UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Magistrsko delo

Metode določanja cen pozavarovanj

(Methods of reinsurance pricing)

Ime in priimek: Šejla Žujo
Študijski program: Matematika s finančnim inženiringom, 2. stopnja
Mentor: izr. prof. dr. Mihael Perman
Somentor: asist. dr. Janez Komelj

Koper, januar 2019

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Šejla ŽUJO

Naslov magistrskega dela: Metode določanja cen pozavarovanj

Kraj: Koper

Leto: 2019

Število listov: 55 Število slik: 6 Število tabel: 10

Število referenc: 12

Mentor: izr. prof. dr. Mihael Perman

Somentor: asist. dr. Janez Komelj

UDK: 368.029(043.2)

Ključne besede: pozavarovanje, škodno presežkovno pozavarovanje, nevarnostna premija, krivulje izpostavljenosti, porazdelitvena funkcija

Math. Subj. Class. (2010): 91B30

Izvleček:
V nalogi so obravnavane metode, ki jih pozavarovalnica največkrat uporabi pri določanju cene pozavarovalnega kritja, ki ga ponuja zavarovalnici ali drugi pozavarovalnici. Problem določanja cene pozavarovanja smo omejili na določitev t. i. nevarnostne premije, ki predstavlja največji del cene pozavarovanja in bi morala biti zadostna za kritje pričakovanih bodočih škod. Uporaba metod je odvisna od vrste pozavarovanja in sta zato v nalogi najprej predstavljeni osnovni vrsti pozavarovanj, in sicer proporcionalna in neproporcionalna pozavarovanja. Osredotočili smo se na določanje cene neproporcionalnih pozavarovanj, saj je razmerje delitve škod in premij pri proporcionalnih pozavarovanjih enako. Dve metodi, ki se pogosto uporabita v praksi, metoda izpostavljenosti in metoda ekstrapolacije, sta bolj podrobno analizirani. Za metodo izpostavljenosti je predstavljeno ozadje, ki se nanaša na uporabo primernih krivulj izpostavljenosti, dobljenih na podlagi tržnih zgodovinskih podatkov o škodah. Pri metodi ekstrapolacije so predstavljene nekatere od primernih porazdelitvenih funkcij, ki so se pokazale kot primerne za modeliranje višine škod in tudi porazdelitvene funkcije, primerne za modeliranje škodne pogostosti. Uporaba obeh metod je pokazana na praktičnem primeru.

Key words documentation

Name and SURNAME: Šejla ŽUJO

Title of the thesis: Methods of reinsurance pricing

Place: Koper

Year: 2019

Number of pages: 55 Number of figures: 6 Number of tables: 10

Number of references: 12

Mentor: Assoc. Prof. Mihael Perman, PhD

Co-Mentor: Assist. Janez Komelj, PhD

UDK: 368.029(043.2)

Keywords: reinsurance, excess of loss reinsurance, risk premium, exposure curves, distribution function

Math. Subj. Class. (2010): 91B30

Abstract: The Master thesis presents several methods used for reinsurance pricing of the reinsurance cover for the products that are offered to insurance or other reinsurance companies. The biggest part of the Master thesis is devoted to the notion of the risk premium – the most important part of the reinsurance price. Ideally we would like to determine risk premium under the condition that it is sufficient to cover all future expected claims. The method used for determining the risk premium differ for different types of reinsurance. We therefore consider two basic types of reinsurance: proportional and non-proportional. Since the proportion of claims and premiums is equal in proportional reinsurance, the methods turn out to be much more interesting for non-proportional reinsurance. For the latter, we present two practical methods exposure method and extrapolation method in detail. More precisely, for the exposure method we show how to use the curves obtained from historical market data of claim severities. For the extrapolation method we present several cumulative distribution functions, which proved appropriate for modeling claim severity as well as distribution functions for modeling claim frequency. Both methods are further illustrated on real data.

Zahvala

Ogromno zahvalo dolgujem vsem, ki so mi na kakršenkoli način pomagali na poti do tega magistrskega dela, in predvsem fakulteti Famnit za podano priložnost študija.

Hvala mentorju in somentorju, ker sta sprejela sodelovanje in za vso pomoč tekom pisanja naloge.

Hvala Katji in Urošu za priložnost, zaupanje in razumevanje tekom dokončanja študija. Urošu še posebna zahvala za motivacijo in pomoč pri pisanju v slovenščini.

Hvala mojoj porodici i Timi jer su bili uz mene i prihvatili sve moje promjene tokom studiranja.

Hvala Edinu jer je dao poseban smisao matematici.

I vječno zahvalna mojoj majci na svemu.

Kazalo vsebine

1 Uvod **1**
1.1 Ozadje 1
1.2 Namen naloge 1

2 Pozavarovanje **3**
2.1 Namen pozavarovanja 3
2.2 Osnovni pojmi 4
2.3 Proporcionalno pozavarovanje 5
2.4 Neporoporcionalno pozavarovanje 7

3 Metode določanja cen pozavarovanj **10**
3.1 Metoda sorazmerja 10
3.2 Metoda izpostavljenosti 12
3.3 Izkustvena metoda 13
3.4 Ekstrapolacijska metoda 14

4 Metoda izpostavljenosti **16**
4.1 Opis metode 16
4.2 Uporaba na praktičnem primeru 33
4.3 Prednosti in slabosti 36

5 Ekstrapolacijska metoda **37**
5.1 Opis metode 37
5.2 Uporaba na praktičnem primeru 46
5.3 Prednosti in slabosti 50

6 Zaključek **52**

7 Literatura **54**

Kazalo tabel

1 Skupine rizikov z mejami v CHF 33
2 Skupine rizikov z mejami v EUR 34
3 Osnovni podatki za primer 34
4 Profil rizikov 35
5 Pričakovana škoda po intervalih 35

6 Višina in število škod 37
7 Paretov parameter (α) 43
8 Opisne statistike 47
9 Rezultati izračunov na simuliranih podatkih 47
10 Verjetnost $P(X \leq 1\,\text{mio})$ glede na OP 50

Kazalo slik

1 Primer krivulje izpostavljenosti 25
2 Swiss Re-jeve krivulje 33
3 Histogram škod 38
4 Empirična in teoretična CDF za $OP \in \{80.864, 100.000, 300.000, 500.000\}$ 48
5 Empirična in teoretična CDF za $OP \in \{600.000, 700.000, 800.000, 900.000\}$ 49

Seznam kratic

tj.	to je
npr.	na primer
t.i.	tako imenovani
oz.	oziroma

1 Uvod

1.1 Ozadje

Ko zavarovalec sklene zavarovalno pogodbo z zavarovalnico, ji zaupa in se ne sprašuje, ali bo ob nastanku zavarovalnega primera zmožna izplačati obljubljeni znesek.

To vprašanje pa je pomembno za zavarovalnico. Če ugotovi, da riziki, ki jih je prevzela, presegajo njene zmožnosti, mora svoj portfelj pozavarovati. Za prevzeti riziko zavarovalnica zavarovalcu zaračuna premijo in logično je, da tudi njej pozavarovalnica zaračuna pozavarovalno premijo. Koliko je primerna višina dela premije, ki ga zavarovalnica kot pozavarovalno premijo odstopi pozavarovalnici, je problem, s katerim se bomo ukvarjali v magistrski nalogi.

1.2 Namen naloge

Določanje cen pozavarovanja je odvisno predvsem od načina oz. vrste pozavarovanja. Zato bomo v prvem delu naloge predstavili osnovne pojme o pozavarovanju in načine delitve rizikov med zavarovalnico in pozavarovalnico. Predstavljena bodo proporcionalna in neproporcionalna pozavarovanja. Pri proporcionalnem pozavarovanju se delitev premij in škod med zavarovalnico in pozavarovalnico izvede v enakem deležu, ki je vnaprej dogovorjen. Pri neproporcionalnem pozavarovanju mora pozavarovalnica plačati del škode samo v primerih, ko škoda presega dogovorjeni znesek.

V drugem delu naloge bodo opisane nekatere od znanih metod za določanje cen proporcionalnih in neproporcionalnih pozavarovanj. Opisali bomo metode, ki se v praksi najpogosteje uporabljajo, in sicer metodo sorazmerja, metodo izpostavljenosti, izkustveno in ekstrapolacijsko metodo.

V jedru naloge bomo podrobneje analizirali dve metodi, ki se uporabljata predvsem pri premoženjskih zavarovanjih, in sicer metodo izpostavljenosti in ekstrapolacijsko metodo. Pri obeh metodah izhajamo iz porazdelitve višine škod, ki pa jo pri metodi izpostavljenosti poznamo le posredno. Pri tej metodi so ključne t. i. krivulje izpostavljenosti, ki se nanašajo na porazdelitev t. i. škodnega ulomka, ki je razmerje med višino škode in zavarovalno vsoto. Zato moramo poleg krivulj izpostavljenosti poznati tudi t. i. profil rizikov oz. porazdelitev višine zavarovalnih vsot pozavarovanih rizikov.

Pri ekstrapolacijski metodi je potrebno najti primerno porazdelitveno funkcijo škod, pri čemer pa je omejitveni dejavnik pomanjkanje informacij, saj pozavarovalnica nima podatkov o vseh škodah, ampak le o tistih, za katere mora plačati svoj del, ker presegajo dogovorjeno višino. Tako ekstrapolacijsko metodo uporabljamo v primerih, ko je vzorec pozavarovalnici znanih škod relativno majhen, pa tudi takrat, ko menimo, da ni dovolj relevanten.

Za omenjeni metodi bomo podali matematično ozadje in ga uporabili na praktičnem primeru. S primerjavo in analizo rezultatov praktičnih primerov bomo poskusili ugotoviti morebitne slabosti in prednosti obravnavanih metod, kar bo predstavljeno v zaključnem delu naloge.

2 Pozavarovanje

Potreba po zavarovanju s strani posameznikov ali poslovnih subjektov se pojavi, ko opazijo, da obstaja možnost nevarnosti, ki bi jih na kakršenkoli način ogrozila. Ko postanejo zavarovalci oz. ko sklenejo pogodbo z zavarovalnico, se počutijo varno. Rečemo lahko, da po sklenitvi pogodbe o zavarovanju ta nevarnost na nek način postane nevarnost za zavarovalnico. Tisti, ki so kdaj iskali odgovor na vprašanje, kako in kaj dela zavarovalnica, če obstaja kakršnakoli nevarnost za njo, so zagotovo prišli do pojma pozavarovanja oz. pozavarovalnica. Če bi želeli pozavarovanje definirati na najbolj preprost način, bi rekli, da je pozavarovanje zavarovanje zavarovalnic. Zakon o zavarovalništvu pozavarovanje opredeli kot dejavnost sprejemanja tveganj, ki jih odstopi zavarovalnica ali pozavarovalnica. [12]

2.1 Namen pozavarovanja

Ne obstaja neko splošno pravilo ali definicija, na podlagi katere bi lahko rekli, koliko pozavarovanja potrebuje zavarovalnica. Potreba po pozavarovanju bo odvisna od posamezne zavarovalnice. Kolikšna je velikost zavarovalnice, njena sredstva, velikost portfelja in izkušnje so nekateri od faktorjev, ki vplivajo na iskanje pozavarovanja.

Glavni namen pozavarovanja je zavarovalnici omogočiti prevzem velikih rizikov ali agregacijo manjših rizikov. Kaj so veliki in kaj majhni riziki, je odvisno od posamezne zavarovalnice. Zavarovalnica lahko omeji svojo izpostavljenost riziku s pozavarovanjem, ker en del rizika prenese na pozavarovalnico.

Vsaka zavarovalnica si želi čim boljši rezultat poslovanja. Vpliv na gibanje rezultata imajo tako veliki riziki kot visoke frekvence majhnih rizikov. Prenos le-teh v pozavarovanje omogoča zavarovalnici boljše načrtovanja in s tem stabilnost v prihodnosti. To dejstvo je posebej uporabno pri portfeljih, ki niso dovolj razviti oz. ko zavarovalnica nima dovolj potrebnih in relevantnih izkušenj glede prevzetega portfelja. V tem primeru so pričakovanja glede prihodnjega dogajanja lahko bolj negotova kot v primeru razvitega portfelja. Zavarovalnica lahko s pozavarovanjem pridobi nove priložnosti za izboljšavo poslovanja.

Pri pozavarovanju ni pomembno samo to, da zavarovalnica izravna nevarnost zaradi prevzetih rizikov. Posledično zavarovalnica poveča svoje kapacitete za sklepanje novih zavarovalnih pogodb, obnovo starih in tudi razvoj novih produktov. S tem si zavarovalnica zagotovi boljšo konkurenčno pozicijo na zavarovalniškem trgu.

2.2 Osnovni pojmi

Podobno kot pri zavarovalnih se tudi pri pozavarovalnih pogodbah pojavita dve strani. Pri pozavarovalni pogodbi sta to cedent in cesionar. Cedent (zavarovalnica) je stran, ki želi del prevzetih rizikov prenesti na drugo stran oz. cesionarja (pozavarovalnico).

V literaturi in praksi je znano, da obstajata dve obliki pozavarovanja glede na to, kako se riziki pozavarujejo. Če cedent in cesionar skleneta eno pozavarovalno pogodbo za množico podobnih (homogenih) rizikov, rečemo, da gre za obligatno obliko pozavarovanja. Pri obligatnem pozavarovanju je cedent dolžan na pozavarovatelja prenesti vse rizike, ki izpolnjujejo pogodbena določila (npr. glede zavarovalnih vrst, višine zavarovalnih vsot ipd.). Pozavarovatelj je dolžan te rizike sprejeti. Obligatne pogodbe se običajno sklepajo za rizike, ki so manjše velikosti z visoko frekvenco. Po drugi strani se pri fakultativnem pozavarovanju pozavaruje vsak riziko posebej. Zavarovalnica za vsak riziko išče posamezno pozavarovalno pogodbo, v kateri so vsi pogoji določeni s strani pozavarovatelja. V tem primeru zavarovalnica ni obvezna ponuditi rizika v pozavarovanje, pozavarovalnica pa ga ni dolžna sprejeti. Fakultativne pogodbe se največkrat sklepajo za velike rizike, ki presegajo obseg oz. limit vsake obligatne pogodbe, dostopne cedentu. Včasih se uporablja tudi kombinacija fakultativnega in obligatnega pozavarovanja.

S sklenjeno pozavarovalno pogodbo sta tako zavarovalnica kot pozavarovalnica dolžni izpolnjevati svoje obveznosti. Za prenos dela rizika na pozavarovalnico je zavarovalnica dolžna plačevati premijo. Pozavarovalnica večinoma obljubi zavarovalnici plačilo škode, če bo do nje prišlo. Poleg tega lahko pozavarovalnica izplača provizijo, ki se nanaša na (delno) povračilo stroškov. Kakšne in kolikšne so njihove obveznosti, je odvisno od načina, kako se pozavarovani riziki delijo. Iz načina delitve rizikov izhajata dve vrsti pozavarovanja, proporcionalno in neproporcionalno pozavarovanje. Proporcionalno in neporoporcionalno pozavarovanje je predstavljeno v nadaljevanju naloge.

Naj bo $\{X_i; i \in \mathbb{N}\}$ množica slučajnih spremenljivk, ki označujejo višine kosmatih škod, ki jih mora zavarovalnica izplačati zavarovancem v enem letu. Naj bo N nenegativno število, ki označuje število škod. Skupne škode, ki jih mora izplačati zavarovalnica, označimo s S, kjer je

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_i & \text{za } N > 0, \\ 0 & \text{za } N = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

S pozavarovanjem ta enačba postane vsota dveh zneskov, in sicer $S = X_c + X_r$, kjer je X_c znesek skupne škode, krit s strani zavarovalnice, X_r pa znesek, ki ga krije pozavarovatelj. Za posamezen riziko lahko zapišemo $X_i = X_{i,c} + X_{i,r}$.

2.3 Proporcionalno pozavarovanje

Proporcionalno pozavarovanje je pozavarovanje, ki obvezuje cedenta in cesionarja, da delita pozavarovani riziko v razmerju, ki je vnaprej določeno v pogodbi. To pomeni, da se premije in škode delijo v enakem razmerju. V kakšnem razmerju si bosta razdelila riziko, je odvisno od vrste kritja in parametrov, ki so določeni v pogodbi.

Pri proporcionalnih pozavarovanjih razlikujemo kvotno (ang. *quota share*) in vsotno presežkovno pozavarovanje (ang. *surplus reinsurance*).

Kvotno pozavarovanje je vrsta proporcionalnega pozavarovanja, kjer je razmerje kritja škod in plačila premij med cedentom in pozavarovateljem konstantno za vse rizike, ki jih pozavarovalna pogodba krije. Konstanten delež vsakega pozavarovanega rizika se prenese na pozavarovatelja ne glede na višino rizika. Za vse rizike, ki so predmet pozavarovanja, je zavarovalnica pozavarovatelju dolžna plačati dogovorjeni delež premij, ki jih je dobila od svojih zavarovalcev. Recimo, da je $\alpha \in (0,1)$ delež tveganja, ki ga bo cedent zadržal. Potem sledi, da cedent in pozavarovatelj delita premijo in škodo v razmerju $\alpha : 1 - \alpha$. Sledi, da je $X_c = \alpha X$ del škode, ki ga mora plačati cedent. Pozavarovalni del škode je $X_r = (1 - \alpha)X$.

Jasno je, da bo imel cedent stroške zaradi sklepanja zavarovalnih pogodb in reševanja škod. Z namenom kritja teh stroškov bo pozavarovatelj povrnil cedentu del premije, ki mu rečemo pozavarovalna provizija. Ko škodna dogajanja postanejo znana, lahko pozavarovatelj plača cedentu profitno provizijo kot nagrado za poslovanje, ki je boljše od pričakovanega.

Kvotno pozavarovanje je zelo enostavno z administrativnega stališča in cedentu omogoča ustvarjanje večjega portfelja rizikov. Glavna slabost pri kvotnem pozavarovanju je v tem, da cedent odstopa enak delež vsakega rizika, tj. ne glede na njegovo velikost.

Za razliko od kvotnega pozavarovanja pri **vsotno presežkovnem pozavarovanju** cedent določi delež kritja za vsak riziko, ki izpolnjuje pogoje pogodbe. Torej, samopridržaj cedenta ni nujno enak za vse rizike. Za vsak riziko se cedent odloči, do katere višine lahko sam krije rizike. Presežek teh rizikov pa pozavaruje. S ciljem določanja deleža rizika, ki bo prenesen na pozavarovatelja ali zadržan, cedent potrebuje merilo, na podlagi katerega se bo odločil, ali je ta riziko velik zanj. Primerno merilo velikosti rizika je odvisno od zavarovalnih vrst poslovanja, ki jih cedent želi pozavarovati. Največkrat se kot merilo uporablja zavarovalna vsota, ki je določena med cedentom in njegovimi zavarovanci. Kakorkoli, to ni vedno najboljše merilo velikosti rizika. Recimo za zavarovanje, ki krije škodni dogodek na več lokacijah, je malo verjetno, da se bo izplačala celotna zavarovalna vsota. V takšnih in podobnih primerih so primernejša druga merila, kot je ocenjena največja škoda (*Estimated Maximum Loss – EML*). V literaturi in praksi se pogosto uporablja tudi izraz največja verjetna škoda (ang. *Probable Maximum Loss – PML*), ampak pojma EML in PML sta večinoma mišljena kot sinonima. EML predstavlja največjo ocenjeno izgubo oz. škodo, ki jo lahko utrpi pozavarovatelj, pri čemer se ne upoštevajo tisti dogodki, za katere obstaja mala verjetnost, da se bodo uresničili. Za razliko od EML mere, se pri oceni PML-a upoštevajo tudi najslabši možni scenariji oz. dogodki.

Za vsotno presežkovno pozavarovanje so značilne linije kritja, ki se uporabljajo za določitev maksimalnega kritja s strani pozavarovatelja. Ta je običajno določen kot večkratnik cedentovega samopridržaja. Delitev premije bo odvisna od tega, kateri riziki so utrpeli škodo in v kakšnem deležu so pozavarovani. V mislih je treba imeti, da je vsotno presežkovno pozavarovanje proporcionalno in zato se nastale škode, ne glede na velikost, delijo v enakem razmerju kot premije. Delitev škod med cedentom in pozavarovateljem za posamezen riziko lahko zapišemo enako kot pri kvotnem oz. $X_c = \alpha X$ in $X_r = (1-\alpha)X$. Razlika je v tem, da ta delež ni enak za vse rizike in ga je potrebno določiti na podlagi velikosti rizika. S Q označimo vrednost, s katero merimo velikost rizika. To je lahko zavarovalna vsota ali PML. Delež α za vsotno presežkovno pozavarovanje se izračuna kot

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{za } Q \leq D, \\ \frac{D}{Q} & \text{za } D < Q \leq (l+1)D, \\ 1 - \frac{lD}{Q} & \text{za } Q > (l+1)D, \end{cases} \tag{2.2}$$

kjer je D samopridržaj cedenta, l pa število linij. Velja, da je l-kratnik samopridržaja D zgornja meja obveznosti pozavarovatelja.

Podobno kot pri kvotnem je tudi pri vsotno presežkovnem pozavarovanju cedent lahko upravičen do pozavarovalne in profitne provizije.

Cedent in pozavarovatelj ne bosta imela enakih informacij o škodnem dogajanju. Pozavarovatelj ne bo obveščen o rizikih, ki so v okviru samopridržaja cedenta.

2.4 Neporoporcionalno pozavarovanje

Glavna značilnost neproporcionalnih pozavarovanj je ta, da ne obstaja proporcionalna delitev premij in škod. Kolikšna bo višina obveznosti pozavarovatelja, je odvisno od višine škode, ki bo nastala za posamezen riziko. Torej pri nepropocionalnih pozavarovanjih velja, da delitev škode ni enaka kot delitev premije, posledično v nekaterih primerih pozavarovalnici ni treba nič plačati. Cedent za vsak riziko določi višino škode, ki jo lahko v celoti krije sam, kar se imenuje prioriteta. Presežek rizika pa pozavaruje.

Najbolj znani vrsti neproporcionalnih pozavarovanj sta **škodno presežkovno pozavarovanje** (ang. *excess of loss reinsurance – XL*) in **pozavarovanje letnega presežka škod** (ang. *stop loss reinsurance*).

Za škodno presežkovno pozavarovanje so značilni t. i. intervali kritja (ang. *layers*). Vsak interval kritja ima spodnjo in zgorno mejo. Cedent lahko kupi škodno presežkovno pozavarovanje od različnih pozavarovateljev za različne intervale kritja. V tem primeru je pozavarovatelj dolžan povrniti znesek vsake škode, ki je nad presežno točko oz. spodnjo mejo, ampak ne več od razlike med zgornjo in spodnjo mejo intervala kritja, ki je predmet pogodbe med cedentom in tem pozavarovateljem. Seveda sta presežna točka in zgornja meja intervala kritja določena v pogodbi. Spodnja meja prvega intervala kritja je običajno prioriteta cedenta. Spodnja meja naslednjega intervala kritja je določena kot zgornja meja prejšnjega s tem, da je zadnji interval kritja lahko neomejen.

Pozavarovanje, ki zagotavlja kritje višine škod med spodnjo mejo D in zgornjo mejo $D+L$, se običajno zapiše kot $L\,xs\,D$, kjer je D maksimalno kritje s strani zavarovalnice, L pa višina kritja pozavarovatelja. Vrednosti L rečemo tudi širina intervala kritja. Z drugimi besedami, pozavarovatelj bo izplačal največ znesek L, če bo višina škode nad zneskom D.

Pozavarovatelj lahko profitno provizijo izplača za nekatere intervale kritja. Izplačilo profitne provizije je zelo redko pri intervalih kritja, kjer pozavarovatelj pričakuje, da bo plačal svoj del le v izjemnih primerih.

Za škodno presežkovno pozavarovanje je značilna tudi t. i. ponovna vzpostavitev kritja (ang. *reinstatement*). Ponovna vzpostavitev kritja predstavlja obnovo kritja po vsaki škodi, ki prizadene posamezni interval kritja. Po škodnem dogodku lahko pozavarovatelj zahteva plačilo dodatne premije od cedenta, če še vedno želi imeti kritje za ta interval. Število možnih ponovnih vzpostavitev kritij je določeno v pogodbi. Pri nizkih oz. delovnih intervalih (ang. *working layers*) je lahko to število neomejeno. Omejitve so običajno pri višjih intervalih.

Za posamezno škodo X je del škode, ki jo mora pozavarovatelj plačati za interval kritja $L\,xs\,D$, enak

$$X_r = \begin{cases} 0 & \text{za } X \leq D, \\ X - D & \text{za } D < X < D + L, \\ L & \text{za X} \geq D + L. \end{cases}$$

V literaturi se X_r pogosto zapiše tudi kot $X_r = \min\{X, D + L\} - \min\{X, D\}$. Preostanek škode, $X - X_r$, krije cedent.

Glede na to, proti *kako velikim* škodam se cedent želi zaščititi, razlikujemo tri oblike škodno presežkovnega pozavarovanja, in sicer škodno presežkovno pozavarovanje za posamezen riziko (ang. *risk XL*), agregatno škodno presežkovno pozavarovanje (ang. *aggregate XL*) in škodno presežkovno pozavarovanje za primer katastrofe (ang. *CAT XL*).

Škodno presežkovno pozavarovanje za posamezen riziko je za cedenta primerna oblika pozavarovanja, kadar se želi zaščititi pred velikimi posameznimi škodami. Takšno pozavarovanje ščiti cedenta proti škodam, ki bodo prizadele samo en zavarovani riziko. Pozavarovatelj je dolžan povrniti del škode (največ do limita kritja), samo če je posamezna škoda večja od prioritete cedenta.

Agregatno škodno presežkovno pozavarovanje lahko vidimo kot razširitev škodno presežkovnega pozavarovanja za posamezen riziko s tem, da se meje kritja pozavarovanja nanašajo na agregacijo več škod. Agregacija škod se lahko zgodi na tri načine, in sicer po dogodku, nevarnosti in vrsti poslovanja.

Opisano agregatno škodno presežkovno pozavarovanje ne ščiti cedenta proti škodam, ki so nastale zaradi katastrofalnih dogodkov, ki so posledica naravnih nesreč. Ti katastrofalni dogodki se nanašajo na naravne nesreče, kot so poplava, potres, vihar in toča. Če cedent oceni, da njegov portfelj lahko ogrozijo naravne nesreče, se lahko odloči za nakup škodno presežkovnega pozavarovanja za primer katastrofe. Katastrofalni dogodki načeloma povzročijo ogromne škode in je posledično jasno, da so meje oz. limiti kritja pri škodno presežkovnem pozavarovanju za primer katastrofe dosti večji kot je to primer pri drugih oblikah pozavarovanja. Pri sklepanju pogodbe o nakupu škodno presežkovnega pozavarovanja za primer katastrofe je potrebna posebna pozornost na klavzule o tem, kaj je točno katastrofalni dogodek, katere lokacije so vključene v kritje, koliko časa od nastanka dogodka traja kritje ipd. Več govora o škodno presežkovnem pozavarovanju bo v nadaljevanju naloge.

Če želi cedent zaščititi portfelj pred prekomerno negativnim tehničnim rezultatom, lahko kupi pozavarovanje letnega presežka škod oz. pozavarovanje tehničnega rezultata. Predmet takšnega pozavarovanja so skupne škode, ki jih je zavarovalnica utrpela v določenem obdobju, npr. enem letu, ne glede na to, ali je te škode povzročil en dogodek ali več. V primeru, da cedent pozavaruje celoten portfelj s pozavarovanjem tehničnega rezultata, je pozavarovatelj dolžan cedentu plačati znesek skupne škode za celoten portfelj nad dogovorjenim limitom za dogovorjeno obdobje. Cedent lahko kupi tudi pozavarovanje tehničnega rezultata samo za nekatere vrste poslovanja. Za pozavarovanje tehničnega rezultata se pogosto uporablja enaka oznaka kot za škodno presežkovno pozavarovanje, in sicer $L\, xs\, D$, kjer sta D in L definirana enako kot prej. Razlika je v tem, da se to kritje pri pozavarovanju tehničnega rezultata nanaša na količino S, ki je definirana z enačbo (2.1). S temi oznakami je del letnih škod S, ki odpade na pozavarovatelja, enak

$$X_r = \begin{cases} 0 & \text{za } S \leq D, \\ S - D & \text{za } D < S < D + L, \\ L & \text{za } S \geq D + L. \end{cases}$$

3 Metode določanja cen pozavarovanj

Metodo določanja cene pozavarovanja lahko razumemo kot postopek, s pomočjo katerega želi pozavarovatelj izračunati ceno oz. premijo, ki jo mora cedent plačati v zameno za pozavarovalno kritje. Pozavarovalna premija bi morala biti zadostna za kritje povprečnih škod, nastalih v pogodbenem obdobju, stroškov in dobička pozavarovatelja. Na podlagi opisanih načinov pozavarovarovanja v prejšnjem poglavju je jasno, da bo moral pozavarovatelj uporabiti različne metode za izračun cen različnih pozavarovalnih pogodb. Zato bomo v nadaljevanju naloge opisali metode, ki se pogosto uporabljajo v praksi.

3.1 Metoda sorazmerja

Metoda sorazmerja (*pro rata*) je, kot kaže samo ime, primerna za določanje cen proporcionalnih pozavarovanj. Določanje cene oz. premije za ta pozavarovanja je dokaj enostavno, saj se premija, ki se pogosto označi s Π, deli v enakem razmerju kot škoda X. Torej cena proporcionalnega pozavarovanja izhaja iz definicije za to pozavarovanje. Del premije, ki pripade cedentu za kvotno pozavarovanje z deležem α, zapišemo kot $\Pi_c = \alpha\Pi$, pozavarovatelju pa pripade $\Pi_r = (1-\alpha)\Pi$. Pri vsotno presežkovnem pozavarovanju za premijo posameznega rizika velja enaka formula, pri čemer se delež α določi tako, kot je zapisano z enačbo (2.2).

Poleg delitve premije Π, ki jo cedent dobi od svojih zavarovalcev, je potrebno upoštevati še dodatne postavke. Najpomembnejša je pozavarovalna provizija. Način plačevanja provizije je določen v pozavarovalni pogodbi skupaj z ostalimi pogoji. Cedent in pozavarovatelj se lahko zmenita za fiksen procent provizije, provizijo na podlagi drseče lestvice in tudi za profitno provizijo. Drseča in profitna provizija temeljita na dejanskem škodnem dogajanju.

Če je v pogodbi dogovorjena drseča provizija, potem je potrebno določiti referenčni škodni količnik in začetno provizijo ter pravilo za primer odstopanja. V primeru, da dejanski škodni količnik odstopa od referenčnega, se pozavarovalna provizija spremeni v obratni smeri. Z drugimi besedami, če se dejanski škodni količnik razlikuje od referenčnega za $\pm\, x$ odstotnih točk, potem se provizija spremeni za $\mp\, y$ odstotnih točk, kjer sta x in y določena v pozavarovalni pogodbi, npr. če je dejanski škodni količnik večji od referenčnega za $x = 2$ odstotni točki, potem se provizija zniža za $y = 1$ odstotno točko.

Ob vnaprej določenih pogojih lahko pozavarovatelj cedentu izplača tudi profitno provizijo, in sicer v primerih, ko je škodni količnik v pogodbenem obdobju majhen. Glede na to, da je izplačilo provizije odvisno od škodnega količnika oz. njegove porazdelitve, je potrebno določiti pričakovani škodni količnik. Ta se oceni kot aritmetično povprečje ustreznih preteklih škodnih količnikov z upoštevanjem sedanje vrednosti škod in premij, na podlagi katerih je škodni količnik izračunan.

Pri ocenjevanju je potrebna pozornost glede upoštevanja preteklih škodnih količnikov. Potrebno je upoštevati določene podatke glede na to, kakšno kritje je zagotovljeno v pogodbi. Razlikujemo dva načina. Prvi je ta, da je pozavarovalna pogodba sklenjena tako, da krije vse škode, ki se zgodijo v obdobju kritja, ki je dogovorjeno v pozavarovalni pogodbi, npr. v določenem letu (ang. *accident year*). Drugače povedano, pozavarovatelj bo svoj del škode poravnal, če je škoda nastala v obdobju kritja pozavarovalne pogodbe. Torej se lahko zgodi, da še vedno traja kritje iz originalne police, sklenjene med cedentom in njegovim zavarovalcem, ne traja pa več pozavarovalno kritje in pozavarovatelj ni dolžan kriti takšne škode. Recimo, da pozavarovalno kritje velja za leto 2017. Za primer vzemimo zavarovalno polico, ki velja od 1. 7. 2017 do 1. 7. 2018. Če škoda iz te police nastane do konca leta 2017, potem bo zanjo zagotovljeno pozavarovalno kritje. Za škode, ki se zgodijo iz naslova te police po 31. 12. 2017, ni zagotovljeno pozavarovalno kritje po obravnavani pozavarovalni pogodbi za leto 2017. Pri opisanem načinu so relevantni podatki o zasluženi premiji in nastalih škodah v obdobju kritja.

Drugi primer je, ko je zagotovljeno pozavarovalno kritje za vse zavarovalne police, sklenjene v določenem letu (ang. *underwriting year*). Takrat so krite vse škode, ki izhajajo iz polic z datumom sklenitve v določenem letu. Naj bo zavarovalno kritje kot v prejšnjem primeru. Potem pozavarovalno kritje velja tudi za škode, ki se zgodijo po 31. 12. 2017 oz. do 1. 7. 2018. V tem primeru so pomembni podatki o obračunanih premijah in škodah, ki izhajajo iz polic, sklenjenih v letu 2017.

V oceno je potrebno vključiti tudi pribitke za velike in katastrofalne dogodke. Več o tem in o metodi sorazmerja se lahko najde v [4].

3.2 Metoda izpostavljenosti

Portfelj zavarovalnice vsebuje rizike različnih velikosti in kritij. Z delitvijo portfelja na podsegmente dobimo profil rizikov. Metoda izpostavljenosti (ang. *Exposure Rating*) temelji na profilu rizikov trenutnega portfelja. Profil rizikov vsebuje bistvene informacije o rizikih za posamezen interval kritja. Za vsak interval kritja je podano število rizkov, skupna zavarovalna vsota in premija. Vsi riziki, ki so zajeti v profilu rizkov, bi morali biti homogeni. Posamezen interval kritja pa bi moral vsebovati rizike, ki so vsaj približno enake velikosti, pri čemer se kot velikost rizika upošteva zavarovalna vsota ali največja verjetna škoda.

Za vsak interval kritja v profilu rizikov nas zanima, kako se bo premija razdelila med cedentom in pozavarovateljem. Za ta namen moramo poznati škodno porazdelitveno funkcijo za posamezen interval. Na žalost porazdelitvena funkcija ni vedno znana. V tem primeru si pomagamo s t. i. krivuljami izpostavljenosti (ang. *Exposure Curves*), ki pojasnjujejo porazdelitev škodnega ulomka. Škodni ulomek je definiran kot razmerje med višino škode in zavarovalno vsoto.

Krivulje izpostavljenosti so zgrajene na podlagi zgodovinskih škodnih podatkov velikih homogenih portfeljev trga. V naslednjem poglavju bomo pokazali nekatere od uporabnih matematičnih lastnosti krivulj izpostavljenosti, kot so zveznost in konkavnost. Pokazali bomo tudi, kako nam krivulje izpostavljenosti omogočajo neposredno delitev premije intervala med cedentom in pozavarovateljem.

Glede na njihove prednosti in slabosti se v praksi uporabljajo različne krivulje izpostavljenosti, ki so izpeljane s strani različnih finančnih ustanov v svetu s pomočjo zgodovinskih podatkov o škodah. Nekatere od znanih krivulj izpostavljenosti so:

- *Lloydove krivulje*
  Osnova so zelo stari podatki, ki so v veliki meri neznani.

- *MBBEFD krivulje* (Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein, Fermi-Dirac porazdelitve)
  Izhajajo iz fizike. Uporabljajo se za modeliranje krivulj škod pri premoženjskem zavarovanju. Krivulje so opisane z dvema parametroma. [3]

- *Krivulje izpostavljenosti posameznih pozavarovalnic* (Swiss Re, Munich Re, Skandia)
  Tudi te krivulje temeljijo na starih podatkih.

- *Salzmannove krivulje*
  Temeljijo na dejanskih, starih podatkih, ki se nanašajo na osebna premoženjska zavarovanja. Niso enake za vse razrede zaščite. Za več glej [7].

- *Ludwigove krivulje*
  Temeljijo na dejanskih, starih podatkih osebnih premoženjskih in poslovnih vrst zavarovanj. Vključujejo vsa premoženjska kritja in nevarnosti. Niso enake za vse razrede zaščite.

- *ISO PSOLD krivulje*
  Temeljijo na novejših zgodovinskih podatkih za premoženjske rizike. Vključujejo vsa premoženjska kritja in nevarnosti.

Potreba po uporabi metode izpostavljenosti nastane takrat, ko pozavarovalnica nima dovolj podatkov o cedentovem portfelju, ali pa ocenjuje, da podatki, ki so na voljo, niso dovolj reprezentativni. Primerna je tudi pri pozavarovanju novih rizikov, s katerimi pozavarovatelj še ni imel izkušenj. Pri določanju končne cene pozavarovanja se lahko uporabi kot osnova ali pa kot alternativna metoda.

Metoda izpostavljenosti se največkrat uporablja pri določanju cen neproporcionalnih pozavarovanj, in sicer škodno presežkovnega pozavarovanja, čeprav se lahko uporablja tudi pri pozavarovanju tehničnega rezultata. Podrobnejša analiza metode izpostavljenosti bo podana v naslednjem poglavju.

3.3 Izkustvena metoda

Izkustvena metoda (ang. *Experience Rating*) je postopek, s pomočjo katerega želi pozavarovatelj določiti ceno pozavarovanja na podlagi dejanskega zgodovinskega škodnega poteka. Metoda temelji na predpostavki, da so zgodovinski podatki dobra podlaga za napovedovanje škodnega dogajanja v prihodnosti. Dobra podlaga pomeni, da je vzorec preteklih škodnih dogajanj dovolj velik in da vsebuje relevantne podatke. Ti zgodovinski podatki se nanašajo na dejanske škodne podatke portfelja, ki ga želi cedent pozavarovati. Pri določanju cene se ne uporabljajo statistike trga, kot je to primer pri metodi izpostavljenosti.

Običajno cedent ne bo pozavarovatelju posredoval vseh zgodovinskih podatkov, ampak le tiste, ki so pomembni za pozavarovanje, ki ga želi kupiti. Večinoma so to podatki o škodah zadnjih nekaj let (5-10), ki so večje od polovice maksimalnega samopridržaja oz. prioritete, ki je določena v pogodbi.

Včasih pridobljeni vzorec relevantnih škod zahteva popravke in prilagoditve. To se nanaša predvsem na morebitno škodno inflacijo. Z enako logiko kot pri vplivu inflacije na cene je potrebno tudi pri škodah upoštevati inflacijski vpliv. V praksi se za to uporabljajo različni inflacijski indeksi. Nekateri od teh so indeks cen življenjskih potrebščin (ang. *Consumers Price Index – CPI*), indeks cen na drobno (ang. *Retail Price Index – RPI*) ter drugi specializirani indeksi za različne vrste tveganj. [9] Inflacija lahko vpliva tudi na premije, zato je včasih potrebno upoštevati tudi to.

Poleg inflacije je potrebno upoštevati še druge faktorje, ki lahko vplivajo na velikost škod in njihovo število. Sprememba zakonodaje in razmer na zavarovalniškem trgu tudi povzroči potrebo po popravkih na vzorcu. Vzorec bi moral biti prilagojen tudi za spremembe v velikosti portfelja. Razlog za to je, da se velikost portfelja spreminja v smislu, da se število in velikost škod povečuje ali zmanjšuje v odvisnosti od zavarovalne vrste[1] in vrste pozavarovalnega kritja.

Čas, potreben za poravnavo škode, je za različne zavarovalne vrste različen. Recimo, za zavarovanje odgovornosti se pogosto reče, da je "dolgorepa" vrsta, saj v tem primeru poravnava škode lahko traja več let. Za zavarovalne vrste, pri katerih se poravnava škode zgodi v kratkem času po prijavi škode, rečemo, da so "kratkorepe" zavarovalne vrste. Takšen primer srečamo pri požarnem zavarovanju. Pozavarovatelj bi moral biti pozoren pri dolgorepih zavarovalnih vrstah, saj podatki za le nekaj zadnjih let še niso dovolj razviti. Zato je pri takšnih zavarovalnih vrstah potrebno podatke (o številu in velikosti škod) "popraviti" z upoštevanjem faktorja nastalih še neprijavljenih škod (ang. *Incurred But Not Reported Claims – IBNR*) in tudi faktorja nastalih, ampak še ne dovolj prijavljenih škod (ang. *Incurred But Not Enough Reported Claims – IBNER*). Ta faktor se lahko dobi s pomočjo razvojnih trikotnikov. Več na to temo je na voljo v [9].

Ko so podatki primerni v smislu predhodno naštetih popravkov, potem je potrebno izpeljati empirično kumulativno porazdelitveno funkcijo škod, ki je podlaga za določanje cene pozavarovalnega kritja oz. pričakovane nevarnostne premije. Glavna slabost tega pristopa je v tem, da tak model ne more napovedati večje škode od največje, ki je v vzorcu.

Več podrobnosti o izkustveni metodi lahko bralec najde v [4].

3.4 Ekstrapolacijska metoda

Določanje cene pozvarovanja je odvisno od količine informacij o preteklem škodnem poteku, ki jih ima pozavarovatelj na razpolago. Videli smo, da lahko pozavarovatelj uporabi izkustveno metodo takrat, ko ima na voljo dovolj podatkov o škodnem poteku. Z druge strani, ko takšnih podatkov nima, lahko uporabi metodo izpostavljenosti. Razlogi za pomanjkanje podatkov o škodnem poteku so lahko različni. To se zgodi največkrat, ko želi cedent pozavarovati nov portfelj, ko škodnega poteka sploh ni bilo, ali pa dostopni podatki niso relevantni. V praksi se lahko zgodi tudi primer, ko cedent

[1] Pregled zavarovalnih vrst se lahko najde v 7. členu Zakona o zavarovalništvu (ZZavar-1).[12]

ima na voljo dovolj podatkov o škodah in lahko z njimi določi porazdelitveno funkcijo škod, ki je osnova za določanje cene pozavarovanja, vendar ti podatki niso relevantni za pozavarovatelja. Takšne težave se pojavio pri določanju cen škodno presežkovnega pozavarovanja, in sicer pri višjih intervalih kritja. Takrat so za pozavarovatelja relevantne škode oz. višine škod, ki presegajo določen prag. Pri visokih pragih se lahko zgodi, da obstajajo podatki le za nekaj škod, lahko pa tudi, da jih sploh ni. V takih primerih pozavarovatelj poskusi poiskati primerno porazdelitveno funkcijo višine škod in števila škod. V bistvu pozavarovatelja zanima porazdelitvena funkcija višine škod, ki presegajo določen prag. Enako velja za število škod. Na podlagi ocen parametrov teh porazdelitev bo pozavarovatelj določil pričakovano presežno škodo in s tem tudi nevarnostno premijo.

Podrobna analiza ekstrapolacijske metode je podana v petem poglavju.

4 Metoda izpostavljenosti

V tem poglavju bomo začeli z izpeljavo krivulj izpostavljenosti. Podana bo tudi matematična definicija krivulje izpostavljenosti, s pomočjo katere bomo povzeli njene lastnosti, ki so odvisne od porazdelitvene funkcije škod. Na primeru grafa krivulje izpostavljenosti bomo podali interpretacijo točke na krivulji. Spoznali se bomo z definicijo MBBEFD družine krivulj izpostavljenosti, ki so bile omenjene v prejšnjem poglavju. S pomočjo teh krivulj bomo podali praktičen primer uporabe metode izpostavljenosti. Na koncu poglavja bo predstavljen povzetek metode, kjer bodo omenjene slabosti in prednosti metode.

4.1 Opis metode

Ključen del izračuna cene pozavarovanja je določitev nevarnostne premije (ang. *risk premium*). Za pozavarovatelja nevarnostna premija predstavlja višino škode, za katero pričakuje, da jo bo moral plačati v prihodnosti. V nadaljevanju bomo za oceno pričakovane vrednosti škod uporabljali naziv nevarnostna premija.

Pričakovano vrednost zvezne slučajne spremenljivke X z gostoto $f_X(x)$ označimo z $\mathbb{E}[X]$. Potem je

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx.$$

Naj bo X slučajna spremenljivka, ki predstavlja višino škode. Če privzamemo, da je $P(X < 0) = 0$ oz. da so škode nenegativne, potem lahko zapišemo

$$\mathbb{E}[X] = \int_{0}^{\infty} x f_X(x) dx.$$

Kumulativno porazdelitveno funkcijo spremenljivke X označimo s $F_X(x)$, pripadajočo funkcijo preživetja pa s $S_X(x) = 1 - F_X(x)$. Na podlagi definicije kumulativne porazdelitvene funkcije, $F_X(x) = \int_0^x f(y)dy$, in dejstva, da je $f_X(x) = dF_X(x)/dx$, lahko pričakovano vrednost zapišemo kot

$$\mathbb{E}[X] = \int_{0}^{\infty} x dF_X(x).$$

S predpostavko, da je $\mathbb{E}[X] < \infty$, in z integriranjem po delih pa pridemo do enakosti

$$\mathbb{E}[X] = \int_{0}^{\infty} (1 - F_X(x)) dx = \int_{0}^{\infty} S_X(x) dx.$$

Opomba: Pri integriranju po delih je potrebno vzeti $u = x$ in $v = F_X(x) - 1$, ker bi bilo $v = F_X(x)$ neustrezno zaradi zgornje meje (∞). Potem zaradi pogoja $\mathbb{E}[X] < \infty$ velja, da

$$\lim_{x\to\infty} (F_X(x) - 1)x$$

obstaja in je enaka nič. [8]

Če je cedent kupil pozavarovanje za ta riziko, potem lahko to pričakovano vrednost zapišemo kot $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_c] + \mathbb{E}[X_r]$, kjer znesek X_c plača cedent, pozavarovatelj pa X_r.

V nadaljevanju tega poglavja se bomo omejili na škodno presežkovno pozavarovanje, saj se metoda izpostavljenosti največ uporablja prav pri določanju cene tega pozavarovanja.

Vrednosti $\mathbb{E}[X_r]$ in $\mathbb{E}[X_c]$ bosta odvisni predvsem od višine oz. intervala kritja. Cedent lahko kupi neomejeno ali pa omejeno pozavarovalno kritje. Poglejmo, kako se vrednost pričakovane škode razdeli med cedentom in pozavarovateljem v obeh primerih.

Recimo, da cedent kupi neomejeno škodno presežkovno pozavarovanje nad zneskom D, ki predstavlja zgornjo mejo cedentove obveznosti glede izplačila škod. Torej, cedenta bo zanimala pričakovana vrednost škod, ki je omejena z D. Na podlagi definicije škodno presežkovnega pozavarovanja iz drugega poglavja lahko del pričakovane škode, ki pripade cedentu, zapišemo kot

$$\mathbb{E}[X_c] = \mathbb{E}[\min\{X, D\}].$$

Sledi, da pozavarovatelju pripade

$$\mathbb{E}[X_r] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[\min\{X, D\}].$$

Opazimo, da je delitev pričakovane škode med cedentom in pozavarovateljem odvisna od vrednosti $\mathbb{E}[\min\{X, D\}]$. To vrednost imenujemo omejena pričakovana vrednost slučajne spremenljivke X in jo označimo z $\mathbb{E}[X \wedge D]$. Določena je z enačbo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X \wedge D] &= \int_0^\infty \min\{x, D\} f_X(x)dx \\ &= \int_0^D x f_X(x)dx + \int_D^\infty D f_X(x)dx, \end{aligned} \tag{4.1}$$

kjer je X nenegativna slučajna spremenljivka.

Drugi integral v vsoti (4.1) lahko razpišemo na naslednji način

$$\int_D^\infty D f_X(x)dx = D(1 - F_X(D)) = D \cdot S_X(D),$$

kjer smo upoštevali definicijo kumulativne porazdelitvene funkcije in njene lastnosti. Prvi integral v (4.1) lahko zapišemo s pomočjo integriranja po delih ($u = x$, $v = F_X(x)$). Sledi,

$$\int_0^D x f_X(x)dx = D \cdot F_X(D) - \int_0^D F_X(x)dx.$$

Zdaj pa velja, da je omejena pričakovana vrednost enaka

$$\mathbb{E}[X \wedge D] = \int_0^D (1 - F_X(x))dx = \int_0^D S_X(x)dx. \tag{4.2}$$

Po drugi strani, če cedent kupi kritje $L\, xs\, D$, je del škode, ki jo krije pozavarovatelj, enak

$$\mathbb{E}[X_r] = \mathbb{E}[\min\{X, D + L\}] - \mathbb{E}[\min\{X, D\}],$$

kjer je L višina kritja nad prioriteto D.

Če upoštevamo predhodno definirano omejeno pričakovano vrednost, potem lahko zapišemo

$$\mathbb{E}[X_r] = \mathbb{E}[X \wedge (D + L)] - \mathbb{E}[X \wedge D]$$

oz.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_r] &= \int_0^{D+L} S_X(x)dx - \int_0^D S_X(x)dx \\ &= \int_D^{D+L} S_X(x)dx. \end{aligned}$$

V tem primeru cedentu pripada $\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X_r]$, če nima pozavarovalnega kritja nad $(L + D)$.

V postopku določanja cene pozavarovalnega kritja bo pozavarovatelj moral oceniti, kolikšen del celotne škode odpade na cedenta glede na vnaprej določeno prioriteto. Torej ga bo zanimalo razmerje med omejeno pričakovano vrednostjo (4.1) in celotno pričakovano vrednostjo $\mathbb{E}[X]$. To razmerje označimo z $G^*(D)$ in zapišimo

$$G^*(D) = \frac{\mathbb{E}[X \wedge D]}{\mathbb{E}[X]}. \tag{4.3}$$

Funkcijo $G^*(D)$ imenujemo krivulja izpostavljenosti. Definirana je na naslednji način:

Definicija 4.1. Naj bo X nenegativna slučajna spremenljivka s končno pričakovano vrednostnostjo in naj bo $F_X(s)$ njena kumulativna porazdelitvena funkcija. Potem je pripadajoča krivulja izpostavljenosti spremenljivke X definirana kot funkcija $G^* : \mathbb{R}_0^+ \to [0{,}1]$,

$$G^*(D) = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^D S_X(s)ds$$

za $D \in \mathbb{R}_0^+$.

Namesto celotnega zneska prioritete D in celotnega zneska škode X je bolj praktična uporaba deležev $d = D/Q$ in $x = X/Q$. Poglejmo, kako lahko zapišemo enačbo (4.3) za deleža d in x. Zaradi linearnosti pričakovane vrednosti velja, da je

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X/Q] \times Q = \mathbb{E}[x] \times Q. \tag{4.4}$$

Z upoštevanjem (4.2) lahko zapišemo

$$\mathbb{E}[x \wedge d] = \int_0^d S_x(y)dy,$$

pri čemer je

$$S_x(y) = 1 - P(x \leq y) = 1 - P(X/Q \leq y) = 1 - P(X \leq yQ) = S_X(yQ).$$

Nadaljujemo z izračunom $\mathbb{E}[x \wedge d]$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[x \wedge d] &= \int_0^d S_X(yQ)dy \\ &= \int_0^d [1 - F_X(yQ)]dy \\ &= \int_0^{dQ} [1 - F_X(u)]\frac{du}{Q}.\end{aligned}$$

Obe strani slednje enačbe pomnožimo s Q in dobimo

$$\mathbb{E}[x \wedge d] \times Q = \mathbb{E}[X \wedge D], \tag{4.5}$$

kjer smo upoštevali, da je $D = dQ$. Z upoštevanjem (4.4) končno sklepamo, da velja enakost

$$\frac{\mathbb{E}[x \wedge d]}{\mathbb{E}[x]} = \frac{\mathbb{E}[X \wedge D]}{\mathbb{E}[X]}. \tag{4.6}$$

Razmerje na levi strani zgornje enakosti označimo kot

$$G(d) = \frac{\mathbb{E}[x \wedge d]}{\mathbb{E}[x]}. \tag{4.7}$$

Pri prehodu iz definicije 4.1 na definicijo, dano z enačbo (4.7), je potrebno biti pozoren. Funkciji $G^*(D)$ in $G(d)$, definirani s (4.3) in (4.7), nista enaki, ker imata različno definicijsko območje. Pri definiciji $G(d)$ škode "odrežemo" pri Q oz. namesto slučajne spremenljivke X s porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$ upoštevamo omejeno slučajno spremenljivko $X_Q = \min\{X, Q\}$, kjer je $X_Q \in [0, Q]$. Porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke X_Q, potem zapišemo kot

$$F_{X_Q}(x) = P(\min\{X, Q\} \leq x)$$

$$= \begin{cases} F_X(x) & \text{za } x < Q, \\ 1 & \text{za } x = Q. \end{cases}$$

Opazimo, da $F_{X_Q}(x)$ ni zvezna.

Za primer slučajne spremenljivke X_Q je škodni ulomek, $x \in$ [0,1], definiran kot $x = X_Q/Q$ in njegova porazdelitvena funkcija je definirana na naslednji način

$$\begin{aligned} F_x(y) = P\big(X_Q/Q \leq y\big) &= P(X_Q \leq yQ) \\ &= F_{X_Q}(yQ) \\ &= \begin{cases} F_X(yQ) & \text{za } y < 1, \\ 1 & \text{za } y = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Krivuljo izpostavljenosti lahko zdaj zapišemo kot funkcijo $G :$ [0,1] $\rightarrow$ [0,1],

$$\begin{aligned} G(d) &= \frac{1}{\mathbb{E}[x]} \int_0^d S_x(s)ds \\ &= \frac{\int_0^d S_x(s)ds}{\int_0^1 S_x(s)ds}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Osnova definicije krivulje izpostavljenosti je integral funkcije preživetja, ki ima vrednosti na intervalu [0,1]. Iz definicije lahko opazimo, da je krivulja izpostavljenosti naraščajoča funkcija, ker integriramo nenegativno funkcijo.

S ciljem določanja cene kritja $L\,xs\,D$ bo pozavarovatelj želel določiti višino $\mathbb{E}[X_r]$. Poglejmo, kako to naredi za primer enega rizika. Predpostavimo, da kritje $L\,xs\,D$ traja eno leto in vpeljimo nekaj oznak:

- Q – merilo velikosti rizika (ZV, PML ipd.),
- $X_{D,L}$ – slučajna spremenljivka, ki predstavlja škodo na intervalu kritja $L\,xs\,D$,
- N – slučajna spremenljivka, ki predstavlja letno število škod za ta riziko,

- S – slučajna spremenljivka, ki predstavlja skupne letne škode za ta riziko,
- S_L – slučajna spremenljivka, ki predstavlja skupne letne škode za kritje $L\, xs\, D$,
- $x = X/Q$ – slučajna spremenljivka, ki predstavlja velikost škode kot delež velikosti rizika oz. škodni ulomek.

Zdaj bomo zapisali pričakovani vrednosti za slučajni spremenljivki S in S_L. Pričakovana vrednost skupnih letnih škod za en riziko je

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X], \tag{4.9}$$

kjer je privzeta predpostavka, da je letno število škod N neodvisno od višine škode X.

Če bi se zgodila *ena* sama škoda, bi bila pričakovana škoda na intervalu kritja $L\, xs\, D$ enaka

$$\mathbb{E}[X_r] = \mathbb{E}[X_{D,L}] = \mathbb{E}[X \wedge (D+L)] - \mathbb{E}[X \wedge D].$$

Na letnem nivoju pa bi bile pričakovane skupne škode za isti interval kritja

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_L] &= \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_{D,L}] \\ &= \mathbb{E}[N](\mathbb{E}[X \wedge (D+L)] - \mathbb{E}[X \wedge D]) \\ &= \frac{\mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X](\mathbb{E}[X \wedge (D+L)] - \mathbb{E}[X \wedge D])}{\mathbb{E}[X]}.\end{aligned}$$

Do zadnje enakosti smo prišli z množenjem in deljenjem z $\mathbb{E}[X]$. Označimo še $l = L/Q$. Potem lahko z upoštevanjem enakosti (4.6) in (4.9) nadaljujemo in zapišemo $\mathbb{E}[S_L]$ kot

$$\mathbb{E}[S_L] = \mathbb{E}[S] \times \left(\frac{\mathbb{E}[x \wedge (d+l)]}{\mathbb{E}[x]} - \frac{\mathbb{E}[x \wedge d]}{\mathbb{E}[x]} \right),$$

.

Končno lahko $\mathbb{E}[S_L]$ zapišemo kot

$$\mathbb{E}[S_L] = \mathbb{E}[S] \times (G(d+l) - G(d)). \tag{4.10}$$

Proces določanja cene škodno presežkovnega pozavarovanja temelji na enačbi (4.10). Najprej poglejmo, kaj sta v resnici $G(d)$ in $G(d+l)$. Za deleža d in $d+l$ velja, da sta omejena navzgor z 1, saj sta izračunana kot delež Q, ki je v praksi zavarovalna vsota ali PML. Interpretacija količine $G(d)$ je zelo intuitivna. Vrednost $\mathbb{E}[x]$ lahko razumemo kot pričakovano škodo, merjeno z deležem velikosti rizika, ki bi jo cedent moral plačati v celoti sam za zavarovani riziko, če ne bi imel pozavarovanja za ta riziko. Vrednost $\mathbb{E}[x \wedge d]$ interpretiramo kot pričakovano škodo, merjeno z deležem velikosti rizika, ki odpade na cedenta, če ima cedent neomejeno pozavarovalno kritje za ta riziko, kar pomeni, da bo škodo v višini $\mathbb{E}[x] - \mathbb{E}[x \wedge d]$, merjeno z deležem velikosti rizika, plačala pozavarovalnica. Recimo, da cedent kupi neomejeno pozavarovalno kritje s prioriteto, ki je enaka 10 % zavarovalne vsote. Če se zgodi škoda v višini x, merjeno z deležem velikosti rizika, in velja, da je $G(0{,}1) = y$, $y \in [0{,}1]$, potem bo pričakovana delitev škod med cedentom in pozavarovateljem v razmerju $y : 1 - y$, kar je tudi korektno razmerje za delitev nevarnostne premije.

Na podlagi enačbe (4.7) vidimo, da bo tudi vrednost $G(d)$ na intervalu [0,1] za vsak $d \in [0{,}1]$. Pri nenegativnih slučajnih spremenljivkah sta obe matematični upanji nenegativni, omejeno je manjše ali enako neomejenemu.

Po definiciji krivulje izpostavljenosti sledi, da za robni vrednosti krivulje izpostavljenosti velja $G(0) = 0$ in $G(1) = 1$. Torej, če bi cedent kupil pozavarovalno kritje za celoten riziko brez samopridržaja, bi plačilo celotne škode, če bi se le-ta zgodila, padlo na pozavarovatelja. Po drugi strani, če bi cedent obdržal celotno tveganje rizika, je logično, da bo potem sam plačal celotno škodo.

Iz enačbe (4.8) lahko opazimo, da sta krivulja izpostavljenosti in porazdelitvena funkcija škodnega ulomka direktno povezani. Torej, če določimo krivuljo izpostavljenosti, potem je direktno določena tudi porazdelitvena funkcija. Če v enačbi (4.8) odvajamo obe strani, dobimo naslednjo povezavo

$$G'(d) = \frac{1 - F_x(d)}{\mathbb{E}[x]}. \tag{4.11}$$

Opomba: Odvod krivulje izpostavljenosti $G(d)$, ki je podan v (4.11), je definiran v notranjih točkah intervala, kjer je funkcija $1 - F_x(d)$ zvezna, torej na (0,1). Interval (0,1) lahko razširimo na [0,1), saj zaradi predpostavke o nenegativnosti drži ničelnost porazdelitvene funkcije $F_x(y)$ za vse $y < 0$. V točki 1 ni zvezna.

Za odvod funkcije G v točki 0 velja, da je

$$G'(0) = \frac{1}{\mathbb{E}[x]}. \tag{4.12}$$

Potem iz enačbe (4.11) lahko izrazimo kumulativno porazdelitveno funkcijo na naslednji način:

$$F_x(d) = \begin{cases} 1 - \frac{G'(d)}{G'(0)} & \text{za } d \in [0{,}1), \\ 1 & \text{za } d = 1. \end{cases} \tag{4.13}$$

Glede na to, da uporaba metode izpostavljenosti izhaja prav iz tega, da ne poznamo dejanske porazdelitvene funkcije škod, se bomo v nadaljevanju ukvarjali z določanjem krivulje izpostavljenosti in njenimi lastnostmi.

Na podlagi prvega odvoda krivulje izpostavljenosti, ki je podan z enačbo (4.11), vidimo, da je $G'(d) \geq 0$ na intervalu [0,1) zaradi nenegativnosti funkcije preživetja. Za drugi odvod pa velja

$$G''(d) = -\frac{F'_x(d)}{\mathbb{E}[x]} = -\frac{f_x(d)}{\mathbb{E}[x]} \leq 0,$$

na intervalu [0,1). Za krivuljo izpostavljenosti lahko tako sklepamo, da je naraščajoča in konkavna. Poleg tega velja še

$$0 \leq G'(1) \leq 1 \leq G'(0), \tag{4.14}$$

saj je $G(d)$ konkavna, naraščajoča funkcija na intervalu [0,1) z robnimi vrednostmi $G(0) = 0$ in $G(1) = 1$.

Pomembna vrednost, ki izhaja iz definicije krivulje izpostavljenosti in pripadajoče kumulativne funkcije, je verjetnost popolne škode[2]. Škoda je popolna, ko ima x vrednost 1, saj je x določen kot razmerje med škodo in zavarovalno vsoto. Torej verjetnost popolne škode se izračuna kot

$$\begin{aligned} P(x = 1) &= P(x \leq 1) - P(x < 1) \\ &= F_x(1) - \lim_{x \to 1^-} F_x(x) \\ &= 1 - (1 - G'(1)/G'(0)) \\ &= \frac{G'(1)}{G'(0)}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Druga enakost v (4.15) sledi po definiciji funkcije F_x. Iz druge v tretjo enakost pridemo s pomočjo definicije $F_x(x)$, ki je podana v (4.13). V nadaljevanju poglavja bomo videli, da ima inverz razmerja (4.15) pomembno vlogo pri parametrizaciji krivulj izpostavljenosti.

Označimo verjetnost popolne škode s p. Zdaj lahko s pomočjo (4.14) in enakosti (4.12) napišemo naslednjo zvezo

$$0 \leq p \leq \mathbb{E}[x] \leq 1.$$

[2] Za nastalo škodo rečemo, da je popolna takrat, ko zavarovatelj ugotovi, da je enaka ali večja od zavarovalne vsote iz police.

Povedano z besedami; verjetnost popolne škode ni nikoli večja od pričakovane vrednosti škodnega ulomka.

Razumevanje vseh predhodno izpeljanih enakosti bo pomembno pri definiciji in lastnostih krivulj izpostavljenosti iz razreda *MBBEFD*.

Nekatere od krivulj izpostavljenosti, ki so naštete v prejšnjem poglavju, so danes javno dostopne in jih pozavarovalnice pogosto uporabljajo pri določanju cene pozavarovalnega kritja. Te krivulje so izpeljane na podlagi zgodovinskih podatkov različnih rizikov. Vse krivulje niso primerne za vse rizike in je zato potrebna pozornost pri njihovi uporabi.

Zelo znan primer krivulj izpostavljenosti so Swiss Re-jeve krivulje izpostavljenosti za požarni riziko. V praksi so znane štiri vrste Swiss Re-jevih krivulj in so načeloma označene z Y_i, $i \in \{1{,}2{,}3{,}4\}$. Za različne vrste premoženjskih rizikov se uporabi različna krivulja Y_i. Te krivulje so podane v tabelarični obliki za različne vrednosti prioritete, izražene v odstotku od zavarovalne vsote. Znane so naslednje krivulje glede na vrsto premoženjskega rizika [5]:

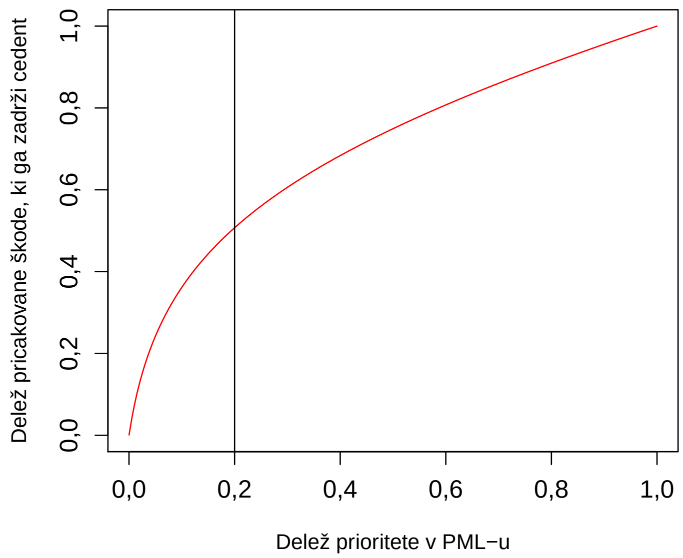
- Y_1 – stanovanjski riziki (ang. *Personal lines*),
- Y_2 – manjši poslovni riziki (ang. *Commercial lines (small-scale)*),
- Y_3 – poslovni riziki srednje velikosti (ang. *Commercial lines (medium-scale)*),
- Y_4 – veliki in industrijski poslovni riziki (ang. *Industrial lines and large commercial*).

Tako določene krivulje niso vedno prilagojene portfelju zavarovalnice, saj je dostopno zgolj omejeno število krivulj, ki so pogojno primerne za izračun pričakovanih škod. Težava je tudi v tem, da so takšne krivulje podane v tabelarični obliki in ne kot funkcija. Povedano drugače, v tem primeru je krivulja izpostavljenosti odsekoma linearna funkcija.

Oddaljenost krivulje izpostavljenosti od daljice, ki povezuje točki (0,0) in (1,1), je zelo pomembna. Če je krivulja dosti oddaljena od te daljice, potem cedent obdrži veliko večji del rizika in je verjetnost popolnih škod zanemarljiva. Ko krivulja izpostavljenosti sovpada s to daljico, je $G'(d) = 1$ za vse $d \in [0{,}1]$. Potem po (4.12) sledi, da je $\mathbb{E}[x] = 1$. Takrat rečemo, da so vse škode popolne. Ko se krivulja izpostavljenosti nahaja v bližini daljice med točkama (0,0) in (1,1), potem verjetnost popolne škode ni zanemarljiva.

Končno lahko pogledamo, kako na podlagi poljubne krivulje izpostavljenosti določimo način delitve pričakovane škode med cedentom in pozavarovateljem. Na podlagi grafa krivulje izpostavljenosti, ki je podan na Sliki 1, lahko direktno določimo delitev škod med pozavarovateljem in cedentom. Na *x-osi* so podane različne vrednosti samopridržaja kot deleža PML-a. Na *y-osi* pa so dani deleži pričakovane škode, ki jo bo moral kriti cedent (preostanek pa pozavarovatelj), glede na izbrani delež prioritete na *x-osi*.

Opomba: Graf na Sliki 1 je podan samo za namen lažje interpretacije.



Slika 1: Primer krivulje izpostavljenosti

Recimo, da je cedentov samopridržaj, izražen kot odstotek od PML-a, enak 20 %. Potem lahko s pomočjo krivulje, ki je prikazana na Sliki 1, poiščemo vrednost krivulje izpostavljenosti v tej točki. Velja, da je $G(20\,\%) \approx 50\,\%$. To pomeni, da bo cedent z 20 % samopridržajem zmanjšal pričakovano škodo na 50 %.

Če te krivulje ne znamo zapisati analitično tako, da bi lahko poiskali njene vrednosti za različne vrednosti samopridržaja, potem njena uporaba ne bo enostavna. Tudi če ni prilagodljiva glede na različne rizike, bomo imeli težave. Idealno bi bilo, da takšna krivulja ne bi bila podana v tabelarični obliki, ampak z neko funkcijo. To pomeni, da bi iz odsekoma linearne funkcije prišli do gladke funkcije.

Stefan Bernegger je leta 1997 pokazal, da lahko takšne diskretne krivulje izpostavljenosti aproksimiramo z razredom analitičnih krivulj. [3] Ta razred krivulj se imenuje *MBBEFD* krivulje in so v odvisnosti od parametrov formalno enake Maxwell–Boltzmann, Bose–Einstein in Fermi–Dirac porazdelitvam. V nadaljevanju bodo povzeti rezultati omenjenega članka. Splošni prikaz *MBBEFD* krivulj je

$$G(x) = \frac{\ln(a + b^x) - \ln(a + 1)}{\ln(a + b) - \ln(a + 1)}. \tag{4.16}$$

Naprej bomo v nalogi videli, kako lahko z določenimi pogoji za te parametre pridemo do zaželenih lastnosti krivulj izpostavljenosti.

Odvod porazdelitvene funkcije, ki je podana z enačbo (4.16), je enak

$$G'(x) = \frac{b^x \ln(b)}{(a + b^x)(\ln(a + b) - \ln(a + 1))} \tag{4.17}$$

in enakost (4.12) velja kot prej.

S pomočjo (4.13) in nekaj računanja pridemo do pripadajoče kumulativne porazdelitvene funkcije:

$$F_x(x) = \begin{cases} 1 - \frac{(a+1)b^x}{a+b^x} & \text{za } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{za } x = 1. \end{cases}$$

Opazimo, da velja $G(0) = 0$ in $G(1) = 1$, kar je v skladu s prej podanimi robnimi pogoji krivulj izpostavljenosti.

Z namenom uporabe takšnih porazdelitvenih funkcij za izpeljavo krivulj izpostavljenosti je potrebno, da parametra a in b izpolnjujeta nekaj pogojev. Ti pogoji se nanašajo na lastnosti krivulj izpostavljenosti, ki smo jih že predstavili, in sicer konkavnost, naraščanje na intervalu [0,1] in dejstvo, da je logaritem definiran le za pozitivne vrednosti.

Avtor članka [3] je za izpolnjevanje teh pogojev uporabil inverz verjetnosti popolne škode, $G'(0)/G'(1)$, ki smo ga prej omenili, kot parameter za izpeljavo krivulje izpostavljenosti. To razmerje označimo z $g = 1/p$, kjer je p verjetnost popolne škode. Z uporabo enačbe (4.17) za odvod $G(x)$ lahko parameter g zapišemo kot

$$g = \frac{a + b}{b(a + 1)}.$$

Parameter a lahko potem izrazimo kot

$$a = \frac{b(g - 1)}{1 - gb}.$$

Parametra g in b imata določene omejitve s ciljem izpolnjevanja pogojev za definicijo krivulje izpostavljenosti. Če želimo, da je vrednost p res verjetnost ($p \in$ [0,1]), potem bi moralo veljati, da je $g \geq 1$. V primeru, ko je $b < 0$, ne bomo imeli več opravka z realno funkcijo. Zato se drugi pogoj nanaša na parameter b, in sicer mora veljati, da je $b \geq 0$.

Poleg teh pogojev je potrebna posebna obravnava določenih vrednosti parametrov b in g. Na podlagi njihovih definicij opazimo:

- za $b = 1$ je $a = -1$,
- za $b = 0$ ali $g = 1$ je $a = 0$ in
- za $bg = 1$ je $a = \infty$.

Z upoštevanjem teh pogojev lahko vse krivulje izpostavljenosti, ki pripadajo razredu *MBBEFD* porazdelitvenih funkcij, definiranih na intervalu [0,1] in z robnima pogojema $G(0) = 0$ in $G(1) = 1$, predstavimo z naslednjo krivuljo v odvisnosti od obeh parametrov:

$$G_{b,g}(x) = \begin{cases} x & \text{za } g = 1 \vee b = 0, \\ \dfrac{\ln(1 + (g-1)x)}{\ln(g)} & \text{za } b = 1 \wedge g > 1, \\ \dfrac{1 - b^x}{1 - b} & \text{za } bg = 1 \wedge g > 1, \\ \dfrac{\ln\left(\dfrac{(g-1)b + (1-bg)b^x}{1-b}\right)}{\ln(bg)} & \text{za } b > 0 \wedge b \neq 1 \wedge bg \neq 1 \wedge g > 1. \end{cases} \tag{4.18}$$

Glede na različne vrednosti produkta parametrov b in g, bg, je krivulja izpostavljenosti identična eni izmed naslednjih porazdelitvenih funkcij:

- $bg < 1$, Fermi-Diracova (FD) porazdelitev,
- $bg = 1$, Maxwell-Boltzmannova (MB) porazdelitev in
- $bg > 1$, Bose-Einsteinova (BE) porazdelitev.

Z enako logiko kot prej lahko izpeljemo pripadajočo kumulativno porazdelitveno funkcijo

$$F_{b,g}(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } x = 1, \\ 0 & \text{za } x < 1 \wedge (g = 1 \vee b = 0), \\ 1 - \frac{1}{1+(g-1)x} & \text{za } x < 1 \wedge b = 1 \wedge g > 1, \\ 1 - b^x & \text{za } x < 1 \wedge bg = 1 \wedge g > 1, \\ 1 - \frac{1-b}{(g-1)b^{1-x} + (1-bg)} & \text{za } x < 1 \wedge b > 0 \wedge b \neq 1 \wedge bg \neq 1 \wedge g > 1. \end{cases} \tag{4.19}$$

Preden se posvetimo določanju količine $\mathbb{E}[S]$, od katere je, poleg krivulje izpostavljenosti, odvisna enačba (4.10), bomo pogledali, kako je določena pričakovana vrednost

$\mathbb{E}[x]$.

Označimo pričakovano vrednost $\mathbb{E}[x]$ z μ in si pomagajmo z enakostjo (4.12). Sledi

$$\mu = \begin{cases} 1 & \text{za } g = 1 \vee b = 0, \\ \frac{\ln(g)}{g-1} & \text{za } b = 1 \wedge g > 1, \\ \frac{b-1}{\ln(b)} & \text{za } bg = 1 \wedge g > 1, \\ \frac{\ln(bg)(1-b)}{\ln(b)(1-bg)} & \text{za } b > 0 \wedge b \neq 1 \wedge bg \neq 1 \wedge g > 1. \end{cases} \tag{4.20}$$

Pred vpeljavo *MBBEFD* razreda krivulj smo spoznali Swiss Re-jeve krivulje izpostavljenosti, ki so primerne za neproporcionalna pozavarovanja. Avtor članka *The Swiss Re Exposure Curves and MBBEFD Distribution Class*, Stefan Bernegger, ki je tudi prvi pokazal, da se krivulje izpostavljenosti lahko aproksimirajo z *MBBEFD* porazdelitvami, je predstavil možnost aproksimacije Swiss Re-jeve krivulj s podrazredom *MBBEFD* krivulj.

Podrazred *MBBEFD* krivulj, s pomočjo katerega lahko aproksimiramo Swiss Re-jeve krivulje izpostavljenosti, je podan na naslednji način [3]:

$$G_c(x) = G_{b_c,g_c}(x), \tag{4.21}$$

kjer je

$$b_c = b(c) = \exp\{3.1 - 0.15(1+c)c\},$$
$$g_c = g(c) = \exp\{(0.78 + 0.12c)c\}.$$

Parameter c določa stopnjo konkavnosti in je za Swiss Re-jeve krivulje Y_1, Y_2, Y_3 in Y_4 enak 1,5 , 2, 3, 4.

Z ustrezno izbiro parametrov b in g je krivulja izpostavljenosti $G_{b,g}$ enolično določena. Torej, če znamo določiti parametra, potem bo narejen bistven del postopka določanja cene pozavarovanja po metodi izpostavljenosti.

Pozavarovatelj lahko uporabi krivulje izpostavljenosti, definirane s (4.21)in (4.18), če ugotovi, da so le-te primerne za njegov *premoženjski* portfelj. V praksi te krivulje vsekakor niso primerne za vsak portfelj. Zaradi tega mora pozavarovatelj sam oceniti parametra b in g. Oceni ju s pomočjo (tržnih) zgodovinskih podatkov, ki so primerni oz. primerljivi z njegovim portfeljem. Izhodišče za takšno ocenjevanje bosta velik vzorec škod podobnega portfelja rizikov in zavarovalna vsota, ali kakšno drugo merilo, za vsak riziko. Za *MBBEFD* krivulje je primerno podatke o višini škod deliti z zavarovalno vsoto in potem s temi deleži izpeljati empirično porazdelitveno funkcijo. Naslednji korak je določitev *MBBEFD* krivulje s pomočjo kumulativne porazdelitvene funkcije (4.19). Parametra b in g se določita s pomočjo numeričnih optimizacijskih metod. Za ta namen je pogosto uporabljena metoda največjega verjetja (ang. *Maximum Likelihood Method – MLE*). Tako pridobljena parametra se uporabita za določanje krivulje izpostavljenosti, ki je definirana v (4.18).

Končno, tako dobljena krivulja izpostavljenosti se uporabi na dejanskih podatkih cedentovega portfelja, ki so predstavljeni s profilom rizikov, ki bo opisan na koncu tega poglavja. Zaradi tega se reče, da metoda izpostavljenosti temelji na tržnih podatkih, pri čemer se upošteva tudi izpostavljenost trenutno obravnavanega portfelja.

Na podlagi enačbe (4.10), ki nam kaže pričakovano škodo za pozavarovalno kritje $L\, xs\, D$, opazimo, da je potrebno določiti tudi vrednost $\mathbb{E}[S]$. Ko torej enkrat določimo, katera krivulja izpostavljenosti je primerna za riziko, ki ga želimo oceniti, je potrebno določiti še pričakovano vrednost skupnih letnih škod za ta riziko.

V nalogi je prej omenjeno, da je razlog uporabe metode izpostavljenosti pomanjkanje podatkov o preteklem škodnem dogajanju in tudi nerelevantnost obstoječih podatkov. Zaradi tega je jasno, da tudi $\mathbb{E}[S]$ ne moremo oceniti na podlagi zgodovinskih podatkov. Namesto tega pozavarovalnice ocenijo pričakovane škode s pomočjo premij, ki jih je cedent pridobil od svojih zavarovalcev. Te so s pričakovanimi škodami povezane preko pričakovanega škodnega količnika (ang. *expected loss ratio*). Pričakovani škodni količnik je definiran kot razmerje med pričakovanimi škodami in premijami. Lahko zapišemo

$$\mathbb{E}[LR] = \frac{\mathbb{E}[S]}{P},$$

kjer je LR škodni količnik in P bruto premija, ki jo je cedent pridobil od svojih zavarovalcev. Potem za pričakovane skupne škode velja $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[LR] \times P$.

Če predpostavimo, da je $\mathbb{E}[LR] = LR_*$ ocenjeni škodni količnik, potem lahko enačbo (4.10) zapišemo kot

$$\mathbb{E}[S_L] = LR_* \times P \times (G(d+l) - G(d)).$$

V naslednjem podpoglavju bomo uporabili zgornjo enačbo kot osnovo pri izračunu cene pozavarovanja za praktičen primer.

Opomba: Pozavarovalnice pogosto uporabijo metodo izpostavljenosti, tudi ko imajo na voljo dovolj velik in reprezentativen vzorec škodnega dogajanja. V tem primeru jim ocene, dobljene s pomočjo metode izpostavljenosti, služijo kot dopolnitev ocen, dobljenih z drugimi metodami, npr. izkustveno.

Do zdaj smo izpeljali pričakovano škodo na določenem intervalu kritja in za en riziko. Poglejmo, kako to izgleda v bolj realnem primeru, tj. ko je portelj sestavljen iz več rizikov. Predpostavimo, da je portfelj sestavljen iz n rizikov, kjer je $n > 1$. Vpeljimo nekaj oznak:

- $G_i(u)$ je krivulja izpostavljenosti za i-ti riziko,
- $\mathbb{E}[S_i] = \mathbb{E}[LR_i] \times P_i$ je pričakovana letna škoda za i-ti riziko,
- $d_i = D/Q_i$ in $l_i = L/Q_i$ sta spodnja meja in širina intervala kritja $L\, xs\, D$, izraženi kot delež izbrane mere velikosti rizika, Q_i, za i-ti riziko.

Potem pričakovano škodo za interval kritja $L\, xs\, D$ zapišemo na naslednji način:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_L] &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[S_{L,i}] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[S_i] \times (G_i(d_i + l_i) - G_i(d_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[LR_i] \times P_i \times (G_i(d_i + l_i) - G_i(d_i)).\end{aligned}$$

V tej točki se naredi nekaj predpostavk. Glede škodnega količnika, LR, je poenostavitev s predpostavko, da je enak za vse rizike, neodvisno od Q. Ni pa to nujna predpostavka. Načeloma cedent oceni škodni količnik. V praksi se kdaj uporabi ena krivulja izpostavljenosti za celoten portfelj, za katerega se določa cena (še ena poenostavitev), ali pa rizike razvrstimo v nekaj razredov ter za vsakega predpostavimo en škodni količnik in eno krivuljo izpostavljenosti. Vsak od rizikov spada v eno od kategorij, ki so znane v praksi. Primera takšnih kategorij sta kategorija za stanovanjske objekte in kategorija za poslovne objekte. Potem se za vsako od teh kategorij izbere ena krivulja izpostavljenosti, namesto da bi se uporabila ena krivulja za vse rizike. S temi predpostavkami lahko zapišemo $\mathbb{E}[S_L]$ na naslednji način

$$\mathbb{E}[S_L] = \mathbb{E}[LR] \times \sum_{i=1}^{n} (G(d_i + l_i) - G(d_i)) \times P_i. \tag{4.22}$$

Enačba (4.22) se lahko uporabi ne glede na število rizikov v cedentovem portfelju. Pozavarovatelj pogosto ne bo potreboval podatkov za vsak riziko posebej, ampak bo zahteval podatke v obliki profila rizikov, ki je opisan v prejšnjem poglavju. Profil vsebuje podatke o zavarovalni vsoti ali PML-u, ki so razdeljeni v različne intervale (ang. *bands*). Vsak riziko je razvrščen v enega izmed teh intervalov. Če se vrednost zavarovalne vsote ali PML-a za ta riziko nahaja na določenem intervalu, potem je riziko uvrščen v ta interval. Za vsak takšen interval je podana tudi skupna premija, ki je vsota vseh prejetih premij za rizike v tem intervalu. Na enak način je podana tudi skupna zavarovalna vsota ali PML ter število rizikov, zajetih v posameznem intervalu. Cedent bi moral določiti še pričakovani škodni količnik za vsakega od teh intervalov.

Iz profila rizikov ne bo mogoče določiti zavarovalne vsote ali PML za vsak riziko posebej, saj so le-te agregirane po intervalih. Zaradi tega se namesto direktne uporabe količine Q, ki je zavarovalna vsota ali PML, uporabi povprečje intervala za vsak interval β oz.

$$Q_\beta = \frac{Q_{\beta,1} + Q_{\beta,2}}{2},$$

kjer sta $Q_{\beta,1}$ in $Q_{\beta,2}$ spodnja in zgornja meja intervala.

S podatki, predstavljenimi s pomočjo opisanega profila rizikov, lahko zapišemo končno obliko enačbe (4.22):

$$\mathbb{E}[S_L] = \mathbb{E}[LR] \times \sum_{\beta=1}^{K} (G(d_\beta + l_\beta) - G(d_\beta)) \times P_\beta, \tag{4.23}$$

pri čemer velja, da sta d_β in l_β izračunana kot razmerji med D in Q_β ter L in Q_β. Vrednost P_β je skupna premija za interval β, K je število intervalov v profilu rizikov.

Enačba (4.23) je izpeljana na podlagi predpostavk o enakem škodnem količniku in eni krivulji izpostavljenosti za celoten portfelj. Če to ne drži, potem se vrednost $E[S_L]$ določi na naslednji način:

$$\mathbb{E}[S_L] = \sum_{\beta=1}^{K} (G_\beta(d_\beta + l_\beta) - G_\beta(d_\beta)) \times \mathbb{E}[LR_\beta] \times P_\beta. \tag{4.24}$$

Enačba (4.24) je osnova za določanje cene pozavarovalnega intervala kritja $L\,xs\,D$.

Zdaj lahko povzamemo korake, ki so potrebni za določitev vrednosti $\mathbb{E}[S_L]$:

1. Pridobitev vhodnih podatkov s strani cedenta. Podatki so predstavljeni v obliki prej opisanega profila rizikov in vsebujejo podatke o skupni premiji, zavarovalni vsoti ali drugem merilu velikosti rizika in pričakovanem škodnem količniku za vsak interval.

2. Izbira ustrezne krivulje izpostavljenosti za portfelj ali posamezne intervale profila rizikov.

3. Izračun deležev d_β in $(d_\beta + l_\beta)$.

4. Izračun pričakovanega deleža škode, $G_\beta(d_\beta + l_\beta) - G_\beta(d_\beta)$, in pričakovane škode, $(G_\beta(d_\beta + l_\beta) - G_\beta(d_\beta)) \times P_\beta \times \mathbb{E}[LR_\beta]$, za vsak interval β.

5. S pridobljenimi vrednostmi iz prejšnjih korakov izračunamo $\mathbb{E}[S_L]$ na podlagi enačbe (4.23) oz. (4.24).

Opomba: Krivulja izpostavljenosti, G_β, načeloma ni različna za vsak različen β. Riziki se razvrstijo v različne intervale in se rizikom v intervalih dodeli ena od nekaj krivulj izpostavljenosti. Število krivulj izpostavljenosti, ki so na voljo, je načeloma manjše kot je število intervalov v profilu rizikov.

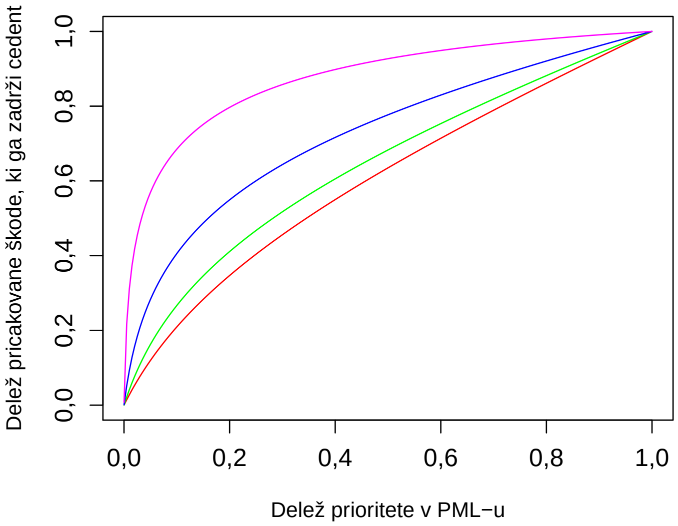
4.2 Uporaba na praktičnem primeru

Želimo določiti ceno škodno presežkovnega intervala kritja $L\,xs\,D$, kjer je prioriteta D enaka 1 mio EUR, kritje L pa 2 mio EUR nad 1 mio EUR. Na razpolago imamo podatke o civilnih in industrijskih požarnih rizikih za enoletno obdobje. Seznam podatkov vsebuje 2214 rizikov. Za vsak riziko imamo podatke o *PML-u* in premiji v evrih. Na podlagi *PML-a* je vsak od teh rizikov uvrščen v eno izmed štirih kategorij, ki so objavljene v publikaciji pozavarovalnice Swiss Re. [5] Za prve tri skupine smo predpostavili, da sta *PML* in *ZV* enaki. Meje za uvrstitev v skupino in pripadajoči parametri krivulj izpostavljenosti iz omenenjene publikacije so podani v Tabeli 1.

Skupina-krivulja	**Parameter (c)**	**PML**	
		Od (CHF)	Do (CHF)
Stanovanjski riziki – Y_1	1,5	200.000	400.000
Manjši poslovni riziki – Y_2	2	400.000	1 mio
Poslovni riziki srednje velikosti – Y_3	3	1 mio	2 mio
Veliki in industrijski poslovni riziki – Y_4	4	več kot 2 mio	

Tabela 1: Skupine rizikov z mejami v CHF

Krivulje Y_1, Y_2, Y_3 in Y_4 so prikazane na Sliki 2 od spodaj navzgor.



Slika 2: Swiss Re-jeve krivulje

Publikacija, v kateri so dane skupine rizikov in meje za uvrščanje, je bila objavljena leta 2004, vrednosti pa so podane v švicarskih frankih (CHF). Naši podatki so podani v evrih. Iz tega razloga smo meje preračunali v evre po tečaju, ki je veljal na dan

31. 12. 2004 (1 EUR = 1,5456 CHF). Meje smo še zaokrožili. Končne meje v evrih, ki smo jih uporabili pri uvrščanje rizikov v eno izmed štirih skupin, so podane v Tabeli 2.

Skupina-krivulja	**Parameter (c)**	**PML**	
		Od (EUR)	Do (EUR)
Stanovanjski riziki – Y_1	1,5	130.000	260.000
Manjši poslovni riziki – Y_2	2	260.000	650.000
Poslovni riziki srednje velikosti – Y_3	3	650.000	1.300.000
Veliki in industrijski poslovni riziki – Y_4	4	več kot 1.300.000	

Tabela 2: Skupine rizikov z mejami v EUR

V obravnavanem portfelju nismo imeli rizikov, katere bi uvrstili v prvo skupino. Po uvrstitvi rizikov v preostale tri skupine imamo rezultate prikazane v Tabeli 3.

Krivulja	**Št. rizikov**	**Povprečje**	
		PML	Premija
Y_2	146	478.076	221
Y_3	490	983.608	642
Y_4	1.578	2.958.288	2.408
Skupaj	2.214	2.357.698	3.270

Tabela 3: Osnovni podatki za primer

Rizike smo razdelili po intervalih PML-a. Za vsak interval so podane bolj podrobne informacije v profilu rizikov v Tabeli 4.

Povprečje intervala je določeno kot središčna točka intervala. Namesto *PML-ov* za vsak riziko posebej bo ta točka uporabljena kot mera velikosti rizikov, vsebovanih v določenem intervalu. To mero smo označevali s Q. Premija in *PML* v Tabeli 4 sta dobljeni kot vsota premij oz. *PML-ov* vseh rizikov posameznega intervala.

Na podlagi profila rizikov v Tabeli 4 lahko nadaljujemo postopek določanja pričakovane škode za interval kritja 1 mio EUR nad 2 mio EUR. S parametrom c je določena krivulja izpostavljenosti, ki bo uporabljena za posamezen interval. Deleža d_β in $d_\beta + l_\beta$ sta določena tako, kot je opisano v prejšnjem podpoglavju, oz. $d_\beta = D/Q_\beta$ in $d_\beta + l_\beta = (D + L)/Q_\beta$, kjer je Q_β središčna točka intervala β. Za intervale, kjer je bila prioriteta D večja od središčne točke intervala, sta deleža d_β in $d_\beta + l_\beta$ nastavljena na 100 % (glej Tabelo 5). Za vsak interval smo izračunali vrednost pripadajoče krivulje izpostavljenosti v točkah d_β in $d_\beta + l_\beta$. Pričakovano škodo po posameznem intervalu smo izračunali kot produkt razlike $G(d_\beta + l_\beta) - G(d_\beta)$ in skupne premije intervala β,

Interval	PML interval		Povprečje	Št. rizikov	Skupni PML	Skupna premija	Parameter c
	Spodnja meja	Zgornja meja					
1	328.784	650.000	489.392	146	69.799.113	32.242	2
2	650.001	975.000	812.501	240	196.934.498	98.558	3
3	975.001	1.300.000	1.137.501	250	285.033.405	215.784	3
4	1.300.001	3.300.000	2.300.001	1.223	2.101.500.957	1.768.658	4
5	3.300.001	5.300.000	4.300.001	180	732.829.039	605.893	4
6	5.300.001	7.300.000	6.300.001	66	399.759.175	288.667	4
7	7.300.001	9.300.000	8.300.001	29	241.691.254	186.795	4
8	9.300.001	11.300.000	10.300.001	29	300.645.888	232.962	4
9	11.300.001	13.300.000	12.300.001	8	96.130.121	228.979	4
10	13.300.001	15.300.000	14.300.001	12	170.366.123	98.128	4
11	15.300.001	17.300.000	16.300.001	7	113.683.783	61.411	4
12	17.300.001	19.300.000	18.300.001	4	73.710.894	41.634	4
13	19.300.001	21.300.000	20.300.001	16	335.300.000	261.025	4
14	21.300.001	-	21.300.001	4	102.561.106	25.493	4
SKUPAJ				**2.214**	**5.219.945.356**	**4.146.229**	

Tabela 4: Profil rizikov

pri čemer smo zaradi splošnosti predpostavili $LR = 100\,\%$ za vsak interval, dejanski LR pa smo upoštevali v končnih izračunih. Izračuni so prikazani v Tabeli 5.

Interval	c	Premija	d	d+l	G(d)	G(d+l)	G(d+l) - G(d)	Pričakovana škoda
1	2	32.242	100 %	100 %	100 %	100 %	0 %	0
2	3	98.558	100 %	100 %	100 %	100 %	0 %	0
3	3	215.784	88 %	100 %	95 %	100 %	5 %	10.094
4	4	1.768.658	43 %	100 %	83 %	100 %	17 %	293.698
5	4	605.893	23 %	70 %	71 %	93 %	21 %	130.207
6	4	288.667	16 %	48 %	64 %	85 %	21 %	61.170
7	4	186.795	12 %	36 %	59 %	80 %	21 %	39.160
8	4	232.962	10 %	29 %	55 %	76 %	21 %	48.384
9	4	228.979	8 %	24 %	52 %	72 %	21 %	47.149
10	4	98.128	7 %	21 %	49 %	69 %	20 %	20.042
11	4	61.411	6 %	18 %	47 %	67 %	20 %	12.445
12	4	41.634	5 %	16 %	44 %	65 %	20 %	8.373
13	4	261.025	5 %	15 %	43 %	63 %	20 %	52.109
14	4	25.493	5 %	14 %	42 %	62 %	20 %	5.071
SKUPAJ		**4.146.229**						**727.902**

Tabela 5: Pričakovana škoda po intervalih

V tabeli 5 so izpisani zaokroženi odstotki, upoštevani pa so dejanski. Za celoten portfelj smo predpostavili, da je škodni količnik, LR, enak $60\,\%$. Z upoštevanjem vsote pričakovane škode po intervalih, 727.902 EUR, ter na podlagi enačbe (4.23) lahko izračunamo pričakovano škodo za pozavarovalno kritje 2 mio EUR nad 1 mio EUR.

Velja, da je

$$E[S_L] = 0{,}6 \times 727.902 = 436.741$$

Delež pričakovane škode v celotni premiji, ki je enaka vsoti premij vseh intervalov, je enak $436.741/4.146.229 = 11\,\%$. Sklepamo lahko, da pozavarovatelj pričakuje, da bo plačal 436.741 EUR škode za interval kritja 2 mio EUR nad 1 mio EUR. Za poravnavo tega zneska bo potreboval 11 % celotne premije, ki jo je prejel cedent od svojih zavarovalcev.

Opomba: Znesek 436.741 EUR predstavlja pričakovano škodo za interval kritja 2 mio EUR nad 1 mio EUR in smo ga prej imenovali tudi nevarnostna premija. To ni končna premija, ki jo bo zahteval pozavarovatelj od cedenta. Potrebno je upoštevati tudi variabilnost in z njo povezani del pozavarovalne premije (varnostni dodatek), stroške, pričakovani dobiček ipd.

4.3 Prednosti in slabosti

Metoda izpostavljenosti je največkrat uporabljena v primerih, ko cedent nima dovolj zgodovinskih podatkov o škodnem dogajanju rizikov, ki jih želi pozavarovati. Njena glavna prednost je v tem, da sploh ne potrebuje cedentovih podatkov o škodah za določanje cene pozavarovalnega kritja. Zaradi tega se lahko uporabi za nove portfelje oz. tam, kjer še niso znane škode, ali za določanje cen višjih intervalov kritja. Iz te prednosti izhaja tudi glavna slabost metode izpostavljenosti. Glavna slabost se nanaša na uporabo krivulj izpostavljenosti, ki temeljijo na tržnih podatkih. Krivulje izpostavljenosti nikoli ne morejo biti popolnoma relevantne za cedentov portfelj in največkrat temeljijo na zelo starih podatkih. V praksi niso vedno dostopne krivulje za vse obravnavane rizike. Zaradi tega se uporabljajo aproksimacije, kar v metodo prinese dodatno negotovost. Izračun pričakovane povprečne škode za pozavarovalno kritje, poleg krivulj izpostavljenosti, temelji tudi na ocenjenem škodnem količniku. Škodni količnik največkrat oceni cedent in je zaradi te ocene tudi ocena pričakovane povprečne škode pozavarovalnega kritja občutljiva. Pozavarovatelj lahko metodo izpostavljenosti uporabi pri škodno presežkovnem pozavarovanju za posamezen riziko in pozavarovanju tehničnega rezultata, za določanje cene škodno presežkovno pozavarovanje za primer katastrofe pa ta metoda ni primerna. Ne glede na naštete slabosti, je metoda izpostavljenosti zelo enostavna za razumevanje in za uporabo tam, kjer se lahko uporabi.

5 Ekstrapolacijska metoda

Poglavje bomo začeli z opisom metode. Na podlagi naključno izbranih škod bo podan grafičen prikaz višine in frekvence škod, ki je osnova za določanje empirične porazdelitvene funkcije škod. Podani bodo komentarji glede razlik v podatkih o škodah, ki jih ima na voljo cedent, in podatkih, ki jih ima pozavarovatelj. Spoznali se bomo s porazdelitvenim funkcijami, primernimi za modeliranje višine škod in števila škod. Posvetili se bomo modeliranju višine škod s pomočjo Paretove porazdelitve in modeliranju števila škod s pomočjo Poissonove porazdelitve. Rezultati bodo uporabljeni za izračun pričakovane škode za interval kritja škodno presežkovnega pozavarovanja.

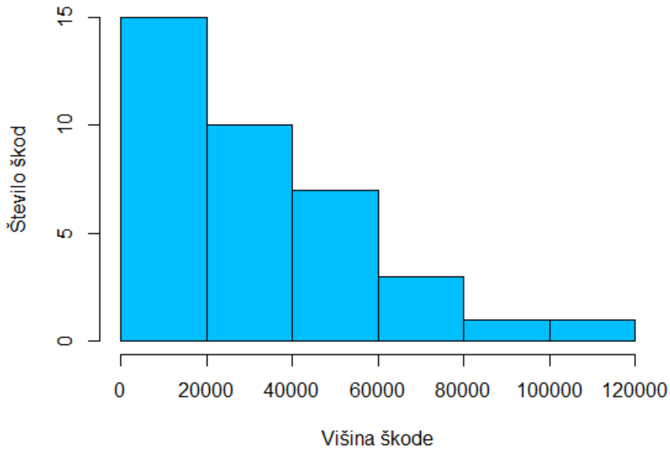
5.1 Opis metode

Izhodišče ekstrapolacijske metode je primerna porazdelitvena funkcija škod, npr. funkcija, ki se dovolj dobro prilega podatkom in jo lahko uporabimo za izračune na drugih podatkih. S (kumulativno) porazdelitveno funkcijo smo se spoznali v prejšnjem poglavju, kjer smo jo določili posredno preko krivulje izpostavljenosti. Pri ekstrapolacijski metodi se odločimo za primerno porazdelitveno funkcijo. V praksi in literaturi je na voljo veliko število porazdelitvenih funkcij, ampak niso vse primerne za modeliranje višine škod. Preden preidemo k primerom teh funkcij, poglejmo, kakšen vpogled v škode ima cedent in kakšen pozavarovatelj. Recimo, da ima cedent naslednje podatke o škodah, razdeljene na intervale:

Višina škod		
Od	Do	Št. škod
0	19.999	15
20.000	39.999	10
40.000	59.999	7
60.000	79.999	3
80.000	99.999	1
100.000	219.999	1

Tabela 6: Višina in število škod

Potem lahko narišemo histogram, kjer so na *x-osi* podani intervali višine škod iz zadnje tabele, na *y-osi* pa frekvenca oz. število škod.



Slika 3: Histogram škod

Histogram na Sliki 3 ni vedno najboljši prikaz porazdelitve višine škod, še posebej v primerih, ko je višina škod razdeljena na podrobnejše intervale. Zato se pogosto namesto s pomočjo histograma škode predstavijo s pomočjo empirične porazdelitvene funkcije. Empirična porazdelitvena funkcija višine škode je za škode x_i za $i = 1,2,\ldots,n$ definirana na naslednji način:

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_i \leq x\}},$$

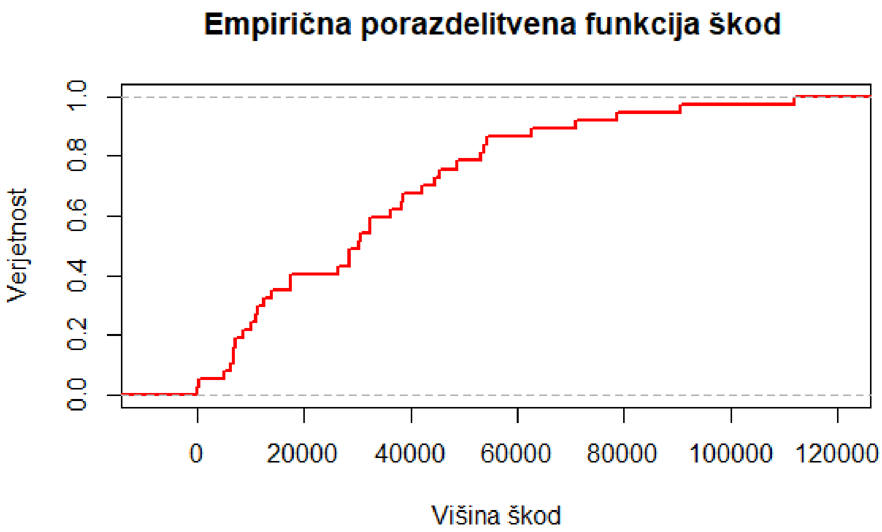
kjer $\mathbb{1}_{\{x_i \leq x\}}$ označuje indikatorsko funckijo dogodka $\{x_i \leq x\}$. Za vzorce škod iz našega primera je empirična porazdelitvena funkcija škod podana na Sliki **??**.

Na podlagi grafa na Sliki **??** lahko opazimo, da je funkcija $\widehat{F}_n(x)$ stopničasta funkcija. Zaradi visokih zneskov škod, ki imajo nizko frekvenco, se v repu empirične funkcije na *x-osi* pojavijo malo večje razdalje med skoki. Če bi naš vzorec vseboval veliko število škod (manjših in velikih škod), bi namesto stopničaste krivulje na Sliki **??** dobili navidez gladko krivuljo.[3]

Vsi podatki o škodah, ki so se zgodile, so na razpolago cedentu. Če jih je dovolj, potem lahko na podlagi teh podatkov cedent določi porazdelitveno funkcijo škod in tako oceni pričakovane škode. Po drugi strani pa pozavarovatelj nima vedno podatkov

[3]Po zakonu velikih števil velja, da $\widehat{F}_n(x)$ konvergira skoraj gotovo proti dejanski kumulativni porazdelitveni funkciji $F_X(x)$, ko $n \to \infty$, za vsak x.

o vseh škodah. Pri škodno presežkovnem pozavarovanju so za pozavarovatelja najpomembnejši podatki o škodah, ki so presegale prioriteto, določeno v pogodbi. Načeloma pozavarovatelj od cedenta zahteva podatke o škodah, ki presegajo polovico zneska prioritete. Temu znesku pogosto rečemo prag oz. točka opazovanja (ang. *observation point – OP*). Torej bodo v odvisnosti od višine prioritete in limita pozavarovalnega kritja pomembni različni podatki o škodah.



Enako kot cedent bo tudi pozavarovatelj želel določiti porazdelitveno funkcijo škod. Za pozavarovatelja bo imel pomembno vlogo rep porazdelitvene funkcije škod. Težava se pojavi takrat, ko pozavarovatelja zanimajo velike škode, ki imajo majhno frekvenco. Zaradi tega je vzorec pozavarovalnici znanih škod pogosto majhen in nezadosten za določanje porazdelitvene funkcije škod. S takšnimi težavami se pozavarovalnica največkrat sreča pri določanju cene škodno presežkovnega pozavarovanja, pri katerem pozavarovalnica nima podatkov o škodah, ki ne presegajo prioritete D. V praksi se pojavijo tudi skrajni primeri, kjer ima pozavarovalnica na razpolago le nekaj škod. Takšni primeri se pojavijo pri višjih intervalih kritja škodno presežkovnega pozavarovanja.

Nekatere porazdelitvene funkcije so se v praksi pokazale kot primerne za modeliranje višine škod. Med drugimi omenimo naslednje:

- *Lognormalna porazdelitvena funkcija* zvezne slučajne spremenljivke X, kjer je $X = e^Y$ in $Y \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, $\sigma > 0$, je enaka

$$F_X(x) = \Phi\Big(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\Big),$$

  kjer $\Phi(X)$ označuje standardizirano normalno porazdelitveno funkcijo. Oznaka: $X \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$.

- *Weibullova porazdelitvena funkija* zvezne slučajne spremenljivke X je enaka

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/\lambda)^k} & \text{za } x \geq 0, \\ 0 & \text{za } x < 0, \end{cases}$$

  kjer sta $\lambda, k > 0$. Oznaka: $X \sim \mathrm{W}(\lambda, k)$.

- *Paretova porazdelitvena funkcija tipa I* zvezne slučajne spremenljivke X je

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_{min}}{x}\right)^\alpha & \text{za } x \geq x_{min}, \\ 0 & \text{za } x < x_{min}, \end{cases} \tag{5.1}$$

  kjer je x_{min} najmanjša vrednost slučajne spremenljivke X, α parameter oblike ter $x_{min}, \alpha > 0$. Oznaka: $X \sim \mathrm{Pareto}(x_{min}, \alpha)$.

Predhodno naštete porazdelitvene funkcije pripadajo razredu težkorepih porazdelitev (ang. *heavy-tailed distributions*). Za rep teh porazdelitev[4] rečemo, da je bolj "težek" kot rep eksponentnih porazdelitev. Drugače povedano, gostota verjetnosti težkorepih porazdelitev bolj počasi pada proti 0, kot je to primer pri eksponentnih porazdelitvah. Matematično zapisano za zvezno slučajno spremenljivko X, ki ima težkorepo porazdelitveno funkcijo, velja

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-\lambda x}}{1 - F_X(x)} = 0$$

za $\forall \lambda > 0$. Torej verjetnost pojavitve velikih vrednosti škod ne bo zanemarljiva in z uporabo težkorepih porazdelitvenih funkcij škod bo pozavarovatelj na bolj "varni" strani. Zaradi teh razlogov normalna porazdelitvena funkcija, ki ima veliko uporabo v praksi, običajno ni primerna za modeliranje višine škod.

Prej smo videli, da pozavarovatelja pri škodno presežkovnem pozavarovanju zanimajo vse škode, ki presegajo določen prag. Naj bo kot prej X zvezna slučajna spremenljivka, ki predstavlja višino škod. Pozavarovatelja bo zanimala pogojna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke $X - u$ pri pogoju, da škoda X preseže določeni prag u, oz. $X > u$. To pogojno porazdelitveno funkcijo lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned} F_u(x) &= P(X - u \leq x | X > u) \\ &= \frac{P(X - u \leq x \wedge X > u)}{P(X > u)} \end{aligned}$$

[4]Weibullova porazdelitvena funkcija je težkorepa za $k \in (0,1)$.

$$= \frac{F_X(x+u) - F_X(u)}{1 - F_X(u)}.$$

Pogojna pričakovana vrednost spremenljivke $X - u$ se potem izračuna na naslednji način

$$e_X(u) = \mathbb{E}[X - u | X > u]$$

$$= \frac{\int_u^\infty (x-u) f_X(x) dx}{P(X > u)}$$

$$= \frac{\int_u^\infty S_X(x) dx}{S_X(u)},$$

kjer iz druge v tretjo enakost pridemo s pomočjo integriranja po delih. Funkcijo $e_X(u)$ imenujemo povprečna presežkovna funkcija, funkcijo $F_u(x)$ pa presežkovna porazdelitvena funkcija. [1] Obe imata pomembno vlogo pri določanju cene škodno presežkovnega pozavarovanja.

Med prej naštetimi porazdelitvenimi funkcijami in še drugimi, ki so primerne za modeliranje višine škod, bomo izpostavili Paretovo porazdelitveno funkcijo. S pomočjo definicije v (5.1) lahko zapišemo tudi funkcijo preživetja, ki določa rep porazdelitve Paretovo porazdeljene slučajne spremenljivke X. Torej

$$S_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{x_{min}}{x}\right)^\alpha & \text{za } x \geq x_{min}, \\ 1 & \text{za } x < x_{min}. \end{cases} \tag{5.2}$$

Zdaj lahko zapišemo najpomembnejšo lastnost Paretovo porazdeljene slučajne spremenljivke. Na podlagi (5.2) za $x > y_{min}$, kjer je $y_{min} = c\, x_{min}$, $c > 1$, sledi

$$P(X > x | X > y_{min}) = \frac{P(X > x)}{P(X > y_{min})}$$

$$= \frac{(x_{min}/x)^\alpha}{(x_{min}/y_{min})^\alpha}$$

$$= \left(\frac{y_{min}}{x}\right)^\alpha.$$

Povedano z besedami, za Paretovo porazdeljeno slučajno spremenljivko X s parametroma x_{min} in α velja, da je njena pogojna verjetnost glede na dogodek $\{X > c\, x_{min}; c > 1\}$ tudi porazdeljena Paretovo z istim parametrom oblike, α, ampak z minimalno vrednostjo $y_{min} = c\, x_{min}$. Če govorimo o slučajni spremenljivki, ki predstavlja višino škod, potem na podlagi rezultata (5.2) sklepamo, da je verjetnost presega škode nad točko, ki je večja od praga, določena na podlagi funkcije preživetja Paretove porazdelitvene funkcije, če privzamemo, da so škode nad pragom Paretovo porazdeljene.

Poleg pričakovane velikosti škod za posamezen interval kritja je potrebno določiti tudi pogostost oz. frekvenco škod. Torej pozavarovatelj bi moral narediti določene predpostavke tudi glede porazdelitvene funkcije škodne pogostosti. Za modeliranje frekvence škod se največkrat uporabljata dve porazdelitveni funkciji, in sicer Poissonova in negativna binomska porazdelitvena funkcija.

- *Poissonova porazdelitev:* Za slučajno spremenljivko N rečemo, da je Poissonovo porazdeljena s parametrom $\lambda > 0$, če je

$$P(N = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

  za $k \in \mathbb{N}_0$.
  Poissonova porazdelitev se pogosto uporablja za modeliranje frekvence škod, saj ima nekaj zaželenih lastnosti. Recimo, da je število škod na letnem nivoju porazdeljeno po Poissonovi porazdelitvi. Od prej vemo, da pri škodno presežkovnem pozavarovanju pozavarovatelja zanimajo višine škode, ki so nad določenim pragom. Enako velja za število škod. Potem velja, da je število škod nad določenim pragom tudi Poissonovo porazdeljeno, ampak z drugim parametrom. Poleg tega velja še, da sta število vseh škod in število škod nad pragom neodvisno porazdeljena. [6]

- *Negativna binomska porazdelitev:* Slučajna spremenljivka N je porazdeljena z negativno binomsko porazdelitvijo, če velja, da je

$$P(N = k) = \frac{\beta^\alpha \alpha_{(k)}}{k!(\beta + 1)^{\alpha+k}}$$

  za $k \in \mathbb{N}_0$, kjer sta $\beta, \alpha > 0$ in $\alpha_0 = 1$, $\alpha_{(k)} = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + k - 1)$. Negativna binomska porazdelitev predstavlja neke vrste posplošitev Poissonove porazdelitve. Za parameter λ v Poissonovi porazdelitvi se predpostavi, da je porazdeljen z gama porazdelitvijo, kot rezultat pa dobimo negativno binomsko porazdelitev.

S ciljem določitve cene intervala kritja je potrebna izbira porazdelitvene funkcije višine škod in tudi števila škod ter ocena parametrov teh porazdelitev. Ko enkrat ocenimo parametre na dostopnih podatkih, je enostavno oceniti pričakovano škodo oz. nevarnostno premijo za vsak interval kritja. V nadaljevanju bo opisan ta postopek za primer, ko višino škod modeliramo s Paretovo porazdelitveno funkcijo in število škod s Poissonovo porazdelitveno funkcijo.

Pri Paretovi porazdelitveni funkciji škod je potrebno oceniti parameter α. V odvisnosti od velikosti oz. vrste rizika se v praksi pogosto uporabljajo okvirne vrednosti parametra α, ki so podane v Tabeli 7 [11]

Požar	$1{,}5 \leq \alpha \leq 2{,}5$
Vihar	$0{,}8 \leq \alpha \leq 1{,}3$
Potres, poplava	$0{,}5 \leq \alpha \leq 0{,}8$
Splošna odgovornost	$1 \leq \alpha \leq 2$
Avtomobilska odgovornost	$1{,}5 \leq \alpha \leq 3$

Tabela 7: Paretov parameter (α)

Če predpostavimo, da ima pozavarovatelj dostopne podatke za n škod, ki presegajo določen prag u, potem lahko ocenimo parameter α. Ocena Paretovega parametra α, ki najbolj aproksimira empirično porazdelitveno funkcijo škod, se lahko dobi s pomočjo metode največjega verjetja. Za ta namen si oglejmo gostoto Paretovo porazdeljene slučajne spremenljivke X, ki je podana z odvodom kumulativne porazdelitvene funkcije, oz. na naslednji način:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\, x_{min}^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} & \text{za } x \geq x_{min}, \\ 0 & \text{za } x < x_{min}. \end{cases}$$

Funkcija verjetja za Paretovo porazdelitev je enaka

$$\mathcal{L}(\alpha, x_{min}; x) = \alpha^n x_{min}^{n\alpha} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^{\alpha+1}}$$

za vzorec škod $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Zaradi lažje obravnave se namesto zgornje enačbe pogosto uporabi naravni logaritem funkcije verjetja, ki je enak

$$\ln[\mathcal{L}(\alpha, x_{min}; x)] = n\ln(\alpha) + n\alpha\ln(x_{min}) - (\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i). \tag{5.3}$$

Vrednost x_{min} je v našem primeru enaka pragu u oz. najmanjši vrednosti x_i v vzorcu. Če maksimiziramo funkcijo (5.3) pri pogoju, da je $x_{min} = u$, dobimo oceno

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(x_i) - n\ln(u)} \tag{5.4}$$

Paretovega parametra α po metodi največjega verjetja.

Parameter α, ocenjen s pomočjo (5.4) ali izbran na podlagi tabele 7, je osnova za določanje frekvence škod. Če poznamo frekvenco škod nad pragom u, potem lahko ocenimo tudi frekvenco škod pri vrednostih, ki so večje od u. Predpostavljamo, da je u dovolj nizek prag oz. da imamo na voljo dovolj podatkov o številu škod, ki so potrebni za oceno frekvence škod. Kot je že omenjeno, pozavarovatelja zanimajo ocene višine in števila škod nad prioriteto. Naj bo N_D število škod, ki presegajo prioriteto D. Velja, da je

$$N_D = \sum_{i=1}^{N_u} \mathbb{1}_{\{x_i > D\}},$$

kjer je N_u število škod, ki presegajo prag u. Naj bo $p_D = P(X > D)$. S predpostavko, da je $N_u \sim \text{Poisson}(\lambda)$, računamo [2]

$$\begin{aligned}
P(N_D = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N_D = k | N_u = n) P(N_u = n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p_D^k (1 - p_D)^{n-k} e^{-\lambda} \lambda^n / n! \\
&= e^{-\lambda} (\lambda p_D)^k \lambda^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} (1 - p_D)^{(n-k)} \frac{\lambda^{(n-k)}}{n!} \\
&= \frac{e^{-\lambda} (\lambda\, p_D)^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (1 - p_D)^m \lambda^m \\
&= \frac{e^{-\lambda p_D} (\lambda\, p_D)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Sledi, da je $N_D \sim \text{Poisson}(\lambda p_D)$. Tudi to dejstvo je eden izmed razlogov za uporabo Poissonove porazdelitvene funkcije za modeliranje števila škod.

Računamo pričakovano število škod nad prioriteto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_D] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{N_u} \mathbb{1}_{\{x_i > D\}} \Big] \\
&= \sum_{i=1}^{N_u} P(x_i > D) \\
&= \mathbb{E}[N_u] P(X > D), \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

kjer druga enakost velja zaradi linearnosti pričakovane vrednosti in predpostavke, da so višine škod enako porazdeljene in neodvisne med seboj.

Poglejmo, kako izgleda enakost (5.5) v našem primeru. Predpostavljamo, da za slučajno spremenljivko X, ki predstavlja višino škod, velja $X \sim \text{Pareto}(x_{min}, \alpha)$, kjer je x_{min} najmanjša vrednost škod, ki jo imamo v vzorcu. Vrednost x_{min} v Paretovi porazdelitvi zdaj predstavlja prej omenjeno točko opazovanja. Naj bo N_{OP} število škod, ki presegajo točko opazovanja $OP = x_{min}$, in naj bo $N_{OP} \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Predpostavljamo, da poznamo frekvenco škod pri točki OP. Potem frekvenco škod pri prioriteti $D \geq OP$ izračunamo kot

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_D] &= \mathbb{E}[N_{OP}]P(X > D) \\ &= \mathbb{E}[N_{OP}](1 - F_X(D)) \\ &= \mathbb{E}[N_{OP}]\Big(\frac{OP}{D}\Big)^{\alpha}. \end{aligned}$$

Za izračun skupne pričakovane škode za interval kritja $L \, xs \, D$ najprej računamo posamezno pričakovano presežno škodo, omejeno z $D+L$ [10]

$$\begin{aligned} e_X^*(OP) &= \int_D^{D+L} (x - D) \cdot \alpha \cdot OP^{\alpha} \cdot x^{-\alpha-1} dx + \int_{D+L}^{\infty} L \cdot \alpha \cdot OP^{\alpha} \cdot x^{-\alpha-1} dx \\ &= \begin{cases} \frac{D}{1-\alpha}\Big[\big(\frac{D+L}{D}\big)^{1-\alpha} - 1\Big] & \text{za } \alpha \neq 1, \\ D \ln\Big(\frac{D+L}{D}\Big) & \text{za } \alpha = 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Označimo $RL = (D + L)/D$ in končno zapišemo skupno pričakovano škodo za interval kritja $L \, xs \, D$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{D,L}] &= \mathbb{E}[N_D] e_X^*(OP) \\ &= \begin{cases} \mathbb{E}[N_{OP}]\Big(\frac{OP}{D}\Big)^{\alpha} \frac{D}{1-\alpha}\Big[RL^{1-\alpha} - 1\Big] & \text{za } \alpha \neq 1, \\ \mathbb{E}[N_{OP}] OP \ln(RL) & \text{za } \alpha = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Pričakovana škoda za naslednji interval kritja se lahko izračuna na podlagi ocenjene škode za prejšnji interval kritja. To dejstvo drži, saj smo predpostavili, da so vse škode v obravnavanem portfelju porazdeljene po Paretovi porazdelitvi z istim parametrom. Temu postopku se reče ekstrapolacija premije enega intervala kritja v drug interval kritja. S ciljem ponazoritve povezave med intervali označimo

- $\mathbb{E}[S_{D_1,L_1}] = RP_1$ pričakovana škoda za interval kritja $L_1 \, xs \, D_1$,
- $\mathbb{E}[S_{D_2,L_2}] = RP_2$ pričakovana škoda za interval kritja $L_2 \, xs \, D_2$, kjer velja, da je $D_2 = D_1 + L_1$,
- $RL_1 = (D_1 + L_1)/D_1$ in $RL_2 = (D_2 + L_2)/D_2$.

Za frekvenco škod v intervalu $(D_2, D_2 + L_2)$ velja,

$$\mathbb{E}[N_{D_2}] = \mathbb{E}[N_{D_1}]\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{\alpha}.$$

Izračunajmo RP_2 za primer, ko je $\alpha \neq 1$,

$$\begin{aligned}
RP_2 &= \mathbb{E}[N_{D_2}]\frac{D_2}{1-\alpha}\left[RL_2^{1-\alpha} - 1\right] \\
&= \mathbb{E}[N_{D_1}]\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{\alpha}\frac{D_2}{1-\alpha}\left[RL_2^{1-\alpha} - 1\right] \\
&= \frac{RP_1}{\frac{D_1}{1-\alpha}\left[RL_1^{1-\alpha} - 1\right]}\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{\alpha}\frac{D_2}{1-\alpha}\left[RL_2^{1-\alpha} - 1\right] \\
&= \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{\alpha}\frac{D_2}{D_1}\frac{\left[RL_2^{1-\alpha} - 1\right]}{\left[RL_1^{1-\alpha} - 1\right]}RP_1 \\
&= \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{1-\alpha}\frac{\left[RL_2^{1-\alpha} - 1\right]}{\left[RL_1^{1-\alpha} - 1\right]}RP_1.
\end{aligned}$$

Torej, ko imamo enkrat določeno pričakovano škodo za nižji interval, potem lahko izračunamo pričakovano škodo višjega intervala na podlagi te škode in vrednosti prioritete ter vrednosti pozavarovalnega kritja.

5.2 Uporaba na praktičnem primeru

Kot pri primeru za metodo izpostavljenosti tudi pri metodi ekstrapolacije želimo določiti pozavarovalno premijo za interval kritja $L\, xs\, D$ za $L = 2$ mio EUR in $D = 1$ mio EUR.

Podatke o višini in številu škod smo dobili s pomočjo simulacij v R programu. Simulacije so bile narejene za profil rizikov, ki smo ga uporabili pri primeru za metodo izpostavljenosti. S Swiss Re-jevimi krivuljami smo za vsak riziko posebej generirali število in višino škod za 100 let, kjer smo upoštevali škodni količnik $LR = 60\,\%$. Število škod smo generirali s Poissonovo porazdelitveno funkcijo. Opisne statistike dobljenih podatkov so podane v Tabeli 8.

	Parameter			**Skupaj**
	$c = 2$	$c = 3$	$c = 4$	
Št. škod	29	206	2.425	2.660
Minimum	666	35	6	6
Povprečje	82.878	93.798	79.741	80.863,82
Maksimum	1.430.725	1.137.000	11.850.000	11.850.000

Tabela 8: Opisne statistike

Generirane škode predstavljajo podatke, ki jih cedent ima na razpolago. Za določanje pričakovane škode na intervalu kritja 2.000.000 xs 1.000.000 bo pozavarovatelj dobil samo podatke o višini in številu škod, ki so nad točko opazovanja. Kot je bilo omenjeno že prej, je točka opazovanja pogosto določena kot polovica prioritete, kar je v našem primeru 500.000 EUR. Poleg te točke opazovanja bomo izračunali pričakovano škodo tudi za nekatere druge točke opazovanja. Pri izračunih bomo predpostavili, da je frekvenca škod znana pri točki opazovanja. Na podlagi te predpostavke bomo ekstrapolirali to frekvenco na oceno frekvence pri prioriteti. Z metodo največjega verjetja bomo ocenili parameter α Paretove porazdelitvene funkcije tipa I, in sicer na podatkih o škodah, ki presegajo posamezno točko opazovanja.

V Tabeli 9 so prikazani rezultati izračunov nevarnostne premije oz. pričakovane škode za 10 točk opazovanja. Začeli smo pri točki, ki je enaka povprečni škodi (80.864 EUR) v obravnavanem vzorcu. Številke v tabeli so zaokrožene zaradi preglednejšega prikaza.

Št. škod	**OP**	**FQ(OP)**	α	**FQ(D)**	**Presežna škoda**	**Pričakovana škoda**
414	80.864	4,14	0,91	0,42	1.155.975	487.598
347	100.000	3,47	0,93	0,41	1.144.849	471.649
196	200.000	1,96	1,03	0,38	1.083.659	408.037
143	300.000	1,43	1,17	0,35	1.003.829	352.290
109	400.000	1,09	1,26	0,34	955.966	328.643
86	500.000	0,86	1,33	0,34	923.119	316.526
75	600.000	0,75	1,49	0,35	849.693	297.750
67	700.000	0,67	1,71	0,36	763.887	278.403
56	800.000	0,56	1,80	0,37	730.732	273.809
49	900.000	0,49	1,96	0,40	679.172	270.732

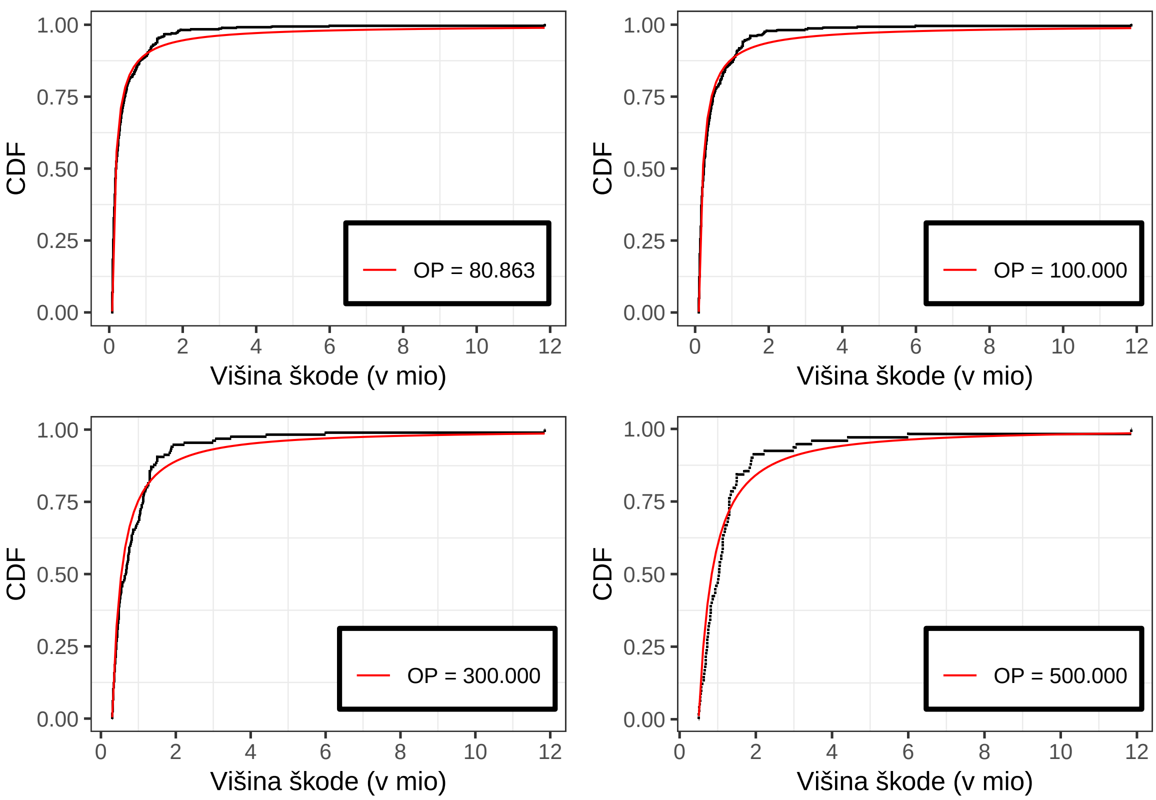
Tabela 9: Rezultati izračunov na simuliranih podatkih

Število škod v Tabeli 9 predstavlja število škod nad opazovano točko, ki je podana v drugem stolpcu. Frekvenca pri opazovani točki $FQ(OP)$ je določena kot razmerje števila podatkov in števila let (100). Parameter α je ocenjen s pomočjo cenilke po metodi največjega verjetja, ki je podana v (5.4). Pričakovano število škod, ki presegajo prioriteto D oz. 1 mio EUR, je podano v stolpcu $FQ(D)$ in predstavlja ekstrapolirano frekvenco $FQ(OP)$, in sicer na podlagi enakosti (5.5). Posamezna pričakovana presežna škoda, ki je podana v predzadnjem stolpcu, je izračunana na podlagi (5.6). Pričakovana škoda za interval kritja 2 mio nad 1 mio je podana v zadnjem stolpcu.

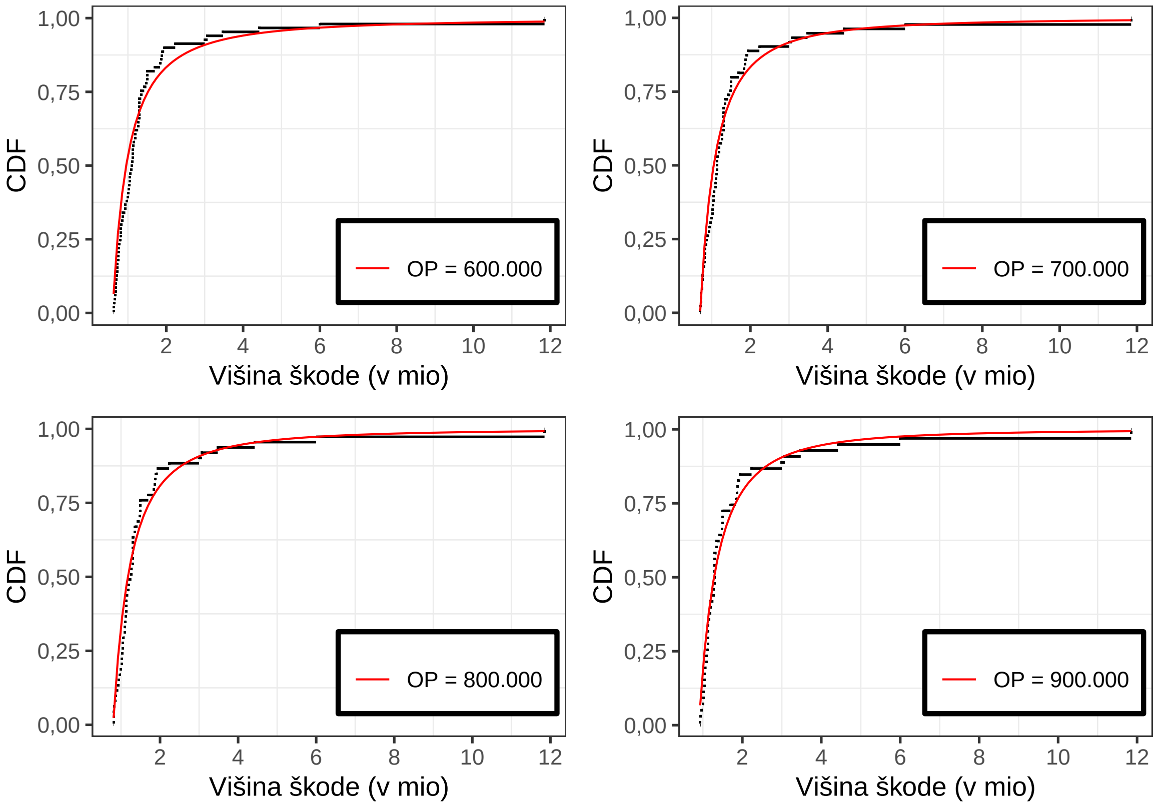
Na podlagi rezultatov, podanih v Tabeli 9, lahko izpostavimo nekatere ugotovitve. Najprej lahko opazimo, da je frekvenca škod nad prioriteto manjša pri manjši točki opazovanja, vednar samo do $OP = 500.000$. Po tej točki se frekvenca začne rahlo zviševati.

Manjši parameter α prinese večjo pozamezno presežno škodo in s tem tudi večjo celotno pričakovano škodo za interval kritja.

Na slikah 4 in 5 so narisane empirične in teoretične kumulativne porazdelitvene funkcije glede na opazovane točke, podane v Tabeli 9. Teoretična kumulativna porazdelitvena funkcija se nanaša na ocenjeno Paretovo porazdelitev tipa I.



Slika 4: Empirična in teoretična CDF za $OP \in \{80.864, 100.000, 300.000, 500.000\}$



Slika 5: Empirična in teoretična CDF za $OP \in \{600.000, 700.000, 800.000, 900.000\}$

Iz zgornjih dveh grafov na Sliki 4 vidimo, da se empirična in ocenjena CDF dobro ujemata na začetnem in končnem intervalu, in sicer približno na [0,1] in [8,12]. Večja odstopanja se pojavijo pri intervalu (1,5]. S prehodom na višje točke opazovanja (300.000 in 500.000) se pojavijo dodatni zamiki med krivuljami, in sicer na začetnih delih krivulj. Pri visokih vrednostih škod oz. pri repih ostane približno enako ujemanje kot pri manjših točkah opazovanja. Seveda zaradi nižje frekvence škod pri višjih točkah opazovanja postane empirična funkcija manj gladka.

Na Sliki 5 so prikazane primerjave, ko je točka opazovanja nad polovico prioritete, ampak ne večja kot je prioriteta. Zamiki med krivuljami so približno enaki, razen za $OP = 900.000$, kjer se pojavijo vidni zamiki med repoma funkcij. Kot pričakovano, empirične funkcije postanejo še bolj stopničaste, kot so tiste, prikazane na Sliki 4.

Na podlagi predhodnih grafov lahko opazimo še eno povezavo, in sicer med točko opazovanja in verjetnostjo $P(X \leq x)$. Če primerjamo verjetnosti pri zamikih na intervalu [1,3] in pri različnih točkah opazovanja, lahko opazimo večje spremembe verjetnosti $P(X \leq x)$, kot je to vidno v repu krivulje. Za obravnavani primer škodno presežkovnega intervala kritja 2 mio nad 1 mio ne smemo pozabiti na značilnost verjetnosti $P(X > 1\,\text{mio})$, ki je komplementarna verjetnosti $P(X \leq 1\,\text{mio})$. Zaradi lažjega pregleda so verjetnosti $P(X \leq 1\,\text{mio})$ glede na različne točke opazovanja prikazane v

Tabeli 10. Vidimo, da verjetnost $P(X \leq 1\,\text{mio})$ pada z večanjem točke opazovanja. Z drugimi besedami, verjetnost, da bo škoda presegla 1 mio EUR, je večja pri večjih točkah opazovanja.

	OP	$P(X \leq 1\,\text{mio})$
1	80.864	0,90
2	100.000	0,88
3	300.000	0,75
4	500.000	0,60
5	600.000	0,53
6	700.000	0,46
7	800.000	0,33
8	900.000	0,19

Tabela 10: Verjetnost $P(X \leq 1\,\text{mio})$ glede na OP

Če bi pozavarovatelj imel podatke v obsegu, v katerem smo jih obravnavali v primeru, bi se odločal o postavljanju nevarnostne premije na podlagi zadnjega stolpca v Tabeli 9. Po določitvi nevarnostne premije je potrebno upoštevati še druge postavke, ki smo jih omenili pri metodi izpostavljenosti.

5.3 Prednosti in slabosti

Glavna prednost metode ekstrapolacije je možnost njene uporabe pri določanju nevarnostne premije za visoke intervale kritja, ki se pojavijo pri škodno presežkovnem pozavarovanju. Glede na to, da je osnova ekstrapolacijske metode izbira primerne porazdelitvene funkcije višine in frekvence škod, se njene prednosti in slabosti razlikujejo glede na to izbiro.

Z uporabo Paretove porazdelitvene funkcije tipa I za modeliranje višine škod in Poissonove porazdelitvene funkcije za modeliranje števila škod lahko na enostaven način določimo pričakovano škodo na intervalu kritja $L\,xs\,D$. Pri obeh porazdelitvah je potrebno oceniti samo en parameter in zaradi tega sta oceni dokaj enostavni. Obe porazdelitvi imata pomembno lastnost, ki velja za porazdelitev pri pogoju, da škode presegajo prag. Pri Paretovi velja, če so vse škode porazdeljene po Paretovi porazdelitveni funkciji, potem je višina škod nad pragom tudi porazdeljena Paretovo. Tudi za Poissonovo porazdelitev velja podobna razlaga; če je število vseh škod porazdeljeno Poissonovo, potem je tudi število škod nad pragom porazdeljeno Poissonovo. Navedena lastnost ima pomembno vlogo pri določanju pričakovane škode na intervalu, saj pozavarovatelja zanima verjetnost presega prioritete pozavarovanja pri dani točki opazovanja. Možnost ekstrapolacije nevarnostne premije enega intervala kritja na naslednji interval kritja je še ena lastnost, zaradi katere se pozavarovatelji odločajo za uporabo ekstrapolacijske metode. V nalogi nismo uporabljali znanih referenčnih vrednosti Paretovega parametra α, ki so podane v Tabeli 7. Te vrednosti se prav tako lahko uporabijo za določanje pričakovane škode.

Ena izmed slabosti metode ekstrapolacije je zagotovo predpostavka o porazdelitvi višine in števila škod. Dejanskih porazdelitev pozavarovatelj ne more poznati, ker nima na voljo celotnega nabora podatkov o škodah, ampak pozna samo tiste škode, ki presegajo določeno točko opazovanja. Torej ocene pozavarovatelja temeljijo na predpostavkah o porazdelitvi. Za namen praktičnega primera smo predpostavili, da je frekvenca škod znana pri točki opazovanja. Ta predpostavka v praksi ne drži vedno.

6 Zaključek

V nalogi smo obravnavali nekatere od možnih metod, s katerimi lahko pozavarovatelj določi ceno pozavarovalnega kritja. Proces določanja cene smo omejili na določitev t. i. nevarnostne premije, ki bi morala biti zadostna za kritje pričakovanih škod pozavarovalnega kritja. Pričakovana škoda predstavlja največji del cene pozavarovalnega kritja in zato ima njen izračun pomembno vlogo.

Uporaba določene metode je odvisna od vrste pozavarovanja. Iz tega razloga smo najprej opisali vrste pozavarovanja ter različne metode, ki se uporabljajo v praksi. Potem smo se omejili na ocenjevanje pričakovane škode za neproporcionalno pozavarovanje, in sicer škodno presežkovno pozavarovanje.

Za metodi izpostavljenosti in ekstrapolacije smo predstavili teorijo in ozadje. Pri metodi izpostavljenosti smo se spoznali s pogosto uporabljenimi krivuljami izpostavljenosti, in sicer Swiss Re-jevim krivuljami izpostavljenosti, ki temeljijo na tržnih podatkih o škodah. Krivulje izpostavljenosti smo uporabili za aproksimacijo porazdelitve škodnega ulomka, ki je razmerje med višino škode in mero velikosti rizika. Pri metodi ekstrapolacije smo se omejili na modeliranje porazdelitve višine in števila škod s Paretovo in Poissonovo porazdelitvijo. Obe metodi smo uporabili za določanje povprečne pričakovane škode intervala kritja $L\,xs\,D$, kjer je $L = 2.000.000$ EUR in $D = 1.000.000$ EUR.

Za metodo izpostavljenosti smo upoštevali profil požarnih rizikov, v katerem so bili riziki razdeljeni v intervale glede na velikost PML-a. Posameznemu intervalu smo dodelili eno izmed Swiss Re-jevih krivulj izpostavljenosti. Na podlagi izbranih krivulj izpostavljenosti in ostalih podatkov v profilu rizikov smo določili pričakovano škodo po posameznih intervalih in skupno pričakovano škodo. Ocenjena skupna pričakovana škoda na intervalu kritja $2.000.000\,xs\,1.000.000$ je znašala 436.741 EUR.

S simulacijami smo generirali število škod in višino škod za 100 let in dobljene podatke uporabili pri metodi ekstrapolacije. Izračune po metodi ekstrapolacije smo naredili glede na različne točke opazovanja. Opazili smo, da dobimo večjo pričakovano škodo pri manjši točki opazovanja. Z upoštevanjem navade v praksi, da se škoda oceni na podlagi podatkov, ki presegajo polovico zneska prioritete, ki je v našem primeru 500.000 EUR, bi bila ocenjena pričakovana škoda po metodi ekstrapolacije 316.526 EUR, kar je za 120.215 EUR manj, kot smo dobili z metodo izpostavljenosti. Manjše razlike med ocenama za obe metodi dobimo, če upoštevamo točki opazovanja 100.000 in 200.000. V teh primerih pričakovana škoda znaša 471.649 EUR in 408.037 EUR.

Pri primerjavi metod je potrebno v mislih imeti različnost podatkov, ki so upoštevani pri obeh metodah. Za metodo ekstrapolacije so uporabljeni simulirani podatki, za katere ne moremo trditi, da v celoti opisujejo naravo rizikov, upoštevanih pri metodi izpostavljenosti. S ciljem določitve oz. izbire cene pozavarovanja bi pozavarovatelj moral poznati slabosti in prednosti metod, ki jih uporablja. Ni nujno, da je ista metoda dobra za različne portfelje rizikov, ki so predmet pozavarovanja. V vsakem primeru, če je to možno, je zaželeno, da pozavarovatelj uporabi čim več dostopnih metod ter potem naredi odločitev.

7 Literatura

[1] Hansjörg Albrecher, Jan Beirlant, and Jozef L. Teugels. *Reinsurance: Actuarial and Statistical Aspects*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 2017. *(Citirano na strani 41.)*

[2] Peter Antal. Mathematical methods in reinsurance, 2015. *(Citirano na strani 44.)*

[3] Stefan Bernegger. The Swiss Re Exposure Curves and the MBBEFD Distribution Class. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 27(1):99–111, 1997. *(Citirano na straneh 12, 25, 26 in 28.)*

[4] David R. Clark. Basics of reinsurance pricing. *(Citirano na straneh 11 in 14.)*

[5] Daniel Guggisberg. Exposure Rating. Technical report, Swiss Reinsurance Company, 2004. URL `http://media.cgd.swissre.com/documents/pub_exposure_rating_en.pdf`. *(Citirano na straneh 24 in 33.)*

[6] Stuart A. Klugman, Harry H. Panjer, and Gordon E. Willmot. Loss models: From data to decisions, 4th edition. 2012. *(Citirano na strani 42.)*

[7] Stephen J. Ludwig. An exposure rating approach to pricing property excess-of-loss reinsurance. In *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, volume 78, pages 110–145, 1991. *(Citirano na strani 12.)*

[8] Pat Muldowney, Krzysztof Ostaszewski, and Wojciech Wojdowski. The darth vader rule. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 52(1):53 – 63, 2012. URL `https://content.sciendo.com/view/journals/tmmp/52/1/article-p53.xml`. *(Citirano na strani 17.)*

[9] Pietro Parodi. *Pricing in General Insurance*. A Chapman & Hall book. Taylor & Francis, 2014. *(Citirano na strani 14.)*

[10] Markus Schmutz. *The Pareto Model in Property Reinsurance: Formulas and Applications*. Swiss Reinsurance Company, 1998. *(Citirano na strani 45.)*

[11] Andreas Schwepcke. *Reinsurance: Principles and State of the Art – A Guidebook for Home Learners*. Bildungsnetzwerk Versicherungswirtschaft. Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft, 2004. *(Citirano na strani 43.)*

[12] Uradni list RS. Zakon o zavarovalništvu, 2015. URL `https://www.uradni-list.si/glasilo-uradni-list-rs/vsebina/124197`. Datum ogleda: 12. 10. 2018. *(Citirano na straneh 3 in 14.)*