UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Magistrsko delo

Metode določanja netvegane obrestne mere

(Methods of determining risk-free interest rate)

Ime in priimek: Sabina Jenko
Študijski program: Matematika s finančnim inženiringom, 2. stopnja
Mentor: izr. prof. dr. Mihael Perman

Koper, september 2018

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Sabina JENKO

Naslov zaključne naloge: Metode določanja netvegane obrestne mere

Kraj: Koper

Leto: 2018

Število listov: 65 Število slik: 5 Število tabel: 11

Število prilog: 1 Število strani prilog: 1 Število referenc: 22

Mentor: izr. prof. dr. Mihael Perman

Ključne besede: obrestna mera, netvegana obrestna mera, Solventnost II, širok, likviden in transparenten trg, zadnja likvidnostna točka, končna obrestna mera, Smith-Wilsonova metoda, Smith-Wilsonova funkcija sedanje vrednosti.

Math. Subj. Class. (2010): 97M30

UDK: 336.781.5(043.2)

Izvleček:
Posvetili smo se določanju netvegane obrestne mere in njenemu pomenu za zavarovalnice. Obrestna mera se skozi čas spreminja, to spreminjanje povzroča tveganje za investitorje. Zavarovalnice s svojim strašteškim vlaganjem sredstev spodbujajo ekonomsko rast. Pri svojem poslovanju se srečujejo s tveganji, ki ogrožajo njivovo solventnost. S temi tveganji se soočajo s pomočjo regulacijskega okvirja Solventnost II, ki določa kapitalske zahteve za tveganja. Zavarovalnice morajo oblikovati zavarovalno-tehnične rezervacije. To so obvezosti zavarovalnic, na podlagi sklenjenih zavarovalnih pogodb za že nastale in pričakovane škode. Postavi se vprašanje, kako napovedati obrestno mero za prihodnost za izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij. Obrestno mero želimo napovedati na podlagi trga. Na trgu imamo obveznice in izvedene kreditne instrumente. Iz donosov brezkuponskih obveznic preberemo časovno strukturo obrestne mere. EIOPA je za to napoved uporabila Smith-Wilsonovo metodo. Njen cilj je skladen izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij za vse zavarovalnice. Preverili smo vpliv spremembe končne obrestne mere na ceno zavarovanj. Višja kot je končna obrestna mera, nižje so neto premije zavarovanja.

Key words documentation

Name and SURNAME: Sabina JENKO

Title of the thesis: Methods of determining risk-free interest rate

Place: Koper

Year: 2018

Number of pages: 65 Number of figures: 5 Number of tables: 11

Number of appendices: 1 Number of appendix pages: 1 Number of references: 22

Mentor: Assoc. Prof. Mihael Perman, PhD

Keywords: interest rate, risk-free interest rate, Solvency II, deep, liquid and transparent market, last liquid point, ultimate forward rate, Smith-Wilson method, Smith-Wilson present value function.

Math. Subj. Class. (2010): 97M30

UDK: 336.781.5(043.2)

Abstract: This paper focuses on determining a risk-free interest rate and its importance to insurance companies. The interest rate changes over time and these changes pose a risk for investors. Insurance companies, through their passionate investment, stimulate economic growth. In their business operations, they encounter risks that threaten their solvency. They face these risks with the help of the Solvency Framework II, which sets the capital requirements for risks. Insurers must create technical provisions. These are the obligations of the insurance company, based on the concluded insurance contracts for incurred and expected damages. The question arises as to how to predict the interest rate for the future in order to calculat of technical provisions. We want to predict the interest rate on the basis of the market. There are bonds and swaps on the market. From the yields of zero-coupon bonds, we read the time structure of the interest rate. EIOPA used the Smith-Wilson method for this prediction. Its purpose is a consistent calculation of technical provisions for all insurance companies. We examined the impact of the ultimate forward rate on the price of insurance. A higher ultimate forward rate implies lower net insurance premiums.

Zahvala

Zahvalila bi se mentorju, dr. Mihaelu Permanu, za vse nasvete in pomoč pri pisanju magistrskega dela.

Zahvalila bi se tudi Janezu Komelju, Juretu Jerovšku in Leu Knezu za vse nasvete in pomoč.

Zahvalila bi se tudi Meti Frank za lektoliranje magistrske naloge.

Posebna zahvala gre mojim najbližjim, družinama Jenko in Maljevac, ter fantu Ivu za vso spodbudo in podporo v času študija in pri pisanju magistrskega dela.

Kazalo vsebine

Kazalo tabel

Kazalo slik

Kazalo prilog

Seznam kratic

tj.	to je
npr.	na primer
oz.	oziroma
itd.	in tako dalje
ang.	angleško
bt	bazna točka
DLT	širok, likviden in transparenten
ZLT	zadnja likvidnostna točka
UFR	končna obrestna mera
EIOPA	Evropski organ za zavarovanja in poklicne pokojnine
AMECO	Letna makroekonomska baza podatkov
OECD	Organizacija za gospodarsko sodelovanje in razvoj

1 Uvod

Z obrestnimi merami se srečujemo na različnih finančnih področjih. Najpogosteje v bančništvu pri posojilih, kreditih, obrestovanju pozitivnega stanja na bančnem računu, itd. Srečujemo se tudi z zamudnimi obrestmi. Banke nam lahko ponudijo fiksno obrestno mero ali pa spreminjajočo se obrestno mero. Glede na obrestovalno periodo poznamo npr. mesečno, polletno, letno ali petletno obrestno mero. Ko se obrestovalna perioda ujema s časovnim intervalom, pri katerem se obresti kapitalizirajo, govorimo o efektivni obrestni meri. V primeru, ko se obrestovalna perioda ne ujema s periodo kapitalizacije, govorimo o nominalni obestni meri. Obresti, ki jih pripisujemo na koncu obrestovalnega obdodja, imenujemo dekurzivne obresti. Anticipativne obresti so tiste, ki jih pripisujemo na začetku vsakega obrestovalnega obdobja. Vzemimo letno efektivno obrestno mero r, $r^{(n)}$ naj bodo n-krat letno pripisane nominalne obresti. Potem je akumulirana vrednost po enem letu enaka

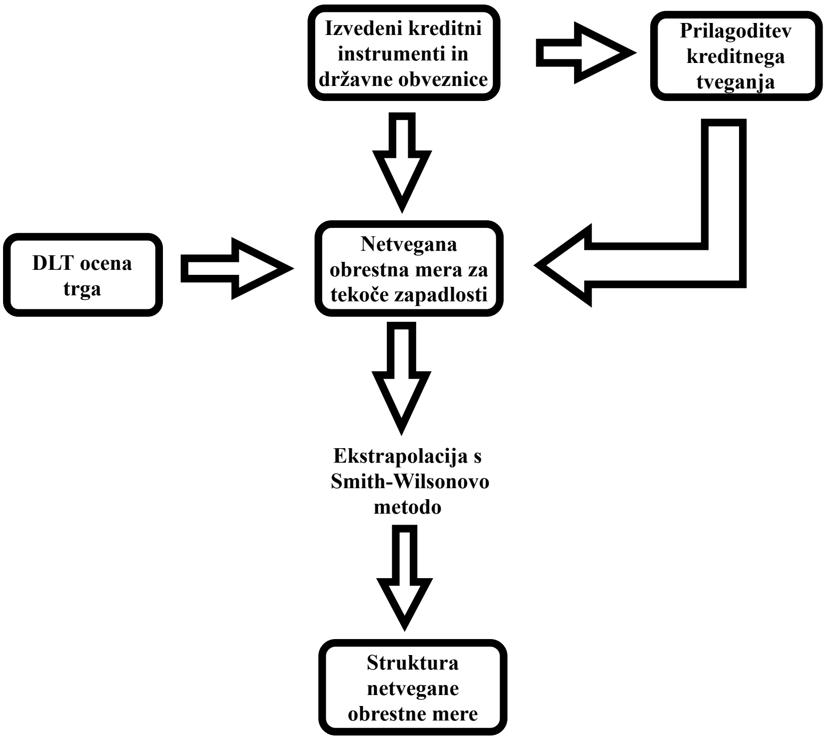
$$1 + r = \left(1 + \frac{r^{(n)}}{n}\right)^n. \tag{1.1}$$

Nominalne obresti $r^{(n)}$ so ekvivalentne letni efektivni obrestni meri r. Obrestni meri r je ekvivalentna tudi jakost obresti, ki jo označujem z δ in je definirana kot

$$\delta = \lim_{n\to\infty} r^{(n)}. \tag{1.2}$$

Če vzamemo limito $n \to \infty$ v (1.1) dobimo $1 + r = e^{\delta}$. Za poljubno realno število k je akumulacijski faktor po k letih enak $(1+r)^k = e^{\delta k}$. Od tod sledi, da je diskontni faktor za isto časovno obdobje enak $(\frac{1}{1+r})^k = e^{-\delta k}$. Več o obrestni meri je mogoče najti v [4].

Obrestna mera se skozi čas spreminja, kar povzroča tveganje za investitorje. Poznamo tudi netvegano obrestno mero. Več o tej meri je navedeno v naslednjem poglavju magistrskega dela. Centralna banka določi obrestne mere v državah, ki uporabljajo centralni bančni sistem. Federal Open Market Committee določi obrestno mero v Združenih državah Amerike. Na območju Evropske unije določa obrestno mero Evropska centralna banka s sedežem v Frankfurtu. Na obrestno mero imata vpliv povpraševanje in ponudba posojil. Obrestna mera se pri velikem povpraševanju po posojilih zvišuje. Če pa je povpraševanje majhno, to znižuje obrestno mero. Obrestna mera se po vsej verjetnosti poveča tudi zaradi višje inflacije, saj bodo investitorji zahtevali višje obresti za posojen denar v sedanjosti, ker bo njegova kupna moč v prihodnosti manjša zaradi višje inflacije. Prav tako na obrestne mere vpliva tudi monetarna politika države. Več podrobnosti najdete v [5,13,18]. Spodnja slika prikazuje postopek izračuna netvegane obrestne mere. V magistrski nalogi bomo predstavili, kako določimo obrestno mero v Solventnosti II, ter njen vpliv na zavarovalno-tehnične rezervacije in kapitalske zahteve zavarovalnic in pozavarovalnic. V skladu s Solventnostjo 2 je Evropski organ za zavarovanja in poklicne pokojnine (ang. Europan Insurance and Occupational Pensions Authority) postavil in objavil tehnične standarde za izračun netvegane obrestne mere z namenom zagotovitve skladnega izračuna zavarovalno-tehničnih rezervacij s strani zavarovalnic in pozavarovalnic.



Slika 1: Diagram strukture izračuna netvegane obrestne mere

Postopek določanja netvegane obrestne mere po določilih EIOPE poteka po naslednjih korakih. Delegirani akti (ang. Delegated Regulation) določajo strukturo konstrukcije netvegane obrestne mere, ki temelji na državnih obveznicah in izvedenih kreditnih instrumentih (ang. swaps) ali pa na enem izmed naštetega. Naslednji korak temelji na oceni širokega, likvidnostnega in transparentnega trga oz. DLT oceni trga (ang. deep, liquid and transparent assessment) za valute iz Evropskega ekonomskega območja (EEA) in posebej za valute, ki niso iz Evropskega ekonomskega območja, ter posledično na zadnji likvidnostni točki (ang. last liquid point). Izločimo obresti, ki ne zadoščajo DLT oceni ali pa presegajo zadnjo likvidnostno točko. Opisali bomo postopke izračuna prilagoditve kreditnega tveganja za tri situacije, ki se lahko pojavijo. Izračunano prilagoditev kreditnega tveganja odvzamemo od tržnih obrestnih mer instrumentov. Skonstruiramo matriko denarnih tokov. Ta matrika se uporabi pri ekstrapolacijski Smith-Wilsonovi metodi za obdobje po zadnji likvidnostni točki. Tukaj so uporabljeni naslednji vhodni podatki: končna obrestna mera (ang. ultimate forward rate), zadnja likvidnostna točka, toleranca in perioda konvergence. V magistrski nalogi bomo uporabili analitični pristop, na koncu pa z modeliranjem preverili vpliv sprememb obrestnih mer na rezervacije in kapitalske zahteve. Glavni vir skozi celotno magistrsko delo je [15].

1.1 Vloga obrestne mere v življenjskih zavarovanjih

Zavarovalnice so pomemben člen finančnega sistema zaradi prevzemanja in diverzifikacije tveganja. S strateškim vlaganjem sredstev spodbujajo ekonomsko rast ter financirajo različna podjetja in države. Pomembno vlogo v življenjskih zavarovanjih igra obrestna mera. V zadnjih desetih letih so se ponudniki življenjskih zavarovanj prilagodili izjemno nizki obrestni meri zaradi finančne krize v letih 2007/2008. Velik del svojih sredstev zavarovalnice investirajo v obveznice in izdajo hipotekarnih posojil, s čimer zagotavljajo donos iz naložb. Ker imajo zavarovalnice dolgoročne obveznosti, so njihove investicije prav tako dolgoročne. Praviloma se njihove obveznosti in večnost sredstev časovno ne ujemajo. Zavarovalnice se srečujejo z različnimi tveganji, ki ogrožajo njihovo solventnost in likvidnost. Na območju evropskega ekonomskega območja se zavarovalnice soočajo s tveganji s pomočjo regulacijskega okvirja Solventnost II, ki določa kapitalske zahteve za tveganje. Po Solventnosti II so kapitalske zahteve (SKZ) definirane kot 99,5 % tvegana vrednost (ang. Value-at-Risk ali VaR) za obdobje enega leta. Glej [8]. Kapitalske zahteve zavarovalnice izračunajo s pomočjo standardne formule:

$$SKZ = \sqrt{\sum_k SKZ_k^2 + 2\sum_{k\neq l} \rho_{k,l} SKZ_k SKZ_l}. \tag{1.3}$$

Formula 1.3 združi kapitalske zahteve za posamezna tveganja, kjer je SKZ_k kapitalska zahteva za solventnost v modulu k, izračunana tako, da združimo kapitalske zahteve za vse njene njene podmodule, ter $\rho_{k,l}$ korelacija med tveganji k in l. Glej [2]. Formula 1.3 upošteva vsa merljiva tveganja, ki so: tveganje neživljenjskih zavarovanj, tveganje življenjskih zavarovanj, tveganje zdravstvenih zavarovanj, tveganje neplačila nasprotne stranke, tržno tveganje, kreditno tveganje in operativno tveganje. Glej [17]. To so moduli, ki jih upoštevamo v formuli 1.3. Podmodul modula tveganja življenjskih zavarovanj je na primer tveganje predčasne prekinitve zavarovanja. Obrestno tveganje predstavlja za ponudnike življenjskih zavarovanj tveganje za njihovo solventnost.

Nenadna sprememba obrestne mere povzroči izgubo lastniškega kapitala (ang. equity capital). Na podlagi te izgube po Solventnosti II določimo obrestno tveganje. V času 0 je del lastniškega kapitala, ki je odvisen od obrestne mere, enak trenutni vrednosti presežkov S_κ, tj.

$$E_0 = \sum_{\kappa=1}^{N} e^{-\kappa r_0(\kappa)} S_\kappa, \tag{1.4}$$

kjer je N največja zapadlost, ki jo obravnavamo, $r_0(\kappa)$ zvezna netvegana obrestna mera z zapadlostjo κ v času 0 in presežek $S_\kappa = A_\kappa - L_\kappa$, kjer je A_κ pričakovan priliv sredstev in L_κ obveznost zavarovalnice z zapadlostjo $\kappa = 1, ..., N$ let. Pri takojšnji spremembi obrestne mere z $r_0(\kappa)$ v $r_l(\kappa)$ se lastniški kapital spremeni v

$$E_{0,l} = \sum_{\kappa}^{N} e^{-\kappa r_l(\kappa)} S_\kappa. \tag{1.5}$$

Za časovno obdobje l gledamo na vektor obrestnih mer $(r_l(\kappa)_{\kappa=\{1,...,N\}})$ kot na stohastični proces. Potem je

$$VaR_{1-\alpha,l} = \rho_\alpha(E_{0,l} - E_0) \tag{1.6}$$

z intervalom zaupanja $1-\alpha$ za obdobje posesti l in $\rho_\alpha(E_{0,l} - E_0)$ je α-kvantil slučajne spremenljivke $E_{0,l} - E_0$. Kapitalska zahteva za obrestno tveganje je definirana kot $VaR_{99.5\%,1leto}$.

Solventnost ponudnikov dolgoročnih finančnih instrumentov je ogrožena v obdobju, ko je obrestna mera nizka, pričakovana življenjska doba pa se povečuje. Življenjske police, prodane v preteklosti z relativno visokim minimalnim letnim donosom, postanejo v obdobju z nizko obrestno mero drage za financiranje. Posebej za evropske države je značilno, da življenjske police zagotavljajo minimalno stopnjo donosa za daljše časovno obdobje. Posledično se bo dobiček ponudnikov življenjskih zavarovanj zmanjševal. Prav tako so zaradi nizkih mer investicije v življenjska zavarovanja, dolgoročne rente itd. manj privlačne. Zavarovalnice se bodo po vsej verjetnosti morale v prihodnosti soočiti z večjimi obveznostmi, kot so pričakovale, predvsem zaradi preveč optimističnih pričakovanj glede obrestne mere in daljše pričakovane življenjske dobe. Srečujejo se s tveganjem dolgoživosti. Prav tako se zavarovalnice, ki ponujajo nizke obrestne mere, srečujejo s tveganjem, da bodo njihove življenjske police, izdane s trenutnimi nizkimi obrestnimi merami postale, manj privlačne v trenutku, ko bodo obrestne mere narasle in se bodo s tem na trgu ponudile priložnosti za investicije z višjim donosom. Poglejmo mešano življenjsko zavarovanje, ki ob dospetju izplača bruto donos e^{Tr_g} in omogoča prekinitev zavarovalne police pred dospetjem. V trenutku prekinitve t zavarovanec prejme θe^{tr_g}, kjer je r_g letna zajamčena obrestna mera in θ "kazenski" faktor za prekinitev zavarovanja, $1-\theta \in (0, 1)$ pa kazen prekinitve zavarovanja (ang. lapse penalty). Trenutna vrednost zavarovanja v času t je enaka $e^{Tr_g-(T-t)r_f}$, pri tem je r_f netvegana obrestna mera. Recimo, da zavarovanec v trenutku t prekine zavarovanje in prejme dogovorjeno vsoto θe^{tr_g} ter to vsoto investira v netvegan vrednostni papir. Vrednost te investicije je enaka θe^{tr_g}. Zavarovancu se v tej situaciji splača prekiniti mešano življenjsko zavarovanje pri pogoju, da je trenutna vrednost prekinitve zavarovanja večja od trenutne vrednosti zavarovanja. Torej, da velja:

$$\theta e^{tr_g} > e^{tr_g-(T-t)r_f}. \tag{1.7}$$

Od tod sledi $\theta > e^{(T-t)(r_g-r_f)}$, torej velja

$$\frac{-\log \theta}{T-t} < r_f - r_g. \tag{1.8}$$

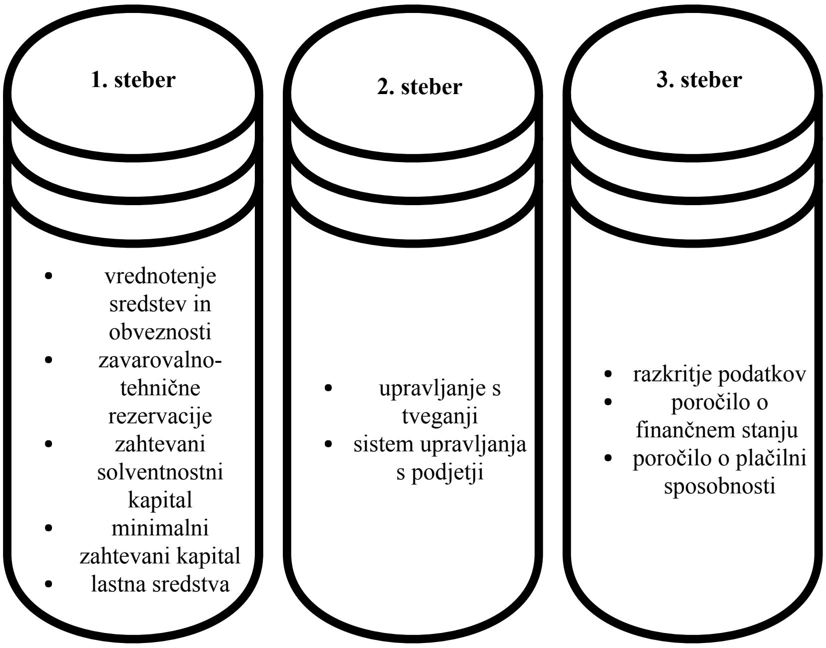
Posledično je optimalna odločitev imetnika zavarovalne police pri dovolj veliki razliki med zagotovljeno obrestno mero in netvegano obrestno mero prekinitev zavarovanja. Imetnik zavarovalne police ima ob prekinitvi zavarovanja ($(1-\theta)e^{tr_g}$) izgube. Starejša kot je zavarovalna polica, večjo izgubo ima imetnik police ob prekinitvi. To pomeni, da se razlika med trenutno vrednostjo zavarovanja ob prekinitvi in trenutno vrednostjo zavarovanja manjša. S tem se manjša tudi verjetnost, da bo imetnik police prekinil zavarovanje. V primeru rasti obrestne mere tako obstaja možnost, da bo velik del lastnikov teh zavarovalnih polic prekinil zavarovanje, kar lahko za zavarovalnice predstavlja tveganje za njihovo likvidnost in solventnost. Od tod sledi, da zaradi rasti obrestne mere obstaja možnost rasti tveganja predčasne prekinitve polic oz. rasti količnika predčasno prekinjenih polic (ang. lapse rates). Če je tveganje za predčasne prekinitve enako $2,75$ %, to pomeni, da je verjetnost, da bo posamezni imetnik zavarovalne police svojo polico predčasno prekinil, enaka $2,75$ %. Prihaja do interakcije med obrestnimi merami, tveganjem predčasne prekinitve, solventnostjo in likvidnostjo zavarovalnic. Na tveganje predčasne prekinitve vplivajo stroški prekinitve zavarovanja (ang. lapse penalty). Pričakujemo, da se bodo z višanjem stoškov prekinitve zavarovanja povečala sredstva zavarovalnice in znižali pričakovani denarni tokovi, ki jih mora zavarovalnica izplačati svojim komitentom. Povišanje stroškov prekinitve zavarovanja bo po vsej verjetnosti znižalo kapitalske zahteve za solventnost. Glej [2]. V obdobju nizkih obrestnih mer ima povišanje stroškov prekinitve zavarovanja pozitiven vpliv na sredstva zavarovalnice ter njeno solventnost. Zmanjša se tveganje za predčasno prekinitev zavarovanja. Na likvidnost zavarovalnice pa nima velikega vpliva. V obdobju rasti obrestnih mer višji stroški prekinitve zavarovanja pozitivno vplivajo na solventnost in likvidnost zavarovalnic. Torej visoki stroški prekinitve zavarovanja pozitivno vplivajo na solventnost zavarovalnic. Na njihovo likvidnost pa nimajo velikega pozitivnega vpliva. Zaradi velike povezanosti zavarovalnic z drugimi finančnimi institucijami lahko njihove težave z likvidnostjo in solventnostjo ogrozijo finančno stabilnost teh institucij. Bralec najde več v $[1, 2, 8]$.

1.2 Okvir Solventnosti II

Evropski zavarovalni sektor je bil v zadnjih letih izpostavljen temeljnim spremembam. Pomankljivosti v nadzornem okvirju Solventnost I so spodbudile evropske politike k spremembi regulacije solventnostnega položaja zavarovalnic. Po Solventnosti I so zahteve glede solventnosti izračunane kot odstotek zavarovalno-tehničnih rezervacij ali pa odstotek matematičnih rezervacij (ang. mathematical reserves), kjer je odstotek odvisen od tega, za kakšno zavarovanje so zahteve izračunane. Podjetje se šteje za solventno, ko njegova razpoložljiva sredstva pokrivajo njegove solventnostne zahteve. Merilo za solventnost podjetja je fiksno razmerje razpoložljivega kapitala nad zahtevanim kapitalom. To razmerje ima več pomankljivosti: s tem razmerjem ne razlikujemo med podjetji z visokim tveganjem in podjetji z nizkim tveganjem. Zaradi pomankljivosti Solventnosti I je Evropska komisija predlagala nov solventnostni okvir, ki je osredotočen na profil tveganja (ang. risk profile) zavarovalnic in pozavarovalnic. Tako sta 25. novembra 2009 Evropski parlament in Evropski svet odobrila direktivo Solventnost II (ang. Solvency II Framrework Directive). Namen Komisije z uvedbo nove direktive je boljša ureditev zavarovalniškega področja in bolj zanesljiva integracija evropskega zavarovalniškega trga ter boljša zaščita imetnikov polic in večja konkurenčnost znotraj zavarovalnega sektorja. Solventnost II omogoča boljšo ureditev na področju zavarovalništva z vpeljavo sistema, ki temelji na tveganju (ang. risk-based system). Kapitalske zahteve definira s pomočjo standardne formule ali pa z notranjim modelom. Pri tem upošteva diverzifikacijo in učinke, ki zmanšujejo tveganje (ang. risk-mitigation effects). Solventnost II stremi k identifikaciji tveganj, s katerimi se podjetja soočajo, in nato k natančni dodelitvi kapitala glede na ugotovljena tveganja. Po Solventnosti II imajo podjetja, ki so izpostavljena večjim tveganjem, večje kapitalske zahteve, kot so jih imela v skladu s Solventnostjo I. Podjetja, ki se izogibajo tveganjem, imajo nižje kapitalske zahteve. Za izračun kapitalskih zahtev se podjetja lahko oprejo na standardno formulo, ki predstavlja splošen pristop, ki so ga zagotovili zakonodajalci, ali pa razvijejo delno ali v celoti notranji model za izračun njihovih kapitalskih zahtev. Izračun kapitalskih zahtev s pomočjo standardne formule poskuša upoštevati vsa materialno kvantificirana tveganja, ki jim je izpostavljeno povprečno podjetje. Zgodi se lahko, da formula ne zajame vseh tveganj, ki jim je izpostavljeno določeno podjetje, saj je standardna formula standardizirana metoda izračuna, zato ni prilagojena posameznemu profilu tveganja določenega podjetja. V takšnem primeru morajo podjetja razviti notranji model za izračun kapitalskih zahtev, kar je bolj zapleteno in posledično podvrženo nadzornemu postopku odobritve z namenom zagotovitve kakovosti in natančnosti notranjega modela. Ali se posamezno podjetje odloči za uporabo standardne formule ali za notranji model, je odvisno od individualnih okoliščin v podjetju.

Celotno uredbo Solventnosti II ureja tako imenovani “Lamfalussy process”, ki je štiristopenjski pristop. Prva stopnja je primarna zakonodaja (ang. primary legislation). To je najvišja raven, ki na splošno predstavlja osnovni okvir s splošnimi pravili. Druga stopnja so izvedbeni akti in delegirani akti (ang. implementing acts and delegated acts). Ti akti so bolj podrobna tehnična pravila, ki jih je postavila Evropska komisija ob upoštevanjem nasvetov s strani EIOPE. Naslednja stopnja je nekje med drugo in tretjo stopnjo. Gre za stopnjo 2.5, kjer so regulativni in izvedbeni tehnični standardi (ang. regulatory and implementing technical standards). Ti standardi ne spadajo pod tretjo stopnjo, saj so pravno zavezujoči in imajo neposreden vpliv na članice Evropske unije. Ne spadajo niti pod drugo stopnjo, saj jih je pripravila EIOPA in ne Evropska komisija. V tretji stopnji so smernice (ang. guidelines), ki so namenjene nacionalnim nadzornikom, s pomočjo katerih zagotovijo dosledno izvajanje pravil med državami članicami Evropske unije. Omenjene smernice je postavila EIOPA in niso pravno zavezujoče, vendar jih morajo nacionalni nadzorniki upoštevati. Če tega ne storijo, morajo to pojasniti EIOPI. Zadnja četrta stopnja je izvrševanje (ang. enforcement). Ko so zgoraj omenjeni predpisi implementirani v članicah Evropske unije, je Evropska komisija odgovorna, da jih članice upoštevajo. Če članice teh pravil ne upoštevajo, lahko Evropska komisija uporabi ukrepe proti članicam.

Solventnost II uporablja pristop treh stebrov (ang. three-pillar approach).



Slika 2: Struktura Solventnosti II

Slika 2 predstavlja tristebrno strukturo Solventnosti II.

1. steber: Kvantitativne zahteve (ang. the quantitative requirements)

   Prvi steber pokriva vse komponente ekonomske bilance stanja (ang. economic balance sheet). Kvantitativne zahteve so določene v zvezi z:

   - vrednotenjem sredstev in obveznosti,
   - zavarovalno-tehničnimi rezervacijami,
   - lastnimi sredstvi,
   - zahtevanim solventnostnim kapitalom (ang. solvency capital requirement) in
   - minimalnim zahtevanim kapitalom (ang. minimum capital requirement).

   Eden izmed glavnih principov je vrednotenje sredstev in obveznosti, ki so ovrednoteni na znesek, za katerega bi jih izmenjale dobro obveščene strani. Za sredstva je njihova vrednost ob prenosu kar njihova tržna vrednost. Zavarovalno-tehnične rezervacije pa so del obveznosti. Na njihovo vrednost ob prenosu moramo gledati kot na trenutno vrednost, ki bi jo morala zavarovalnica plačati, če bi želela takoj prenesti svoje obveznosti s strani zavarovanja na drugo stranko oz. zavarovalnico. Vsota, ki jo mora zavarovalnica plačati, je enaka vsoti najboljše ocene (ang. best estimate) zavarovalno-tehničnih rezervacij in dodatka za tveganje (ang. risk margin), kjer najboljšo oceno zavarovalno-tehničnih rezervacij izračunamo kot verjetnostno-uteženo povprečje (ang. probability-weighted average) prihodnjih denarnih tokov, ki jih diskontiramo s pomočjo časove strukture netvegane obrestne mere. Dodatek za tveganje je enak stroškom kapitala (ang. cost of capital), ki ga zahteva tretja stranka za prevzem obveznosti zavarovalnice. Zahtevani solventnostni kapital je določen kot 99.5 % tvegana vrednost za obdobje enega leta in minimalni zahtevani kapital kot 85 % tvegana vrednost, prav tako za obdobje enega leta od dneva vrednotenja naprej. Bralec najde več v [19]. Lastna sredstva predstavljajo osnovna in dodatna lastna sredstva (ang. ancillary own funds).

2. steber: Kakovostne zahteve (ang. the qualitative requirements)

   Ta steber opisuje zahteve o tem, kako mora biti podjetje organizirano. Za vsa podjetja se zahteva, da imajo vzpostavljen učinkovit sistem obvladovanja tveganj (ang. effective risk management system).

3. steber: Zahteve za poročanje (ang. the reporting requirements)

   Zadnji steber opisuje, katere informacije morajo podjetja razkriti. Z javnim razkritjem podatkov ter zagotovitvijo dodatnih informacij za nadzornike se izboljšuje tržna disciplina med podjetji. Nadzornikom razkritjejo podatke, ki niso javno dostopni. To podjetja naredijo s pomočjo: opisnega poročanja (ang. narrative reporting) in kvantitativnega poročanja (ang. quantitative reporting).

Glavni vir v 1.2 je [10].

2 Netvegana obrestna mera

V tem poglavju bomo najprej predstavili zakonski okvir podatkov in vseh izračunov ter ocen, ki nastopajo pri izpeljavi časovne strukture netvegane obrestne mere za prihodnost, ki jo uporabimo za izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij. Predstavili bomo, kako iz cene vrednostnih paprirjev preberemo obrestno mero in kako napovemo obrestno mero za prihodnost. Obravnavali bomo modele, ki sta jih razvila Nelson in Siegel ter Smith in Wilson. Posvetili se bomo Smith-Wilsonovi metodi, ki jo bomo uporabili za ekstrapolacijo obrestne mere za relevantne finančne instrumente, ki so na voljo na trgu. To metodo uporablja EIOPA.

2.1 Zakonski okvir

EIOPA je eden izmed treh finančnih nadzornih organov (ang. European Supervisory Authorities). Ti tvorijo Evropski sistem finančnih nadzornikov (ang. European System of Financial Supervisors). Ustanovljen je bil zaradi reform v strukturi nadzora finančnega sektorja v Evropski uniji, saj je Evropski parlament pred in v času finančne krize pozval k bolj integriranemu evropskemu nadzoru, ki bo zagotavljalenake pogoje za vse akterje na ravni Evropske unije ter odražal vedno večjo integracijo finančnih trgov v Evropski uniji. Da bi zmanjšali tveganja za mrebitne prihodnje finančne krize so okrepilinadzorni sistem. Več bralec najde v [11]. Slika 3 prikazuje naslovno stran spletne strani EIOPA, na kateri slednja objavlja sprejete tehnične standarde, letna poročila, itd. Na njej je mogoče najti vse o ciljih in o strukturi EIOPE. Več si lahko ogledate na [12].

EIOPA je v skladu z členom 77e(1) direktive Solventnost II postavila tehnične informacije za izračun časovne strukture netvegane obrestne mere, da za zavarovalnice in pozavarovalnice zagotovi skladen izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij. V ta namen je morala sprejeti številne odločitve glede metode, vhodnih podatkov in predpostavk, ki se bodo uporabili pri izračunu časovne strukture netvegane obrestne mere. Pri tem je upoštevala načelo transparentnosti vseh elmentov, ki vstopajo v izračun, možnost replikacije izračunov, tržno doslednost, preudarno oceno vseh tehničnih določb in optimalno uporabo tržnih podatkov, v skladu s političnim dogovorom Direktive 2014/51/EU.

Slika 3: Naslovna stran spletne strani EIOPA

2.1.1 Zakonski okvir izbire ponudnikov tržnih podatkov

Pri izbiri ponudnikov tržnih podatkov se je EIOPA opirala na pravne zahteve o objavljanju konkretnih podatkov o tehničnih informacijah, določenih v členu 77e Solventnosti II. Prav tako je upoštevala, da je zaradi želje po transparentnosti možna popolna sledljivost izračuna in lahko zainteresirani reproducirajo izračune ter da je možno vzpostaviti ustrezen postopek validacije izračuna. Izbrana sta bila dva vira podatkov. S tem je EIOPA poskusila ublažiti operativno tveganje odpovedi ponudnika. EIOPA se je odločila za istega ponudnika podatkov za krivulje izvedenih kreditnih instrumentov in državnih obveznic ter različna ponudnika za donose podjetniških obveznic in privzetih statistik, da bi zmanjšala odvisnost od ponudnikov podatkov in operativno tveganje. Izbrana ponudnika sta razkrita zaradi zahtevane transparentnosti, vendar njuna izbira ne nakazuje njune superiornosti nad drugimi ponudniki tržnih podatkov s strani EIOPE. Izbrana ponudnika sta Bloomberg in Standard & Poors. Tabela 1 prikazuje, kateri podatki so pridobljeni od katerega izmed dveh izbranih ponudnikov. Glej [15].

2.1.2 Zakonski okvir za DLT oceno in zadnjo likvidnostno točko

Struktura netvegane obrestne mora po členu 77a Solventnosti II temeljiti na relevantnih finančnih instrumentih, s katerimi se trguje na širokem, likvidnem in transparantnem trgu (ang. deep, liquid and transparent market) ali krajše DLT trgu. Pristojni nacio-

Tabela 1: Ponudnika tržnih podatkov

	Bloomberg	Standard & Poors
Privzete statistike		x
Izvedeni finančni instrumenti in zamenjave indeksov čez noč (ang. overnight indexed swaps)	x	
Državne obveznice	x	
Obveznice, ki jih ne izda država (danske krite obveznice in Market-IBoxx indices)	x	

nalni organi so naredili DLT oceno za vsako valuto z Evropskega ekonomskega območja na temelju iste metodologije. Prišli so do naslednjih ugotovitev:

(i) skupni konceptualni okvir DLT ocenjevanja ne bi smel temeljiti na strogih pragovih,

(ii) veliko kriterijev je med seboj povezanih,

(iii) trgi v različnih valutah imajo lahko za iste finančne instrumente različne lastnosti,

(vi) DLT ocena je zahtevna in

(v) posledično mora biti frekvenca posodobitev ocene skrbno premišljena.

Nenadne spremembe DLT ocene so malo verjetne, razen v obdobju krize. Bolj verjeten trend v prihodnosti je razvoj trgov ter s tem tudi več obrestnih mer, ki zadoščajo DLT oceni.

Na DLT oceni temelji določitev relevantnih finančnih instrumentov. DLT ocenjevanje poteka posebej za valute z Evropskega ekonomskega območja in posebej za valute, ki niso z Evropskega ekonomskega območja. DLT ocene za relevantne valute bo EIOPA posodobila enkrat letno, le v primeru zaznavanaja velikih sprememb v širini, likvidnosti in transparentnosti trga bo to storila prej. Skupaj s posodobitvijo DLT ocene, posodobijo tudi zadnjo likvidnostno točko. Zadnja likvidnostna točka je zadnje leto, za katero trg ustreza DLT oceni. Za valute z Evropskega ekonomskega območja so pristojni nacionalni organi naredili začetno DLT oceno. EIOPA je nato poskušala zagotoviti homogenost med nacionalnimi ocenami. Obstaja več kriterijev za oceno širine in likvidnosti. Nobenega izmed njih ni mogoče uporabiti na vseh trgih. Zaradi težav z globalno sprejetim kriterijem za DLT oceno se je EIOPA osredotočila na kriterije, s pomočjo katerih ocenjuje kredibilnost tržnih podatkov o obrestnih zamenjavah (ang. interest rate swaps) in državnih obveznic. Izbrani kriteriji so naslednji:

- Razlika med najvišjo ceno, ki jo je kupec pripravljen plačati, in najnižjo ceno, za katero je prodajalec pripravljen prodati, oz. razpon med ponudbo in povpraševanjem (ang. bid-ask spred).
- Število trgovanj v določenem časovnem obdobju oz. frekvenca trgovanja (ang. trade frequency).
- Število virov cenitev.
- Volumen trgovanja (ang. trade volume).
- Kotacija s strani borznikov (ang. trader quotes)/pregledno poročilo borznih trgovcev (ang. dealer surveys).
- Število kotacij borznih trgovcev (ang. dealers quotes) v določenem časovnem obdobju.
- Število borznih trgovcev, ki kotirajo na trgu (ang. dealers quoting).
- Ocena širine trga oz. ocena velikih prodaj na trgu in gibanja cen.
- Pristop presežne količine (ang. residual volume approach) samo za državne obveznice v evrih.

Na podlagi DLT ocene, ki je bila izvedena leta 2015, so določili relevantne finančne instrumente, ki so trenutno v uporabi za valute z Evropskega ekonomskega območja. Tabela 2 prikazuje, kateri finančni instrumenti so uporabljeni za določanje strukture netvegane obrestne mere za posamezne dospelosti in rezultate DLT ocene za nekatere valute iz Evropskega ekonomskega območja. Oznaka O v Tabeli 2 pomeni, da za dano dospelost trg zadošča DLT oceni za državne obveznice. Oznaka I pomeni, da trg za dano dospelost zadošča DLT oceni za izvedene kreditne instrumente. Če ni nobene oznake, to pomeni, da za tisto dospelost trg ne zadošča DLT oceni niti za državne obveznice niti za izvedene kreditne instrumente. Iz Tabele 2 lahko razberemo tudi zadnjo likvidnostno točko za posamezno valuto. Gre za največjo dospelost, pri kateri imamo neprazen vnos v Tabeli 2, za katero lahko izpeljemo netvegano obrestno mero na širokih, likvidnostnih in transprentnih trgih. To ne velja za evro. Zadnja likvidnostna točka za euro je s strani delegiranih aktov (ang. Delegated Regulation) določena na dvajset let.

Tabela 2: Relevantni finančni instrumenti za izpeljavo netvegane obrestne mere za: EUR, GBP, HRK, CHF in HUF

	EUR	GBP	HRK	CHF	HUF
1. leto	I	I	O	I	O
2. leto	I	I		I	O
3. leto	I	I	O	I	O
4. leto	I	I	O	I	O
5. leto	I	I		I	O
6. leto	I	I		I	O
7. leto	I	I		I	O
8. leto	I	I	O	I	O
9. leto	I	I	O	I	O
10. leto	I	I		I	O
11. leto		I		I	
12. leto	I	I		I	
13. leto		I		I	
14. leto		I		I	
15. leto	I	I		I	
16.-19. leto		I			
20. leto	I	I		I	
25. leto		I		I	
30. leto		I			
35., 40., 45. in 50. leto		I			

Npr. za hrvaške kune je zadnja likvidnostna točka devet let. Za madžarski forint pa deset let. Za ostale valute z Evropskega ekonomskega območja bralec najde podatke v [15].

DLT ocena za valute, ki niso del Evropskega ekonomskega območja, temelji na empiričnih dokazih. Za oceno teh dokazov o obnašanju relevantnih obrestnih mer je uporabljen dvotirni pristop, ki vključuje analizo volatilnosti in analizo razpona med povpraševanjem in ponudbo (ang. bid-ask spread). Pri analizi razpona med povpraševanjem in ponudbo je uporabljena tudi aproksimacija Rollove mere (ang. Roll measure). Dvotirni pristop je podprt s kvantitativno, kvalitativno in grafično analizo volatilnosti ter grafično analizo razpona med povpraševanjem in ponudbo s pomočjo Rollove mere. Pri analizi volatilnosti je analizirano obnašanje obrestnih mer za vsako zapadlost in valuto, ki ni del Evropskega ekonomskega območja za obdobje preteklih 105 delovnih dni. Pri tej analizi so uporabljene:

- trenutne brezkuponske obrestne mere (ang. zero-cupon spot rates),
- obrestne mere izvedenih kreditnih instrumentov (ang. swap rates) in
- struktura enoletne terminske obrestne mere (ang. 1-year forward rate term structure).

Pri analizi je za vsako valuto in zapadlost posebej upoštevana tako vrednost obrestnih mer kot tudi obnašanje volatilnosti, ki je izračunana za zadnjih 21 dni. Formulo, po kateri je izračunana volatilnost, najde bralec v [15]. Ker pri analizi uporabimo podatke za 105 delovnih dni, za prvih 21 dni ni mogoče izračunati volatilnosti, saj nimamo na voljo zadostnega števila podatkov. Torej je volatilnost izračunana od 22. dneva naprej v vzorcu stopetih delovnih dni, ki nastopajo v analizi. Pri tej analizi so uporabljeni in grafično predstavljeni naslednji trije testi:

1. Pri prvem testu je opazovano obnašanje stopnje obrestne mere za določeno zapadlost in njene enaindvajsetdnevne volatilnosti v danem obdobju stopetih delovnih dni.
2. Cilj drugega testa je zaznava grbin in vdolbin v strukturi opazovane obrestne mere za določeno zapadlost v primerjavi s sosednjimi zapadlostmi.
3. Tretji test se uporablja za analizo oz. primerjavo med valuto, ki ni del Evropskega ekonomskega območja, in valuto, ki je del Evropskega ekonomskega območja, za katero je že bila izpeljana DLT ocena. Primerjava se izpelje za valuti, med katerima obstaja določena relacija, in sicer z namenom potrditve, da je obnašanje obrestne mere valute, ki ni del Evropskega ekonomskega območja, dovolj podobno obnašanju njene vrstnice z Evropskega ekonomskega območja.

Direktna analiza razpona med povpraševanjem in ponudbo je izpeljana za valute pri daljših zapadlostih, za katere je potrjena DLT ocena trga. V ta namen so pridobljeni podatki za naslednje mere za obdobje enaindvajsetih in štiriinšestdesetih delovnih dni pred referenčnim datumom, ki jih uporabimo pri analizi razpona med povpraševanjem in ponudbo. Te mere so:

- Mediana razpona med povpraševanjem in ponudbo.
- 80. percentil razpona med povpraševanjem in ponudbo.
- Maksimalni razpon med povpraševanjem in ponudbo.

- Enostavno povprečje razpona med povpraševanjem in ponudbo.
- Razpon med povpraševanjem in ponudbo za referenčni datum.
- Število dni z ničelnim razponom med povpraševanjem in ponudbo.

Pri analizi razpona med ponudbo in povpraševanjem s pomočjo Rollove mere pa EIOPA upošteva dnevno Rollovo mero, pri kateri uporablja obdobje enaidvajsetih dni za izračun kovariance.

Definicija 2.1. Rollova mera volatilnosti je definirana kot

$$Roll_t = 2\sqrt{-\widehat{cov}(r_i, r_{i-1})},$$

kjer je t časovno obdobje, za katero se mera izračuna, ter r_i razlika med dvema zaporednima donosoma v časovnem obdobju t, ki jo izračunamo kot $r_i = cena_i - cena_{1-i}$. Če je kovarianca pozitivna, potem je mera enaka nič. Kovarianco ocenimo za obdobje t z običajno formulo za oceno kovariance.

Pri določenih pogojih je razmerje med povpraševanjem in ponudbo enako zgoraj definirani Rollovi meri. Za analizirano obrestno mero velja, da večja kot je njena vrednost Rollove mere, manjša je njena likvidnost.

Tudi pri kvantitativni analizi se je EIOPA želela izogniti strogim mejam za meritve, zato je opazovala njihovo obnašanje za obdobje stopetih dni in ne za specifičen datum. Nekatere izmed teh statistik so:

- Število dni, za katere podatki niso na voljo.
- Mediana brezkuponskih obrestnih mer za obdobje stopetih dni.
- Zadnja izračunana Rollova mera.
- Zadnja izračunana enaindvajsetdnevna volatilnost v obdobju stopetih dni.

Ostale statistike bralec najde v [15]. Če zgoraj opisana analiza za dano valuto in zapadlost ne da prepričljivih rezultatov glede DLT ustreznosti trga, potem pripadajoče obrestne mere ne upoštevamo. Informacije o DLT oceni za valute, ki niso del Evropskega ekonomskega območja in finančne instrumente, na podlagi katerih temelji struktura netvegane obrestne mere, bralec najde v [15]. Z DLT oceno je posledično določena tudi zadnja likvidnostna točka. Tabela 3 prikazuje zadnje likvidnostne točke za ameriški dolar, ruski rubelj, avstralski dolar in kanadski dolar. Podatke o ostalih likvidnostnih točkah najdete v [15].

Tabela 3: Zadnje likvidnostne točke za: USD, RUB, AUD in CAD

Valuta	Zadnja likvidnostna točka
USD	50 let
RUB	10 let
AUD	30 let
CAD	30 let

2.1.3 Zakonski okvir za prilagoditve kreditnega tveganja in prilagoditve valutnega tveganja

Evropska unija teži k razvoju bolj transparentnih finančnih trgov za netvegane finančne instrumente. Izračun prilagoditve kreditnega tveganja za valute na trgih izvedenih kreditnih instrumentov in čez noč izvedenih kreditnih instrumentov (ang. overnight swaps), ki zadoščajo DLT zahtevam, določajo delegirani akti. EIOPA je razvila poseben kriterij za valute, katerih struktura obrestne mere temelji na državnih obveznicah ali za katere trg izvedenih kreditnih instrumentov ne zadošča DLT zahtevam. Izvedeni kreditni instrument (ang. swap) je pogodba med dvema strankama o zamenjavi bodočih denarnih tokov. Najpogosteje gre za menjavo spreminjajoče obrestne mere za fiksno obrestno mero. Glej [22]. Zamenjava indeksov čez noč (ang. overnight index swap) je obrestna zamenjava (ang. interest rate swap), pri kateri gre za menjavo čeznočne obrestne mere (ang. overnight rate) za fiksno obrestno mero. Glej [16]. Izračun prilagoditve kreditnega tveganja poteka v skladu s členom 45 delegiranih aktov in uvodno izjavo 20 (ang. recital 20) ter obravnava tri različne primere. Prilagoditev kreditega tveganja je vzporedni premik tržnih obrestnih mer navzdol za zapadlosti do zadnje likvidnostne točke.

V prvem primeru struktura netvegane obrestne mere temelji na obrestnih merah izvedenih kreditnih instrumentov, pri katerih relevantna obrestna mera zamenjave indeksov čez noč (ang. overnight index swap) zadošča DLT oceni. Kako se v tem primeru izračuna prilagoditev kreditnega tveganja, določa člen 45 delegirahih aktov. Pri tem velja dogovor, da je zapadlost obrestne mere zamenjave indeksov čez noč, ki jo uporabimo za izpeljavo prilagoditve kreditnega tveganja, skladna z dospelostjo spreminjajočih se denarnih tokov (ang. floating legs) izvedenih kreditnih instrumentov, ki jih uporabimo za izpeljavo časovne strukture netvegane obrestne mere. Za obrestne mere zamenjave indeksov čez noč v evrih uporabimo trimesečno obrestno mero. Manjkajoče podatke za ponujene medbančne obrestne mere ali relevantne obrestne mere zamenjav indeksov čez noč nadomestimo s pomočjo linearne interpolacije in ravne (ang. flat) ekstrapolacije. DLT zahteva se šteje kot neizpolnjena, če za eno ali obe obrestni meri zamenjave indeksov čez noč ali obrestne mere za izvedene kreditne instrumente manjka več kot 20 % podatkov prejšnjega leta. V tem primeru za izračun prilagoditve kreditnega tveganja upoštevamo tretji primer izračuna, ki je predstavljen v nadaljevanju.

V drugi primer spadajo valute z Evropskega ekonomskega območja, ki ne spadajo v prvi primer. Zanje je določeno, da je njihova prilagoditev kreditnega tveganja enaka kot za evro. To ne velja za norveške krone, saj je zanje upoštevana prilagoditev kreditnega tveganja za švedske krone.

V tretji primer spadajo valute, ki ne zadoščajo pogojem iz prvih dveh primerov. V tem primeru se za izbrano valuto izračuna razmerje med vsoto sedanjih obrestnih mer valute in vsoto sedanjih obrestnih mer za ameriški dolar. Obe vsoti izračunamo za zapadlosti od enega do desetih let. Pri tem izračunu upoštevamo samo zapadlosti, ki zadoščajo DLT oceni za izbrano valuto v števcu in ameriški dolar. Če je vsota v imenovalcu enaka nič ali negativna, je prilagoditev kreditnega tveganja določena na 35 baznih točk. Zgornje razmerje uporabimo za prilagoditev kreditnega tveganja za ameriški dolar ter nato upoštevamo še interval med desetimi in petintridesetimi baznimi točkami, ki ga določa člen 45 delegiranih aktov ter tako izpeljemo prilagoditev kreditnega tveganja za izbrano valuto. V zadnjem koraku izračuna kreditnega tveganja prilagoditev zaokrožimo na najbližjo celoštevilsko bazno točko.

Prilagoditev kreditnega tveganja za obrestne mere izvedenih kreditnih instrumentov je v vseh zgornjih primerih omejena z intervalom od desetih baznih točk do petintridesetih baznih točk. Prav tako v zadnjem koraku izračuna prilagoditev kreditnega tveganja zaokrožimo na najbližjo celoštevilsko bazno točko.

Člen 48 v delegiranih aktih določa, kako se izračuna prilagoditev kreditnega tveganja za valute, vezane na evro. Takšni valuti sta bolgarski lev in danska krona. Po členu 48 delegiranih aktov je struktura netvegane obrestne mere za valute, vezane na evro, enaka dolgoročni strukturi za evro, ki je prilagojena valutnemu tveganju. Prilagoditev valutnega tveganja ustreza stroškom varovanja za tveganje, da se bo vrednost naložbe v valuti, ki je vezana na evro, zmanjšala pri denominaciji v evro. Zaradi spremembe menjalnega tečaja med valuto, vezano na evro, in evrom. Formula za izračun prilagoditve valutnega tveganja je izpeljana iz tega, da stroški varovanja za valutno tveganje ustrezajo stroškom zagotavljanja primernih lastnih sredstev za kritje zahtevanega solventnostnega kapitala za valutno tveganje. Izračun zahtevanega solventnostnega kapitala za valutno tveganje temelji na predpostavki, da obveznosti zvišujejo valutno tveganje ter da zmožnost absorbiranja izgub zmanšuje valutno tveganje. Iz produkta dodatka za tveganje (ang. risk margin) in razmerja med zahtevanim solventnostnim kapitalom za valutno tveganje in celotnim zahtevanim solventnostnim kapitalom je izpeljan strošek kapitala za kritje zahtevanega solventnostnega kapitala za valutno tveganje. Le ta se prevede v diskontirano obrestno mero, ko ga delimo z obdobjem trajanja zavarovalno-tehničnih rezervacij. Formula za prilagoditev valutnega tveganja se glasi:

$$PrilagoditevValutnegaTveganja = -k \cdot \frac{NO}{ZSK(0)} \cdot \frac{ZAI}{Trajanje} \cdot \frac{MT}{ZTR}. \tag{2.1}$$

NO je najboljša ocena (ang. best estimate), MT označuje dodatek za tveganje, ZAI pa razmerje zmožnosti absorbiranja izgub (ang. loss-absorbing capacity) zavarovalno-tehničnih rezervacij in $ZSK(0)$. $ZSK(0)$ je trenutni zahtevani solventnosti kapital (ang. Solvency Capital Requirement), uporabljen za izračun dodatka za tveganje. ZTR označuje zavarovalno-tehnične rezervacije, $Trajanje$ označuje spremenjeno trajanje zavarovalno-tehničnih rezervacij, k pa je faktor prilagoditve valutnega tveganja za menjalni tečaj relevantne valute za evro.

Tabela 4 prikazuje trenutno prilagoditev valutnega tveganja za bolgarske leve in danske krone. Glej [15].

Tabela 4: Trenutna prilagoditev valutnega tveganja za: BGN in DKK

Valuta	Prilagoditev valutnega tveganja
BGN	5 bt
DKK	1 bt

Poleg prilagoditve kreditnega tveganja upoštevamo tudi prilagoditev valutnega tveganja in to na isti način kot prilagoditev kreditnega tveganja. Izračun prilagoditve valutnega tveganja poteka z upoštevanjem obveznosti zavarovalnic in pozavarovalnic, ki so denominirane v relevantni valuti. Prilagoditev valutnega tveganja za zavarovalnice in pozavarovalnice mora biti ista. Posledično je ocenjena povprečna prilagoditev za vsa podjetja. S pomočjo formule 2.1 bo EIOPA letno nadzirala prilagoditev valutnega tveganja. Če pride do bistvene razlike med rezultatom formule 2.1 in do tedaj uporabljeno prilagoditvijo, bo konec januarja objavila posodobitve.

2.1.4 Zakonski okvir točke konvergence

Za evro je s strani delegiranih aktov določena štiridesetletna perioda konvergence in zadnja likvidnostna točka 20. let. Za druge valute razen evra, je uporabljena metoda, ki šteje za najbolj stabilno in na katero ima stroka najmanjši vpliv. Po tej metodi je točka konvergence, določena kot maksimum med (zadnja likvidnostna točka$+40$) in 60 let za druge valute, razen evra. Maksimum med 40 in (60 − zadnja likvidnostna točka) let pa je enak periodi konvergence. Hitrost konvergence (ang. convergence speed) je odvisna od parametra α. Parameter α je določen kot najnižja vrednost, ki določa časovno strukturo, ki v točki konvergence doseže toleranco konvergence končne obrestne mere. Toleranca konvergence končne obrestne mere je določena na eno bazno točko, spodnja meja α na $0,05$. Po uvodni izjavi (ang. recital) 30 v Omnibus II Direktivi je pri ustrezni utemeljitvi mogoče upoštevati oz. uporabiti poseben primer izpeljave periode konvergence. Takšen primer je švedski trg državnih obveznic. Konvergenčna perioda za švedske krone je s strani EIOPE določena na 10 let.

2.1.5 Zakonski okvir končne obrestne mere

Končna obrestna mera je izračunana enkrat letno in posodobljena na začetku naslednjega leta. Ta posodobitev oz. sprememba končne obrestne mere je omejena. Do konca marca vsako leto napovejo posodobitve končnih obrestnih mer. Devet mesecev po napovedi jih EIOPA uporabi za izračun časovne strukture netvegane obrestne mere za prvi januar naslednjega leta. Sprememba končne obrestne mere je omejena z naslednjm pravilom:

$$UFR^o_m = \begin{cases} UFR^o_{m-1} + 15bp & \text{če } UFR_m \leq UFR^o_{m-1} + 15bp \\ UFR^o_{m-1} - 15bp & \text{če } UFR_m i \leq UFR^o_{m-1} - 15bp \\ UFR^o_{m-1} & \text{sicer} \end{cases}, \tag{2.2}$$

kjer je UFR_m končna obrestna mera za leto m pred omejitvijo letne spremembe, UFR^o_m pa je končna obrestna mera za leto m po omejitvi letne spremembe. UFR^o_{m-1} je končna obrestna mera za leto $m-1$ po omejitvi letne spremembe.

Za vsako valuto posebej je končna obrestna mera enaka vsoti pričakovane realne obrestne mere in pričakovani stopnji inflacije. Pri tem je pričakovana stopnja inflacije specifična za vsako valuto posebej, v nasprotju s pričakovano realno obrestno mero, ki je enaka za vsako valuto. Pričakovana realna obrestna mera je aritmetično povprečje letnih obrestnih mer od leta 1961 do zadnjega leta pred rekalkulacijo končne obrestne mere.

Definicija 2.2. Pričakovano realno obrestno mero R izračunamo kot:

$$R = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} r_{1960+i}, \tag{2.3}$$

kjer je k število let od leta 1960 in r_{1960+i} letna obrestna mera za leto $1960 + i$.

Pri tem je letna obrestna mera izračunana kot aritmetična sredina letnih obrestnih mer Belgije, Francije, Nemčije, Italije, Združenih držav Amerike, Velike Britanije in Nizozemske. Za vsako navedeno državo in leto je letna obrestna mera izračunana kot:

$$\text{(kratkoročna nominalna obrestna mera} - \text{stopnja inflacije)}/(1 + \text{stopnja inflacije}). \tag{2.4}$$

Podatki za kratkoročno nominalno obrestno mero so pridobljeni iz Letne makroekonomske baze podatkov (AMECO) in stopnje inflacije iz baze podatkov Organizacije za gospodarsko sodelovanje in razvoj (OECD). Pričakovana obrestna mera je nato zaokrožena na celih pet baznih točk po naslednjem pravilu: če je pričakovana obrestna mera nižja od zaokrožene pričakovane obrestne mere za prejšnje leto, potem pričakovano obrestno mero zaokrožimo navzgor. V primeru, ko je pričakovana obrestna mera višja od zaokrožene pričakovane obrestne mere za prejšnje leto, jo zaokrožimo navzdol.

Za pričakovano stopnjo inflacije veljajo naslednje smernice. Za pričakovano stopnjo inflacije za valute, za katere je centralna banka napovedala ciljno stopnjo inflacije (ang.inflation target), velja sledeče:

1. Če je ciljna stopnja inflacije ≤ 1 %, potem je pričakovana stopnja inflacije enaka 1 %.
2. Če je ciljna stopnja inflacije > 1 % in < 3 %, potem je pričakovana stopnja inflacije enaka 2 %.
3. Če je ciljna stopnja inflacije ≥ 3 % in < 4 %, potem je pričakovana stopnja inflacije enaka 3 %.
4. Če je ciljna stopnja inflacije ≥ 4 %, potem je pričakovana stopnja inflacije enaka 4 %.

Če centralna banka ne določi ciljne stopnje inflacije, ampak poskuša obdržati stopnjo inflacije znotraj določenega intervala, potem vzamemo središče tega intervala ter uporabimo zgornje pravilo za določitev pričakovane stopnje inflacije glede na to središče. V primeru valut, za katere centralna banka nima nobenega cilja za stopnjo inflacije, je pričakovana stopnja inflacije določena na 2 %, pri čemer pretekle izkušnje in projekcija za inflacijo jasno nakazujejo, da bo dolgoročno pričakovana inflacija valute za najmanj 1 % nižja ali višja od privzetih 2 %, pričakovana stopnja inflacije pa bo izbrana v skladu s temi indikatorji in zaokrožena navzdol na celoštevilski procent. Pretekle izkušnje so ocenjene v primerjavi z desetletnim povprečjem stopenj inflacije, projekcija stopenj inflacije pa je izpeljana na podlagi avtoregresijskega modela drseče sredine (ang. autoregressive-moving-average model).

Opisani postopek izpeljave končne obrestne mere se je začel uporabljati letošnje leto. Končna obrestna mera, izračunana po opisanem pravilu, je uporabljena prvič za izračun časovne strukture netvegane obrestne mere za 1. 1. 2018, pri čemer je zaokrožena pričakovana realna obrestna mera enaka $2,2$ %. Končna obrestna mera za evro je $4,2$ % torej je pričakovana stopnja inflacije za evro enaka 2 %. Več bralec najde v [15].

2.2 Določanje obrestne mere

Letno obrestno mero lahko vpeljemo kot letni obrestovalni faktor. Naj bo r letna obrestna mera. Potem je $R = 1+r$ letni obrestni faktor, zvezna jakost obresti je enaka $\rho = \ln(1+r)$. Pri tem je obrestna mera lahko tudi negativna, vendar mora veljati, da je $r > -1$ ali pa $R > 0$. Za jakost obresti ρ ni omejitve, zato je primeren za modeliranje. Če je jakost obresti ρ konstantna, je sedanja vrednost ene enote, ki bo izplačana čez k let, enaka

$$p(k) = e^{-k\rho}. \tag{2.5}$$

Jakost obresti ρ je običajno odvisna od zapadlosti, zato bomo analizirali trenutno vrednost s spreminjajočo jakostjo. Formulo za funkcijo jakosti donosa (ang. yield intensity function) izpeljemo iz formule

$$p(k) = e^{-k\cdot y(k)}, \tag{2.6}$$

kjer je $y(k)$ spreminjajoča se jakost obresti. Od tod sledi funkcija jakosti:

$$y(k) = -\frac{\log p(k)}{k}. \tag{2.7}$$

Funkcijo donosa jakosti lahko zapišemo kot povprečje terminskih funkcij (ang. forward function):

$$y(k) = \frac{1}{k}\int f(x)dx, \tag{2.8}$$

kjer je $f(k)$ terminska funkcija jakosti (ang. forward intensity function), ki meri spremembo trenutne vrednosti:

$$f(k) = \frac{-p'(k)}{p(k)}. \tag{2.9}$$

Prav tako za terminsko krivuljo (ang. forward curve) in krivuljo donosa velja:

$$y(0) = f(0). \tag{2.10}$$

Trenutna jakost obrestne mere (ang. zero spot intensity) ter končna jakost obrestne mere (ang. ultimate forward intensity) pa sta enaki

$$\lim_{v\to\infty} y(v) = \lim_{v\to\infty} f(v). \tag{2.11}$$

Bralec več najde v [15].

Bistvo vrednotenja trga in varovanja (ang. hedging) lahko predstavimo z naslednjo strategijo. Recimo, da moramo v prihodnosti v času m izplačati enoto valute. Tržna vrednost te obveznosti je enaka vrednosti brezkuponske obveznice, ki v času m izplača enoto valute. Torej bomo z nakupom te brezkuponske obveznice lahko v prihodnosti v trenutku m poravnali svoje obveznosti, ne glede na to kaj se bo v prihodnosti dogajalo z obrestnimi merami. Teoretično, če imamo v prihodnosti več obveznosti z različnimi dospelostmi, le te lahko pokrijemo z nakupom brezkuponskih obveznic z istimi dospelostmi. Pri tem se srečamo s problemom, da za daljše zapadlosti nimamo na voljo dovolj velikega števila obveznic, s pomočjo katerih bi ocenili trenutno vrednost obveznosti v teh zapadlostih. Zato potrebujemo ekstrapolacijske metode, da lahko obveznosti z daljšimi zapadlostmi ocenimo s pomočjo modela. Ena izmed teh metod je Smith-Wilsonova metoda. Bralec več najde v [6].

2.2.1 Relacija med trenutno obrestno mero in terminsko obrestno mero

Na trenutno netvegano obrestno mero (ang. spot rate) za dano zapadlost T lahko gledamo kot na donos netvegane brezkuponske obveznice z isto zapadlostjo. Na terminsko obrestno mero lahko gledamo kot na obrestno mero, implicirano s trenutno obrestno mero za določeno časovno obdobje v prihodnosti. Pri letnem diskretnem obrestovanju razmerje med trenutno obrestno mero in terminsko obrestno mero ponazarja naslednja formula:

$$\begin{aligned}(1+r_T)^T &= (1+r_{T-1})^{T-1}(1+\tilde{r}(T-1,T))\\ &= (1+r_{T-2})^{T-2}(1+\tilde{r}(T-2,T-1))(1+\tilde{r}(T-1,T))\\ &= (1+r_{T-i})^{T-i}(1+\tilde{r}(T-i,T-i+1))\cdots(1+\tilde{r}(T-1,T))\\ &= (1+\tilde{r}(0,1))(1+\tilde{r}(1,2))\cdots(1+\tilde{r}(T-1,T)),\end{aligned}$$

kjer je r_j trenutna obrestna mera z zapadlostjo j in $\tilde{r}(j-1,j)$ terminska obrestna mera za obdobje od konca $j-1$ leta do konca leta j za $j=1,\ldots,T$. Pri zveznem obrestovanju pa je relacija sledeča:

$$\begin{aligned}e^{T\delta_T} &= e^{(T-1)\delta_{T-1}}e^{\tilde{\delta}(T-1,T)}\\ &= e^{(T-i)\delta_{T-i}}e^{\tilde{\delta}(T-i,T-i+1)}e^{\tilde{\delta}(T-i+1,T-i+2)}\cdots e^{\tilde{\delta}(T-1,T)}\\ &= e^{\tilde{\delta}(0,1)}e^{\tilde{\delta}(1,2)}\cdots e^{\tilde{\delta}(T-2,T-1)}e^{\tilde{\delta}(T-1,T)},\end{aligned}$$

kjer je δ_i zvezna trenutna obrestna mera z zapadlostjo i, $e^{\tilde{\delta}(i-1,i)}$ je terminska obrestna mera za obdobje od konca leta $i-1$ do konca leta i za $i=1,\ldots,T$. Bralec več najde v [14].

2.3 Ekstrapolacija v prihodnost

S pomočjo ekstrapolacijske metode želimo napovedati obrestno mero preko zadnje zapadlosti, ki jo imamo na voljo. Pristop, ki ga uporablja večina ekstrapolacijskih metod, temelji na funkciji cene $P(t)$ (ang. price function). Pri tem predpostavljajo, da je funkcija cene znana za končno število zapadlosti. Najpogosteje je uporabljena funkcija s k parametri za funkcijo cene, za krivuljo terminske obrestne mere ali pa krivuljo trenutne obrestne mere (ang. spot rate curve). V naslednjem koraku pri nekaterih metodah parametre iz prvega koraka ocenimo s pomočjo minimiziranja vsote kvadratov razlik med ocenjenemi podatki in tržnimi podatki za vsak trenutek, za katerega so tržni podatki na voljo. Pri ostalih metodah pa je zastavljenih k enačb, iz katerih izračunamo parametre. Te enačbe so zastavljene tako, da ima funkcija cene večino naslednjih željenih lastnosti. Zaželjeno je, da je funkcija cene pozitivna in strogo padajoča, da ima v času $t = 0$ vrednost 1, da zajame vse dane vhodne podatke ter je do neke stopnje gladka in njene vrednosti konvergirajo proti nič za velike t. Pri nekaterih metodah je izpeljana časovna struktura netvegane obrestne mere ocenjena s pomočjo enega pristopa za vse zapadlosti, tako za interpolacijo kot za ekstrapolacijo. Pri drugih metodah sta uporabljena dva pristopa: prvi za tekoči del časovne strukture oz. interpolacijo ter drugi za ekstrapolirani del časovne strukture. Nelson-Siegelov model je primer modela, pri katerem je uporabljen isti pristop skozi celotno strukturo. Bralec več najde v [14].

Milton Friedman je eden izmed prvih, ki je prepoznal potrebo po varčnem modelu za krivulje donosov (ang. yield curves), s pomočjo katerega so krivulje donosov opisane bolj kompaktno z manjšim številom parametrov. Takšen model vključuje funkcijo povpraševanja (ang. demand function), grafični prikaz ter preizkušanje teorij o časovni strukturi obrestne mere. Sledilo mu je več raziskovalcev, ki so se ukvarjali z razvojem različnih modelov aproksimacije krivulj donosa s pomočjo različnih parametrov. Pri tem so se srečevali z različnimi težavami pri napovedih terminske obrestne mere zunaj vzorca, tj. ekstrapolaciji terminske obrestne mere za prihodnost. Struktura dolgoročnih obrestnih mer in zapadlosti določa obliko krivulj donosov. Ta je monotona, v S-obliki ali pa izbočena (ang. humped). Te tipične oblike krivulj donosov generirajo rešitve diferencialnih enačb, kar je spodbudilo njihovo uporabo. Rešitve diferencialnih enačb, so terminske obrestne mere, napovedane za prihodnost. Naj bo $r(m)$ terminska obrestna mera za zapadlost m. Potem je ta po zgoraj navedenem enaka rešitvi diferencialne enačbe drugega reda

$$r(m) = a + be^{(-m/\tau_1)} + ce^{(-m/\tau_2)}. \tag{2.12}$$

Rešitev diferencialne enačbe ima realne in različne korene. Začetni pogoji določajo a, b in c. τ_1 in τ_2 sta časovni konstanti. Vrednosti b in c določata obliko krivulje $r(m)$.

Funkcijo donosa $y(m)$, ki je enaka povprečju terminskih obrestnih mer (ang. average of the forward rates), zapišemo kot:

$$y(m) = \frac{1}{m}\int_0^m r(x)dx. \tag{2.13}$$

Ta model se je izkazal za ne posebej primernega. Pojavil se je problem prevelikega števila parametrov, na kar nakazuje dejstvo, da pri uporabi standardne opreme za ocenjevanje parametrov nelinearnih modelov, ta ne konvergira. Uporabljen je bil drugi model, ki generira zahtevane oblike krivulj, njegova rešitev pa ima vse korene enake. Rešitev se glasi:

$$r(m) = a + be^{(-\frac{m}{\tau})} + c((\frac{m}{\tau}e^{(-\frac{m}{\tau})}). \tag{2.14}$$

Od tod potem sledi, da je:

$$\begin{aligned} y(m) &= \frac{1}{m}\int_0^m r(x)dx \\ &= \frac{1}{m}\int_0^m (a + be^{(-\frac{m}{\tau})} + c((\frac{m}{\tau}e^{(-\frac{m}{\tau})}))dx \\ &= \frac{1}{m}([ax - e^{-x/\tau}(b\tau + c(\tau + x))]|_0^m) \\ &= \frac{1}{m}(am + b(\tau - \tau e^{(-m/\tau)} + c(\tau - e^{m/\tau}(m+\tau))) \\ &= a + \frac{\tau}{m}(b+c)(1 - e^{-m/\tau}) - ce^{m/\tau}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Torej je $y(m)$ omejena navzgor z a, ko se m veča, in navzdol z $a+b$, ko se m zmanšuje. Posledično enako velja za $r(m)$, saj je $y(m)$ povprečje funkcij terminskih obrestnih mer. Naj bo $a = 1$, $a + b = 0$ in $\tau = 1$. Potem velja:

$$y(m) = 1 - (1-c)(1-e^{-m})/m - ce^{-m}. \tag{2.16}$$

Oblika krivulje $y(m)$ je torej odvisna od enega samega parametra c. Glede na različne vrednosti parametra c zavzame krivulja monotono obliko, S-obliko ali pa izbočeno (ang. humped) obliko. Glede na razpon krivulj, ki so na voljo, je postavljena naslednja hipoteza. Ta predpostavlja, da lahko s postavljenim modelom zajamemo razmerje med donosom in zapadlostjo ter pri tem ni potrebno uporabiti zapletenejših modelov, ki vsebujejo večje število parametrov. Če pogledamo model 2.12, lahko interpretiramo koeficiente a, b in c kot mere za kratkoročne, srednjeročne in dolgoročne komponente terminske obrestne mere. Pri tem prispevek dolgoročne komponente terminske obrestne mere nakazuje a. Prispevek srednjeročne terminske obrestne mere c, prispevek kratkoročne terminske obrestne mere pa parameter b. Opisani model se imenuje Nelson-Sieglov model. Več o njem najdete v [7]. Ta model sta nadgradila Diebold in Li z namenom napovedovanja za vsak čas in množico donosov. Pri tem sta se opirala na

Nelson-Sieglov model, po katerem je krivulja terminske obrestne mere enaka:

$$r_t(m) = \beta_{1t} + \beta_{2t}e^{-\alpha_t m} + \beta_{3t}\alpha_t e^{\alpha_t m}. \tag{2.17}$$

Tu je m zapadlost. Na krivuljo $r_t(m)$ se lahko gleda kot na Laguerrovo funkcijo plus konstanto. Pripadajoča krivulja donosa je potem enaka:

$$y_t(m) = \beta_{1t} + \beta_{2t}\frac{1 - e^{-\alpha_t m}}{\alpha_t m} + \beta_{3t}\Big(\frac{1 - e^{-\alpha_t m}}{\alpha_t m} - e^{-\alpha_t m}\Big). \tag{2.18}$$

Pri tem sta Diebold in Li uporabila novo interpretacijo koeficientov kot latentni nivo (ang. latent level), naklon (ang. slope) ter faktor ukrivljenosti (ang. curvature factor). Več bralec najde v [3]. Smith in Wilson sta uporabila obraten pristop za napovedovanje obrestne mere. Osredotočila sta se na funkcijo trenutne obrestne mere (ang. present value function), katere bistvo je Wilsonova funkcija, ki jo bomo predstavili v nadaljevanju. Iz funkcije trenutne vrednosti sta nato izpeljala donos in terminsko funkcijo jakosti (ang. forward intensity function).

EIOPA je uporabila prav Smith-Wilsonovo metodo za ekstrapolacijo obrestne mere. Smith-Wilsonova metoda je makroekonomski pristop, ki zagotavlja stabilno metodo za ekstrapolacijo krivulje donosa. Omogoča točno prilagajanje začetni strukturi, ki temelji na končni množici vhodnih podatkov. Cilj metode je stabilna in robustna ekstrapolirana krivuja donosov, ki odraža trenutne pogoje na trgu ter pričakovano nepredvidljivo obnašanje časovne strukture obrestne mere v prihodnosti. Glej [14]. Standardni problem aproksimacije (ang. fitting) krivulje donosa, s katerim sta se ukvarjala Smith in Wilson, temelji na množici cen za več obveznic v določenem trenutku. Predpostavimo, da je na trgu obveznic na voljo k obveznic z različnimi zapadlostmi, ki ponujajo različne kupone. Naj bo m_i tržna cena i-te obveznice z denarnimi tokovi c_{ij} v prihodnjih datumih u_j. Naj bo $P(t)$ cena brezkuponske obveznice v času t. Od tod je definirana časovna struktura kot rešitev naslednjih enačb:

$$m_i = \sum_{j=1}^{M} c_{ij}P(u_j), \tag{2.19}$$

kjer je M zadnji datum, pri katerem ima vsaj ena izmed obveznic izplačilo. Obstaja možnost, da za dane datume ni veliko izplačil, zato nimamo nobenega zagotovila, da je dobljena rešitev smiselna. Zato mora imeti funkcija $P(t)$ naslednje lastnosti, da dobimo racionalno množico rešitev:

- $P(t)$ je gladka funkcija za t ter pozitivna padajoča funkcija.
- $P(0) = 1$ in se približuje ničli za velike t.

Smith in Wilson sta se opirala na naslednji model obrestnih mer, ki implicira obnašanje cen obveznic:

$$P(t) \sim X_0 e^{-wt} + X_1 e^{e^{-(w+\alpha)t}} + \cdots , \tag{2.20}$$

kjer sta:

- w in α konstantni skozi čas in
- X_0 in X_1 se spreminjata skozi čas.

Od tod sta predlagala funkcijo za določanje cene brezkuponske obveznice, ki jo imenujemo Smith-Wilsonova funkcija sedanje vrednosti. Več najde bralec v [9].

Na kratko povzemimo, kako poteka Smith-Wilsonova ekstrapolacija. Recimo, da imamo na voljo n finančnih instrumentov in poznamo njihove cene. Sestavimo lahko n linearnih enačb oz. sistem linearnih enačb, ki ga lahko avtomatično rešimo, nato pa dobljeno rešitev sistema, ki je ocenjena za vse zapadlosti n finančnih instrumentov, vstavimo v Smith-Wilsonovo funkcijo sedanje vrednosti za kateri koli dan čas t. S tem dobimo časovno strukturo netvegane obrestne mere.

2.4 Smith-Wilsonova metoda

Za ekstrapolacijo obrestne mere je v zavarovalništvu uporabljena Smith-Wilsonova metoda. V tem podpoglavju sta glavna vira [14,15]. Metoda je bila uporabljena v zadnjih letih razvoja okvirja Solventnosti II. Z razvojem trga bo EIOPA nadzirala vpliv razvoja na njeno implementacijo. S pomočjo Smith-Wilsonove metode časovno strukturo obrestne mere aproksimiramo z obrestnimi merami relevantnih finančnih instrumentov. Kateri finančni instrumenti so relevantni, določa EIOPA na podlagi zakonskega okvirja, ki smo ga predstavili v 2.1. Smith-Wilsonova metoda je makroekonomski pristop, ki predstavlja stabilno metodo ekstrapolacije krivulje donosa. Prav tako omogoča točno prilagajanje začetni strukturi, ki temelji na končni množici vhodnih podatkov. Izhodni podatek Smith-Wilsonove metode je vrednost Smith-Wilsonove funkcije sedanje vrednosti (ang. Smith-Wilson present value function) oz. diskontni faktor $P(t)$ za $t > 0$. $P(t)$ je tržna vrednost za brezkuponsko obveznico v času vrednotenja, ki ob dospetju t izplača eno enoto valute.

EIOPA je sklenila, da ne bo objavila strukture netvegane obrestne mere za zapadlosti do enega leta, ampak za zapadlosti večje od enega leta, saj instrumenti z zapadlostjo do enega leta niso v vseh primerih izvedeni kreditni instrumenti, poleg tega imajo obrestne mere za krajše obdobje od enega leta zanemarljiv učinek na obrestne mere ekstrapolirane s Smith-Wilsonovo metodo. Posledično imajo tudi zanemarljiv vpliv na dolgoročne zavarovalno-tehnične rezervacije.

Pri Smith-Wilsonovi metodi imamo za vsako množico relevantnih finančnih instrumentov naslednje vhodne podatke:

- vektor
$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$
tržnih cen n finančnih instrumentov za datum vrednotenja,

- vektor
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$
datumov denarnih izplačil finančnih instrumentov do zadnje zapadlosti in

- $m \times n$ matriko
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \cdots & c_{m,n} \end{bmatrix}$$
denarnih tokov oz. izplačila finančnih instrumentov za zgornje datume, kjer je $c_{ij} \geq 0$ za $1 \leq i \leq m$ in $1 \leq j \leq n$. V i-tem stolpcu matrike denarnih tokov $\mathbf{C}$ so denarna izplačila i-tega finančnega instrumenta na dane datume u_j za $j = 1, \ldots, m$.

Jedro Smith-Wilsonove metode je Wilsonova funkcija ter Smith-Wilsonova funkcija sedanje vrednosti, jedro Wilsonove funkcije pa je funkcija $H(i, j)$.

2.4.1 Wilsonova funkcija in Wilsonova matrika

Definicija 2.3. Funkcija $H(i, j)$ je definirana kot:

$$H(i, j) = \alpha \min(i, j) - e^{-\alpha \max(i,j)} \sinh(\alpha \min(i, j)), \tag{2.21}$$

kjer sta i in j zapadlosti v letih, ki jih izračunamo kot število dni, deljenih s $365, 25$. Parameter α je merilo hitrosti konvergence proti asimptotični ravni jakosti končne obrestne mere (ang. ultimate forward intensity).

Funkcijo $H(i,j)$ lahko zapišemo tudi v naslednji obliki:

$$\begin{aligned}
H(i,j) &= \alpha \min(i,j) - e^{(-\alpha \max(i,j))} \sinh(\alpha \min(i,j)) \\
&= \alpha \min(i,j) - e^{-\alpha \max(i,j)} \frac{e^{\alpha \min(i,j)} - e^{-\alpha \min(i,j)}}{2} \\
&= \alpha \min(i,j) + \frac{e^{-\alpha(i+j)} - e^{-\alpha|i-j|}}{2} \\
&= \frac{\alpha(i+j) - \alpha|i-j|}{2} + \frac{e^{-\alpha(i+j)} - e^{-\alpha|i-j|}}{2} \\
&= \frac{\alpha(i+j) + e^{-\alpha(i+j)} - \alpha|i-j| - e^{-\alpha|i-j|}}{2}.
\end{aligned}$$

Funkcija $H(i,j)$ je zvezna v $i=j$. Prvi odvod funkcije $H(i,j)$ glede na j je enak:

$$G(i,j) = \frac{dH(i,j)}{dj} = \begin{cases} \alpha - \alpha e^{-\alpha i} \cosh(\alpha j) & \text{za } j \leq i \\ \alpha e^{-\alpha j} \sinh(\alpha i) & \text{za } i \leq j \end{cases}. \tag{2.22}$$

Torej je funkcija $G(i,j)$ zvezna v $i=j$. Drugi odvod glede na j pa je enak:

$$\frac{d^2H(i,j)}{dj^2} = \begin{cases} -\alpha^2 e^{\alpha i} \sinh(\alpha j) & \text{za } j \leq i \\ -\alpha^2 e^{-\alpha j} \sinh(\alpha i) & \text{za } i \leq j \end{cases} = \alpha^2 H(i,j) - \alpha^3 \min(i,j). \tag{2.23}$$

Tudi drugi odvod je zvezen v točki $i=j$. Definirajmo Wilsonovo funkcjo.

Definicija 2.4. Wilsonova funkcija $W(i,j)$ je definirana kot:

$$W(i,j) = e^{-w(i+j)} H(i,j), \tag{2.24}$$

kjer parameter w označuje končno obrestno jakost (ang. ultimate forward intensity), funkcija $H(i,j)$ je definirana v 2.3.

Funkcija $H(i,j)$ je očitno simetrična, saj velja $H(i,j) = H(j,i)$. Od tod sledi, da je tudi Wilsonova funkcija simetrična in velja $W(i,j) = W(j,i)$. Sedaj lahko s pomočjo Wilsonove funkcije izpeljemo še Wilsonovo matriko, saj so vrednosti Wilsonove funkcije elementi Wilsonove matrike. Torej je definicija Wilsonove matrike sledeča.

Definicija 2.5. Naj bo $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \cdots, v_l]^T$ vektor velikosti $l \times 1$ in $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \cdots, u_n]^T$ vektor velikosti $n \times 1$. Wilsonova matrika vektorjev $\mathbf{v}$ in $\mathbf{u}$ je matrika velikosti $l \times n$, kjer je (i,j)-ti element matrike enak vrednosti Wilsonove funkcije $W(v_i, u_j)$, definirane v 2.4 za $1 \leq i \leq l$ in $1 \leq j \leq n$.

$$\mathbf{W}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} W(v_1,u_1) & W(v_1,u_2) & \cdots & W(v_1,u_n) \\ W(v_2,u_1) & W(v_2,u_2) & \cdots & W(v_2,u_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W(v_l,u_1) & W(v_l,u_2) & \cdots & W(v_l,u_n) \end{bmatrix}.$$

Wilsonovo matriko lahko zapišemo tudi s pomočjo funkcije $H(i,j) = \alpha\min(i,j) - e^{-\alpha\max(i,j)}\sinh(\alpha\min(i,j))$. Najprej definirajmo sledečo matriko.

Definicija 2.6. $\mathbf{H}(\mathbf{v},\mathbf{u})$ matrika za vektor $\mathbf{v}$ velikosti $l\times 1$ in vektor $\mathbf{u}$ velikosti $n\times 1$ je matrika velikosti $l\times n$. Njeni elementi so vrednosti funkcije $H(v_i,u_j) = \alpha\min(v_i,u_j) - e^{-\alpha\max(v_i,u_j)}\sinh(\alpha\min(v_i,u_j))$ za $1\le i\le l$ in $1\le j\le n$.

$$\mathbf{H}(\mathbf{v},\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} H(v_1,u_1) & H(v_1,u_2) & \cdots & H(v_1,u_n) \\ H(v_2,u_1) & H(v_2,u_2) & \cdots & H(v_2,u_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H(v_l,u_1) & H(v_l,u_2) & \cdots & H(v_l,u_n) \end{bmatrix}.$$

Vpeljimo še naslednje oznake. Naj bo

$$\mathbf{v} = [v_1, v_2, \cdots, v_l]^T$$

vektor velikosti $l\times 1$ in w jakost končne obrestne mere. Potem naj velja, da je

$$e^{-w\mathbf{v}} = [e^{-wv_1}, e^{-wv_2}, \cdots, e^{-wv_l}]^T.$$

Funkcija $\text{diag}(\mathbf{a})$ pa elemente vektorja $\mathbf{a}$ velikosti $l\times 1$ preslika na diagonalo ničelne matrike velikosti $l\times l$. Torej

$$\text{diag}(e^{-w\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} e^{-wv_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-wv_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{-wv_l} \end{bmatrix}.$$

Vzemimo sedaj vektor $\mathbf{v}$ vellikosti $l\times 1$ in vektor $\mathbf{u}$ velikosti $n\times 1$. Wilsonova matrika je potem enaka:

$$\mathbf{W}(\mathbf{v},\mathbf{u}) = diag(e^{-w\mathbf{v}})\mathbf{H}(\mathbf{v},\mathbf{u})diag(e^{-w\mathbf{u}})$$

oz.

$$\mathbf{W}(\mathbf{v},\mathbf{u}) = \text{diag}(e^{-w\mathbf{v}})\cdot \begin{bmatrix} H(v_1,u_1) & H(v_1,u_2) & \cdots & H(v_1,u_n) \\ H(v_2,u_1) & H(v_2,u_2) & \cdots & H(v_2,u_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(v_l,u_1) & H(v_l,u_2) & \cdots & H(v_l,u_n) \end{bmatrix} \cdot \text{diag}(e^{-w\mathbf{u}}).$$

Sedaj lahko izpeljemo še drugo funkcijo, ki je pomembna za Smith-Wilsonovo metodo. To je Smith-Wilsonova funkcija sedanje vrednosti (ang. Smith-Wilson present value function), ki jo imenujemo tudi funkcija diskontiranih cen/diskontna funkcija (ang. discount pricing function).

2.4.2 Smith-Wilsonova funkcija sedanje vrednosti

Smith-Wilsonova funkcija sedanje vrednosti je funkcija cene (ang. pricing function), ki sta jo predlagala Smith in Wilson. Definicija Smith-Wilsonove funkcije sedanje vrednosti je sledeča.

Definicija 2.7. Formula Smith-Wilsonove funkcije sedanje vrednosti za n finančnih instrumentov je enaka:

$$P(\mathbf{v}) = e^{-w\mathbf{v}} + \mathbf{W}(\mathbf{v},\mathbf{u})\mathbf{C}\mathbf{b} \tag{2.25}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-wv_1} \\ e^{-wv_2} \\ \vdots \\ e^{-wv_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W(v_1,u_1) & W(v_1,u_2) & \cdots & W(v_1,u_m) \\ W(v_2,u_1) & W(v_2,u_2) & \cdots & W(v_2,u_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W(v_n,u_1) & W(v_n,u_2) & \cdots & W(v_n,u_m) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \cdots & c_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

kjer je:

- $P(\mathbf{v}) = [P(v_1), P(v_2), \cdots, P(v_n)]^T$ vektor vrednosti Smith-Wilsonove funkcije sedanje vrednosti;
- $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \cdots, v_n]^T$ vektor trajanja do zapadlosti funkcije trenutne vrednosti;
- $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \cdots, u_m]^T$ vektor datumov denarnih izplačil vseh n finančnih instrumentov do zapadlosti;
- $\mathbf{C}$ je $m \times n$ matrika vrednosti denarnih tokov finančnih instrumentov v danih datumih denarnih izplačil. Če v j-tem datumu i-ti finannčni instrument nima izplačila, potem je (j,i)-ti element matrike $\mathbf{C}$ enak 0;
- $\mathbf{W}(\mathbf{v},\mathbf{u})$ je Wilsonova matrika;
- w končna jakost obrestne mere;
- ter vektor parametrov $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \cdots, b_n]^T$, s pomočjo katerega aproksimiramo dejansko krivuljo donosa (ang. yield curve).

Vrednost Smith-Wilsonove funkcije sedanje vrednosti $P(t)$ za poljubno zapadlost t izračunamo kot

$$P(t) = e^{-wt} + \mathbf{W}(t,\mathbf{u})\mathbf{C}\mathbf{b} \tag{2.26}$$

$$= e^{-wt} + \begin{bmatrix} W(t,u_1) & W(t,u_2) & \cdots & W(t,u_m) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \cdots & c_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

To lahko zapišemo tudi s pomočjo matrike $\mathbf{H}(t,\mathbf{u})$ kot:

$$P(t) = e^{-wt} + \mathbf{W}(t,\mathbf{u})\mathbf{C}\mathbf{b} = e^{-wt} + e^{-wt}\mathbf{H}(t,\mathbf{u})\,\mathrm{diag}(e^{-w\mathbf{u}})\mathbf{b}. \tag{2.27}$$

Te zapadlosti so lahko zapadlosti v tekočem delu časovne strukture, za katere nimamo podane netvegane obrestne mere, tj. za interpolacijo ter za zapadlosti od zadnje opazovane zapadlosti naprej, kar pomeni, da ekstrapoliramo.

Povezava med Smith-Wilsonovo sedanjo funkcijo in trenutno obrestno mero je pri zveznem obrestovanju enaka:

$$P(t) = e^{-t\delta_t}, \tag{2.28}$$

kjer je δ_t zvezna obrestna mera in t zapadlost. Pri letnem diskretnem obrestovanju z letno diskretno obrestno mero r_t in zapadlostjo t, pa je povezava sledeča:

$$P(t) = (1+r_t)^{-t}. \tag{2.29}$$

Relacija med zvezno obrestno mero δ_t in letno diskretno obrestno mero r_t je :

$$\delta_t = \ln(1+r_t). \tag{2.30}$$

Izračunamo lahko netvegano obrestno mero za vse zapadlosti $t > 0$ s pomočjo formul 2.28 in 2.29, odvisno od tega, ali potrebujemo zvezne ali diskretne trenutne obrestne mere.

Poglejmo, kako poteka aproksimacija časovne strukture netvegane obrestne mere s pomočjo Smith-Wilsonove metode. Vemo, da je $\mathbf{v}$ vektor trajanja do zapadlosti Smith-Wilsonove funkcije sedanje vrednosti in $\mathbf{u}$ vektor datumov izplačil denarnih tokov uporabljenih finančnih instrumentov do zadnje zapadlosti. Vzamemo: $\mathbf{v} = \mathbf{u}$. Potem je Smith-Wilsonova funkcija sedanje vrednosti enaka:

$$P(\mathbf{u}) = e^{-w\mathbf{u}} + \mathbf{W}(\mathbf{u},\mathbf{u})\mathbf{C}\mathbf{b} = e^{-w\mathbf{u}} + \mathrm{diag}(e^{-w\mathbf{u}})\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{u})\,\mathrm{diag}(e^{-w\mathbf{u}})\mathbf{C}\mathbf{b}. \tag{2.31}$$

Naj bo

$$\mathbf{Q} = \mathrm{diag}(e^{-w\mathbf{u}})\mathbf{C} \text{ potem je } \mathbf{Q}^T = \mathbf{C}^T\,\mathrm{diag}(e^{-w\mathbf{u}}).$$

Nato pomnožimo zgornjo enačbo 2.31 z leve s transponirano matriko denarnih tokov $\mathbf{C}^T$. Dobimo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^T P(\mathbf{u}) &= \mathbf{C}^T e^{-w\mathbf{u}} + \mathbf{C}^T\mathbf{W}(\mathbf{u},\mathbf{u})\mathbf{C}\mathbf{b} \\
&= \mathbf{C}^T e^{-w\mathbf{u}} + \mathbf{C}^T\,\mathrm{diag}(e^{-w\mathbf{u}})\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{u})\,\mathrm{diag}(e^{-w\mathbf{u}})\mathbf{C}\mathbf{b} \\
&= \mathbf{C}^T(e^{-w\mathbf{u}}) + \mathbf{Q}^T\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{u})\mathbf{Q}\mathbf{b}.
\end{aligned}$$

Implementacija metode je z uporabo matrike $\mathbf{H}(\mathbf{v},\mathbf{u})$ enostavnejša kot implementacija s pomočjo Wilsonove matrike, saj je matrika $\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ odvisna samo od parametra α in ne tudi od parametra w kot Wilsonova matrika.

Poznamo vektor tržnih cen $\mathbf{v}$. Ne poznamo pa diskontnih faktorjev oz. vrednosti Smith-Wilsonove fukcije sedanje vrednosti $P(u_j)$ za dane datume denarnih izplačil finančnih instrumentov. Tržno ceno i-tega finančnega instrumenta lahko izračunamo, če poznamo njegova denarna izplačila c_{ji} v prihodnjih datumih $u_1, u_2, \ldots, u_m$ in diskontne faktorje $P(u_j)$ za $j = 1, 2, \ldots, m$. Torej diskontiramo denarne tokove v datum vrednotenja. Za ceno i-tega finančnega instrumenta velja naslednja enakost:

$$p_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ji} P(u_j), i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.32}$$

Matrični zapis enačbe 2.32 se glasi:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \cdots & c_{m,n} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} P(u_1) \\ P(u_2) \\ \vdots \\ P(u_m) \end{bmatrix}. \tag{2.33}$$

Enačba 2.33, zapisana z vektorji, se glasi

$$\mathbf{p} = \mathbf{C}^T P(\mathbf{u}). \tag{2.34}$$

Tako poznamo tržne cene finančnih instrumentov in njihovo matriko denarnih tokov. Če združimo enačbi 2.34 in $\mathbf{C}^T P(u) = \mathbf{C}^T(e^{-wu}) + \mathbf{Q}^T\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{u})\mathbf{Qb}$ dobimo:

$$\mathbf{p} = \mathbf{C}^T P(\mathbf{u}) = \mathbf{C}^T(e^{-w\mathbf{u}}) + \mathbf{Q}^T\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{u})Q\mathbf{b}. \tag{2.35}$$

Od tod lahko izračunamo vektor $\mathbf{b}$, s pomočjo katerega aproksimiramo krivuljo donosa, in sicer tako, da izračunamo inverz $n \times n$ matrike $(\mathbf{Q}^T\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{u})\mathbf{Q})^{-1}$, ki ga pomnožimo z razliko $(\mathbf{p} - \mathbf{C}^T \operatorname{diag}(e^{-w\mathbf{u}}))$ in dobimo:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{Q}^T\mathbf{H}(\mathbf{u},\mathbf{u})\mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{C}^T(e^{-w\mathbf{u}})). \tag{2.36}$$

Rešitev je odvisna od parametrov w in α. Dobljeno rešitev $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ nato vstavimo v Smith-Wilsonovo funkcijo sedanje vrednosti za željeno zapadlost $t > 0$ in s tem dobimo časovno strukturo trenutne netvegane obrestne mere. Smith-Wilsonova funkcija sedanje vrednosti se poenostavi, če imamo za vhodne podatke brezkuponske obveznice.

2.4.3 Smith-Wilsonova funkcija sedanje vrednosti za brezkuponske obveznice

Recimo, da imamo n brezkuponskih obveznic z zapadlostmi u_i za $i = 1, 2, \ldots, n$. V tem primeru, ko so naši vhodni podatki cene brezkuponskih obveznic, velja, da je cena i-tega finančnega instrumenta z zapadlostjo u_i enaka diskontnemu faktorju $P(u_i)$. Torej velja:

$$p_i = P(u_i) \text{ za } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.37}$$

Poiskati želimo trenutne obrestne mere za preostale zapadlosti, tako za mankajoče zapadlosti v tekočem delu strukture kot za zapadlosti od tekočega dela dalje.

Imamo n brezkuponskih obveznic z različnimi zapadlostmi. Matrika denanih tokov $\mathbf{C}$ je potem enaka $n \times n$ identični matriki $\mathbf{I}$. V tem primeru se Smith-Wilsonova funkcija sedanje vrednosti za zapadlost t poenostavi v:

$$\begin{aligned} P(t) &= e^{-wt} + \mathbf{W}(t, \mathbf{u})\mathbf{I}\mathbf{b} \\ &= e^{-wt} + e^{-wt}\mathbf{H}(t, \mathbf{u})\,\mathrm{diag}(e^{-w\mathbf{u}})\mathbf{b} \\ &= e^{-wt}(1 + \mathbf{H}(t, \mathbf{u})\,\mathrm{diag}(e^{-w\mathbf{u}})\mathbf{b}). \end{aligned}$$

Tu je $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ vektor datumov zapadlosti brezkuponskih obveznic, tj. u_j je zapadlost j-te brezkuponske obveznosti za $j = 1, 2, \ldots, n$, in $\mathbf{b}$ vektor velikosti $n \times 1$, s pomočjo katerega naredimo aproksimacijo.

Tržno ceno finančnega instrumenta izračunamo tako, da diskontiramo njegove denarne tokove v datum vrednotenja. Ker je matrika denarnih tokov identična matrika I velikosti $n \times n$, velja:

$$\mathbf{p} = P(\mathbf{u}), \tag{2.38}$$

kjer sta $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$ vektor tržnih cen in $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ vektor zapadlosti brezkuponskih obveznic. Torej p_j je tržna cena j-te brezkuponske obveznice z zapadlostjo u_j za $j = 1, 2, \ldots, n$. Od tod sledi

$$\mathbf{p} = P(\mathbf{u}) = e^{-w\mathbf{u}} + \mathbf{W}(\mathbf{u}, \mathbf{u})\mathbf{I}\mathbf{b}. \tag{2.39}$$

Vektor $\mathbf{b}$ potem izračunamo kot:

$$\mathbf{b} = \mathbf{W}(\mathbf{u}, \mathbf{u})^{-1}(p - e^{-w\mathbf{u}}). \tag{2.40}$$

Dobljeni vektor $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$, s pomočjo katerega aproksimiramo dejansko krivuljo donosa, vstavimo v Smith-Wilsonovo funkcijo sedanje vrednosti za željeno zapadlost $t > 0$ ter od tod izračunamo trenutno obrestno mero s pomočjo definicije cene brezkuponske obveznice.

- Pri zveznem obrestovanju je cena brezkuponske obveznice p enaka $p = P(t) = e^{-t\delta_t}$. Od tod izračunamo trenutno obrestno mero kot $\delta_t = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{P(t)}\right)$.
- Pri diskretnem obrestovanju je cena brezkuponske obveznice p enaka $p = P(t) = (1 + r_t)^{-t}$, od tod izračunamo trenutno obrestno mero kot $r_t = \left(\frac{1}{P(t)}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$.

2.4.4 Smith-Wilsonova funkcija donosa in Smith-Wilsonova funkcija jakosti

Predpostavimo, da je $t \leq \min(\mathbf{u})$, kjer je $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_m]$, in izračunajmo trenutno jakost obrestne mere (ang. zero spot intensity). Torej je

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} H(u_1, t) \\ H(u_2, t) \\ \vdots \\ H(u_m, t) \end{bmatrix} = \alpha \cdot t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \sinh(\alpha \cdot t) \cdot \begin{bmatrix} e^{-\alpha u_1} \\ e^{-\alpha u_2} \\ \vdots \\ e^{-\alpha u_m} \end{bmatrix}. \tag{2.41}$$

Velja $\mathbf{H}^T(\mathbf{u}, t) = \mathbf{H}(t, \mathbf{u}) = [H(t, u_1), H(t, u_2), \ldots, H(t, u_m)]$. Izračunajmo še odvod $\mathbf{H}(\mathbf{u}, t)$ po t, torej:

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, t) = \frac{d\mathbf{H}(\mathbf{u}, t)}{dt}$$

oz.

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix} - \alpha \cosh(\alpha \cdot v) \cdot \begin{bmatrix} e^{-\alpha u_1} \\ e^{-\alpha u_2} \\ \vdots \\ e^{-\alpha u_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \alpha \cosh(\alpha \cdot t) \cdot e^{-\alpha u_1} \\ \alpha - \alpha \cosh(\alpha \cdot t) \cdot e^{-\alpha u_2} \\ \vdots \\ \alpha - \alpha \cosh(\alpha \cdot t) \cdot e^{-\alpha u_m} \end{bmatrix}. \tag{2.42}$$

Za odvod velja $\mathbf{G}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{G}^T(t, \mathbf{u})$. Sedaj pošljimo $t \downarrow 0$. Potem iz 2.41 sledi:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, 0) = \mathbf{H}^T(0, \mathbf{u}) = 0.$$

Iz 2.42 sledi:

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, 0) = \mathbf{G}^T(0, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \alpha - \alpha \cdot e^{-\alpha u_1} \\ \alpha - \alpha \cdot e^{-\alpha u_2} \\ \vdots \\ \alpha - \alpha \cdot e^{-\alpha u_m} \end{bmatrix} = \alpha \mathbf{1} - \alpha \cdot e^{-\alpha \mathbf{u}}.$$

Funkcija jakosti donosa $y(t)$ je za vektor $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_m]$ po 2.27 enaka:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{-\log P(t)}{t} \\ &= \frac{-\log(e^{-wt} + e^{-wt}\mathbf{H}(t, \mathbf{u})\mathbf{Q}\mathbf{b})}{t} \\ &= -\frac{-wt + \log(1 + \mathbf{H}(t, \mathbf{u})\mathbf{Q}\mathbf{b})}{t} \\ &= w - \frac{\log(1 + \mathbf{H}(t, \mathbf{u})\mathbf{Q}\mathbf{b})}{t}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Od tod lahko izračunamo še terminsko funkcijo jakosti (ang. forward intensity function):

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{P'(t)}{P(t)} \\ &= -\frac{-we^{-wt} - e^{-wt}\mathbf{H}(t,\mathbf{u})\mathbf{Qb} + e^{-wt}\mathbf{G}(t,\mathbf{u})\mathbf{Qb}}{e^{-wt} + e^{-wt}\mathbf{H}(v,\mathbf{u})\mathbf{Qb}} \\ &= \frac{w + w\mathbf{H}(t,\mathbf{u})\mathbf{Q}b - \mathbf{G}(t,\mathbf{u})\mathbf{Qb}}{1 + \mathbf{H}(t,\mathbf{u})\mathbf{Qb}} \\ &= w - \frac{\mathbf{G}(t,\mathbf{u})\mathbf{Qb}}{1 + \mathbf{H}(t,\mathbf{u})\mathbf{Qb}}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Vemo, da ima funkcija $H(u_i, v_j)$ zvezen drugi odvod. Torej je Smith-Wilsonova funkcija sedanje vrednosti in njena krivulja donosa gladka v vozlih za dane zapadlosti, kar pa ne velja za krivuljo terminske jakosti (ang. forward intensity curve), ki nima zveznega drugega odvoda. Sedaj lahko izračunamo trenutno jakost obrestne mere (ang. zero spot intensity):

$$\begin{aligned} y(0) = f(0) &= w - \frac{\mathbf{G}(0,\mathbf{u})\mathbf{Qb}}{1 + \mathbf{H}(0,\mathbf{u})\mathbf{Qb}} \\ &= w - \frac{\mathbf{G}^T(\mathbf{u},0)\mathbf{Qb}}{1+0} \\ &= w - \begin{bmatrix} \alpha - \alpha \cdot e^{-\alpha u_1} \\ \alpha - \alpha \cdot e^{-\alpha u_2} \\ \vdots \\ \alpha - \alpha \cdot e^{-\alpha u_m} \end{bmatrix}^T \mathbf{Qb}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Enačba 2.45 zapisana z vektorji se glasi:

$$y(0) = f(0) = w - \alpha \mathbf{1}^T \mathbf{Qb} + \alpha (e^{-\alpha \mathbf{u}})^T \mathbf{Qb}, \tag{2.46}$$

kjer je $\mathbf{1}$ vektor velikosti $m \times 1$ z vsemi elementi enakimi 1.

2.4.5 Konvergenca proti končni obrestni meri

Ne glede na vhodne podatke in ocenjene parametre bo Smith-Wilsonova krivulja konvergirala proti končni obrestni meri. Končna obrestna mera mora biti določena za vsako valuto in podvržena rednim revizijam. V daljšem časovnem obdobju mora biti stabilna, le temeljne spremembe v dolgoročnih pričakovanjih lahko povzročijo njene spremembe. Ocenjena je glede na pričakovano stopnjo inflacije in pričakovano realno obrestno mero. Tabela 5 predstavlja vrednosti končne obrestne mere za nekatere valute za leto 2017. Pri Smith-Wilsonovi metodi imamo parameter w, ki je končna jakost

Tabela 5: Končne obrestne mere za leto 2017 za nekatere valute

Končna obrestna mera	Valute:
4,2%	evro, britanski funt, švedska krona, ameriški dolar ...
5,2%	brazilski real in indijski rupija
3,2%	švičarski frank in japonski jen

obrestne mere (ang. ultimate forward intensity). Za posamezno valuto jo izračunamo s pomočjo naslednje formule:

$$w = \ln(1 + UFR), \tag{2.47}$$

kjer je UFR končna obrestna mera. Torej je za evro končna jakost obrestne mere enaka $\ln(1 + 0.042) = 0.04114$. Bralec najde več v [6]. Pri Smith-Wilsonovi metodi potrebujemo tudi periodo konvergence S, ki je po definiciji:

$$S = \max(40, 60 - ZLT). \tag{2.48}$$

Tu je ZLT zadnja likvidnostna točka valute finančnih instrumentov, uporabljenih pri ekstrapolaciji. Točka konvergence TK je potem enaka:

$$TK = ZLT + S = ZLT + \max(40, 60 - ZLT) = \max(ZLT + 40, 60). \tag{2.49}$$

V primeru evra je njegova zadnja likvidnostna točka enaka 20 let in točka konvergence 60 let. Zato lahko pričakujemo, da bo ekstrapolirana obrestna mera blizu končne obrestne mere od šestdesetega leta naprej. Zadnje likvidnostne točke za ostale relevantne valute najdete v [15].

Vzemimo, da je $t \geq U$, kjer sta $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_m]^T$ in $U = \max_{1\leq i\leq m} u_i$. Enačba 2.21 se poenostavi v

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, t) = \alpha\mathbf{u} - e^{-\alpha t}\sinh(\alpha\mathbf{u}). \tag{2.50}$$

Tudi odvod 2.42 se poenostavi v

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, t) = \alpha e^{-\alpha t}\sinh(\alpha\mathbf{u}). \tag{2.51}$$

Terminska funkcija jakosti (ang. forward intensity function) je z upoštevanjem 2.50 in

2.51 enaka:

$$\begin{aligned} f(v) &= w - \frac{\mathbf{G}(t,\mathbf{u})\mathbf{Q}\mathbf{b}}{1+\mathbf{H}(t,\mathbf{u})\mathbf{Q}\mathbf{b}} \\ &= w - \frac{\mathbf{G}(\mathbf{u},t)^T\mathbf{Q}\mathbf{b}}{1+\mathbf{H}(\mathbf{u},t)^T\mathbf{Q}\mathbf{b}} \\ &= w - \frac{(\alpha e^{-\alpha t}(\sinh(\alpha\mathbf{u}))^T)\mathbf{Q}\mathbf{b}}{1+(\alpha\mathbf{u}^T - e^{-\alpha t}(\sinh(\alpha\mathbf{u}))^T)\mathbf{Q}\mathbf{b}} \\ &= w - \frac{\alpha}{\frac{e^{\alpha t}+(\alpha\mathbf{u}^T-e^{-\alpha t}(\sinh(\alpha\mathbf{u}))^T)\mathbf{Q}\mathbf{b}e^{\alpha t}}{(\sinh(\alpha\mathbf{u}))^T\mathbf{Q}\mathbf{b}}} \\ &= w - \frac{\alpha}{\frac{e^{\alpha t+\alpha\mathbf{u}^T e^{\alpha t}\mathbf{Q}\mathbf{b}}}{(\sinh(\alpha\mathbf{u}))^T\mathbf{Q}\mathbf{b}}-1} \\ &= w + \frac{\alpha}{1-\frac{1+\alpha\mathbf{u}^T\mathbf{Q}\mathbf{b}}{(\sinh(\alpha\mathbf{u}))^T\mathbf{Q}\mathbf{b}}e^{\alpha t}}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Naj bo

$$\kappa = \frac{1+\alpha\mathbf{u}^T\mathbf{Q}\mathbf{b}}{(\sinh(\alpha\mathbf{u}))^T\mathbf{Q}\mathbf{b}}. \tag{2.53}$$

Potem se 2.52 glasi:

$$f(t) = w - \frac{\alpha}{1-\kappa e^{\alpha t}}. \tag{2.54}$$

Vrednost κ je odvisna od parametra α in w preko $\mathbf{Q}$. Ni pa odvisna od zapadlosti t. Če izberemo tak α, da je $\kappa = 0$, potem je $f(t) = w + \alpha$ ter se $f(\infty)$ ne približa w. Torej bo α avtomatično izbrana tako, da je $\kappa \neq 0$.

Večja vrednost α implicira hitrejšo konvergenco proti končni obrestni meri. EIOPA je določila, da mora biti vrednost α čim manjša, vendar ne manjša od 0.05 tako da je razlika med terminsko funkcijo jakosti $f(t)$ in w največ ena bazna točka v točki konvergence TK. Matematično lahko ta pogoj zapišemo s pomočjo konvergenčnega kriterija tako, da je razpon oz. vrzel konvergence (ang. convergence gap) $g(\alpha)$ med treminsko funkcjo jakosti in w v točki konvergence TK enak:

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= |f(TK) - w| \\ &= |w + \frac{\alpha}{1-\kappa e^{\alpha TK}} - w| \\ &= \frac{\alpha}{|1-\kappa e^{\alpha TK}|}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Razpon je omejen s parametrom tolerance τ. Torej velja:

$$g(\alpha) = |f(TK) - w| \leq \tau. \tag{2.56}$$

Parameter tolerance τ je določen na 1*bt* s strani EIOPE. Minimizirati moramo α glede na naslednje pogoje:

1. $\alpha \geq a$, kjer je $a = 0.05$ spodnja meja za α;

2. $g(\alpha) \leq \tau$.

Druga neenakost $g(\alpha) \leq \tau$ ima singularnost v:

$$1 - \kappa e^{\alpha TK} = 0, \tag{2.57}$$

kar je ekvivalentno

$$1 - \frac{1 + \alpha \mathbf{u}^T \mathbf{Q}\mathbf{b}}{(\sinh(\alpha \mathbf{u})^T \mathbf{Q}\mathbf{b}} e^{\alpha TK} = 0. \tag{2.58}$$

Torej mora veljati:

$$(\sinh(\alpha \mathbf{u})^T)\mathbf{Q}\mathbf{b} - (1 + \alpha \mathbf{u}^T \mathbf{Q}\mathbf{b})e^{\alpha TK} = 0, \tag{2.59}$$

od tod sledi

$$1 + (\alpha \mathbf{u}^T - (\sinh(\alpha \mathbf{u}))^T e^{-\alpha TK})\mathbf{Q}\mathbf{b} = 0. \tag{2.60}$$

Vemo, da je

$$P(TK) = e^{-wTK} + e^{-wTK}\mathbf{H}(TK, \mathbf{u})\mathbf{Q}\mathbf{b}. \tag{2.61}$$

Od tod sledi

$$P(TK) = e^{-w \cdot TK}(1 + (\alpha \mathbf{u}^T - e^{-\alpha TK}(\sinh(\alpha \mathbf{u}))^T)\mathbf{Q}\mathbf{b}). \tag{2.62}$$

Torej ima $g(\alpha)$ singularnost, le če velja $P(TK) = 0$. Na območju, kjer je α optimizirana, se singularnost lahko pojavi le, če vhodna krivulja trenutnih obrestnih mer (ang. input market spot curve) povzroči singularnost za nekatero vrednost $\alpha \geq 0.05$.

2.4.6 Aproksimacija časovne strukture z brezkuponskimi in kuponskimi obveznicami ter izvedenimi kreditnimi instrumenti

S pomočjo Smith-Wilsonove metode aproksimiramo časovno strukturo netvegane obrestne mere z obrestnimi merami relevantnih finančnih instrumentov. Ti finančni instrumenti so lahko kuponske obveznice ali brezkuponske obveznice ali pa izvedeni kreditni instrumenti. Kateri finančni instrumenti so relevantni, določa EIOPA s pomočjo DLT ocene trga. Vhodni podatki za vsako množico relevantnih finančnih instrumentov so: vektor tržnih cen instrumentov v dnevu vrednotenja, vektor datumov izplačil denarnih tokov do zadnje zapadlosti instrumentov in matrika denarnih tokov v teh datumih. V nadaljevanju bomo predstavili lastnosti vhodnih podatkov glede na to, katere finančne instrumente uporabimo za Smith-Wilsonovo metodo.

1. Brezkuponske obveznice

- Vektor tržnih cen: tržne cene brezkuponskih obveznic se prevedejo v trenutne obrestne mere za dane zapadlosti ter so izražene kot odstotek glavnice (ang. national amount).
- Vektor datumov denarnih izplačil: datumi denarnih izplačil so zapadlosti brezkuponskih obveznic.
- Matrika denarnih tokov: identična matrika velikosti $n \times n$, če imamo n brezkuponskih obvezic.

2. Kuponske obveznice

- Vektor tržnih cen: tržne cene n kuponskih obveznic so podane kot odstotek glavnice obveznice (ang. as the percent amount of the notional amount of the bond).
- Vektor datumov denarnih izplačil: poleg datumov zapadlosti kuponskih obveznic imamo tudi datume vseh izplačil kuponov.
- Matrika denarnih tokov: to je matrika velikosti $m \times n$, če imamo m različnih datumov denarnih izplačil in n kuponskih obveznic. Za elemente matrike denarnih tokov velja:

$$c_{ij} = \begin{cases} c_{ij} = \frac{r_k(i)}{f} & \text{če je } i < t(j) \\ c_{t(j),j} = 1 + \frac{r_k(i)}{f} & \text{če je } i = t(j) \\ c_{ij} = 0 & \text{sicer} \end{cases},$$

  kjer je $r_k(i)$ kuponska obrestna mera (ang.cupon rate) i-te kuponske obveznice, f frekvenca izplačil (ang. settement frequency) kuponov ter $t(j)$ zapadlost j-te kuponske obveznice.

3. Izvedeni kreditni instrumenti

- Vektor tržnih cen: tržne cene izvedenih kreditnih instrumentov se upoštevajo kot enota valute, tj. 1.
- Vektor datumov denarnih izplačil: poleg zapadlosti izvedenih kreditnih instrumentov imamo tudi datume izplačil obrestne mere izvedenih kreditnih instrumentov (ang. swap rate payment dates).
- Matrika denarnih tokov: za elemente matrike denarnih tokov velja:

$$c_{ij} = \begin{cases} c_{ij} = \frac{r_k(i)}{f} & \text{če je } i < t(j) \\ c_{t(j),j} = 1 + \frac{r_k(i)}{f} & \text{če je } i = t(j) \\ c_{ij} = 0 & \text{sicer} \end{cases},$$

  kjer je $r_k(i)$ obrestna mera i-tega izvedenega kreditnega instrumenta, f frekvenca izplačil ter $t(j)$ zapadlost j-tega izvedenega kreditnega instrumenta.

Nekatere relevantne finančne instrumente najde bralec v Tabeli 2, ostale relevantne instrumente in več o aproksimaciji pa v [15].

2.4.7 Primer izračuna časovne strukture netvegane obrestne mere s Smith-Wilsonovo metodo

Za izračun časovne strukture netvegane obrestne mere s Smith-Wilsonovo metodo bomo uporabili vhodne podatke iz prvega primera v [14]. Časovno strukturo netvegane obrestne mere bomo aproksimirali s pomočjo štirih izvedenih kreditnih instrumentov, s tržno ceno enako enemu evru. Njihove kuponske obrestne mere (ang. cupon rates) so enake: $r_k(1) = 1$ %, $r_k(2) = 2$ %, $r_k(3) = 2.6$ % in $r_k(4) = 3.4$ %, z naslednjimi datumi denarnih tokov: $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = 4$ in $u_5 = 5$. Zapadlosti izvedenih kreditnih instrumentov so sledeče: $u_{1,t(1)} = 1$, $u_{2,t(2)} = 2$, $u_{3,t(3)} = 3$ in $u_{4,t(4)} = 5$. Torej $u_{i,t(i)}$ je zapadlost i-tega izvedenega kreditnega instrumenta. Frekvenca izplačil je enaka $f = 1$, torej imamo izplačila enkrat letno. Vhodni podatki so potem sledeči:

- Vektor tržnih cen: $p = [1, 1, 1, 1]^T$.
- Vektor datumov denarnih izplačil: $u = [1, 2, 3, 4, 5]^T$.
- Matrika denarnih tokov:

$$C = \begin{bmatrix} 1.01 & 0.02 & 0.026 & 0.034 \\ 0 & 1.02 & 0.026 & 0.034 \\ 0 & 0 & 1.026 & 0.034 \\ 0 & 0 & 0 & 0.034 \\ 0 & 0 & 0 & 1.034 \end{bmatrix}.$$

Končna obrestna mera za evro je določena na 4.2 %. Torej je $w = (1+0.042) = 0.04114$. Izračune bomo izvedli v programskem jeziku R version 3.5.0 (2018-04-23) s pomočjo vgrajenega paketa SmithWilsonYieldCurve. Izračunana optimizirana vrednost α za dane vhodne podatke je enaka 0.08083 (program R version 3.5.0 (2018-04-23)). Zadnja likvidnostna točka za evro je 20 let. Perioda konvergence je potem enaka $S = 40$ let in točka konvergence je enaka $TK = 60$ let. S pomočjo vgrajene funkcije fFitSmithWilsonYieldCurve izračunamo vektor b (program R version 3.5.0 (2018-04-23)):

$$b = \begin{bmatrix} 109.17909 \\ -63.34334 \\ 21.13928 \\ -10.05660 \end{bmatrix}.$$

izračunamo tudi vrednosti Smith-Wilsonove funkcije za željene zapadlosti. Tabela 6 prikazuje vednosti Smith-Wilsonove funkcije sedanje vrednosti za nekatere zapadlosti (program R version 3.5.0 (2018-04-23)).

Tabela 6: Vrednosti Smith-Wilsonove funkcije sedanje vrednosti za dane zapadlosti (program R version 3.5.0 (2018-04-23))

Zapadlosti t:	4	5	10	20	50
$P(t)$:	0.8850305	0.8434381	0.6651358	0.4234639	0.1172988

Tabela 7 prikazuje izračunane netvegane obrestne mere za nekatere zapadlosti (program R version 3.5.0 (2018-04-23)) s pomočjo Smith-Wilsonove metode.

Tabela 7: Časovna struktura netvegane obrestne mere (program R version 3.5.0 (2018-04-23))

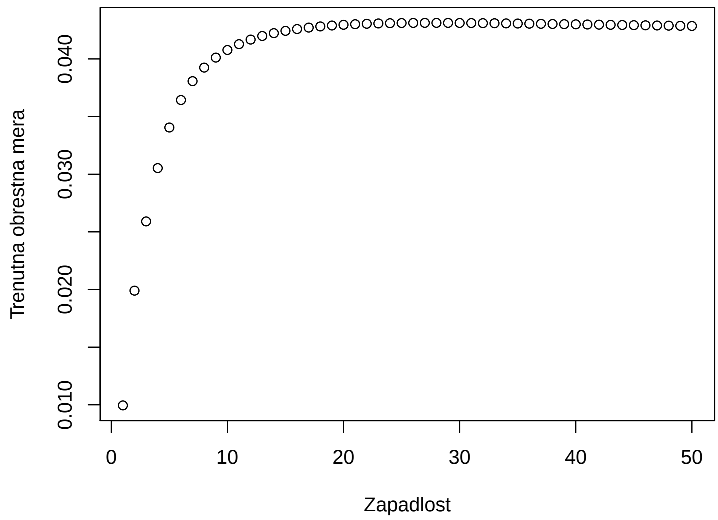
Zapadlosti:	4	5	10	20	50
Netvegane obrestne mere:	3.05333 %	3.405376 %	4.07764 %	4.296435 %	4.286061 %

Na Sliki 4 je prikazana časovna struktura netvegane obrestne mere do zapadlosti pedeset let (program R version 3.5.0 (2018-04-23)).

2.4.8 Prednosti in pomanjkljivosti Smith-Wilsonove metode

Vsaka metoda za ekstrapolacijo obrestne mere ima svoje prednosti in pomanjkljivosti. EIOPA nadzira vpliv razvoja trga na implementacijo Smith-Wilsonove metode. Prednosti Smith-Wilsonove metode so:

- Popolna transparentnost metode in njena dostopnost za vsa vsa podjetja.
- Lahka implementacija metode v excelu in fleksibilnost glede vhodnih podatkov, (kuponske ali brezkuponske obveznice ali izvedeni kreditni instrumenti).
- Vhodni podatki so neobdelani podatki s finančnih trgov. Podatkov torej ni potrebno preoblikovati.



Slika 4: Časovna struktura netvegane obrestne mere za dane vhodne podatke (program R version 3.5.0 (2018-04-23))

- Tako za interpolacijo med podatki na trgu kot tudi ekstrapolacijo se uporablja enak pristop. Za nekatere druge metode to ne velja in se interpolacija in ekstrapololacija izvajata ločeno, torej z uporabo različnih metod, kar lahko vodi v neskladnosti med interpoliranim in ekstrapoliranim delom iste krivulje.
- Temelji na analitičnem reševanju linearnega sistema enačb.
- Hitrost konvergence ekstrapoliranih obrestnih mer proti končni obrestni meri je odvisna od obnašanja obrestnih mer v tekočem delu strukture in parametra α. Višji kot je α, hitrejše je približevanje ekstrapolirane obrestne mere proti končni obrestni meri.

Pomanjkljivosti Smith-Wilsonove metode so:

- Za parameter α, ki je izbran izven modela, je potrebna strokovna presoja za njegovo oceno. Temu se po Solventnosti II v načelu želimo izogniti.
- Model ne vsebuje nobene omejitve, ki bi prisilila Smith-Wilsonovo funkcijo sedanje vrednosti, da pada in ne narašča.
- Lahko se zgodi, da je za določen niz podatkov Smith-Wilsonova funkcija sedanje vrednosti negativna. Do tega pride v primeru, ko je zadnja obrestna mera tekočega dela krivulje visoka v primerjavi z vsoto končnih obrestnih mer in α. V

tem primeru je potrebno sprejeti višji α, to pa temelji na strokovni presoji, ki se ji skušamo izogniti.

Več o prednostih in pomanjkljivostih Smith-Wilsonove metode najde bralec v [14].

3 Obnašanje zavarovalnega portfelja

Zavarovalno-tehnične rezervacije so obveznosti zavarovalnice, ki jih ima na podlagi sklenjenih zavarovalnih pogodb za že nastalo in pričakovano škodo. To so rezervacije za prenos premij, rezervacije za bonuse, popuste in storno, škodne rezervacije, izravnalne rezervacije, matematične rezervacije ter druge zavarovalno-tehnične rezervacije. Matematične rezervacije oz. neto premijske rezerve se oblikujejo za življenjska zavarovanja. Oblikujejo se v višini ocenjenih prihodnjih obveznosti zavarovalnice, zmanjšanih za ocenjeno sedanjo vrednost prihodnjih premij glede na sklenjeno zavarovanje. Več o zavarovalno-tehničnih rezervacijah bralec najde v [21].

Ob sklenitivi zavarovanja je v smislu pričakovanih vrednosti izpolnjena ekvivalenca med plačanimi premijami in obveznostmi zavarovalnice. Torej je pričakovana izguba zavarovalnice enaka nič ob sklenitvi zavarovalne police. To ne velja za kasnejše časovne točke, saj v splošnem ni nobene ekvivalence med bodočimi premijami in bodočimi obveznostmi zavarovalnice. Neto premijsko rezervo za trenutek t označimo z ${}_tV$ in je enaka pričakovani vrednosti razlike med sedanjo vrednostjo bodočih izplačil zavarovalnice in sedanjo vrednostjo bodočih premij, za $T > t$, kjer je T trajanje zavarovalne police. Pri tem so življenjske police oblikovane tako, da je pričakovana vrednost bodočih izplačil zavarovalnice vedno večja od pričakovane vrednosti bodočih premij. Posledično je v zavarovančevem interesu obdržati zavarovanje. Neto premijska rezerva je tako pozitivna ali nenegativna in zavarovalnica mora hraniti dovolj sredstev v višini neto premijskih rezerv, da lahko kompenzira omenjeno razliko. Bralec najde več v [4].

V nadaljevanju bomo ekstrapolirali časovno strukturo netvegane obrestne mere na podlagi izvedenih kreditnih instrumentov z ameriškega trga. Pri izračunu premij smo uporabili tablice umrljivosti za oba spola, ki smo jih izpeljali na podlagi tablic umrljivosti za ženske in moške, predstavljene v [20]. Priloga A prikazuje formulo, po kateri smo združili moške in ženske tablice smrtnosti. Nato smo še preverili, kakšen vpliv ima končna jakost obrestne mere w na cene za izbran portfelj zavarovanj.

3.1 Opis hipotetičnega portfelja

Najprej si bomo ogledali začasno zavarovanje za primer smrti v trajanju 20 let. Za osebo staro trideset let in zavarovalno vsoto $Z = 100.000$ \$, ki se izplača na koncu leta smrti, če zavarovanec umre v teh dvajsetih letih. Zavarovanec na začetku vsakega leta plačuje letno premijo $P^{1}_{30:\overline{20}|}$. Vemo, da velja:

$$ {}_0V^{1}_{30:\overline{20}|} = 0. \tag{3.1}$$

Torej velja:

$$ Z \cdot A^{1}_{30:\overline{20}|} - P^{1}_{30:\overline{20}|} \cdot \ddot{a}_{30:\overline{20}|} = 0. \tag{3.2}$$

Letna neto premija je potem enaka:

$$ P^{1}_{30:\overline{20}|} = \frac{A^{1}_{30:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{20}|}} \tag{3.3}$$

za

$$ \ddot{a}_{30:\overline{20}|} = 1 + \sum_{k=1}^{19} e^{-r_k \cdot k} {}_kp_{30} \tag{3.4}$$

in

$$ A^{1}_{30:\overline{20}|} = \sum_{k=0}^{19} e^{-r_{k+1} \cdot (k+1)} {}_kp_{30} \cdot q_{30+k}, \tag{3.5}$$

kjer je:

- r_{k+1} trenutna obrestna mera za zapadlost $k+1$,
- ${}_kp_{30}$ verjetnost, da oseba, stara 30 let, preživi še k-let,
- ${}_kq_{30}$ verjetnost smrti v k-letih za osebo, staro 30 let.

Nato si bomo ogledali še dosmrtno prenumerandno rento za osebo staro šestdeset let z letnimi plačili v višini 1 \$ in enkratno neto premijo $\ddot{a}_{60}$. Enkratno neto premijo $\ddot{a}_{60}$ izračunamo z nasledno formulo:

$$ \ddot{a}_{30} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-r_k \cdot k} {}_kp_{60}, \tag{3.6}$$

kjer je

- ${}_kp_{60}$ verjetnost, da oseba stara 60 let preživi naslednjih k let in
- r_k trenutna obrestna mera za zapadlost k za $k = 1, \ldots, \infty$.

Izračunali bomo neto premije, zavarovanec pa zavarovalnici plačuje bruto premijo, pri kateri so upoštevani tudi pridobitveni stroški, inkaso stroški in upravni stroški. Bruto premije so torej večje od izračunanih neto premij. Več o življenjskih zavarovanjih in rentah najde bralec v [4].

V prihodnosti postanejo stvari bolj zapletene. Za izračun neto premijskih rezerv v prihodnosti za življenjske rente uporabimo terminsko obrestno mero. Pri življenjskih zavarovanjih terminske obrestne mere ne moremo uporabiti za računajnje prihodnjih neto premijskih rezerv, saj premije v prihodnosti še pritekajo in jih bomo v prihodnosti investirali v instrumente, ki bodo takrat na voljo na trgu. Instrumentov, ki bodo takrat na trgu, ne poznamo.

3.2 Vpliv sprememb na cene zavarovanj

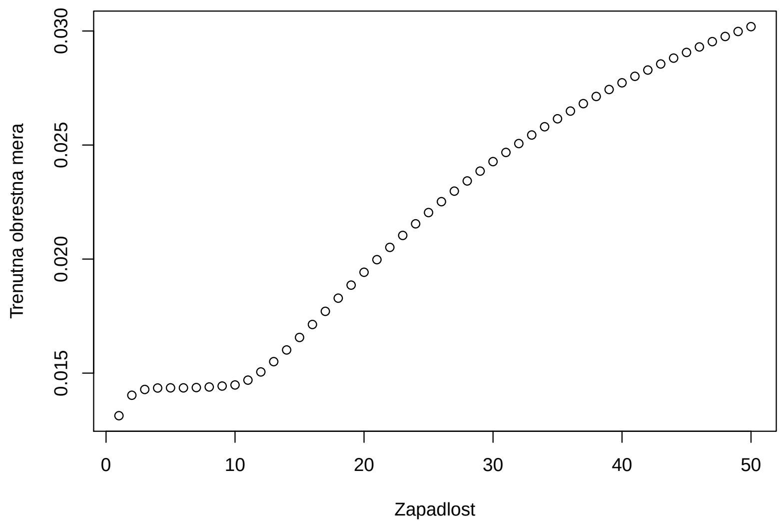
Preučili bomo vpliv spremembe končne jakosti obrestne mere na cene zavarovanj. Končna obrestna mera za ameriški dolar je določena na $4,2$ %. Zmanjševali jo bomo za $0,1$ % do $3,7$ % in ocenili vpliv ekstrapolirane netvegane časovne strukture obrestne mere na cene zavarovanj. Za Smith-Wilsonovo metodo smo uporablili vhodne podatke iz Tabele 8.

V Tabeli 8 so prikazani vhodni podatki izvedenih kreditnih instrumentov, pridobljeni na Bloombergu. Tržne cene izvedenih kreditnih instrumentov so enake 1 $.

Tabela 8: Vhodni podatki za izvedene kreditne instrumente na ameriškem trgu

Zapadlosti v letih:	Obrestna mera izvedenih kreditnih instrumentov:	Frekvenca izplačil:
1	2,644 %	2
2	2,8245 %	2
3	2,8757 %	2
4	2,8887 %	2
5	2,8904 %	2
6	2,8905 %	2
7	2,8932 %	2
8	2,8981 %	2
9	2,9061 %	2
10	2,9153 %	2

Slika 5 prikazuje časovno strukturo netvegane obrestne mere za zapadlosti do 50 let.



Slika 5: Časovna struktura netvegane obrestne mere za vhodne podatke iz Tabele 8 (program R version 3.5.0 (2018-04-23))

Tabela 9 prikazuje optimizirane vrednosti parametra α glede na različne vrednosti končne obrestne mere (program R version 3.5.0 (2018-04-23)).

Tabela 9: Vrednosti optimiziranega parametra α glede na različne vrednosti končne obrestne mere (program R version 3.5.0 (2018-04-23))

Končna obrestna mera:	4,2 %	4,1 %	4 %	3,9 %	3,8 %
α:	0.06603	0.06564	0.06524	0.06483	0.06439

S spreminjanjem končne obrestne mere se spreminja tudi optimalna α.

3.2.1 Začasno zavarovanje za primer smrti

Letno neto premijo $P^1_{30:\overline{20}|}$ za začasno zavarovanje v primeru smrti v trajanju 20 let za osebo, staro trideset let, in zavarovalno vsoto $Z = 100.000$ \$, ki se izplača na koncu leta smrti, če zavarovanec umre v teh dvajsetih letih, izračunamo kot:

$$P^1_{30:\overline{20}|} = \frac{A^1_{30:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{20}|}}. \tag{3.7}$$

Tabela 10 prikazuje letno neto premijo $P^1_{30:\overline{20|}}$ glede na različne vrednosti končne obrestne mere (Excel 2010).

Tabela 10: Letna neto premija $P^1_{30:\overline{20|}}$ glede na različne vrednosti končne obrestne mere (Excel 2010)

Končna obrestna mera:	4,2 %	4,1 %	4 %	3,9 %	3,8 %
$P^1_{30:\overline{20|}}$:	$74,43$ \$	$74,48$ \$	$74,55$ \$	$74,57$ \$	$74,62$ \$

Opazimo, da se letna neto premija z nižanjem končne obrestne mere povečuje, saj so diskontni faktorji, uporabljeni pri izračunu neto premije, manjši pri manjših obrestnih merah.

3.2.2 Dosmrtna renta

Dosmrtno prenumerandno rento za osebo, staro šestdeset let, z letnimi plačili v višini 1 \$ in enkratno neto premijo $\ddot{a}_{60}$, izračunamo kot:

$$\ddot{a}_{60} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-r_k \cdot k} {}_k p_{60}. \tag{3.8}$$

Tabela 11 prikazuje izračunano enkratno neto premijo $\ddot{a}_{60}$ glede na različne vrednosti končne obrestne mere (Excel 2010).

Tabela 11: Enkratna neto premija $\ddot{a}_{60}$ glede na različne vrednosti končne obrestne mere (Excel 2010)

Končna obrestna mera:	4,2 %	4,1 %	4 %	3,9 %	3,8 %
$\ddot{a}_{60}$:	$22,67$ \$	$22,74$ \$	$22,81$ \$	$22,89$ \$	$22,96$ \$

Prav tako kot pri letni neto premiji za začasno življenjsko zavarovanje tudi pri dosmrtni renti opazimo, da se enkratna neto premija povečuje pri manjših končnih obrestnih merah.

4 Zaključek

V magistrskem delu smo se posvetili Smith-Wilsonovi metodi, s pomočjo katere lahko ekstrapoliramo časovno strukturo netvegane obrestne mere. Najprej smo se posvetili vlogi obrestne mere pri zavarovalnicah in pozavarovalnicah ter strukturi Solventnosti II. Netvegana obrestna mera igra pomembo vlogo pri izračunu zavarovalno-tehničnih rezervacij za zavarovalnice in pozavarovalnice. Predstavili smo zakonski okvir ekstrapolacije in njenih vhodnih podatkov ter parametrov ki jih določa EIOPA. Ta zakonski okvir morajo podjetja upoštevati pri izračunu časovne strukture netvegane obrestne mere.

Za Smith-Wilsonovo ekstrapolacijo uporabimo relevantne finančne instrumente, s katerimi se trguje na širokem, likvidnem in transparentnem trgu. Ti instrumenti so lahko brezkuponske obveznice, kuponske obveznice ali pa izvedeni kreditni instrumenti. Za vsako valuto je določena tudi končna obrestna mera. Parameter α, ki določa hitrost konvergence proti končni obrestni meri, minimiziramo tako, da je konvergenčni razpon manjši ail enak eni bazni točki in $\alpha \geq 0.05$. Ekstrapolirali smo časovno strukturo na primeru izvedenih kreditnih instrumentov in preverili vpliv spremembe končne obrestne mere na cene zavarovanj.

5 Literatura

[1] E. Berdin, *Interest Rate Risk, Longevity Risk and the Solvency of Life Insurers*, http://www.icir.de/fileadmin/user_upload/2016_32_Interest_Rate_Risk__Longevity_Risk_and_the_Solvency_of_Life_Insurer_Berdin.pdf. (Datum ogleda: 13. 4. 2018.) *(Citirano na strani 5.)*

[2] E. Berdin, H. Gründl in C. Kubitza, *Rising Interest Rates, Lapse Risk, and the Stability of Life Insurers*, http://www.icir.de/fileadmin/Documents/Research/Working_Papers/Berdin__Grundl__Kubitza__2017_07_.pdf. (Datum ogleda: 14. 4. 2018.) *(Citirano na straneh 3 in 5.)*

[3] F.X. Diebold in C. Li, *Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields*, https://www.sas.upenn.edu/ fdiebold/papers/paper49/Diebold-Li.pdf. (Datum ogleda: 3. 5. 2018.) *(Citirano na strani 26.)*

[4] H.U. Gerber, *Matematika življenjskih zavarovanj*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in Zavarovalnica Triglav, d.d., Ljubljana, 1996. *(Citirano na straneh 1, 45 in 47.)*

[5] R. Heakal, *Forces Behind Interest Rates*, https://www.investopedia.com/insights/forces-behind-interest-rates/. (Datum ogleda: 6. 4. 2018.) *(Citirano na strani 2.)*

[6] A. Lagerås in M. Lindholm, *ISSUES WITH THE SMITH-WILSON METHOD*, https://arxiv.org/pdf/1602.02011.pdf. (Datum ogleda: 1. 6. 2018.) *(Citirano na straneh 23 in 37.)*

[7] C.R. Nelson in A. F. Siegel, *Parsimonious Modeling of Yield Curves*, https://cepr.org/sites/default/files/events/1854_NS_1987.pdf. (Datum ogleda: 3. 5. 2018.) *(Citirano na strani 25.)*

[8] S. Schütterl, *Scenarion-based Capital Requirements for the Interest Rate Risk of Insurance companies* ,

https://www.investopedia.com/insights/forces-behind-interest-rates/. (Datum ogleda: 16. 4. 2018.) *(Citirano na straneh 3 in 5.)*

[9] M. P. Thomas, *Long term extrapolation and hedging of the South African yield curve*, https://repository.up.ac.za/bitstream/handle/2263/25595/dissertation.pdf?sequence=1. (Datum ogleda: 10. 5. 2018.) *(Citirano na strani 27.)*

[10] T. Vandenabeele, *Solvency II in a nutshell*, http://nl.milliman.com/uploadedFiles/insight/2014/solvency-ii-nutshell.pdf. (Datum ogleda: 23. 5. 2018.) *(Citirano na strani 9.)*

[11] *About EIOPA*, European Insurance and Occupational Pensions Authority. https://eiopa.europa.eu/about-eiopa. (Datum ogleda: 25. 4. 2018.) *(Citirano na strani 10.)*

[12] *EIOPA home*, European Insurance and Occupational Pensions Authority. https://eiopa.europa.eu/. (Datum ogleda: 25. 4. 2018.) *(Citirano na strani 10.)*

[13] *Evropska centralna banka (ECB)*, Evropska unija. https://europa.eu/european-union/about-eu/institutions-bodies/european-central-bank_sl. (Datum ogleda: 10. 7. 2018.) *(Citirano na strani 2.)*

[14] *QIS 5 Risk-free interest rates – Extrapolation method*, European Insurance and Occupational Pensions Authority.
https://eiopa.europa.eu/Publications/QIS/ceiops-paper-extrapolation-risk-free-rates_en-20100802.pdf. (Datum ogleda: 28. 4. 2014.) *(Citirano na straneh 23, 24, 26, 27, 41 in 44.)*

[15] *Tehnical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures*, European Insurance and Occupational Pensions Authority. https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/Technical%20Documentation%20%2831%20Jan%202018%29.pdf. (Datum ogleda: 4. 4. 2018.) *(Citirano na straneh 3, 11, 14, 15, 16, 19, 22, 23, 27, 37 in 41.)*

[16] *Overnight Index Swap*, Investopedia. https://www.investopedia.com/terms/o/overnightindexswap.asp. (Datum ogleda: 18. 6. 2018.) *(Citirano na strani 17.)*

[17] *Solvency Capital Requirement (SCR)*, Investopedia. https://www.investopedia.com/terms/s/solvency-capital-requirement.asp. (Datum ogleda: 19. 6. 2018.) *(Citirano na strani 3.)*

[18] *Who determines interest rates?*, Investopedia. `https://www.investopedia.com/ask/answers/03/112003.asp`. (Datum ogleda: 6. 4. 2018.) *(Citirano na strani 2.)*

[19] *Solvency II for Beginners*, Society of Actuaries in Ireland. `https://web.actuaries.ie/sites/default/files/event/2013/04/130516_solvency_ii_for_beginners.pdf`. (Datum ogleda: 25. 5. 2018.) *(Citirano na strani 8.)*

[20] *Priloga - Slovenske rentne tablice smrtnosti SIA65, 2010* , Uradni list Republike Slovenije. `https://www.uradni-list.si/files/RS_-2016-018-00018-OB P001-0000.PDF`. (Datum ogleda: 21. 6. 2018.) *(Citirano na strani 45.)*

[21] *Zavarovalno-tehnične rezervacije (obveznosti-pasiva)*, ZAVPRO ZAVAROVANJE. `http://www.zavpro-zavarovanje.si/zavarovalno_tehnicne_rezervacije.html`. (Datum ogleda: 4. 7. 2018.) *(Citirano na strani 45.)*

[22] *Interest rate swap*, Wikipedia. `https://en.wikipedia.org/wiki/Interest_rate_swap`. (Datum ogleda: 18. 6. 2018.) *(Citirano na strani 17.)*

Priloge

A Združitev moških in ženskih tablic umrljivosti

Tablice umrljivosti za moške in ženske smo združili z naslednjim postopkom ($\tilde{q}_x$ je verjetnost, da moški, star x let, umre v naslednjem letu, in $\hat{q}_x$ verjetnost, da ženska, stara x let, umre v naslednjem letu, in sicer za starosti od nič do sto dvajset let):

$$m_0 = 100000 \qquad \text{Začetno število moških.}$$

$$z_0 = 100000 \qquad \text{Začetno število žensk.}$$

$$s_0 = m_0 + z_0 = 200000 \qquad \text{Skupno število moških in žensk na začetku.}$$

$$q_0 = \frac{m_0 \cdot \tilde{q}_0 + z_0 \cdot \hat{q}_0}{s_0} \qquad \text{Verjetnost, da oseba, stara 0 let, umre v naslednjem letu.}$$

$$m_1 = m_0 - m_0 \cdot \tilde{q}_0 \qquad \text{Število še živečih moških po enem letu.}$$

$$z_1 = z_0 - z_0 \cdot \hat{q}_0 \qquad \text{Število še živečih žensk po enem letu.}$$

$$s_1 = m_1 + z_1 \qquad \text{Število še živečih oseb po enem letu.}$$

$$q_1 = \frac{m_1 \cdot \tilde{q}_1 + z_1 \cdot \hat{q}_1}{s_1} \qquad \text{Verjetnost, da oseba, stara 1 leto, umre v naslednjem letu.}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$m_i = m_{i-1} - m_{i-1} \cdot \tilde{q}_{i-1} \qquad \text{Število še živečih moških po } i\text{-tem letu.}$$

$$z_i = z_{i-1} - z_{i-1} \cdot \hat{q}_{i-1} \qquad \text{Število še živečih žensk po } i\text{-tem letu.}$$

$$s_i = m_i + z_i \qquad \text{Število še živečih oseb po } i\text{-tem letu.}$$

$$q_i = \frac{m_i \cdot \tilde{q}_i + z_i \cdot \hat{q}_i}{s_i} \qquad \text{Verjetnost, da oseba, stara } i \text{ let, umre v naslednjem letu.}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$m_{120} = m_{119} - m_{119} \cdot \tilde{q}_{119} \qquad \text{Število še živečih moških po 120. letu.}$$

$$z_{120} = z_{119} - z_{119} \cdot \hat{q}_{119} \qquad \text{Število še živečih žensk po 120. letu.}$$

$$s_{120} = m_{120} + z_{120} \qquad \text{Število še živečih oseb po 120. letu.}$$

$$q_{120} = \frac{m_{120} \cdot \tilde{q}_{120} + z_{120} \cdot \hat{q}_{120}}{s_{120}} \qquad \text{Verjetnost, da oseba, stara 120 let, umre v naslednjem letu.}$$