Spoj dveh točkovno disjunktne grafov  $H_1$  in  $H_2$  je graf  $G$ , ki je definiran z:*

- $V(G) := V(H_1) \cup V(H_2)$  in
- $E(G) := E(H_1) \cup E(H_2) \cup \{\{u, v\} \mid u \in V(H_1), v \in V(H_2)\}$ .

**Lema 10.2.** *Naj bosta  $H_1$  in  $H_2$  poljubna točkovno disjunktne popolna grafa in naj bo  $G$  njun spoj. Potem je  $G$  popoln graf.*

*Dokaz.* Oglejmo si 2-barvanje grafa  $G$ , v katerem so točke grafa  $H_1$  pobarvane z barvo  $R$  in točke grafa  $H_2$  pobarvane z barvo  $B$ . Očitno v grafu  $G$  ne moremo imeti induciranih poti  $P_3$  tipov 2 ( $RRB$ ) in 4 ( $RBB$ ). Po izreku 6.2 sledi, da je graf  $G$  popoln.  $\square$

**Definicija 10.3.** *Točka  $v$  grafa  $G$  je simplicialna, če za vsaki dve točki  $x$  in  $y$ ,  $x \neq y$  velja: če je  $\{v, x\} \in E(G)$  in  $\{v, y\} \in E(G)$ , potem je tudi  $\{x, y\} \in E(G)$ .*

**Lema 10.4.** *Razred grafov brez induciranih sodih ciklov je zaprt za dodajanje simplicialnih točk.*

*Dokaz.* Naj bo  $G$  graf, v katerem je  $v$  simplicialna točka in  $H \subseteq_i G$  brez induciranih sodih ciklov, kjer je  $V(H) = V(G) \setminus \{v\}$ . Pobarvajmo sedaj točko  $v$  z rdečo barvo in točke grafa  $H$  z belo barvo. Očitno v grafu  $G$  ne moremo imeti nobene inducirane poti  $P_3$  tipa 2 ( $RRB$ ) in tipa 5 ( $BRB$ ). Po izreku 7.1 sledi, da je  $G$  prav tako brez induciranih sodih ciklov.  $\square$

V dokazu leme 10.4 smo uporabili dejstvo, da v grafu  $G$  ne moremo imeti induciranih poti  $P_3$  tipov 2 in 5. Če pogledamo v tabelo 1, opazimo, da se množica prepovedanih vzorcev  $\{2, 5\}$  pojavi pri vseh obravnavanih družinah grafov. Ker v dokazu leme nismo potrebovali dejstva, da graf  $H$  pripada določeni družini grafov, da bi ugotovili, da v grafu  $G$  ne moremo imeti induciranih poti  $P_3$  tipov 2 in 5, sledi, da veljata tudi naslednji dve lemi.

**Lema 10.5.** *Razred popolnih grafov je zaprt za dodajanje simplicialnih točk.*

**Lema 10.6.** *Razred  $\{C_4, C_5, C_7, C_8, \dots\}$ -prostih grafov je zaprt za dodajanje simplicialnih točk.*

Razred  $\{C_3, C_6, C_9, \dots\}$ -prostih grafov pa za dodajanje simplicialnih točk ni zaprt, saj lahko v tem primeru ustvarimo inducirani cikel  $C_3$ .

**Definicija 10.7.** *Substitucija* grafa  $H$  v točko  $v$  grafa  $G$  je operacija, ki grafu  $G$ , točki  $v \in V(G)$  in grafu  $H$  priredi graf  $G_v[H]$ , definiran na naslednji način:

- $V(G_v[H]) := (V(G) \setminus \{v\}) \cup V(H)$  in
- $E(G_v[H]) := E(G - v) \cup E(H) \cup \{\{x, y\} \mid x \in N_G(v) \text{ in } y \in V(H)\}$ .

**Lema 10.8.** *Razred grafov brez induciranih sodih ciklov je zaprt za substitucijo v simplicialno točko, tj. če sta  $G$  in  $H$  točkovno disjunktna grafa brez induciranih sodih ciklov in je  $v \in V(G)$ , potem je tudi graf  $G_v[H]$  brez induciranih sodih ciklov.*

*Dokaz.* Podobno kot pri dokazu leme 10.4 lahko hitro opazimo, da v grafu  $G$ , ki ga dobimo tako, da simplicialno točko substituiraemo s poljubnim grafom brez induciranih sodih ciklov, ne moremo imeti induciranih poti  $P_3$  tipov 2 ( $RRB$ ) in 5 ( $BRB$ ). Po izreku 7.1 sledi, da lema drži.  $\square$

Sedaj pa lahko z enakim sklepom kot za lemo 10.4 izpeljemo, da veljata tudi naslednji dve lemi.

**Lema 10.9.** *Razred popolnih grafov je zaprt za substitucijo v simplicialno točko.*

**Lema 10.10.** *Razred  $\{C_4, C_5, C_7, C_8, \dots\}$ -prostih grafov je zaprt za substitucijo v simplicialno točko.*

Razred  $\{C_3, C_6, C_9, \dots\}$ -prostih grafov ni zaprt za substitucijo v simplicialno točko, ker lahko v tem primeru ustvarimo inducirani cikel  $C_3$ .

Z nadaljno analizo prepovedanih množic tipov induciranih poti  $P_3$ , ali  $P_4$ , bi bilo moč določiti še več strukturnih posledic.

# 11 Zaključek

V magistrskem delu smo spoznali metodo prepoznavanja matematičnih vzorcev. Kot smo opazili, so za opis in lažje razumevanje samega delovanja metode potrebni razni koncepti iz teorije hipergrafov in Boolovih funkcij. Med najpomembnejšimi sta dualnost Boolovih funkcij in transverzale hipergrafov. Z njihovo pomočjo smo definirali dualne sisteme hipergrafov, kar je natanko tisto, kar s pomočjo metode prepoznavanja matematičnih vzorcev želimo poiskati, glede na določene množice objektov in lastnosti. Pomemben del delovanja metode je ravno iskanje medsebojno dualnih Boolovih funkcij, oz. preverjanje, ali sta dve Boolovi funkciji medsebojno dualni. V ta namen smo v četrtem poglavju spoznali algoritem Fredmana in Khachiyana za preverjanje dualnosti monotoni Boolovih funkcij. Algoritem, kot smo ga spoznali, deluje v času  $n^{O(\log^2(n))}$ , kar je tako rekoč "skoraj" polinomski čas. Obstaja pa tudi algoritem, ki deluje še hitreje, in sicer, v času  $n^{O(\log(n))}$ . Več podrobnosti o obeh algoritmih je na voljo v članku [9].

Drugi del magistrskega dela smo namenili zgledom uporabe naslovne metode v teoriji grafov, kjer smo se vprašali, katere množice vzorcev barvanja točk vsake inducirane poti  $P_3$ , oz.  $P_4$ , z dvema barvama moramo prepovedati, da graf  $G$ , katerega točke so obarvane z dvema barvama, pripada določeni družini grafov natanko takrat, ko vsak izmed podgrafov induciranih z eno izmed barv pripada isti družini grafov. To vprašanje je bilo motivirano s strani članka Chvátala idr. [7], v katerem so avtorji poiskali omejitve za barvanje induciranih poti  $P_4$  za popolne grafe. S pomočjo vseh možnih omejitev, ki so zbrane v desetem poglavju, je mogoče pridobiti različne strukturne posledice za vsako posamezno družino grafov. Ogleдали smo si nekaj primerov posledic, ki nam povejo, kako lahko dodajamo povezave med dvema grafoma, ki pripadata eni izmed štirih obravnavanih družin grafov, tako da bo novo nastali graf pripadal isti družini grafov.

Glede na to da je metoda prepoznavanja matematičnih vzorcev definirana za splošne množice objektov in lastnosti, lahko metodo uporabimo tudi v drugih kontekstih v teoriji grafov in v drugih smereh matematike. Radoveden bralec bo lahko več primerov uporabe metode našel v člankih [3, 4, 10].

## 12 Literatura

- [1] C. BERGE, *Hypergraphs. Combinatorics of Finite Sets*, North-Holland, 1989. (*Citirano na straneh 1, 3 in 6.*)
- [2] J.C. BIOCH in T. IBARAKI, Complexity of identification and dualization of positive Boolean functions. *Information and Computation J.* 123 (1995) 50–63. (*Citirano na strani 16.*)
- [3] E. BOROS, K. ELBASSIONI, V.A. GURVICH, K. MAKINO in V. OUDALOV, A complete characterization of Nash-solvability of bimatrix games in terms of the exclusion of certain  $2 \times 2$  subgames. *Lecture Notes in Computer Science* 5010 (2008) 99–109. (*Citirano na straneh 1, 9, 11 in 67.*)
- [4] E. BOROS, K. ELBASSIONI, V.A. GURVICH, K. MAKINO in V. OUDALOV, Sufficient conditions for the existence of Nash equilibria in bimatrix games in terms of forbidden  $2 \times 2$  subgames. *Internat. J. Game Theory* 45:4 (2016) 1111–1131. (*Citirano na straneh 1, 9, 11 in 67.*)
- [5] M. BONAMY, P. CHARBIT in S. THOMASSÉ, Graphs with large chromatic number induce  $3k$ -cycles. arXiv:1408.2172 [cs.DM]. (*Citirano na strani 51.*)
- [6] M. CHUDNOVSKY, N. ROBERTSON, P. SEYMOUR in R. THOMAS, The strong perfect graph theorem. *Ann. of Math.* 164 (2006) 51–229. (*Citirano na strani 3.*)
- [7] V. CHVÁTAL, W.J. LENHART in N. SBIHI, Two-colourings that decompose perfect graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 49 (1990) 1–9. (*Citirano na straneh 1, 24, 26, 27, 28, 34, 35 in 67.*)
- [8] Y. CRAMA in P.L. HAMMER, *Boolean Functions: Theory, Algorithms, and Applications*. Cambridge University Press, 2011. (*Citirano na straneh 1, 4 in 5.*)
- [9] M.L. FREDMAN in L. KHACHIYAN, On the complexity of dualization of monotone disjunctive normal forms. *J. Algorithms* 21(3) (1996) 618–628. (*Citirano na straneh 1, 15, 16, 17, 18, 20, 21 in 67.*)
- [10] A.D. GVISHIANI in V.A. GURVICH, Dual systems of sets and their applications. *Engrg. Cybernetics* 21 (1984) 112–118. "(Izvirna oblika članka je bila objavljena

v ruskem jeziku, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR, ser. Tekhnicheskaya Kibernetika* 4, 31-39 (1983).“ (*Citirano na straneh 1, 8, 9, 11, 13 in 67.*)

- [11] V.A. GURVICH in L. KHACHIYAN, On generating the irredundant conjunctive and disjunctive normal forms of monotone Boolean functions. *Discrete Appl. Math* 96-97 (1999) 363–373. (*Citirano na straneh 1 in 15.*)
- [12] L. LOVÁSZ, A characterization of perfect graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 13 (1972) 95–98. (*Citirano na strani 3.*)
- [13] L. LOVÁSZ, Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. *Discrete Math.* 2 (1972) 253–267. (*Citirano na strani 3.*)
- [14] M. MILANIČ, Hereditary efficiently dominatable graphs. *J. Graph Theory* 73 (2013) 400–424. (*Citirano na strani 54.*)
- [15] K. VUŠKOVIĆ, Even-hole-free graphs: a survey. *Appl. Anal. Discrete Math.* 4 (2010) 219–240. (*Citirano na strani 45.*)