UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Magistrsko delo

Zavarovalni produkti z naložbenim tveganjem z garancijami

(Insurance products with investment risk with guarantees)

Ime in priimek: Ivana Jović
Študijski program: Matematika s finančnim inženiringom, 2. stopnja
Mentor: izr. prof. dr. Mihael Perman

Koper, september 2018

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Ivana JOVIĆ

Naslov magistrskega dela: Zavarovalni produkti z naložbenim tveganjem z garancijami

Kraj: Koper

Leto: 2018

Število listov: 78 Število slik: 6 Število tabel: 4

Število prilog: 1 Število strani prilog: 5 Število referenc: 12

Mentor: izr. prof. dr. Mihael Perman

Ključne besede: garancija, nadomestilo v primeru smrti, nadomestilo v primeru doživetja, Black-Scholesov model, produkti z naložbenim tveganjem, police vezane na enote premoženja.

Math. Subj. Class. (2010):62P05, 91B30, 91B70

UDK: 336.59:519.87(043.2)

Izvleček:
V magistrski nalogi bom predstavila teoretično podlago zavarovalnih produktov z naložbenim tveganjem z garancijami. Začenjam z uvodom, v katerem je opisana glavna ideja in interpretacija pojmov. Po uvodu sledi zakonodajni okvir, v katerem so zapisani vsi členi zakona, ki določajo tako zavarovanje. Nato so opisane nove uvedbe v zavarovalništvu, Solventnost II. Sledi predstavitev produktov z naložbenim tveganjem, kjer je predstavljen matematični model. Dalje imamo opredelitev tipov garancij, najprej nekaj splošnega o garancijah in variabilnem zavarovanju, nato pa podrobnejši opis določenih garancij. Nadaljujemo z modelom, ki bi ga v praktičnem delu uporabili, to je Black-Scholesov model. Po teoretičnem delu Black-Scholesovega modela so predstavljene tudi zavarovalne police, vezane na enote premoženja, kjer bodo podrobneje predstavljene police z garancijami ter tiste brez njih. Sledi opredelitev nadomestil pri policah, vezanih na enote premoženja. Za lažjo predstavo bodo predstavljeni tudi posamezni primeri.

Key words documentation

Name and SURNAME: Ivana JOVIĆ

Title of the thesis: Insurance products with investment risk with guarantees

Place: Koper

Year: 2018

Number of pages: 78 Number of figures: 6 Number of tables: 4

Number of appendices: 1 Number of appendix pages: 5 Number of references: 12

Mentor: Assoc. Prof. Mihael Perman, PhD

Keywords: guarantees, death benefit, survival benefit, Black-Scholes model, products with investment risk, unit-linked policies.

Math. Subj. Class. (2010): 62P05, 91B30, 91B70

UDK: 336.59:519.87(043.2)

Abstract: The Master thesis will present the theoretical basis of insurance products with investment risk with guarantees. The thesis starts with the introduction which describes the main idea and interpretation of terms. This is followed by the legal framework with all the articles of the act determining such insurance, the Solvency II. This is followed with the presentation of products with investment risk where a mathematical model is presented. The definition of types of guarantees is also included, with some general information about guarantees and variable insurance, followed by a more detailed description of certain guarantees. After the description of guarantees, we present a model that we would use in the practical part, the Black-Scholes model. Insurance policies bound to assets units are also presented after the Black-Scholes model, where policies with guarantees and those without guarantees will be presented in detail. The definition of compensations for policies bound to assets units will also be included. Some examples will be presented for easier understanding.

Zahvala

Zahvaljujem se mentorju izr. prof. dr. Mihaelu Permanu za vso pomoč in vse nasvete pri pisanju magistrskega dela.

Zahvaljujem se tudi Rebeki Kobal za lektoriranje moje magistrske naloge.

Prav tako se zahvaljujem svojim najbližjim in prijateljem, za vso spodbudo v času študija ter pri pisanju svoje naloge.

Posebna zahvala gre vsem sošolcem, za vso pomoč pri študiju ter za vsako popestritev med in po predavanjih.

Nazadnje se zahvaljujem še svoji največji podpori, fantu Tomažu, ki mi je ves čas stal ob strani.

Kazalo vsebine

Kazalo tabel

Kazalo slik

Kazalo prilog

Seznam kratic

t.j.	to je
npr.	na primer
itd	in tako dalje
GMLB	garantirana minimalna izplačila v primeru doživetja
GMDB	garantirana minimalna izplačila v primeru smrti
GMAB	garantirana minimalna izplačila v akumulacijski dobi
GMIB	garantirana minimalna izplačila v primeru doživetja
GMWB	garantirana minimalna izplačila v primeru delnega umika pogodbe
GMSB	garantirana minimalna izplačila v primeru prekinitve pogodbe znotraj akumulacijske dobe GMSB

1 Uvod

Zavarovalnice vse pogosteje ponujajo zavarovalne produkte z naložbenim tveganjem z garancijami. S tem zavarovalnice prevzamejo del naložbenega tveganja in se morajo zato zaščititi z ustreznimi rezervacijami. Gre za zavarovalniške produkte, ki so povezani s finančnimi trgi. Pri naložbenih zavarovanjih zavarovanec vloži sredstva v določen vzajemni sklad.

Oblik garancij je precej, od preprostih garancij minimalnega donosa do bolj kompliciranih.

Pogodba življenjskega zavarovanja, vezanega na enoto premoženja običajno vsebuje varčevalno polico ali nadomestilo v primeru smrti, ki se izplača, v kolikor zavarovanec umre v času trajanja pogodbe [1].

2 Zakonodajni okvir

Enaindvajseti odstavek 7. člena Zakona o zavarovalništvu pravi, da je življenjsko zavarovanje z naložbenim tveganjem zavarovanje, pri katerem zavarovalec prevzema naložbeno tveganje povezano s spremembo vrednosti enot kolektivnih naložbenih podjemov za vlaganja v prenosljive vrednostne papirje, kot jih določa zakon, ki ureja investicijske sklade in družbe za upravljanje oziroma vrednosti sredstev, vsebovanih v notranjem skladu zavarovalnice, oziroma vrednosti indeksa vrednostnih papirjev, oziroma druge referenčne vrednosti.

Prvi odstavek 157. člena Zakona o zavarovalništvu utemeljuje, da Agencija za zavarovalni nadzor predpiše omejitve glede sredstev in referenčnih vrednosti, na katere so lahko vezana upravičenja iz zavarovalnih pogodb pri zavarovanjih, pri katerih zavarovalec prevzema naložbeno tveganje, kadar je zavarovalec lahko fizična oseba. Predpisi ne smejo biti bolj omejujoči, kot so omejitve, določene z Direktivo 2009/65/ES.

Prvi odstavek 186. člena Zakona o zavarovalništvu govori o tem, da zavarovalnica pri izračunu zavarovalno-tehničnih rezervacij upošteva vrednost finančnih garancij in drugih upravičenj na podlagi zavarovalnih pogodb.

Tretji odstavek 214. člena Zakona o zavarovalništvu narekuje, da pri življenjskih zavarovanjih, pri katerih zavarovalec prevzema naložbeno tveganje, izračun kapitalskih zahtev za operativno tveganje upošteva znesek letnih stroškov zavarovalnice, ki so nastali v zvezi s temi obveznostmi zavarovalnice do zavarovalcev, zavarovancev in drugih upravičencev iz zavarovalnih pogodb.

Deveti odstavek 226. člena Zakona o zavarovalništvu pravi, da zavarovalnica oceni tveganja v zvezi s finančnimi garancijami in drugimi upravičenji iz zavarovalnih pogodb, upoštevanih v notranjih modelih. Poleg tega zavarovalnice ocenijo tudi prodajna ter nakupna upravičenja, ki jih imajo same. V ta namen zavarovalnica upošteva vpliv prihodnjih sprememb finančnih in nefinančnih razmer na izvajanje teh prodajnih in nakupnih upravičenj.

Prvi odstavek 239. člena Zakona o zavarovalništvu navaja, da ne glede na drugi in tretji odstavek 236. in 238. člena tega zakona, se za naložbe sredstev zavarovalnice, v zvezi s pogodbami o življenjskem zavarovanju, pri katerih naložbeno tveganje nosijo zavarovalci, uporabljajo določbe tega člena.

Tretja točka prvega odstavka 521. člena Zakona o zavarovalništvu zatrjuje, da v kolikor zavarovanje krije nevarnosti v Republiki Sloveniji, zavarovalna pogodba obsega zlasti določbe o načinu izpolnitve, obsegu, morebitnih garancijah in dospelosti obveznosti zavarovalnice.

Osmi odstavek 521. člena Zakona o zavarovalništvu govori o tem, da v primeru zavarovanj, pri katerih zavarovalec prevzema naložbeno tveganje in so upravičenja, ki gredo zavarovancu na podlagi zavarovalne pogodbe, neposredno povezana z vrednostjo enote premoženja kolektivnih skladov naložbenih podjemov za vlaganja v prenosljive vrednostne papirje. Ta zakon govori tudi o:

- opredelitvi profila tveganj, povezanih z naložbeno politiko,
- znesku oziroma načinu obračuna nevarnostne premije in premije za dodatne nevarnosti,
- višini vseh posrednih in neposrednih stroškov, vključno z razkritjem metodologije oziroma načinom obračuna teh stroškov (stroški, ki v zavarovalni pogodbi niso razkriti, ne morejo biti obračunani oziroma upoštevani)
- višini in načinu obračuna vseh posrednih in neposrednih stroškov, ki zmanjšujejo vrednost enote premoženja kolektivnih skladov naložbenih podjemov za vlaganje v prenosljive vrednostne papirje,
- znesku predvidenih prihodnjih obveznosti zavarovalnice po zavarovalni pogodbi, ki se izračuna z uporabo obrestno-obrestnega računa pri nominalnih letnih stopnjah donosa oziroma realnih letnih stopnjah donosa, če prikaz vsebuje tudi ponazoritev vpliva inflacije, določene v predpisu iz desetega odstavka tega člena.

Deseti odstavek 521. člena Zakona o zavarovalništvu pravi, da so v primeru zavarovanj, pri katerih zavarovalec prevzema naložbeno tveganje in so upravičenja, ki gredo zavarovalcu na podlagi zavarovalne pogodbe, neposredno povezana z vrednostjo sredstev, vsebovanih v notranjem skladu zavarovalnice. Govori tudi o:

- naložbeni politiki ter pomembnih informacijah o vrstah naložb in tehnikah upravljanja,
- opredelitvi profila tveganj, povezanih z naložbeno politiko,
- znesku oziroma načinu obračuna nevarnostne premije in premije za dodatne nevarnosti,
- višini vseh posrednih in neposrednih stroškov, vključno z razkritjem metodologije ali načinom obračuna teh stroškov (stroški, ki v zavarovalni pogodbi niso razkriti, ne morejo biti obračunani oziroma upoštevani),
- višini in načinu obračuna vseh posrednih in neposrednih stroškov , ki zmanjšujejo vrednost sredstev, vsebovanih v notranjem skladu zavarovalnice (stroški, ki v zavarovalni pogodbi niso razkriti, ne morejo biti obračunani v breme sredstev, vsebovanih v notranjem skladu zavarovalnice),

- znesku predvidenih prihodnjih obveznosti zavarovalnice po zavarovalni pogodbi, ki se izračuna z uporabo obrestno-obrestnega računa pri nominalnih letnih stopnjah donosa ali realnih letnih stopnjah donosa, če prikaz vsebuje tudi ponazoritev vpliva inflacije, določene v predpisu iz desetega drugega odstavka tega člena.

Šesta točka prvega odstavka 522. člena Zakona o zavarovalništvu določa, da v primeru, ko je zavarovalec fizična oseba, zavarovalnica ali zavarovalni posrednik, se ob sklenitvi zavarovalne pogodbe iz prvega odstavka prejšnjega člena, z obvestilom v pisni ali elektronski obliki, zavarovanca seznani s podatki o načinu izpolnitve, obsegu in dospelosti obveznosti zavarovalnice ter morebitnih garancijah.

Šestnajsta točka prvega odstavka 598. člena Zakona o zavarovalništvu odreja, da premoženje kritnega sklada iz 3. in 4. točke petega odstavka 592. člena tega zakona, ki ga upravlja pokojninska družba, lahko predstavljajo samo naslednje vrste naložb terjatev do garancijskih, solidarnostnih in škodnih skladov.

Štirinajsta točka prvega odstavka 599. člena Zakona o zavarovalništvu pravi, da vrednost posameznih vrst naložb kritnega sklada iz 3. in 4. točke petega odstavka 592. člena tega zakona, ki ga upravlja pokojninska družba, ne sme presegati naslednjih odstotkov od skupne višine matematičnih rezervacij v terjatve do garancijskih, solidarnostnih in škodnih skladov iz 16. točke prvega odstavka prejšnjega člena skupno ne smejo presegati 5% zavarovalno-tehničnih rezervacij. Ne glede na določbo prejšnjega stavka, naložbe v terjatve do posameznega garancijskega, solidarnostnega in škodnega sklada, ne smejo presegati 2% zavarovalno-tehničnih rezervacij. [10]

2.1 Solventnost II

Ključni cilj Solventnosti II je bil povečati stopnjo usklajevanja ureditve zavarovalništva po celi Evropi, z namenom zaščite zavarovancev in uvedbe vseevropskih kapitalskih zahtev. Te kapitalske zahteve so v primerjavi z minimalnimi zahtevami iz Solventnosti I bolj občutljive do stopnje prisotnega tveganja ter zagotovljajo ustrezne spodbude za dobro obvladovanje tveganja [9].

Zagotavljanje solventnosti zavarovalnic (tj. trajno sposobnost izpolnjevanja obveznosti) je v interesu vseh strank. Zavarovancem je v interesu, saj na ta način ohranjajo pravice iz svojih zavarovalnih pogodb, prav tako je tudi lastnikom zavarovalnic v interesu, saj na ta način ne izgubijo vloženega kapitala in ga preko dobičkov trajno plemenitijo. V interesu je tudi zavarovalnim nadzornikom, katerih naloga je ohraniti zaupanje ljudi v sam finančni trg in ponudnike na njem [5].

Direktiva Solventnost II se uporablja v vseh zavarovalnicah in pozavarovalnicah EU, katerih bruto premijski dohodek presega 5 milijonov evrov ali bruto zavarovalno-tehnične rezervacije presegajo 25 milijonov evrov. Od 1. januarja 2016 je Solventnost II postala Zakon v članicah EU.

Predhodne ureditve so bile za določen čas (do 16 let) na razpolago za določene vidike, na primer zavarovalno-tehnične rezervacije, netvegane obrestne mere, zvezno uporabo ICA. Namen je bil preprečiti nepotrebne motnje na trgih in razpoložljivost zavarovalnih produktov [9].

Solventnost II je prinesla večjo zakonodajno preglednost, saj je ena direktiva nadomestila prejšnih štirinajst. Solventnost II sestoji iz treh stebrov, podobno kot Basel II za banke. Sam sistem solventnosti temelji na načelu izpostavljenosti posameznemu tveganju, poudarek pa je na kvantitativnem in kvalitativnem sprejemanju tveganj. Prav tako je Solventnost II vzpostavila bolj pregleden sistem vodenja, kjer so postavitve odgovornosti jasne in te zagotavljajo unčinkovitejše ter uspešnejše upravljanje družbe.

Bistvo nove ureditve je namreč v jasnem in celovitem razumevanju obvladovanja tveganj celotnega podjetja kot strateškega orodja za upravljanje zavarovalnic in ne zgolj kot tehnične podpore za odločanje [5].

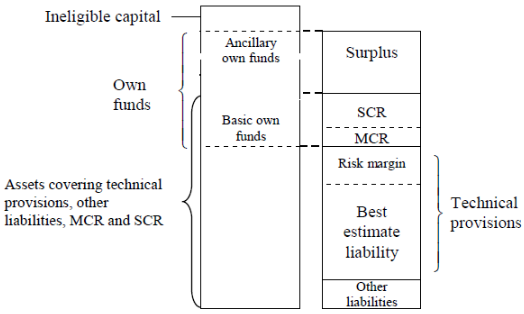
Režim Solventnosti II obsega tri stebre [9].

2.1.1 Stebri

Steber 1 določa minimalne kapitalske zahteve, ki jih morajo podjetja izpolnjevati. Določa metodologijo vrednotenja sredstev in obveznosti, zavarovalno-tehničnih rezervacij, lastnih sredstev ter ureja področje zahtevanega solventnostnega in minimalnega kapitala ter naložb. V okviru prvega stebra sta ločeni naslednji dve kapitalski zahtevi: solventnostna kapitalska zahteva (SCR) in minimalna kapitalska zahteva (MCR). SCR je tista višina kapitala, pri kateri je tveganje nesolventnosti $0,5\%$ v enem letu. [9] MCR je tista meja kapitala, pri kateri sta poslovanje zavarovalnice in tudi interes zavarovancev resno ogrožena in je umeščena pod SCR. SCR in MCR sta kapitalska nivoja, ki bosta nadomestila obstoječi sistem solventnostnih meja. [2]

Pričakuje se, da bodo zavarovalno-tehnične rezevacije krile vse morebitne škodne zahteve, ki izhajajo iz škodnih pogodb. Zato bosta SCR in MCR služila za zaščito zavarovalcev pred ostalimi nepričakovanimi izgubami, kot so na primer slabe finančne naložbe. Zavarovalnice lahko na dva načina izračunajo SCR, in sicer z uporabo standardnega pristopa ali pa oblikujejo svoj lastni interni model. Standardni pristop je manj zamuden, a temelji na povprečjih, kar lahko povzroči veliko ugibanj. [2]

Steber 2 pokriva predvsem kvalitativne zahteve v okviru Solventnost II in vključuje notranji nadzor, sisteme upravljanja zavarovalnic ter strukture za obvladovanje tveganj. Prav tako mora znotraj drugega stebra vsaka zavarovalnica izvajati ocenjevanje lastnih tveganj in



Slika 1: Steber 1.

solventnosti (ORSA). Organizacija ORSA-e zahteva, da vsaka zavarovalnica identificira tveganja, katerim je izpostavljena, vključno s tistimi, ki niso zajeta v prvem stebru. Zahteva tudi, da zavarovalnice opredelijo obvladovanje tveganj in še naprej izpolnjujejo zahteve MCR in SCR. Najbolj pomembno v okviru drugega stebra je uvajanje novega pristopa upravljanja zavarovalnice. [9]

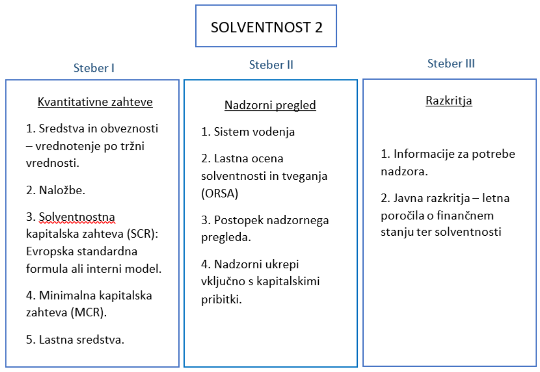
Steber 3 je ureditev poročanja, razkritij in nadzora, v skladu s katerimi je potrebno pripraviti finančne informacije o zavarovalnicah, oblikovanje informacij za zavarovalnice in njihovo kapitalsko ustreznost, ki bi bila predstavljena javnosti ter regulatorjem. Poročati morajo zavarovancem, investitorjem, bonitetnim agencijam in ostalim zainteresiranim z namenom, da pridobijo celovito sliko o tveganjih zavarovalnice. Tretji steber predstavlja "disciplinski učinek"v upravljanju zavarovalnic z zahtevo po tržni transparentnosti njihovega poslovanja. [2]

Zgornja kombinacija minimalnih kapitalskih standardov, kakovostnega obvladovanja tveganja zahtev, je dobro opredeljena in omogoča strog postopek preverjanja solventnosti podjetij s strani nadzornikov. Predpisana razkritja nadzornikom, zavarovancem in vlagateljem so oblikovana na način, da zagotovijo sodobnejši ter varnejši regulativni sistem. [9]

Stebri se pri Solventnost II po definiciji razlikujejo od stebrov iz Solventnost I. [9]

2.2 Zakonski okvir produktov z naložbenim tveganjem

Življenjsko zavarovanje z naložbenim tveganjem je zavarovanje, pri katerem zavarovalec prevzema naložbeno tveganje. Naložbeno tveganje je povezano s spremembo vrednosti enot kolektivnih naložbenih podjemov za vlaganja v prenosljive vrednostne papirje, na način, kot to določa zakon, ki ureja investicijske sklade in družbe za upravljanje sredstev. Ta sredstva so vsebovana v notranjem skladu zavarovalnice oziroma vrednosti indeksa vrednostnih papirjev, z drugimi besedami, druge referenčne vrednosti. Življenjsko zavarovanje z naložbenim



Slika 2: Stebri.

tveganjem združuje zavarovanje za primer smrti in varčevanje. Prav tako je naložbeno tveganje povezano s spremembo vrednosti enot kolektivnih naložbenih podjemov za vlaganja v prenosljive vrednostne papirje oziroma vrednostjo sredstev, ki so vsebovana v notranjem skladu zavarovalnice, vrednostjo indeksa ali drugo referenčno vrednostjo. Kadar zavarovanec pri življenjskem zavarovanju prejema naložbeno tveganje, se mu ob koncu zavarovalne dobe izplačajo sredstva, ki so bila do takrat privarčevana. Višina teh sredstev ni garantirana, saj je odvisna od poslovanja sklada oziroma donosnosti izbrane naložbe. Zaradi zgoraj navedenega ponujajo zavarovalnice različne kombinacije naložbenih življenjskih zavarovanj z določenimi garancijami, ki jamčijo izplačilo zbranih sredstev tudi ob poteku zavarovanja in včasih tudi med njegovim trajanjem. V času trajanja zavarovanja so vložena sredstva izpostavljena nihanju na kapitalskih trgih. Za primer smrti je višina zavarovalne vsote vedno zajamčena in nanjo ne vplivajo dogajanja z naložbami.

Naložbeno življenjsko zavarovanje je primerno za vse, ki želijo na dolgi rok ustrezno oplemenititi svoja vložena sredstva na kapitalskem trgu in so pripravljeni prevzeti naložbeno tveganje. Prav tako si prizadevajo za ustrezno zavarovalno varnost, najbolj takrat, ko je vrednost njihove naložbe še nizka. Zavedati se je potrebno, da se finančni trgi gibljejo v skladu z določenimi zakonitostmi ter so nagnjeni k ciklom večjih rasti in padcev. Varčevanje v skladih je dolgoročna oblika naložb, zato so pričakovanja o pozitivnih donosih na daljši rok [11].

3 Produkti z naložbenim tveganjem

3.1 Splošno o produktih z naložbenim tveganjem

Govorili bomo o življenjskem zavarovanju za obdobje t let. Ob upoštevanju, da je obdobje zavarovalne police t, označimo s t^{-1} čas tik pred plačilom premije. V času t^{-1} mora biti na razpolago rezerva V_{t^-} z namenom dosega aktuarskega ravnovesja med prihodnjimi nadomestili in prihodnjimi premijami, kot je prikazano v spodnji enačbi:

$$V_{t^-} = Ben'(t^-,m) - Prem'(t^-,m). \tag{3.1}$$

Da bi se izognili nesporazumom, kot opozorilo navajamo, da aktuarska vrednost $Ben'(t^-,m)$ ne vključuje zapadle obresti ob koncu leta $(t-1,t)$, medtem ko aktuarska vrednost $Prem'(t^-,m)$ vsebuje premijo, ki zapade v času t za leto $(t,t+1)$. Oznaka t^- samo opozarja, da se obravnavani količini upoštevata pred možnimi prilagoditvami, ki se zgodijo v času t. Iz enačbe (3.1) pridobimo ravnotežje:

$$V_{t^-} + Prem'(t^-,m) = Ben'(t^-,m), \tag{3.2}$$

kjer je $Ben'(t^-,m)$ bruto obveznost zavarovalnice v času t (neto obveznost ustreza razliki $Ben'(t^-,m) - Prem'(t^-,m)$). Enačba (3.2) nam pove, da se take bruto obveznosti financirajo s kratkoročnimi sredstvi, katerih vrednost je V_{t^-} ter so povezane s sredstvi, ki jih je potrebno kupiti s prihodnjimi premijami, katerih aktualno aktuarsko vrednost označimo s $Prem'(t^-,m)$.

Predpostavimo, da se v času t^- višina nadomestila prilagodi na način, da se njihova vrednost poveča po stopnji $j_t^{[B]}$. Tehnična podlaga se ne spremeni. Da bi ohranili aktuarsko ravnotežje med sedanjimi in prihodnjimi sredstvi ter bruto obveznostmi, je potrebno količino, ki se nahaja na levi strani enačbe (3.2) povečati po obrestni meri $j_t^{[B]}$. Novo ravnotežje je prikazano v spodnji enačbi:

$$(V_{t^-} + Prem'(t^-,m))(1+j_t^{[B]}) = Ben'(t^-,m)(1+j_t^{[B]}). \tag{3.3}$$

Enačba (3.3) ne zahteva, da se tako rezerva kot prihodnja premija povečata po stopnji $j_t^{[B]}$, na primer to ne bi bilo na primer možno, če bi bila $Prem'(t^-,m) = 0$, z drugimi besedami: da bi se zavarovalna polica izplačala. Kar je potrebno je to, da se njuna skupna vernost poveča po stopnji $j_t^{[B]}$. Vzamemo lahko različne stopnje prilagoditve rezerv in prihodnjih premij, ki jih označimo z $j_t^{[V]}$ in $j_t^{[\pi]}$, pod pogojem, da je izpolnjeno naslednje ravnotežje:

$$V_{t^-}(1+j_t^{[V]}) + Prem'(t^-,m)(1+j_t^{[\pi]}) = Ben'(t^-,m)(1+j_t^{[B]}). \tag{3.4}$$

Ker je izpolnjena enačba (3.2), enačba (3.4) zahteva naslednje:

$$V_{t^-} - j_t^{[V]} + Prem'(t^-,m)j_t^{[\pi]} = Ben'(t^-,m)j_t^{[B]}. \tag{3.5}$$

Enačba (3.5) nam pove, da morata biti prilagoditev rezerv in premij v aktuarskem ravnotežju z prilagoditvijo zaslužkov. Enačba (3.5) dopušča neskončno število rešitev, saj ima tri neznanke (to so tri stopnje prilagoditve $j_t^{[B]}$, $j_t^{[V]}$ in $j_t^{[\pi]}$). Znesek $V_{t^-}j_t^{[V]}$ je t.i. rezervni skok, z drugimi besedami: prilagoditev rezerv financira zavarovatelj, na način, da dobičke deli z zavarovalcem. Za ohranitev nadzora nad ustreznimi stroški, ki so zaračunani zavarovatelju, najprej izberemo vrednost za $j_t^{[V]}$, v skladu s pogoji zavarovalne police. Vrednost za stopnjo $j_t^{[\pi]}$ je prav tako izbrana v skladu s pogoji zavarovalne police. Izpolnjen je tudi pogoj, da se $j_t^{[B]}$ izračuna, kot je prikazano v enačbi (3.5). Prav tako lahko iz enačbe (3.5) izrazimo $j_t^{[B]}$ in dobimo:

$$j_t^{[B]} = \frac{j_t^{[V]}V_{t^-} + j_t^{[\pi]}Prem'(t^-,m)}{Ben'(t^-,m)}. \tag{3.6}$$

Sedaj zamenjamo $Ben'(t^-,m)$, tako kot je prikazano v enačbi (3.2) in dobimo:

$$j_t^{[B]} = \frac{j_t^{[V]}V_{t^-} + j_t^{[\pi]}Prem'(t^-,m)}{V_{t^-}Prem'(t^-,m)}. \tag{3.7}$$

Enačba (3.7) nam pokaže, da je stopnja prilagoditve nadomestil, $j_t^{[B]}$, tehtano povprečje stopnje prilagojenih rezerv, $j_t^{[V]}$, in stopnje prilagojenih premij, $j_t^{[\pi]}$. Uteži oziroma V_{t^-} in $Prem'(t^-,m)$, se spreminjata v času, saj se ukvarjamo z zavarovalnimi kritji, za katere so značilni prihranki (kot so na primer donacije ali celo življensko zavarovanje). Pričakovati bi morali, da se bo utež stopnje premij sčasoma zmanjševala, medtem ko bi utež rezerv naraščala. To pomeni, da če je t majhen (zlasti blizu časa 0), bi pričakovali, da je $j_t^{[B]}$ bližje $j_t^{[\pi]}$ kot $j_t^{[V]}$, obratno pa, če je t visok in blizu zapadlosti m, bi pričakovali, da je $j_t^{[B]}$ bližji $j_t^{[V]}$ kot $j_t^{[\pi]}$. Če je $Prem'(t^-,m) = 0$, kot na primer pri enkratni premiji ali pri plačani zavarovalni polici, ali $t = m$ potem velja $j_t^{[B]} = j_t^{[V]}$.

Sprva smo ugotovili, da je po prilagojenih nadomestilih potrebno določiti rezervo v času t, vendar je rezervo potrebno določiti, preden se izvede plačilo premije, kot je prikazano v spodnji enačbi:

$$V_t = V_{t^-}(1+j_t^{[V]}). \tag{3.8}$$

Iz enačbe (3.4) dobimo ustrezen izraz v smislu aktuarske vrednosti prihodnjih nadomestil in premij:

$$V_t = Ben'(t^-,m)(1+j_t^{[B]}) - Prem'(t^-,m)(1+j_t^{[\pi]}) \tag{3.9}$$

Če velja naslednje:

$$Ben'(t,m) = Ben'(t^-,m)(1+j_t^{[B]}), \tag{3.10}$$

$$Prem'(t,m) = Prem'(t^-,m)(1+j_t^{[\pi]}), \tag{3.11}$$

lahko napišemo:

$$V_t = Ben'(t,m) - Prem'(t,m), \tag{3.12}$$

kar pa nam pokaže, da je V_t predvidena rezerva, kar je tudi zaželjeno. Upoštevati moramo, da je rezerva V_t ocenjena glede na posodobljene zneske nadomestil in premij, medtem ko tehnična podlaga ostane nespremenjena.

Iz zgornje navedbe bi moralo biti jasno, da prilagoditev vključuje samo zaslužke, neto premije in neto rezerve. Vendar, če imamo $j_t^{[\pi]} > 0$, kar predstavlja prilagojeno premijo obremenitvenih stroškov, se na ta način prilagodi obremenitvene stroške, kar pa ta model strogo gledano ne zahteva. Prilagoditev obremenitvenih stroškov bi lahko zavarovatelju zaradi učinkov inflacije nadomestila administrativne stroške. Če je pogodba zasnovana na način, da je $j_t^{[\pi]} > 0$, potem so obremenitveni stroški za administracijo nižji od tistih, ki se uporabljajo pri sklenitvi pogodbe, tako da je $j_t^{[\pi]} = 0$.

V zgornjem delu smo iz rezerv v času t^- odstranili nadomestila, ki so nastala ob koncu leta $(t-1,t)$. To pa pomeni, da je rezerva V_{t^-} vzpostavljena samo za tiste zavarovalne police, pri katerih so zavarovalci v času t še vedno živi. S tehničnega vidika bi lahko v V_{t^-} vključili tudi ugodnosti, ki bi bile na voljo v času t. V tem primeru bi V_{t^-} pomenila rezervo, ki je bila določena v času t^- za vse veljavne zavarovalne police na začetku leta , to je v času $t-1$. Z uradnega vidika lahko predstavljeni model sprejmemo. Uteži iz enačbe (3.7) bi bile drugačne, če bi bile rezerve višje, kot so zgoraj opisane. V nadaljevanju se bomo sklicevali samo na prvo razlago, torej, da V_{t^-} ne vsebuje ugodnosti v času t, razen če gre za čas zapadlosti v času $t = m$. Na prvo razlago se bomo sklicevali, ker je to prevladujoč pristop v aktuarski praksi [6].

3.1.1 Obravnavanje določenih zavarovalnih produktov

V tem podpoglavju bomo predstavili delovanje modela prilagojenih nadomestil, ki smo ga opisali v poglavju 3.1 na določenih zavarovalniških kritjih.

Najprej se sklicujemo na standardno zavarovalno premoženje, ki je bilo izdano v času 0, z zapadlostjo m, nadomestilom C in letno premijo P. Predpostavimo, da je P izračunana kot:

$$P(s) = \frac{A'_{x,m\rceil}}{\ddot{a}'_{x:s\rceil}}, \tag{3.13}$$

kjer velja $m = s$. Potrebno je razširiti oznaki za nadomestila in premije.

S P_t označimo premijo, ki jo je potrebno na podlagi takratne prilagoditve plačati v času t. Določimo, da je $P_0 = P$, medtem ko velja:

$$P_t = P_{t-1}(1 + j_t^{[\pi]}). \tag{3.14}$$

Nadomestilo v primeru smrti v času $t+1$ označimo s C_{t+1}, zlasti kadar velja $C_1 = C$:

$$C_{t+1} = C_t(1 + j_t^{[B]}). \tag{3.15}$$

Upoštevati je potrebno, da ob pogostejši praksi predpostavljamo, da se prilagoditev uporablja v času t samo za zavarovalne police veljavne v času t. Nadomestilo v primeru preživetja v času t označimo s S_t. V primeru $S_0 = C$, je znesek že določen, medtem ko je:

$$S_t = S_{t-1}(1 + j_t^{[B]}), \tag{3.16}$$

definirana vrednost v času t. Tako imamo $S_t = C_{t+1}$ za $t = 0, 1, ..., m-1$, kar je razumljivo glede na to, da se ukvarjamo s standardnim zavarovanjem. V času m lahko izvedemo končne prilagoditve za veljavne zavarovalne police, tako da bo $S_m = S_{m-1}(1 + j_m^{[B]})$ oziroma $S_m = C_m(1 + j_m^{[B]})$.

Enačbi za rezervacije sta naslednji:

$$V_{t^-} = C_t A'_{x+t,m-t\rceil} - P_{t-1}\ddot{a}'_{x+t:m-t\rceil}, \tag{3.17}$$

$$V_t = C_{t-1} A'_{x+t,m-t\rceil} - P_t \ddot{a}'_{x+t:m-t\rceil}, \tag{3.18}$$

za $t = 1, 2, ..., m-1$, medtem ko imamo za $t = m$:

$$V_{m^-} = S_{m-1}, \tag{3.19}$$

$$V_m = S_m. \tag{3.20}$$

Vidimo da, v kolikor je $t = 0$, dobimo $V_0 = 0$, medtem ko V_{0^-} ni definiran, saj čas 0^- zaenkrat še ne obstaja znotraj trajanja zavarovalnih polic.

Iz enačbe (3.7) opazimo, da je stopnja prilagoditve nadomestil $j_t^{[B]}$ vmesna vrednost med $j_t^{[V]}$ in $j_t^{[\Pi]}$ za $t = 1, 2...m-1$. V času m ni potrebno plačati nobene premije in zato imamo $j_m^{[B]} = j_m^{[V]}$.

Sedaj si oglejmo življenjsko zavarovanje, ki je izdano v času 0, s koristnostjo C ter letnimi premijami P, plačljivimi za s let in ki se ocenjuje po spodnji enačbi:

$$P(s) = \frac{A'_x}{\ddot{a}'_{x:\overline{s}|}}. \tag{3.21}$$

Enačbi (3.14) in (3.15) opisujeta prilagojeno premijo ter prilagojene koristi, ki veljajo tudi za primer, ko je $t = 1,2,...,s-1$, in s $P_0 = P(s)$. Za rezervacije imamo dve spodnji enačbi:

$$V_{t^-} = C_t A'_{x+t} - P_{t-1}\ddot{a}'_{x+t:\overline{s-t}|}, \tag{3.22}$$

$$V_t = C_{t+1} A'_{x+t} - P_t\ddot{a}'_{x+t:\overline{s-t}|}, \tag{3.23}$$

za $t = 1,2,...,s-1$ in

$$V_{t^-} = C_t A'_{x+t}, \tag{3.24}$$

$$V_t = C_{t+1} A'_{x+t}, \tag{3.25}$$

za $t = s, s+1,....$ Stopnja ugodnih nadomestil, $j_t^{[B]}$, je povprečje stopnje ugodnih rezervacij in premij, vse dokler ostanejo še premije, ki jih je potrebno plačati, tj. za $t = 1,2,...,s-1$, obratno se za $t = s, s+1,...$ izkaže, da velja $j_t^{[B]} = j_t^{[V]}$, saj je v tem obdobju izplačana zavarovalna polica.

Poglejmo sedaj takojšnjo rento za preživetje, ki je izdana pri starosti x in z začetnim zneskom letnih nadomestil b. Stopnjo ugodnih nadomestil (še zmeraj) v času t označujemo z $j_t^{[B]}$. Ker je zavarovalna polica financirana z eno samo premijo iz enačbe (3.7), sledi, da je $j_t^{[B]} = j_t^{[V]}$ za vsak čas t, kjer je $t = 1,2,....$ Korist, ki je prilagojena v času t je oblike:

$$b_t = b_{t-1}(1 + j_t^{[V]}), \tag{3.26}$$

kjer je $b_0 = b$. V skladu s predpostavkami, na katerih temelji enačba (3.7), je bila koristnost, ki je bila nazadnje prilagojena v času $t-1$, plačana v času t, torej za rezervacijo dobimo naslednji enačbi:

$$V_{t^-} = b_{t-1} a'_{x+t}, \tag{3.27}$$

$$V_t = b_t a'_{x+t}. \tag{3.28}$$

Ker se nadomestila v času t izplačajo veljavnim zavarovalnim policam, je smiselno prilagoditi pravico do nadomestila pred plačilom (tako bi bila korist, b_t, plačana v času t), podobno kot se zgodi pri nadomestilu zapadlosti zavarovalnih polic. Izbira med eno ali drugo rešitvijo je odvisna od tega, kako pogosto so bile izplačane koristi, ki se ponavadi izplačujejo letno, lahko se izplačujejo tudi mesečno. Če se bodo izplačale mesečno, je potem smiselno, da se bodo nadomestila izplačala v času t [6].

4 Tipi garancij

Zavarovalne police, ki uporabljajo zgoraj predstavljeni model, zagotavljajo nekaj (implicitnih) garancij za donos naložbe zavarovanca. Naložba, ki jo ustvari zavarovalnica, ni preveč tvegana. Sredstva so običajno sestavljena iz obveznic. Notranji investicijski sklad neposredno upravlja zavarovatelj. Ker zavarovatelj upravlja z investicijskim skladom, letni donos ne odraža samo tržnih pogojev, temveč tudi investicijske zmožnosti zavarovalnice. V nekaterih državah mora biti pravi donos potrjen s strani nepristranskega revizorja. V tem primeru morajo biti sredstva, ki podpirajo rezervacije, objektivno prepoznana v okviru celotnih sredstev zavarovalnice. Oddajati morajo posebna poročila, sklad pa se imenuje posebni (upravljalni) ali ločeni sklad [6].

Vsak posamezni tip garancij predstavlja zaščito varčevalnega računa zavarovanca. GMDB je garancija, ki ščiti varčevalni račun, po navadi v delovni dobi zavarovanca ter nekaj let po upokojitvi, v primeru prezgodnje smrti zavarovanca. GMIB je garancija, ki ščiti varčevalni račun po upokojitvi, še posebej v primeru daljše življenjske dobe zavarovanca. GMSB je garancija, ki zavarovancu zagotovi določen znesek izplačila v primeru, da zavarovanec prekine pogodbo [3].

4.1 Variabilno zavarovanje

Variabilno zavarovanje je dolgoročna investicija, ki zajema širok spekter zavarovalniških produktov. Vrednost zavarovalniških produktov lahko zavarujemo pred tveganjem prezgodnje smrti ali pred investicijskim tveganjem s primerno izbiro garancije. Variabilno zavarovanje je bilo sprva namenjeno zagotovitvi dohodka v času upokojitve, danes pa predstavljata akumulacija in nadomestilo v primeru smrti pomembni sestavini zavarovalniškega produkta. Variabilno zavarovanje lahko oblikujemo na način, da ta ponuja dinamične možnosti naložb z določeno garancijo, zaščito v primeru predčasne smrti in/ali prihodkom po upokojitvi.

Glavna razlika med tem in tradicionalnim zavarovanjem je ta, da lahko pri variabilnem zavarovanju zavarovanec izbira med različnimi garancijami, ki se nanašajo na akumulacijsko dobo pogodbe, pokojninsko varčevanje ali pa na prezgodnjo smrt zavarovanca.

Variabilna zavarovanja so naložbene pogodbe, ki imajo različno zagotovljena izplačila v primeru doživetja ali smrti. Te bomo označili z GMxB, kjer x predstavlja vrsto garancije. Garancije razdelimo v dve skupini:

- GMLB, garantirana minimalna izplačila v primeru doživetja,
- GMDB, garantirana minimalna izplačila v primeru smrti.

GMLB lahko razdelimo še na naslednje garancije:

- GMAB, garantirana minimalna izplačila v akumulacijski dobi,
- GMIB, garantirana minimalna izplačila v primeru doživetja,
- GMWB, garantirana minimalna izplačila v primeru delnega umika pogodbe,
- GMSB, garantirana minimalna izplačila v primeru prekinitve pogodbe znotraj akumulacijske dobe GMSB.

Variabilna zavarovanja se izdajajo z enkratno premijo ali ponavljajočimi se premijami. Skupnemu znesku premij pravimo vloženi znesek. Zavarovanec lahko izbira med manj ali bolj tveganimi naložbenimi možnostmi, z drugimi besedami: izbira lahko med konzervativnimi ali dinamičnimi strategijami. Najpogosteje enkratletno, lahko zavarovanec brez stroškov spremeni izbrano naložbeno strategijo. Stroški zagotavljanja minimalnih garancij se zaračunavajo kot letni odbitek v velikosti določenega odstotka vrednosti zavarovalnega računa. Nosilcu zavarovalne police mora biti sporočen vsak odbitek na računu in tako je zagotavljena večja transparentnost pogodbe. Prav tako lahko zavarovanec dodaja ali odvzema garancije po sklenitvi pogodbe, tako da se potrebni stroški zagotovljanja izbrane garancije naknadno dodajo ali ukinejo [6].

4.2 Zavarovalne police z garantiranim letnim donosom

Naj bo g_t donos naložbe, ki ga je zavarovatelj pridobil v letu $(t-1,t)$ na osnovi vloženih sredstev, ki podpirajo rezervacije podjetja z udeležbo v dobičku. Pri splošnih ureditvah za podjetje z udeležbo v dobičku so pogoji zavarovalne police tisti, ki določajo skupni donos naložbe zavarovalca v letu $(t-1,t)$, kot sledi:

$$\max\{i', \eta_t g_t\}, \tag{4.1}$$

kjer je η_t določeni delež, tako imenovani delež udeležbe, in je i' tehnična obrestna mera. Upoštevati je potrebno, da je v enačbi (4.1) tehnična obrestna mera garantirana za vsako leto. Zavarovatelj lahko iz leta v leto izbere količino za η_t, ki pa ne sme biti pod najnižjo vrednostjo η' in pod 1 (torej: $0 \leq \eta' \leq \eta_t < 1$, na primer $\eta' = 0,75$). Ponekod je dogovorjena tudi čakalna doba (1 ali 2 leti), kjer mora veljati $\eta_t = 0$. Ta pogoj upravičuje dejstvo, da je kredit zavarovatelja v prvih letih pogodbe, z upoštevanjem začetnih stroškov, še vedno previsok. V splošnem bi lahko uspešna izbira η_t omogočila uresničitev izravnave celotnega donosa, ki ga plača zavarovalec z naložbo. Kot primer lahko izberemo manjšo vrednost η_t pri visoki obrestni meri g_t in obratno. Višja kot je vrednost η_t, nižja je stopnja obrestne mere g_t. Vendar pa na nekaterih trgih določijo, da je η_t v času bolj ali manj konstantna. Dejstvo, da nadzornik zahteva, da je $\eta_t < 1$ pomeni, da mora zavarovalnica zadržati nekaj dobička, da bi se lahko soočila z neugodnimi nihanji v prihodnosti.

Skupni letni donos na naložbo zavarovalca mora zadovoljevati opredelitev (4.1) in na ta način lahko izračunamo r_t. Najprej je potrebno navesti, kolikšen je vloženi znesek zavarovalca. V začetku leta, tj. v času $t-1$ po plačilu premije, naložba zavarovalca vsebuje rezervo V_{t-1} in varčevalno premijo $P^{[S]}_{t-1}$ (opozoriti je potrebno, da se premija za tveganje in obremenitveni stroški uporabljajo za financiranje letnih stroškov ter zato ne prispevajo k naložbam zavarovalca). Ob koncu leta, tj. v času t, označimo vrednost naložbe, ki sodi v veljavno zavarovalno polico, z V_t. V skladu s pogojem (4.1) mora veljati:

$$V_t = (V_{t-1} + P^{[S]}_{t-1})(1 + \max\{i', \eta_t g_t\}). \tag{4.2}$$

Kot je zgoraj navedeno, se stopnja r_t uporablja za posodobitev rezervacije V_{t^-}, tako da izpolnjuje enačbo (4.2). Rezervacijo V_{t^-} izrazimo na spodnji način:

$$V_{t^-} = (V_{t-1} + P^{[S]}_{t-1})(1 + i'). \tag{4.3}$$

Enačba (4.3) velja tudi, ko premija ni bila plačana. Povezava med V_t in V_{t^-} je opisana v enačbi (3.8) z $j^{[V]}_t = r_t$. Z zamenjavo (4.3) in (3.8) dobimo:

$$V_t = (V_{t-1} + P^{[S]}_{t-1})(1 + i')(1 + r_t). \tag{4.4}$$

Iz enačb (4.2) in (4.4) dobimo:

$$(1 + i')(1 + r_t) = 1 + \max\left\{i', \eta_t g_t\right\}. \tag{4.5}$$

Zato sledi:

$$r_t = \max\left\{\frac{\eta_t g_t - i'}{1 + i'}, 0\right\}. \tag{4.6}$$

Nezmožnost znižanja r_t pod 0 je posledica dejstva, da je tehnična obrestna mera i' garantirana letno. V resnici pa lahko razmerje $\frac{\eta_t g_t - i'}{1+i'}$ postane negativno, če je $\eta_t g_t < i'$, in sicer, če je realizirani donos naložbe nižji od tehnične obrestne mere. Nasprotno pa je potrebno donosnost naložbe nad i', tj. da mora biti razlika $\eta_t g_t - i'$ deljiva z $1 + i'$, saj so obresti, ki temeljijo na tehnični obrestni meri i' izračunane vnaprej, kot je eksplicitno navedeno v enačbi (4.3). Izraz (4.6) ustreza izplačilu finančne opcije, saj je tehnična obrestna mera i' garantirana z minimalnim letnim donosom glede na naložbo zavarovalca.

Če velja pogoj (4.1), je v vsakem letu garantirana donosnost, ki pa ni nižja od i'. Donos, ki je v enem letu dosežen nad i', in sicer $\eta_t g_t - i'$, je zaklenjen (*ang. locked-in*), kot je razvidno iz enačbe (4.6). Zato se mora zavarovatelj pri ocenjevanju stopnje g_t prepričati, da donosa, ki ga je pridobil v enem letu, ni mogoče izgubiti v naslednjih letih. Z drugimi besedami: stopnja g_t mora biti trajno pridobljena, tj. biti mora pripisana. Donos, ki temelji na sedanji vrednosti sredstev, ni ustrezen, saj je tržna vrednost sredstev odvisna od depreciacije (če se tržni pogoji spremenijo na slabše). Načeloma se sredstva, ki podpirajo rezervacije podjetij z udeležbo v dobičku, poročajo po izvirni vrednosti (jasno pa je, da veljajo številna računovodska pravila, o katerih pa ne bomo razpravljali).

Alternativna definicija stopnje prevrednotenja r_t je naslednja:

$$r_t = \max\{\frac{\eta_t g_t - i'}{1+i'}, r_{min}\}, \tag{4.7}$$

kjer je r_{min} minimalna garantirana letna stopnja prevrednotenja. Po navadi pravimo stopnji r_{min} tudi garantirana stopnja, vendar se bomo temu izrazu izognili, da ne bi prišlo do nesporazuma, saj je i' prav tako garantirana stopnja. Kot poseben primer najdemo (4.6), če zapišemo $r_{min} = 0$. Običajno je (4.7) mišljen z nižjo tehnično obrestno mero i', kot je po navadi, morda $i' = 0$. Potem je r_{min} nastavljen na način, da bo garantirana stopnja zagotovljena. Kot primer lahko navedemo: če je zavarovatelj pripravljen zagotoviti letni donos v višini 2% lahko izbira med $i' = 0.02$ in $r_{min} = 0$, ali pa $i' = 0$ in $r_{min} = 0.02$ ali $i' = 0.01$ ter $r_{min} = 0.01$ in tako naprej. Učinek zmanjševanja i' glede na običajne stopnje pomeni izogib računanju garantiranih obresti vnaprej (le nekaj). Za dosego zapadlosti zavarovalne police, bodisi če računajo vnaprej ali ne, je garantirana stopnja do neke mere enaka, obratno pa velja, v kolikor se zavarovalna polica zapre pred zapadlostjo, se lahko izkaže, da je korist nižja, če obresti niso bile izračunane vnaprej. Opazimo, da je tip finančne opcije, ki je vgrajen v (4.7), enak kot v (4.6), s tem, da imata različne parametre [6].

4.3 Zavarovalne police z garantiranim povprečnim donosom

Kot smo ugotovili v podpoglavju 4.1, zavarovatelj ne uporablja pristojbin za finančne opcije, ki so vključene v (4.6) in (4.7). Tehnična opredelitev je, da model, ki je opisan v podpoglavju 3.1, zagotavlja, da je pogodba vedno v aktuarskem ravnovesju. Ekonomska utemeljitev modela, ki je opisan v podpoglavju 4.1 pravi, da so bile vrednost finančnih opcij iz enačb (4.6) in (4.7), mnogo let zanemarjena.

Sprašujemo se, zakaj garancija vpliva na nadomestila. Ugotavljamo, da je zaradi enačb (4.6) in (4.7) zagotovljeno $j_t^{[B]} \geq 0$, kar je bilo za pričakovati, saj garancija vpliva tako na nadomestila ob zapadlosti kot na nadomestila v primeru smrti. Prav tako garancije vplivajo na rezervacije, saj imamo v enačbi (4.6) $r_t \geq 0$, medtem ko imamo v enačbi (4.7) $r_t \geq r_{min}$. Vemo, da je odkupna vrednost del rezerve, zato garancija vpliva tudi nanjo.

Glede na to, da so finančne garancije zaradi zasnove vgrajene v zavarovalne police, kar zlasti pomeni, da se nobena pristojbina ne uporablja, so v zadnjem času zavarovatelji uvedli nova pravila za izračun prevrednotene stopnje r_t, z namenom zmanjšanja stroškov garancij. V nadaljevanju se bomo ukvarjali s to sodobno obliko sodelujočih zavarovalnih polic, ob predpostavki, da je $j_t^{[\pi]} = 0$, kar je danes običajno.

V zvezi z zavarovalnimi policami, ki imajo udeležbo v dobičku, je potrebno opozoriti na akumulacije premije za varčevanje, kar pomeni, da gledamo samo na akumulacijo naložbe zavarovalca. Razumemo torej sklicevanje na politiko investiranja. Kot primerjavo bomo najprej obravnavali tradicionalno zavarovalno politiko z določenimi ugodnostmi. Tak izdelek garantira donosnost naložbe i'.

Razvoj v času naložbe zavarovalca je opisan v spodnji enačbi:

$$V_t = (V_{t-1} + P_{t-1}^{[S]})(1+i'), \tag{4.8}$$

in potem

$$V_t = \sum_{s=0}^{t-1} P_s^{[S]} (1+i')^{t-s}. \tag{4.9}$$

S

$$f(s,t) = (1+i')^{t-s}, \tag{4.10}$$

označimo akumulacijski faktor, ki se uporablja za varčevalno premijo.

Sedaj se sklicujemo na sodelujočo zavarovalno polico s stopnjo r_t, kot v enačbi (4.6). Za lažjo primerjavo med različnimi primeri bomo takšno stopnjo prevrednotenja označevali z $r_t^{[1]}$. Razvoj v času naložbe zavarovalca lahko opišemo na naslednji način (glej (4.2) in (4.4)):

$$\begin{gathered} V_t = (V_{t-1} + P_t^{[S]})(1+i')\left(1 + \max\left\{\tfrac{\eta_t g_t - i'}{1+i'}, 0\right\}\right) = \\ (V_{t-1} + P_t^{[S]})(1 + \max\{\eta_t g_t, i'\}). \end{gathered} \tag{4.11}$$

Tako lahko definiramo akumulacijski faktor na naslednji način:

$$f^{[1]}(t-1,t) = (1 + \max\{\eta_t g_t, i'\}), \tag{4.12}$$

za leto $(t-1,t)$. V splošnem imamo za časovni interval (s,t):

$$f^{[1]}(s,t) = \sum_{h=s+1}^{t} (1 + \max\{\eta_h g_h, i'\}). \tag{4.13}$$

Izkaže se, da je

$$f^{[1]}(s,t) \geq f(s,t), \tag{4.14}$$

zaradi učinka zaklepanja.

Če je prevrednotena stopnja r_t definirana, kot je v enačbi (4.7), po preučitvi razvoja v času, ko je zavarovalec investiral ugotovimo, da je akumulacijski faktor:

$$\begin{aligned} f^{[2]}(t-1,t) = (1+i')\left(1+\max\left\{\tfrac{\eta_t g_t - i'}{1+i'}, r_{min}\right\}\right) = \\ \max\left\{(1+i')(1+r_{min}), (1+\eta_t g_t)\right\}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Splošni zapis za $f^{[2]}$ je:

$$f^{[2]}(s,t) = \prod_{h=s+1}^{t} \max\left\{(1+i')(1+r_{min}), (1+\eta_h g_h)\right\}. \tag{4.16}$$

Izkaže se naslednje:

$$f^{[2]}(s,t) \geq f(s,t), \tag{4.17}$$

zaradi učinka zaklepanja. Nadalje, parametra i' in r_{min} iz enačbe (4.16), sta pogosto izbrana tako, da velja:

$$f^{[2]}(s,t) = f^{[1]}(s,t), \tag{4.18}$$

za vsak časovni interval (s,t). V nadaljevanju bomo naredili primerjavo in se bomo pri tem sklicevali na stopnjo prevrednotenja, ki jo določa enačba (4.7), glede na stopnjo $r_t^{[2]}$.

Poglejmo sedaj stopnjo prevrednotenja $r_t^{[3]}$, ki je definirana na naslednji način:

$$r_t^{[3]} = \frac{\eta_t g_t - i'}{1+i'}. \tag{4.19}$$

Glede na na razliko $\eta_t g_t - i'$ lahko stopnja $r_t^{[3]}$ zavzame negativne vrednosti in v tem primeru ni vključena nobena garancija. Akumulacijski faktor, ki temelji na $r_t^{[3]}$, je lahko definiran na naslednji način:

$$f^{[3]}(s,t) = \prod_{h=s+1}^{t} (1+\eta_h g_h). \tag{4.20}$$

Pri enačbi (4.20) imamo lahko:

$$f^{[3]}(s,t) \lesseqgtr f(s,t), \tag{4.21}$$

kar pomeni, da ni garancije. Nadalje:

$$f^{[3]}(s,t) \leq f^{[1]}(s,t), \tag{4.22}$$

$$f^{[3]}(s,t) \leq f^{[2]}(s,t). \tag{4.23}$$

Opazimo, da je bil tak akumulacijski faktor $f^{[3]}(s,t)$ uporabljen v enačbi (4.1) kot primerjava s $f^{[1]}(s,t)$ (ne glede na to, da ta notacija prej ni bila uvedena). Pri tej enačbi smo omenili, da rešitev enačbe (4.20) ni možna v primeru, ko racionalni zavarovalec v skladu s sodelujočo zavarovalno polico ne sprejme garancije. Vendar je edini način, da se izognemo zaklepanju dodatnih donosov na naložbe, ko je to potrebno, da dovolimo prevrednoteni stopnji r_t, da postane negativna. Velja naslednje: če je $r_t < 0$, se rezervacije zmanjšajo na način, da se pozitivne prilagoditve, ki so bile uporabljene v prejšnjih letih, vsaj delno izravnajo.

Če lahko stopnja prevrednotenja r_t zavzame negativne vrednosti, kot v enačbi (4.19), lahko dobimo $j_t^{[B]} < 0$ (prej smo prevzeli, da je $j_t^{[\pi]} = 0$). Zato nadomestila v primeru smrti in ob zapadlosti niso več zagotovljena in kakor smo že omenili, to ni sprejemljivo. Če je sprejeta stopnja iz (4.19), lahko uvedemo eksplicitno garancijo na nadomestilo v primeru smrti, kot na primer opredelitev nadomestila v primeru smrti v času t, zato sledi:

$$C_t = C_1 \times \max\left\{\prod_{s=1}^{t-1}(1+j_s^{[B]}), (1+j^{[B,guar]})^{t-1}\right\}, \tag{4.24}$$

kjer je C_1 prvotno nadomestilo v primeru smrti (tj. znesek, ki je naveden za izračun premije). $\prod_{s=1}^{t-1}(1+j_s^{[B]})$ je prevrednotenje, ki je pridobljeno v časovnem intervalu $(1,t-1)$ in temelji na podlagi ugotovljenih donosov naložbe, $j^{[B,guar]}$ je najnižja zagotovljena prevrednotena stopnja nadomestila v primeru smrti. Upoštevati je potrebno, da se za preprečitev zamenjave preteklih prevrednotenj, stopnja $j^{[B,guar]}$ zagotovi samo do plačila nadomestila v primeru smrti, saj izraža najnižjo letno povprečno stopnjo prevrednotenja nadomestila v primeru smrti in ta je zagotovljena. Podobno garancijo lahko uvedemo tudi pri nadomestilu ob zapadlosti. Glede na to, da so nadomestila ob zapadlosti posledica kopičenja privarčevane premije, je običajno izraziti garancijo v smislu akumulacijskega faktorja. Sprejeta bi lahko bila na primer naslednja opredelitev:

$$f^{[4]}(s,m) = \max\left\{\prod_{h=s+1}^{m}(1+\eta_h g_h), (1+i')^{m-s}\right\}, \tag{4.25}$$

kjer je povračilo, zagotovljeno do zapadlosti, označeno z i'. Faktor $f^{[4]}(s,m)$ je mišljen samo za časovne intervale (s,m), $s = 0,1,...,m-1$. Upoštevati je potrebno naslednje:

$$f^{[4]}(s,m) \geq (1+i')^{m-s}, \tag{4.26}$$

tako, da se bo vsaka varčevalna premija glede na nadomestilo ob zapadlosti akumulirala po letni stopnji, ki v povprečju ni nižja od i'. V enačbi (4.26) smo z i' označili povprečno najmanjšo letno donosnost, ki je zagotovljena za naložbo zavarovalca. Pretekli dodatni donosi tudi v tem primeru niso zaklenjeni. Zavarovalnice so zasnovale rešitve, ki se ne izognejo zaklepanju dodatnih donosov, vendar pa se ta proces zaklepanja ne zgodi vsako leto. Sprejeta je bila stopnja $r_t^{[3]}$, vendar mora biti vsakih k let (od časa 0) povprečni donos naložbe zavarovanca vsaj i'. V tem primeru bi bil lahko akumulacijski faktor definiran na naslednji način:

$$f^{[5]}(s,t) = f^{[5]}(s,z) \times \begin{cases} \prod_{h=z+1}^{t}(1+\eta_h g_h), & \text{if } z < t < z+k \\ \max\{\prod_{h=z+1}^{k}(1+\eta_h g_h),(1+i')^k\}, & \text{if } t = z+k \end{cases}, \tag{4.27}$$

kjer je $z = 0,k,2k,...$ in $s \leq z$. Rešitev (4.27) implicira parcialno zaklepanje dodatnega donosa na naložbe. Obdobje k pogosto predstavlja 3 ali 5 let; če je $k = m$ imamo kot poseben primer (4.25); tj.: donos je zagotovljen do zapadlosti. Pri nekaterih zavarovalnih policah znotraj enačbe (4.27), v času $k,2k,...$, se rezerve ne morejo zmanjšati (v času $k,2k,...$ stopnja prevrednotenja ne more biti negativna) [6].

Garancijo je mogoče opisati kot prihodnjo določitev dogovorjene vrednosti in jo je potrebno razlikovati od zavarovalnega mehanizma, ki prinaša pogojno korist. S tega vidika je čista (brezpogojna) garancija dostavljena vsem kritim strankam, saj so na podlagi pogodbe vse upravičene do dogovorjene vrednosti. V praksi obstajajo različni mehanizmi, ki omogočajo, da je zgoraj napisano pravilo manj strogo, vključno z nekaterimi pogojnimi ukrepi, kar zagotavlja učinkovito garancijo le v določenih pogojih. Kljub temu je vprašanje o primerljivosti izida za stranke in sredstva, ki podpirajo garancije, veljavno [12].

Prilagodljiva garancija povečuje volatilnost bodočih prihodkov v primerjavi s sorazmerno stabilno želeno oziroma prednostno raven izida. Potencialni vpliv na prihodke bi lahko bil velik zaradi vedno večjega števila pogojnih garancij (na podlagi makroekonomskih in demografskih spremenljivk) v javnih pokojninskih shemah. Pojasnjena morajo biti tudi vprašanja o ponudbi. Zato so na tem področju potrebne nadaljnje raziskave, zlasti glede:

- pomena in zaznavanja garancij za potrošnike (subjektivni pristop), kot garancije za učinkovito določamje donosnosti sredstev, ki preprečujejo dodatni dobiček ali vsaj omejujejo dobičke pod garancijo ter istočasno zmanjšujejo marginalno uporabnost premoženja. Ta je značilna za večji delež družbe in pomeni večjo uporabnost glede gotovosti kot naključnega dogodka. Z gospodarskega vidika to vedenje ni nujno racionalno, vendar je v skladu z značilnostmi človeškega vedenja,

- stroški in izidi garancije (objektiven pristop), ki so glavni izidi ukrepov ter jih je potrebno obravnavati, niso znani. Prisotni so tudi pomanjkljivi naložbeni instrumenti za kritje obveznosti z dobro priznano stopnjo tveganja.,

- optimalnega niza in obsega spremenljivk, ki jih je potrebno sprejeti kot delne ali začasne garancije in ciljnega izida, kar bi lahko ponudilo zanimivo alternativo za določitev garancije, vendar le ob upoštevanju ponudbe in povpraševanja [12].

4.4 Perspektiva povpraševanja

Ponudbo in povpraševanje je smiselno analizirati z vidika strank ter je potrebno z opravljeno analizo ugotoviti, kakšno garancijo predstavljata za gospodinjstva in mikro podjetja. V primeru gospodinjstev so življenjski cikli zelo predvidljivi in jih določajo demografske značilnosti. Te značilnosti spodbujajo gospodinjstva, da oblikujejo projekcije, tako dohodka kot tudi odhodka. Zaradi specifičnosti posameznih skupin izdelkov in storitev so njihovi stroški pogosto prikriti v primerjavi z enim (večinoma mesečnim) dohodkom. Zato je varčevanje pogostokrat edini način za pridobitev teh izdelkov in storitev.

V preteklosti so bile vrednosti prihodnjih rezultatov dobro znane ali pa vsaj predvidljive. Danes to še vedno velja za večino izdelkov in storitev. Ko se časovno obdobje izplačil podaljša in vrednost potrebnih oziroma željenih prihrankov poveča, postane dosežena oziroma vzdrževana vrednost prihrankov izziv. Potrebno je poiskati taka sredstva, ki omogočajo, da se vrednost prihrankov ne spremeni, kot pri prenosu sedanje vrednosti v prihodnost ter spreminjanje vrednosti denarja v času.

V preteklosti zavarovalništvo ni bilo pripravljeno ponuditi naložb v produkte z garancijami. V osemdesetih in devetdesetih letih je naraščal kapitalski trg in s tem spodbujal veliko življenjskih zavarovateljev, da so podaljšali njihovo izpostavljenost v času (*ang. liability exposure*). Vendar pa je raven garantiranega dobička za produkte življenjskega zavarovanja (naložbeno tveganje s strani zavarovalnice) v času upadla zaradi makroekonomskih pogojev. Ko je investiranje postalo dobičkonosno poslovanje v večini držav, so bili na voljo produkti, vezani na enoto premoženja (gre za naložbeno tveganje s strani imetnika zavarovalne police), namesto kapitalskega življenjskega zavarovanja. Davčne spodbude, ki so bile namenjene pokojninskim programom, so podprle zgornjo težnjo. V primeru produktov, vezanih na enoto premoženja, je bil znesek normalne premije zagotovljen.

Zaradi pravil iz Solventnost II se je garancija dobička iz produktov življenjskega zavarovanja znatno zmanjšala, portfelj produktov, vezanih na enoto premoženja, pa postaja vedno bolj konzervativen. Vprašanje, ki se tu pojavi, je, ali zavarovalnice lahko zagotovijo dolgoročno garancijo, višjo od inflacije ali pa vsaj višjo od nominalne vrednosti premij v predstavljenih pogojih. Ohranjanje prave vrednosti pokojninskih prihrankov postane izziv. Danes je to večinoma storjeno preko finančnega trga, vendar pa je ponudba za gospodinjstva in mikro podjetja pogosto zelo drugačna od ponudbe za institucionalne vlagatelje [12].

4.5 Perspektiva ponudbe

Direktiva Omnibus II je uvedel temeljne svežnje ukrepov, ki so bolj ali manj neposredno obvladovali to vprašanje. Ekstrapolacija, ujemanje prilagajanj in prilagoditev za volatilnost bi lahko zmanjšale kapitalske zahteve, vendar obstaja dvom, v kolikšni meri pokrivajo vprašanje in ublažijo pomanjkljivosti na drugih področjih.

Osrednja težava je pomanjkanje primernih naložbenih instrumentov, ki jih podpirajo obveznosti z dobro znano stopnjo tveganja. Problem infrastrukturnih obveznic, ki so omenjene v kontekstu dolgoročnih naložb, je predvsem v omejevanju informacij. Raziskava EIOPA razkriva glavno težavo s podatki in prostornino posameznega instrumenta.

Naslednja zagata je merjenje tveganja, za katerega se zdi, da je preveč usmerjeno v volatilnost in ne izpolnjuje dolgoročnih ciljev, kar bi lahko pripeljalo do neustrezne kalibracije glede tveganosti naložb. Osrednja skrb je, v kolikšni meri je nestanovitnost smiselna z vidika končnega izida.

Prilagodljivost kot prihodnost produktov življenjskih zavarovanj je dandanes bolj dobrodošla kot kadarkoli prej. Obenem pa morata sedanja in prihodnja garancija izpolnjevati večjo analizo na podlagi scenarijev, da bi predvidile morebitne finančne posledice [12].

5 Modeliranje obveznosti iz naslova garancij

Pred obravnavo posameznih garancij, si poglejmo oznake, s katerimi se bomo v tem poglavju srečevali. Naj bo ${}_tp_x^{\tau}$, ${}_tq_x^{w}$ in ${}_tq_x^{d}$, ${}_{u|t}q_x^{d}$ označujejo dvojno zmanjšanje preživetja in verjetnost izhoda za osebe stare x let, kjer w pomeni umik, d pa smrt. Spremenljivki u in t se merita v časovnem koraku, ki je uporabljen v simulaciji.

Spremenljivke za sklad in denarni tok so naslednje:

- G predstavlja stopnjo garancije na investirano enoto. Z G_t pa označimo garancijo v času t, če se ta lahko spreminja v času.
- S F_t označimo tržno vrednost ločenega računa v času t, ob predpostavki, da je zavarovalna polica v celoti veljavna. Predpostavimo tudi, da se ob začetku vsakega meseca iz sklada odšteje odhodek za upravljanje ali strošek upravljanja (MER). Prav tako se lahko ob koncu meseca sklad poviša z zagotovljenim nadomestilom za akumulacijo. Včasih je primerno, da se med seboj razlikujeta sklad, ki je prisoten neposredno pred transakcijami, ki se zgodijo konec meseca, in pa sklad, ki je prisoten takoj po teh transakcijah. Naj F_{t^-} označuje sklad tik pred koncem meseca v času t pred transakcijami in naj F_{t^+} označuje sklad ob koncu meseca po izvedenih transakcijah. V primeru, da v eksponentu predznak ni zapisan, torej $+$ ali $-$, privzamemo, da je $+$.
- S S_t označimo vrednost osnovne naložbe v kapital v času t, kjer predpostavimo, da je $S_0 = 1,0$. S_t je naključno generirana iz primerne porazdelitve. Y_t je povezan z log-return procesom (v določenem obdobju gre za naravni logaritem akumulacije naložbe v enoti), zato je $S_t \exp\{Y_t + Y_{t+1} + ... + Y_{t+r-1}\} = S_{t+r}$.
- Z m označimo mesečno stopnjo provizije, ki se odšteje od ločenega računa. Z m_c označimo del, ki je na voljo za financiranje stroškov garancije, to imenujemo zamik marže (*ang. margin offset*). To se lahko porazdeli v nadomestilo, tako da se na primer za skupno garantirano minimalno nadomestilo v primeru zapadlosti (GMMB) in garantirano minimalno nadomestilo v primeru smrti (GMDB) izračuna skupni znesek mesečnega tveganja, kot $m_c = m_m + m_d$, kjer je m_m dodeljena GMMB, m_d pa GMDB.
- Z M_t označimo dohodek v času t, ki izhaja iz garantiranega tveganja.

- S C_t označimo denarni tok obveznosti v času t iz pogodbe, umik sredstevodmik.
- Z L_0 označimo sedanjo vrednost prihodnjih obveznosti, ki so diskontirane s konstantno netvegano letno obrestno mero r.

Povezava med zgoraj omenjenimi spremenljivkami, s predpostavko, da se zamik marže zbira mesečno, je

$$F_{t^-} = \frac{S_t}{S_{t-1}} F_{t-1^+}, \tag{5.1}$$

$$F_{t^+} = F_{t^-}(1-m) = F_{(t-1)}(1-m)\frac{S_t}{S_{t-1}}. \tag{5.2}$$

Za števili t in u, ob predpostavki, da ni prisotnih zunanjih denarnih vnosov v sklad med t in $t+u$, je enačba naslednja:

$$F_{(t+u)^+} = F_t \frac{S_{t+u}(1-m)^u}{S_t}. \tag{5.3}$$

Naj F_{0^-} označuje sklad v času vrednotenja (ali pa v času izdaje zavarovalne police, ki bi v tem primeru bila zavarovalna polica enkratne premije). Potem je:

$$F_t = F_{0^-} \frac{S_t(1-m)^t}{S_0}. \tag{5.4}$$

Spremenjeni prihodki od marže so odhodki, ki so dodeljeni za financiranje garancije: [8]

$$M_t = (F_{t^-})m_c, \tag{5.5}$$

$$M_t = m_c F_{0^-} \frac{S_t(1-m)^t}{S_0}. \tag{5.6}$$

5.1 Garantirano minimalno nadomestilo v primeru zapadlosti, GMMB

V tem podpoglavju bomo pokazali, kako lahko oblikujemo porazdelitev sedanje vrednosti zagotovljene odgovornosti za preprosto zavarovalno polico GMMB, ki jo tvori oseba stara x let s trajanjem še nadaljnjih n let. Predpostavimo mesečni diskretni časovni model za donosnost lastniških instrumentov in stroškov upravljanja. Predpostavimo tudi, da se umik in smrt lahko zgodita ob koncu meseca. Izidi modela se obravnavajo deterministično, zato je edini naključni proces simuliran proces lastniškega kapitala.

Možne so tudi druge predpostavke in različni pristopi, naš cilj je prikazati osnovna načela. Če s S_t označimo delniški indeks, potem domnevamo, da je $S_0 = 1.0$, tako da je S_t

akumulacijski faktor za obdobje od 0 do časa t. Vemo, da je $(G-F_n)^+ = \max(0, G-F_n)$. Potem je

$$C_t = -{}_t p_x^\tau M_t, \quad t = 0, 1, ..., n-1 \tag{5.7}$$

in

$$C_n = -{}_n p_x^\tau (G-F_n)^+. \tag{5.8}$$

Sledi:

$$L_0 = \sum_{t=0}^{n} C_t e^{-rt}. \tag{5.9}$$

C_t in L_0 lahko izračunamo za vsak poljubni delniški indeks in poljubno porazdelitev za denarne tokove v različnih letih [8].

5.2 Garantirano minimalno izplačilo v primeru smrti, GMDB

GMDB je dostopno v času akumulacijske dobe. Nekateri zavarovatelji so pripravljeni zagotoviti GMDB tudi po upokojitvi do določene starosti, npr. 75 let. V primeru smrti pred zapadlostjo, zavarovatelj plača višjo vrednost med vrednostjo računa in navedenega zneska. Zagotovljena količina je lahko fiksna, npr. enaka:

- znesku plačanih premij, brez izplačila,
- povečanju premij, brez izplačila, z določeno zagotovljeno obrestno mero.

Zagotovljena količina je lahko odvisna od vrednosti računa, kot na primer, glej [6]:

- najvišja vrednost računa je zabeležena v določenih časovnih zamikih pred smrtjo,
- vrednost računa v določenem obdobju in skupni znesek premij, plačanih v tem obdobju, brez izplačil.

Nadomestilo v primeru smrti je višje od začetne naložbe in od vrednosti sklada ob smrti. Uporaba determinističnega pristopa k nadomestilu v primeru smrti je enaka domnevi, da zavarovanec umre na intervalu $(0,t)$. Odgovornost denarnega toka za nadomestilo v času t je torej:

$$C_t = -{}_t p_x^\tau M_t + {}_{t-1|1} q_x^d (G-F_t)^+ \quad t = 0, 1, ..., n \tag{5.10}$$

$$C_t = -{}_t p_x^\tau F_0 - S_t(1-m)^{t-1} m_d + {}_{t-1|1} q_x^d (G - F_0 - S_t(1-m)^t)^+. \tag{5.11}$$

Tabela 1: GMMB/GMDB projekcija denarnega toka obveznosti, enkratni naključni scenarij delnic

Month t	Equity Index S_t (Simulated)	F_{t^-}	${}_tp_x^\tau$	${}_{t\|1}q_x^d$	Margin Offset Income	DB and MB Outgo	C_t
0	1.0000	100,00	1.0000	0.0003	0,042	-	-0,042
1	0.9935	99.19	0.9931	0.0003	0.041	0.0002	-0.041
2	1.0227	101.93	0.9862	0.0003	0.042	0	-0.042
3	1.0399	103.48	0.9793	0.0003	0.042	0	-0.042
4	1.0761	106.90	0.9725	0.0003	0.043	0	-0.043
5	1.1095	110.03	0.9658	0.0003	0.044	0	-0.044
6	1.0800	106.93	0.9591	0.0003	0.043	0	-0.043
7	1.1195	110.65	0.9524	0.0003	0.044	0	-0.044
8	1.2239	120.77	0.9458	0.0003	0.048	0	-0.048
9	1.0894	107.32	0.9392	0.0003	0.042	0	-0.042
10	1.0865	106.86	0.9327	0.0003	0.042	0	-0.042
11	1.0573	103.81	0.9262	0.0003	0.040	0	-0.040
12	1.0150	99.49	0.9198	0.0003	0.000	0.471	0.471

VIR: Hardy, 2003, 102

M_t^d predstavlja dohodek iz naslova tveganja v zvezi z nadomestilom v primeru smrti.

Oglejmo si primer, v katerem bomo obravnavali pogodbo, v kateri nastopa kombinacija GMMB in GMDB. Denimo, da imamo sklenjeno pogodbo z GMMB in GMDB na fiksni stopnji garancije, ki ima naslednje značilnosti:

- naj bo $x = 50$, $F_{0^-} = 100$, $G = 100$, $m = 0.02/12$ na mesec in $m_c = 0.005/12$ na mesec,
- naj bo preostali pogodbeni rok 12 mesecev,
- naj bodo odvisne stopnje umrljivosti in umika sredstev tiste navedene v Dodatku A,
- naj bo indeks lastniškega kapitala en sam naključno ustvarjen scenarij, izdelan z RSLN modelom.

Rezultat enega scenarija je podan v Tabeli 1.

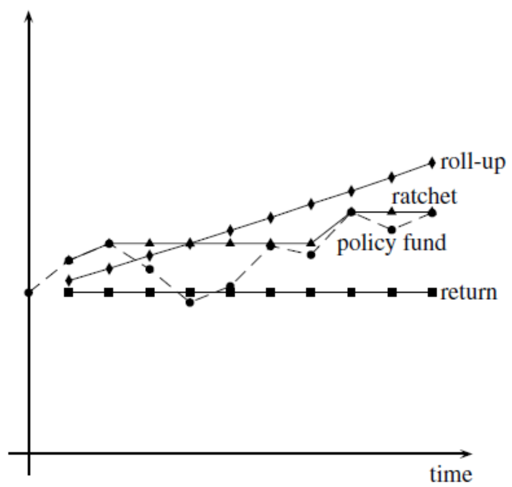
Na koncu zadnjega meseca ni prihodka, saj se kompenzacijo marže prejme vnaprej. Nadomestilo v primeru smrti znotraj garancije je večje od nič samo v primeru smrti v prvem ali zadnjem mesecu. Za ostalo časovno obdobje je sklad večji od garancije. Ob koncu pogodbe je sklad vreden nekaj več kot garancija, zato je potreben majhen GMMB. Pri netvegani letni obrestni meri v višini 6% je sedanja vrednost prihodnje obveznosti za ta scenarij (tj.: vsota prisotnih vrednosti denarnih tokov) enaka -0.145. Negativni predznak pomeni neto dohodek [8].

5.3 Garantirana minimalna izplačila v akumulacijski dobi, GMAB

GMAB je po navadi na voljo pred upokojitvijo. V primeru, da je zavarovanec živ v določenem obdobju, potem garancija zavarovancu zagotavlja minimalno akumulacijo. Tak garantirani znesek lahko navedemo kot [6]:

- znesek plačanih premij, brez izplačil (tj.: vračilo premij),
- prevzem premij, brez izplačil, z določeno zagotovljeno obrestno mero,
- najvišja vrednost računa v določenem obdobju (pred zapadlostjo GMAB).

Na sliki 3 je grafični prikaz glavnih tipov garancij. Na grafu je upoštevana enkratna premija, predpostavimo, da ne pride do umikov.



Slika 3: Možne izbire za GMAB in GMDB.

Znotraj GMAB lahko pride do več zapadlosti. Točno določeno je, za koliko časa se lahko pogodba podaljša, prav tako je določeno, kolikokrat jo lahko podaljšamo.

Učinek obnovitve pogodbe je lahko naslednji: če je garancija podana v denarju in je $G > F_T$, potem mora zavarovatelj plačati razliko. Nato, ob obnovitvi, z G označimo vrednost sklada. V tem primeru pogodba prične pri enaki stopnji garancije. Če garancija ni podana v denarju, torej $G < F_T$, potem se garancija samodejno ponastavi na vrednost sklada v tistem času pri obnovitvi pogodbe. Najnižji znesek od F_T in G, pri obnovi pogodbe z gotovinskim plačilom, torej vedno naraste do najvišjega zneska od F_T in G, ki ga dolguje, če je $G > F_T$. Temu včasih pravimo opcija preklopa (*ang. rollover option*). Čeprav obremenitveni stroški (*ang. expense charges*) včasih niso zagotovljeni, so naraščanja redka in takrat ne prevzemamo nobenih sprememb. Zavarovanec se lahko odloči, da pogodbe ne bo obnovil.

Predpostavimo, da se naslednja obnovitev pogodbe zgodi v n_1 mesecih in se naknadna podaljšanja pojavijo v obdobjih $n_2, n_3, ..., n_k$, glede na to ali je pogodba v tem obdobju veljavna. Sklad lahko v času podaljšanja pogodbe naraste, zato razlikujemo med skladom pred in po trenutku n. Z $F_{n_r^-}$ označimo sklad pred neposredno obnovo pogodbe, s $F_{n_r^+}$ pa sklad po neposredni obnovi pogodbe.

Garancijo, ki je veljavna na začetku obdobja projekcije, označimo z $G_0 = F_{n_0^+}$, od zadnje ponastavitve pred pojekcijo. Kasneje pa:

$$G_1 = \max\left(G_0, F_{n_1^-}\right) = G_0 \max\left(1.0, 1.0 + \frac{F_{n_1^-}}{F_{n_0^+}}\right) \tag{5.12}$$

$$G_2 = \max\left(G_1, F_{n_2^-}\right) = G_0 \prod_{r=1}^{2} \max\left(1.0, 1.0 + \frac{F_{n_r^-}}{F_{n_{r-1}^+}}\right) \tag{5.13}$$

$$\vdots \tag{5.14}$$

$$G_k = \max\left(G_{k-1}, F_{n_k^-}\right) = G_0 \prod_{r=1}^{k} \max\left(1.0, 1.0 + \frac{F_{n_r^-}}{F_{n_{r-1}^+}}\right) \tag{5.15}$$

Sedaj je rast sklada med obdobjem podaljšanja pogodbe posledica osnovne rasti indeksa $\frac{S_{n_r}}{S_{n_{r-1}}}$, kjer so odšteti stroški upravljanja, tako da je

$$\frac{F_{n_r^-}}{F_{n_{r-1}^+}} = (1-m)^{n_r - n_{r-1}} \frac{S_{n_r}}{S_{n_{r-1}}}. \tag{5.16}$$

Na ta način lahko vsaka veljavna garancija sledi vsaki posamezni projekciji.

V času zapadlosti, recimo v mesecu t, kjer je $n_r < t < n_{r+1}$, dohodek iz naslova tveganja (*ang. risk charge*) in izplačilo iz nadomestila za smrt, ki velja pri stopnji garancije G_r. Denarni tok obveznosti je takrat:

$$C_t = {}_{t-1|1}q_x^d (G_r - F_t)^+ - {}_t p_x^\tau M_t \qquad n_r < t < n_{r+1}. \tag{5.17}$$

V času obnove pogodbe ali v času zapadlosti $n_1, ..., n_k$, je denarni tok enak

$$C_{n_r} = {}_{n_r-1|1}q_x^d (G_r - F_{n_r^-})^+ + {}_{n_r}p_x^\tau (G_r - F_{n_r^-})^+ - {}_{n_r}p_x^\tau M_{n_r}. \tag{5.18}$$

Prvi izraz omogoča GMDB v zadnjem mesecu, drugi je nadomestilo zapadlosti in tretji izraz pa je dohodek iz naslova tveganja ob podaljšanju pogodbe [8].

5.4 Garantirana minimalna izplačila v primeru doživetja, GMIB

GMIB zagotavlja minimalno določeno višino dohodka ali minimalno določeno višino rente ob konverziji sredstev. Višino rente določata najmanj dva odstotka letnega donosa glede na vrednost začetne naložbe. GMIB je primeren za vse tiste, ki si prizadevajo za rast naložbe na dolgi rok in ne potrebujejo takojšnje likvidnosti. Prav tako je GMIB primeren za vse tiste, ki si želijo zagotovljenega toka dohodkov v prihodnosti.

GMIB sodi med najbolj priljubljene garancije v okviru nakupa odložene pokojninske rente. Gre za rento, ki se prične izplačevati po poteku določenega števila let. Tak način varčevanja je posebno zanimiv za vse tiste, ki se želijo zavarovati pred inflacijskim tveganjem. GMIB omogoča usklajenost pokojninskih dohodkov s stopnjo inflacije. Kot smo omenili, je izplačilo rente pri GMIB zagotovljeno šele po preteku določenega števila let, zato je nakup GMIB smiseln za tiste upokojence, ki že vedo, da bodo potrebovali dodatna sredstva šele v srednji do bližnji prihodnosti. GMIB ima dve omejitvi, in sicer:

1. Investitor mora sredstva vezati za dobo deset let ali več. V tem primeru je investitor upravičen do presežka nad zajamčeno vsoto.

2. Pogodbena starost, ki jo mora upravičenec doseči, z namenom, da se izplačevanje rente lahko prične.

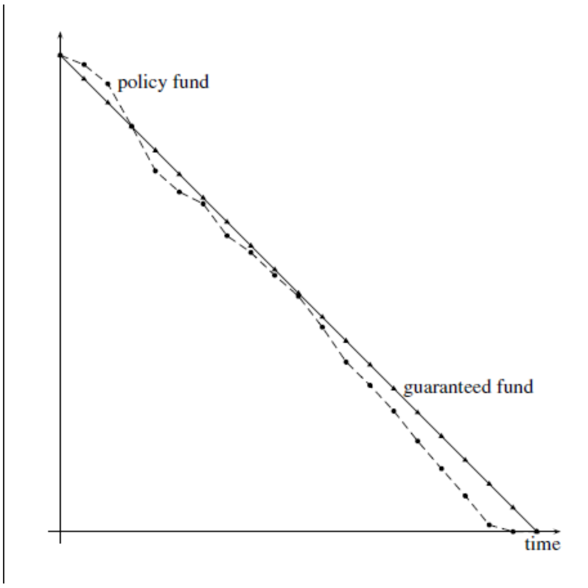
V prvem primeru govorimo o doživljenjski renti, v drugem pa o doživljenjski renti z zagotovljenim obdobjem izplačevanja [4].

5.5 Garantirana minimalna izplačila v primeru delnega umika pogodbe, GMWB

GMWB je rentno pokojninsko zavarovanje, ki ni samostojni produkt, ampak dodatek k pogodbi o vlaganju v sklade. Dodatek k pogodbi rentnega varčevanja kupijo tisti komitenti, ki želijo svojo naložbo še dodatno zavarovati pred izgubo. Zavarovalna komponenta zavaruje glavnico v času, ko ta prispe v plačilo. GMWB zagotavlja investitorjem garantirane minimalne mesečne, četrtletne ali letne dohodke iz naslova prvotne naložbe v mešane sklade pri nakupu dodatne pokojninske rente.

Investitorji imajo možnost doseči nadpovprečne donose na vložena sredstva in pri tem ni prisotno nikakršno tveganje pred nadpovprečnimi izgubami. Če so donosi na trgu kapitala slabi, potem investitor dobi v obliki mesečnih ali letnih rent vrnjeno vsaj glavnico. Če so donosi na trgu kapitala nadpovprečni, potem imajo investitorji ob zapadlosti produkta pravico do preostale vrednosti sredstev. Ta je enaka razliki med obrestovano glavnico in že izplačanimi rentami [4].

GMWB zagotavlja periodične umike iz zavarovalne police, tudi v primeru, če je vrednost računa enaka nič (bodisi zaradi slabih naložbenih učinkov ali zaradi daljše življenjske dobe zavarovanca). Slika 4, ki prikazuje grafično predstavitev:



Slika 4: Sklad, ki je na voljo znotraj GMWB; garantirani letni umik je 5% začetnega sklada za 20 let.

Če se umik iz zavarovalne police zgodi v obdobju, ko lastnik police doseže višjo vrednost, kot je ta bila zagotovljena, potem umik vpliva na znižanje osnovnega zneska. Obdobje umika je lahko točno določeno (okoli 20 let). V obdobju umika zavarovanec ohrani dostop do sklada življenjskega zavarovanja, vezanega na enote premoženja.

6 Black-Scholesov model

Leta 1973 so Black, Scholes in Merton predlagali model, ki mu pravimo Black-Scholesov model. Model ni najbolj realen, vendar pa zagotavlja dober približek realnosti za kratkoročno obdobje. Poleg tega model zagotavlja dostop do preprostih izračunov in zato je ta model zelo pomemben. Drugi argument je, da Black-Sholesov model za izhodišče zahteva velik del teorije; da bi lahko razumeli rezultate, ki temeljijo na posplošitvah Black-Scholesovega modela, je treba najprej razumeti rezultate, ki temeljijo na samem Black-Scholesovem modelu. Za nadaljnje študije omenjenega modela se sklicujemo na Björk (1994,2004).

Black-Scholesov model je sestavljen iz sredstev z dinamiko, ki jo opisujeta diferencialna enačba in stohastična diferencialna enačba

$$\begin{aligned} dS^0(t) &= rS^0(t)dt, \\ S^0(0) &= 1, \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} dS^1(t) &= \alpha S^1(t)dt + \sigma S^1(t)dW(t), \\ S^1(0) &= s, \end{aligned} \tag{6.2}$$

kjer so r, α in σ deterministične konstante. Model lahko posplošimo tako, da so r, α in σ funkcije $(t, S^1(t))$, vendar taka posplošitev ne zagotavlja nadaljnega vpogleda.

Ideja o dinamiki S^0 je jasna, saj enačba (6.1) navaja, da S^0 izpolnjuje deterministično diferencialno enačbo z naslednjo rešitvijo:

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}S^0(t) &= rS^0(t), S^0_0 = 1 \\ S^0(t) &= e^{rt} \end{aligned}$$

Investiranje v S^0 si lahko razlagamo kot nakazilo na bančni račun po stalni obrestni meri. Dinamika S^1 temelji na predpostavki, da lahko sprememba cene sredstev v "kratkem" časovnem intervalu $(t, t+\Delta t]$ nastane na naslednji način:

$$\begin{aligned} \Delta S(t) &= S(t+\Delta t) - S(t) \\ &\approx \alpha S(t)\Delta t + \sigma S(t)(W(t+\Delta t) - W(t)) \\ &= \alpha S(t)\Delta t + \sigma S(t)\Delta W(t), \end{aligned} \tag{6.3}$$

kjer je W standardno Brownovo gibanje.

Pravzaprav se enačba (6.3) predpostavlja le za neskončno majhne časovne intervale, kar je zapisano v enačbi (6.2). Kljub dejstvu, da je W izjemno zapleten proces, igra pomembno vlogo v različnih disciplinah uporabne matematike, vključno s finančno matematiko.

Nadaljevali bomo z definicijami različnih konceptov finančne matematike. Portfelj (strategija) je proces $h = \{h(t)\}_{t\in[0,n]} = \{(h^0(t), h^1(t))\}_{t\in[0,n]}$, tako da je $h(t)$ funkcija $(S^1(s), 0 \leq s \leq t)$. Vrednostni proces, ki je povezan s portfeljem h, je definiran kot

$$V(t,h) = h^0(t)S^0(t) + h^1(t)S^1(t), \quad t \in [0,n].$$

Portfelj v danem trenutku t označimo s $h(t)$. Intuitivno je jasno, da je ta portfelj odvisen od cen v času t in ni odvisen od cen po tem času. V nasprotnem primeru bi obstajal tak portfelj, ki bi temeljil samo na spremembi cen v prihodnosti. Zanimivi so samofinancirajoči portfelji, za katere velja

$$\begin{aligned} dV(t,h) &= h^0(t)dS^0(t) + h^1(t)dS^1(t) && (6.4)\\ &= rV(t,h)dt + h^1(t)S^1(t)((\alpha - r)dt + \sigma dW(t)). && (6.5) \end{aligned}$$

V takih portfeljih v nobenem trenutku ne “vbrizgamo"ali odstranimo sredstev in so vse nove naložbe v času t financirane s strani kapitalskih dobičkov, ki so pridobljeni iz starih naložb. Ideja za samofinanciranje je generirana z definicijo iz enačbe (6.4), kar pa ni očitno. Za razumevanje te enačbe je potrebna enačba (6.2), ki nam poda diskreten časovni argument in ustrezno vsebino. V nadaljevanju bo portfelj, ki omogoča arbitražo, opredeljen kot portfelj, ki ima naslednje lastnosti:

$$\begin{aligned} V(0,h) &= 0,\\ P(V(n,h) \geq 0) &= 1,\\ P(V(n,h) > 0) &> 0. \end{aligned}$$

Tako kot pri modelih v diskretnem času nas zanimajo cene izvedenih vrednostnih papirjev in zato ponovno opredelimo pogojno terjatev kot stohastično spremenljivko $X = \Phi(S^1(n))$, medtem ko so splošni zahtevki oblike $X = \Phi(S^1(t), t \in [0,n])$. Tako kot v binomskem modelu je sedaj naravno razpravljati o konceptih, kot so martingalske mere, dosegljive terjatve in popolni trgi.

Trditev se imenuje dosegljiva, če obstaja samofinancirajoč portfelj h, tako da je

$$V(n,h) = X, \tag{6.6}$$

kjer se h imenuje zavarovanje portfelja (*ang. hedging portfolio*) ali ponovitev portfelja (*ang. replicating portfolio*). Nobene razlike ni med posedovanjem dosegljive terjatve in zavarovanjem portfelja. Zato je edina cena brez arbitraže (brezplačna arbitraža) za takšno terjatev enaka vrednosti portfelja varovanja pred tveganjem, tj.

$$\Pi(t,X) = V(t,h). \tag{6.7}$$

Če so vse terjatve na trgu dosegljive, takemu trgu pravimo popolni trg. Sedaj se moramo vprašati, ali je trg Black-Scholesovega modela popoln. Če je odgovor pritrdilen, smo pri vsaki zahtevi iz enačbe (6.7), kjer je h zavarovani portfelj, našli brezplačno arbitražno ceno za vsako zahtevo.

Dokaz, da je trg Black-Scholesovega modela popoln, se vnaprej zdi nemogoč. Z uvedbo Wienerjevega procesa kot stohastičnega elementa je dokaz težak. Kljub nepravilnemu obnašanju Wienerjevega postopka pa obstaja nekaj precej preprostih pravil za izračun, ki jih bomo uporabili v nadaljevanju. Teh pravil ne bomo podrobneje opisovali, temveč jih bomo samo uporabili, ko jih bomo potrebovali. Poudariti je potrebno, da ta pravila izračunavanja ne temeljijo na nobeni finančni razlagi, ampak so čisti matematični in verjetnostni teoretični rezultati Wienerjevega procesa.

Sedaj označimo s $\Pi(t)$ ceno v času t za preprosto zahtevo X, za katero iščemo zavarovani portfelj h in ceno brez arbitraže Π. Predpostavimo (netrivialna predpostavka), da lahko ceno zahtevka X napišemo kot funkcijo časa in cene delnice, tj.: $\Pi(t) = F(t, S^1(t))$, kjer je $F(t,s)$ deterministična funkcija dveh spremenljivk. Funkcija F ima derivate glede na dve spremenljivki in predpostavimo lahko, da obstaja toliko takšnih derivatov, kot jih potrebujemo (to je druga netrivialna predpostavka).

Iščemo torej par (h,Π), tako da sta enačbi (6.6) in (6.7) izpolnjeni. Tukaj potrebujemo dinamiko različnih cenovnih procesov. Dinamika cen S^0 in S^1 je znana, vendar kaj je z dinamiko Π? Obstaja rezultat za dinamiko S^1. Enačba (6.2) se odraža v dovolj regularni funkciji $F(t,S^1(t))$. Rezultat se imenuje Itôva formula in njegova posledica je, da se Π obnaša tako, kot S^1 s specifičnima procesoma $\alpha^\Pi(t)$ ter $\sigma^\Pi(t)$ nadomešča α in σ. Dinamika cenovnega procesa Π je podana

$$d\Pi(t) = \alpha^\Pi(t)\Pi(t)dt + \sigma^\Pi(t)\Pi(t)dW(t), \tag{6.8}$$

z

$$\alpha^\Pi(t) = \frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t,S^1(t)) + \alpha S^1(t)\frac{\partial F}{\partial s}(t,S^1(t))}{F(t,S^1(t))} + \frac{\frac{1}{2}\sigma^2(S^1(t))^2\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(t,S^1(t))}{F(t,S^1(t))}, \tag{6.9}$$

$$\sigma^\Pi(t) = \frac{\sigma S^1(t)\frac{\partial F}{\partial s}(t,S^1(t))}{F(t,S^1(t))}. \tag{6.10}$$

Po drugi strani pa potrebujemo tak portfelj, da bo vrednost procesa enaka ceni Π, tj., če upoštevamo enačbo (6.7),

$$\Pi(t) = V(t,h) = h^0(t)S^0(t) + h^1(t)S^1(t), \tag{6.11}$$

in samofinanciranje, tj. če upoštevamo enačbo (6.4)

$$\begin{aligned} d\Pi(t) &= h^0(t)dS^0(t) + h^1(t)dS^1(t) \\ &= h^0(t)rS^0(t)dt + h^1(t)(\alpha S^1(t)dt + \sigma S^1(t)dW(t)) \\ &= \tfrac{h^0(t)rS^0(t)+h^1(t)\alpha S^1(t)}{\Pi(t)}\Pi(t)dt + \tfrac{h^1(t)\sigma S^1(t)}{\Pi(t)}\Pi(t)dW(t). \end{aligned} \tag{6.12}$$

Sedaj lahko primerjamo enačbi (6.8) in (6.12) ter z enačenjem izrazov pred dt in $dW(t)$ dobimo:

$$\alpha^{\Pi}(t) = \tfrac{h^0(t)rS^0(t)+h^1(t)\alpha S^1(t)}{\Pi(t)},$$

$$\sigma^{\Pi}(t) = \tfrac{h^1(t)\sigma S^1(t)}{\Pi(t)}.$$

Če vstavimo enačbo (6.11), dobimo:

$$\frac{\alpha - r}{\sigma} = \frac{\alpha^{\Pi}(t) - r}{\sigma^{\Pi}(t)}, \tag{6.13}$$

$$h^1(t) = \frac{\sigma^{\Pi}(t)\Pi(t)}{\sigma S^1(t)} = \frac{\partial F}{\partial s}(t, S^1(t)), \tag{6.14}$$

$$h^0(t) = \frac{\Pi(t) - h^1(t)S^1(t)}{S^0(t)}. \tag{6.15}$$

Enačba (6.13) navaja, da dodatni pričakovani dobiček presega netvegano obrestno mero r za tveganje ter je merjen s faktorjem pred $dW(t)$, ki sovpada s ceno delnice in ceno Π. Tej količini pravimo premija za tveganje. Če bomo z uporabo enačbe (6.13) našli Π, potem enačbi (6.14) in (6.15) določata zavarovalni portfelj.

Če enačbi (6.9) in (6.10) vstavimo v enačbo (6.13), dobimo naslednji donos

$$0 = \frac{\partial F}{\partial t}(t, S^1(t)) + rS^1(t)\frac{\partial F}{\partial s}(t, S^1(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2(S^1(t))^2\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(t, S^1(t)) - F(t, S^1(t))r. \tag{6.16}$$

Dan je terminološki pogoj $\Pi(n) = \Phi(S(n))$. Ta diferencialna enačba mora biti izpolnjena v katerem koli trenutku, ne glede na vrednost $S^1(t)$. Namesto tega lahko zapišemo deterministično parcialno diferencialno enačbo s terminološkim pogojem za funkcijo $F(t,s)$. Tej diferencialni enačbi pravimo Black-Scholesova enačba:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,s) + rs\frac{\partial F}{\partial s}(t,s) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(t,s) - F(t,s)r = 0, \qquad F(n,s) = \Phi(s). \tag{6.17}$$

Black-Scholesova enačba je deterministična parcialna diferencialna enačba, ki je rešljiva za vsako točko (t,s). Če potrebujemo ceno zahtevka, potem enostavno nadomestimo s s $S^1(t)$ v $F(t,s)$. Pomembno je razumeti, da je Black-Scholesova enačba deterministično sredstvo za določanje stohastične vrednosti $F(t, S^1(t))$. Če namesto tega želimo prenesti to ceno v manjši časovni interval, ponovno potrebujemo dinamiko iz enačbe (6.8). Če vstavimo enačbi (6.9) in (6.10) ter $\partial F(t,S^1(t))/\partial t$ iz enačbe (6.16), potem dobimo enačbo, ki popisuje ceno Π, in sicer:

$$d\Pi(t) = \left(r\Pi(t) + (\alpha - r)S^1(t)\frac{\partial F}{\partial s}(t,S^1(t))\right)dt + \sigma S^1(t)\frac{\partial F}{\partial s}(t,S^1(t))dW(t). \tag{6.18}$$

Če primerjamo enačbi (6.5) in (6.18) ter uporabimo enačbo (6.7), ponovno dobimo zavarovalni portfelj, saj $h^1(t) = \partial F(t,S^1(t))/\partial s$ in $h^0(t)$ določata naslednje:

$$\Pi(t) = h^0(t)S^0(t) + h^1(t)S^1(t).$$

Razred rešitev determinističnih parcialnih diferecialnih enačb, vključno z enačbo (6.17), lahko zapišemo kot pogojno pričakovano vrednost v tako imenovani stohastični predstavitveni formuli. O enačbi (6.2) govorimo o P-dinamiki S^1, saj je dinamika predstavljena z uporabo procesa W. Proces W je Brownovo gibanje glede na tako imenovano objektivno verjetnostno mero P. Gre za mero, ki se nanaša na pričakovanja vlagateljev glede prihodnjih cen premoženja. Namesto tega bomo pisali dinamiko za S^1, z uporabo procesa W^Q, ki je Brownovo gibanje pod mero Q in je določen kot

$$dS^1(t) = rS^1(t)dt + \sigma S^1(t)dW^Q(t). \tag{6.19}$$

Glede na mero Q imamo:

$$E^Q\left[e^{-r(u-t)}S^1(u)|S^1(t) = s\right] = s, \;\; t \le u \le n,$$

kjer E^Q označuje pričakovanje v okviru mere Q. Opazimo, da je razen diskontiranega faktorja $e^{-r(u-t)}$, je S^1 martingal pod mero Q. Mera Q je znana kot martingalska mera. Rešitev Black-Scholesove enačbe ima naslednjo stohastično predstavitveno formulo:

$$F(t,s) = E^Q\left[e^{-r(n-t)}\Phi(S^1(n))|S^1(t) = s\right]. \tag{6.20}$$

Za večino pogodbenih funkcij Φ enačbo (6.20) lahko izračunamo samo z dvema metodama, in sicer z numeričnimo ali s simulacijsko metodo. Vendar se lahko v nekaj primerih izračuna bolj ali manj analitično. Primer je evropska nakupna opcija, $\Phi(S^1(n)) = (S^1(n) - K)^+$. Black-Scholesova formula je:

$$F(t,s) = sN[d_1(t,s)] - e^{-r(n-t)}KN[d_2(t,s)], \tag{6.21}$$

kjer N predstavlja porazdelitveno funkcijo za standardno normalno porazdelitev in

$$d_1(t,s) = \tfrac{1}{\sigma\sqrt{n-t}}\left(\log\left(\tfrac{s}{K}\right) + \left(r + \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(n-t)\right),$$

$$d_2(t,s) = d_1(t,s) - \sigma\sqrt{n-t}.$$

V binomskem modelu bi se spraševali, kaj se zgodi z objektivnimi verjetnostmi v formuli vrednotenja. V Black-Scholesovem modelu pa se lahko vprašamo, zakaj se pričakovani donos sredstev α ne pojavi niti v Black-Scholesovi enačbi (6.17), niti v Black-Scholesovi formuli (6.21). Podali bomo razlago. Če imamo opcijo na trgu z velikim α, potem imamo dobro možnost, da ustvarimo kapitalske dobičke. Po drugi strani pa se odpovemo možnosti vlaganja v ceno opcije na istem trgu z dobrimi možnostmi za kapitalske dobičke. Zgornji rezultati prikazujejo, da smo ob koncu dneva ravnodušni glede na pričakovano donosnost delnice pri določanju cene opcije [7].

6.1 Black-Scholesov model za GMMB

GMMB je preprosta prodajna opcija za ločeni sklad. Privzemimo, da vrednost sklada v času vrednotenja $t = 0$, označimo s F_0. Naj G označuje garancijo in najprej predpostavimo, da je ta fiksna. Zavarovateljeva odgovornost znotraj GMMB ob zapadlosti, recimo v obdobju T let, je $(G - F_T)^+$. To je enako prodajni opciji s izvršilno ceno G in temeljem F_t. V skladu s standardnimi pogodbenimi pogoji za takšne zavarovalne police je G po navadi 75% ali 100% začetne enkratne premije za pogodbo. Naj m označuje mesečno upravljalsko provizijo. Potem je

$$F_T = F_0 \tfrac{S_T}{S_0}(1-m)^T,$$

kjer S_t predstavlja delniški indeks, ki se uporablja kot referenčna vrednost lastniškega kapitala. Izplačilo znotraj GMMB označujemo z $W = (G - F_T)^+$. Naj bo $F_0 = S_0$, potem je cena opcije enaka

$$\begin{aligned} P_0 &= e^{-rT} E_Q\left[(G - F_T)^+\right] \\ &= e^{-rT} E_Q\left[\left(G - S_T(1-m)^T\right)^+\right] \end{aligned} \tag{6.22}$$

$$= (1-m)^T \left\{ e^{-rT} E_Q\left[\left(G(1-m)^{-T} - S_T\right)^+\right]\right\}. \tag{6.23}$$

Enačbi (6.22) in (6.23) se lahko uporabita za določitev Black-Scholesove cene. Pri uporabi enačbe (6.22) S_0 v Black-Scholesovem modelu nadomestimo s $S_0(1-m)^T$. Pri uporabi enačbe (6.23) povečamo garancijo iz G na $G(1-m)^{-T}$ ter celotno formulo pomnožimo z $(1-m)^T$, kar pa deluje kot bolj zapleten pristop.

Če uporabimo prvi pristop, torej, da nadomestimo S_0 s $S_0(1-m)^T$ v standardnem Black-Scholes modelu, je cena prodajne opcije v času $t = 0$ enaka

$$P_0 = Ge^{rT}\Phi(-d_2) - S_0(1-m)^T\Phi(-d_1), \tag{6.24}$$

kjer je

$$d_1 = \frac{\log(S_0(1-m)^T/G)+(r+\sigma^2/2)T}{(\sigma\sqrt{T})}$$
$$= \frac{\log(S_0/G)+(r+log(1-m)+\sigma^2/2)T}{(\sigma\sqrt{T}}$$

in $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$. Ta cena ne dovoljuje smrtnosti, torej vsi zavarovanci ne bodo živeli vse do zapadlosti. Pred tveganjem umrljivosti (to je tveganje, da večje število zavarovancev, kot je bilo pričakovano, preživi do zapadlosti), se lahko zavarovalnice zavarujejo z diverzifikacijo. Z drugimi besedami: s prodajo dovolj velikega števila pogodb bo izkušnja s smrtnostjo znana z zmanjševanjem relativne napake.

Če so prekinitve pogodbe neodvisne od garantirane odgovornosti, se tveganje za prekinitev (*ang. lapse risk*) v večini aplikacij obravnava kot raznoliko. Prekinitve pogodbe so v določeni meri povezane z uspešnostjo ločenega sklada in kljub temu še vedno ni verodostojnega modela. Ker zadovoljivega stohastičnega modela ni, bomo uporabili deterministični model, ki obravnava prekinitve pogodbe na podoben način kot smrtnost. Zato predpostavljamo, da so tudi prekinitve raznolike in da lahko izide obravnavamo kot neodvisne. To pomeni, da če je BSP_0 cena opcije, brez nadomestila za napake in ${}_Tq_x^\tau$, je verjetnost, da bo pogodba veljala do zapadlosti, potem je cena opcije, ki dovoljuje prekinitev pogodbe, pa bo oblike ${}_Tp_x^\tau BSP_0$.

Če obstaja verjetnost, da zavarovalec umre pred zapadlostjo, je ${}_Tq_x^\tau = 0.25$. Vemo, da je BSP_0 znesek, ki je potreben za garantirano nadomestilo ob zapadlosti, brez dovolitve izstopa. Potem je znesek, ki dovoljuje izstop, enak $0.75 \cdot BSP_0$.

Poglejmo si povezavo s primerom. Vzemimo 50 let staro osebo z ločenim računom GMMB. Privzemimo, da so podatki umrljivosti in napak podani v Dodatku A.

Zapadlost v GMMB je 5, 10 ali 20 let. Predpostavimo, da je letna volatilnost osnovnega ločenega sklada enaka $\sigma = 20\%$, netvegana obrestna mera $r = 6\%$ in stroški upravljanja znašajo nominalno 3% letno, odštevajo pa se mesečno. V Tabeli 2 imamo podane stroške ob različni stopnji garantiranega sklada za različno obdobje zapadlosti.

V Tabeli 2 je razvidno, da je tudi pri skladu, ki je znatno manjši od garancije na dan vrednotenja je na dolgi rok strošek varovanja pred tveganjem majhen. To se zgodi, ker se stroški prodajne možnosti dolgoročno zmanjšujejo (čeprav se kratkoročno povečujejo) in zaradi učinka doživetja. Po drugi strani pa imamo opcije s krajšim obdobjem imajo visoke stroške, tudi če je garancija na dan vrednotenja samo 80 odstotkov vrednosti sklada [8].

Tabela 2: Primeri stroškov v primeru varovanja pred tveganji, odstotek sklada na dan vrednotenja za GMMB z dovoljenjem, da lahko zavarovalec izstopi glede na dodatek A

	Rok zapadlosti T		
Garantirani odstotek sklada	5	10	20
60	0.552	0.607	0.218
80	2.341	1.704	0.477
100	5.883	3.438	0.833
120	11.125	5.747	1.270
${}_{T}p_{5}^{\tau}0$	0.65520	0.42247	0.15972

VIR: Hardy, 2003, 136

7 Police življenjskega zavarovanja, vezanega na enote premoženja

Glavna značilnost polic življenjskega zavarovanja, vezanega na enote premoženja, je, da zavarovalec prevzema finančno tveganje. Zavarovalnica premijo investira v referenčni sklad, ki si ga izbere zavarovalec. V splošnem se zavarovalec lahko odloči za bolj konservativne ali bolj dinamične kombinacije sredstev, na način, da izbere eno izmed vej investiranja, ki jih ponuja zavarovalnica in tako lahko doseže različne profile tveganja. Zavarovalec se lahko kasneje zamenja za katerokoli drugo vejo investiranja. Če je v pogojih dopuščena opcija zamenjave, ima zavarovalec priložnost, da v določenem času zamenja investicijsko vejo brez stroškov. Pri policah življenjskega zavarovanja, vezanega na enote premoženja, je upravljanje premoženja primarna dejavnost. V nadaljevanju bomo obravnavali le aktuarska vprašanja, ki vključujejo upravljanje polic življenjskega zavarovanja, vezanega na enote premoženja [6].

7.1 Življenjsko zavarovanje, vezano na enote premoženja

Pogodba o življenjskem zavarovanju, vezanem na enote premoženja, se razlikuje od tradicionalnih pogodb življenjskega zavarovanja, pri čemer so nadomestila (in morda tudi premije) povezana neposredno z vrednostjo enote nekega naložbenega portfelja. Tak način zavarovanja omogoča visoko stopnjo prožnosti, ker lahko imetnik vpliva na naložbe iz naslova premij. Na ta način lahko investicijsko strategijo prilagodimo potrebam in preferencam imetnika police. Ena od odličnih zamisli je ta, da se pri mladih imetnikih polic uporabi agresivnejša strategija investiranja od tiste, ki se uporablja pri osebah, ki se približujejo upokojitvi. Poleg tega se lahko ponudi pogodba, ki je vezana na določen delniški indeks, npr. na svetovni indeks, indeks za posamezno državo ali referenčni portfelj z bolj ali manj jasno opredeljenim naložbenim profilom.

Zavarovalne pogodbe, vezane na enoto premoženja, so bile prvič uvedene na Nizozemskem, v začetku petdesetih let prejšnjega stoljetja. V ZDA so bile take pogodbe prvič ponujene leta 1954, v Združenem kraljestvu pa leta 1957 [7].

7.2 Opredelitev nadomestil pri policah življenjskega zavarovanja, vezanega na enote premoženja

Sklad, ki ga tvorijo naložbe iz naslova premij, imenujemo sklad zavarovalne police ali račun zavarovalne police. Nadomestila so opredeljena glede na vrednost sklada zavarovalne police in so na voljo v času plačila. Natančneje:

- nadomestilo za preživetje do zapadlosti, t.i. nadomestilo zapadlosti, je sedanja vrednost sklada zavarovalne police v času zapadlosti ;
- nadomestilo v primeru smrti je sedanja vrednost sklada zavarovalne police v času smrti, ki se ji prišteje tvegani znesek, ki pa mora biti pozitivna ali pa vsaj nenegativna;
- odkupna vrednost je vrednost sklada zavarovalne police v času odkupa, po možnosti brez (manjše) pristojbine za odkup.

Glede na to, da so nadomestila odvisna od vrednosti sklada zavarovalne police, se za zavarovalca pojavi tveganje, saj sedanja vrednost pred plačilom ni znana. Garancije so lahko zagotovljene, na primer: tvegani znesek je lahko definirana na način, da obstaja kakršna koli garancija za nadomestilo v primeru smrti. Po navadi pa se garancije definirajo eksplicitno.

Police življenjskega zavarovanja, vezanega na enote premoženja, so tako ime dobile, ker je referenčni sklad razdeljen na fiktivno število enot. Nadomestila bi potem lahko pomenila sedanjo vrednost števila enot, ki so bile knjižene k zavarovalni polici. Tako število lahko ocenimo s sprejetjem aktuarskega modela, ki se uporablja pri fiksnih nadomestilih, kot bomo opisali v podpoglavju 7.3. Pred izvedenim izplačilom nadomestila kot neznanka nastopi sedanja vrednost enote. V našem primeru bi nadomestila lahko izrazili kot računsko enoto (*ang. account units*), ki ne predstavlja običajne valute, od koder izvira pojem *vezano na enote premoženja*. Kot bomo videli v naslednjem podpoglavju (7.3), je število enot, ki tvorijo nadomestilo, po navadi znano šele na začetku leta plačila in nič prej.

Za računske enote se načeloma lahko sklicujemo na katero koli količino, katere vrednost se bo po vsej verjetnosti povečala v času, na primer zlato, nekaj tujih valut, nepremičnine, vrednostni papirji, itd. V praksi obstajajo omejitve premoženja in odgovornosti, kar pomeni, da mora biti zavarovatelj sposoben kupiti ali obnoviti referenčne enote, da lahko izpolni svojo obveznost, ne da bi prevzel (premajhno) osnovno tveganje. Računske enote, ki jih posedujejo zavarovatelji, predstavljajo tujo valuto in investicijski sklad. Danes so standardna izbira investicijski skladi.

Kar zadeva osnovno zavarovalno kritje, smo zgoraj omenili, da je običajni vzorec ravno pokojninsko zavarovanje. Vendar pa so lahko tudi celotna življenjska zavarovanja realizirana z enotami premoženja. V tem primeru ne bo nikakršnih nadomestil v času zapadlosti. Prav tako se lahko življenjska renta realizira kot enota premoženja, vendar pa bi ta letni znesek nihal glede na sedanjo vrednost referenečnega sklada in bi tako povzročil resno tveganje za zavarovalca. V nadaljevanju se bomo sklicevali na pokojninsko zavarovanje [6].

7.3 Police življenjskega zavarovanja, vezanega na enote premoženja, brez garancij

Govorili bomo o zavarovanju vezanem na naložbe (*ang. unit-linked endowment insurance*), ki ne vključuje finančne garancije. V času t se plača premija $P_t^{[T]}$ vključno z obremenitvenimi stroški (*ang. expense loadings*). Premija je lahko v času konstantna ali pa tudi ne, vse je odvisno od pogojev zavarovalne police. Z Λ_t označimo celotne stroške v času t. Prvotna provizija se običajno zaračuna glede na prvo premijo. Obremenitve po izdaji vsebujejo obremenitvene stroške in splošne administrativne stroške ter provizijo za upravljanje. Obremenitveni stroški so običajno sorazmerni z velikostjo premij in sklada zavarovalne police.

Neto premijo označimo s P_t in ta se investira v referenčni sklad. Če označimo z w_t vrednost enote, potem

$$n_t = \frac{P_t}{w_t} \tag{7.1}$$

predstavlja število enot, ki jih je zavarovatelj kupil v času t z neto premijo. Zavarovalec ima na voljo podatke o vrednosti w_t, saj prevzame finančno tveganje in mora pridobiti vse podatke o uspešnosti investicijskega sklada. Tvegani znesek je izpostavljen strošku vzajemnosti, katerega je potrebno financirati. Načeloma mora biti neto premija razdeljena na dve komponenti, in sicer se ena komponenta, označimo jo z $n_t^{[S]}$, pripisuje zavarovalni polici z namenom prispevanja k varčevanju in druga komponenta pa se, označimo jo z $n_t^{[R]}$, uporablja za kritje stroškov vzajemnosti. Trivialno je

$$n_t = n_t^{[S]} + n_t^{[R]}. \tag{7.2}$$

Če vzamemo $n_t = 0$ (zaradi določitve $P_t = 0$), potem bi iz enačbe (7.2) sledilo $n_t^{[S]} = -n_t^{[R]}$, kar pomeni, da v kolikor premija ni plačana, so letni stroški (tako premija za tveganje kot tudi stroški) izpolnjeni z denarjem, ki ga vzamemo z računa. To kaže, da enote premoženja omogočajo precej enostavno fleksibilnost pri izbiri letne premije. S tehničnega vidika pravzaprav ni potrebno, da se premija plača vsako leto, kot je zgoraj omenjeno, potrebno je, da je sedanji račun dovolj velik, da pokrije letne stroške. Vsekakor je v tem primeru potrebno oblikovati ustrezne pogoje police, prav tako, kot so sprejeti v policah univerzalnega življenjskega zavarovanja. V nadaljevanju bomo upoštevali, da je $P_t > 0$ in $n_t^{[S]} > 0$.

Naj bo N_t oznaka za število enot, ki so v celoti knjižene v zavarovalni polici v času t pred plačilom premije. To lahko enostavno razumemo z enačbo

$$N_t = \sum_{s=0}^{t-1} n_s^{[S]}. \tag{7.3}$$

Da bi izvedli delitev enačbe (7.2) in nato izračunali N_t, moramo oceniti višino nadomestila, zlasti vsoto tveganja.

Najprej definiramo sklad zavarovalne police v času t, kot sledi:

$$F_t = N_t w_t. \tag{7.4}$$

Upoštevati je potrebno, da je F_t ocenjen glede na sedanjo vrednost z upoštevanjem, da zavarovalec krije finančno tveganje. Rezervacija v času t predstavlja odgovornost zavarovatelja in je opredeljena na preprost način, in sicer

$$V_t = F_t. \tag{7.5}$$

Nadomestilo ob zapadlosti, ki je sedanja vrednost sklada zavarovalnih polic, je podano kot

$$S_m = F_m, \tag{7.6}$$

v času m. Pred časom m lahko ocenimo znesek, ki ga financiramo s sedanjimi vrednostmi, kot sledi

$$S_t = T_t. \tag{7.7}$$

Potrebno je omeniti, da se v nasprotju z fiksnimi nadomestili in zavarovalnimi policami, ki imajo udeležbo v dobičku, se nadomestilo v času zapadlosti postopoma nabira v času. F_t je torej rezultat plačil, ki so bila v času opravljena.

Nadomestilo v primeru smrti, ki se izplača v času t je

$$C_t = F_t + K_t, \tag{7.8}$$

kjer je K_t tvegani znesek, definiran na način, da velja $K_t \geq 0$, npr.

$$C_t = F_t(1+\alpha), \tag{7.9}$$

kjer je $K_t = \alpha F_t$ z $\alpha > 0$ ali

$$C_t = F_t + G, \tag{7.10}$$

kjer je $K_t = G$ z $G > 0$. Upoštevati moramo, da enačba (7.10) vnaša finančno garancijo kakršno (razen v primeru $F_t < 0$) smo vedno imeli: $C_t \geq G > 0$. V nasprotnem primeru pa enačba (7.9) ne vnaša finančne garancije. Količina α v enačbi (7.9) je del, ki izraža tvegani znesek in količina G v enačbi (7.10) je lahko mišljena kot zagotovljeno minimalno nadomestilo v primeru smrti.

Vrednost odkupa v času t je po navadi definirana kot

$$R_t = \varphi(t)F_t, \tag{7.11}$$

kjer je $1-\varphi(t)$ predstavlja nakupno provizijo v času t (pogosto zelo blizu 0).

Sedaj lahko izračunamo število enot, $n_t^{[S]}$, ki se knjižijo v dobro sklada zavarovalne police, v času t po prejemu premije. Opazimo, da je:

$$n_t^{[S]} = N_{t+1} - N_t. \tag{7.12}$$

Število N_{t+1} ocenimo tako, da so sredstva in obveznosti iz pogodbe v letu $(t,t+1)$ v aktuarskem ravnovesju. Razširitev rekurzivne enačbe

$$(V_T + P)(1+i') = (C - V_{t+1})q'_{x+t} + V_{t+1}, \tag{7.13}$$

za rezervacije zavarovalnih kritij s fiksnim nadomestilom lahko opišemo z naslednjo enačbo, ki se nanaša na leto $(t,t+1)$:

$$(F_t + P_t)\frac{w_{t+1}}{w_t} = (C_{t+1} - F_{t+1})q'_{x-t} + F_{t+1}. \tag{7.14}$$

Enačbo (7.14) lahko enostavno razumemo, če jo primerjamo z enačbo (7.13):

- sklicevanje na veljavno zavarovalno polico v času t;
- F_t predstavlja količino sredstev, ki so na razpolago v času t, medtem ko P_t predstavlja neto premijo, ki se obračuna v tistem času;
- sredstva se investirajo v referenčni sklad, katerega donos v letu $(t,t+1)$, je

$$z_{t+1} = \frac{w_{t+1}}{w_t} - 1. \tag{7.15}$$

Opazimo, da je z_{t+1} v času t neznan:

- ne glede na to, kaj se zgodi, ali bo zavarovanec ob koncu leta še vedno živ ali ne, bo na voljo sklad zavarovalne police F_{t-1};
- v primeru, da se smrt zgodi med letom, je vsoti tveganja $C_{t+1} - F_{t+1}$ potrebno dodati sklad za zavarovanje, tako da se upravičencem plača nadomestilo za smrt C_{t+1}.

V nasprotju z enačbo (7.13) je enakost v enačbi (7.14) samo hipotetična, saj niso vse znane količine zanesljive. Naj bo nadomestilo v primeru smrti tako, kot je predstavljeno v enačbi (7.9). Če v enačbi (7.14) nadomestimo zadevne količine z zgoraj opisanimi pojmi, bi dobili

$$(N_t + n_t)w_{t+1} = \alpha N_{t+1} w_{t+1} q'_{x+t} + N_{t+1} w_{t+1}. \tag{7.16}$$

Vsak izraz iz enačbe (7.16) je sorazmeren z w_{t+1}. To nam omogoča, da lahko spreminjamo računsko enoto iz denarne enote do enote referenčnega sklada. Če predpostavimo, da je w_{t+1} strogo pozitivna, potem z deljenjem enačbe (7.16) z w_{t+1}, dobimo

$$N_t n_t = \alpha N_{t+1} q'_{x+t} + N_{t+1}, \tag{7.17}$$

kjer se pogoj ravnotežja izraža kot izraz naložbenih enot, pri čemer so vse zadevne količine deterministične v času t. Tako lahko enačbo (7.17) uporabimo za izračun N_{t+1}, tj. $n_t^{[S]}$. Potrebno je omeniti, da so količine v enačbi (7.17) deterministične samo v času t, kar pa je ravno po plačilu premije. Glede na to, da je število n_t odvisno od sedanje vrednosti enote je pred časom t naključno (glej (7.1)).

Z rešitvijo enačbe (7.17) dobimo naslednje:

$$N_{t+1} = \frac{N_t + n_t}{\alpha q'_{x+t} + 1}, \tag{7.18}$$

in potem sledi

$$n_t^{[S]} = \frac{n_t - \alpha q'_{x+t}}{\alpha q'_{x+t} + 1}, \tag{7.19}$$

$$n_t^{[R]} = (n_t + 1)\frac{\alpha q'_{x+t}}{\alpha q'_{x+t} + 1}. \tag{7.20}$$

Izkaže se, da je $n_t^{[S]} < n_t$.

Definicija tveganja in premije za varčevanje je sedaj enostavna. Imamo

$$P_t^{[R]} = n_t^{[R]} w_t, \tag{7.21}$$

$$P_t^{[S]} = n_t^{[S]} w_t. \tag{7.22}$$

Razvoj premije za tveganje v času je odvisen od več dejavnikov, in sicer od stopnje umrljivosti (ki se povečuje skozi celotno trajanje zavarovalne police), višine vsote tveganja (ki je sorazmerna z velikostjo sklada zavarovalne police) in od sedanje vrednosti enote. Pomembno je vedeti, da po plačani premiji pogoj ravnovesja iz (7.17) ne predstavlja finančnega tveganja za zavarovatelja. To je posledica opredelitve nadomestil na način, da so sorazmerna sedanji vrednosti ene enote. Vendar pa enačba (7.17), če se upošteva pred časom t, razkriva finančno tveganje za zavarovatelja, ker je število enot, ki so bile kupljene iz leta v leto, neznano, in zato je prav tako neznano število enot, ki se knjižijo v pogodbi, kajti ta števila so odvisna od vrednosti enote ob plačilu premije. Tako je število enot, ki opredeljujejo nadomestila (zapadlost, v primeru smrti ali nadomestilo odkupa) znano že na začetku leta možnega plačila.

Zgoraj smo uporabljali izraza premija za tveganje in premija za varčevanje. Ta izraza nista v pogosti rabi pri unit-linked policah. Unit-linked polica je v glavnem namenjena zagotavljanju primerne naložbene priložnosti, ki je povezana z nekaterimi kapitalskimi zavarovanji v primeru zgodnje smrti. Nadomestilo, ki ustreza skladu zavarovalne police, se potem preprosto obravnava kot prihranek ali naložba zavarovalca in kolčini $P_t^{[S]}$ pravimo naložbena premija (ali investirana količina). S tega vidika je vsota tveganja suplementarna naložba in potem je količina $P_t^{[R]}$ obravnavana kot provizija suplementarnega nadomestila. V skladu z enačbo (7.9) je možno, da se bo povečala premija tveganja, kot je to prikazano v Tabeli 2. Po navadi zavarovalnice raje uporabijo konstantno provizijo za suplementarna nadomestila, podobno velja za druge provizije.

Sedaj pa razmislimo o nadomestilu v primeru smrti (7.10). Če zamenjamo različne količine v enačbi (7.13), dobimo

$$(N_t + n_t)w_{t+1} = Gq'_{x+t} + N_{t+1}w_{t+1}, \tag{7.23}$$

iz česar dobimo

$$N_{t+1} = N_t + n_t - \frac{Gq'_{x+t}}{w_{t+1}}. \tag{7.24}$$

Količina w_{t+1} v enačbi (7.24) (in enačbi (7.23)) je neznana. Da bi lahko izračunali N_{t+1}, je potrebno oceniti w_{t+1}. To pomeni določeno finančno tveganje za zavarovatelja. To tveganje izhaja iz dejstva, da nadomestilo v primeru smrti vnese fiksno dajatev (ta je, kot je zgoraj omenjeno, zagotovljeno najnižje nadomestilo). To je razlog, da je opredelitev nadomestila v primeru smrti, ki jo želijo zavarovatelji iz unit-linked policies, brez garancij z (7.9) [6].

7.4 Police z naložbenim tveganjem in finančnimi garancijami

Kot smo omenili na začetku poglavja 7, zavarovalec pri policah življenjskega zavarovanja vezanega na enote premoženja sprejme finančno tveganje. Delno se lahko tveganje prenese na zavarovalnico s prevzemom določenih garancij.

Garancije se lahko nanašajo na katero koli nadomestilo, ki ga zagotavlja kritje zavarovalnice:

Tabela 3: Zavarovanje vezano na naložbe; $C_{t+1} = 1.10F_{t+1}$

t	P_t	w_t	z_t	n_t	N_t	$n_t^{[S]}$	$P_t^{[R]}$	$P_t^{[S]}$	F_t	C_t	$C_t - F_t$
0	100	1,00	-	100,00	0,00	99,97	0,03	99,97	0,00	-	-
1	100	1,04	4%	96,15	99,97	96,08	0,08	99,92	103,96	114,36	10,40
2	100	1,08	4%	92,46	196,05	92,34	0,13	99,87	212,04	233,25	21,20
3	100	1,12	4%	88,90	288,38	88,73	0,20	99,80	324,39	356,83	32,44
4	100	1,17	4%	85,48	377,11	85,24	0,28	99,72	441,16	485,28	44,12
5	100	1,22	4%	82,19	462,35	81,88	0,38	99,62	562,52	618,77	56,25
6	100	1,27	4%	79,03	544,24	78,64	0,50	99,50	688,63	757,50	68,86
7	100	1,32	4%	75,99	622,88	75,50	0,64	99,36	819,66	901,63	81,97
8	100	1,37	4%	73,07	698,38	72,47	0,82	99,18	955,78	1051,36	95,58
9	100	1,42	4%	70,62	770,85	69,54	1,03	98,97	1097,16	1206,88	109,72
10	100	1,48	4%	67,56	840,39	66,69	1,28	98,72	1243,98	1368,38	124,40
11	100	1,54	4%	64,96	907,08	63,93	1,58	98,42	1396,42	1536,06	139,64
12	100	1,60	4%	62,46	971,02	61,25	1,93	98,07	1554,63	1710,10	155,46
13	100	1,67	4%	60,06	1032,27	58,64	2,35	97,65	1718,81	1890,69	171,88
14	100	1,73	4%	57,75	1090,92	56,10	2,85	97,15	1889,11	2078,02	188,91
15	-	1,80	4%	-	1147,02	-	-	-	2065,71	2272,28	206,57

VIR: Olivieri, 2010, 352

- garancija zapadlosti se nanaša na nadomestilo zapadnosti;
- garancija nadomestila v primeru smrti je dodeljena v nadomestilu v primeru smrti;
- garancija za odkup se nanaša na odkupno vrednost.

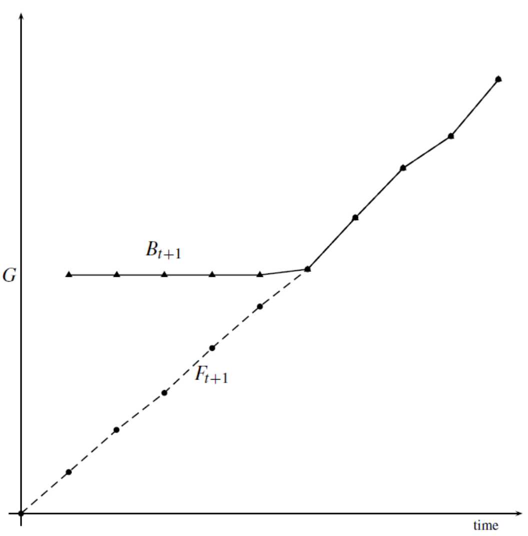
V nadaljevanju bomo zanemarili garancijo za odkup in predpostavili, da sta garanciji za nadomestilo za zapadlost v primeru smrti enaki. Na ta način notacijo nekoliko skrajšamo. Vsekakor pa ni težko obravnavati bolj spošnih primerov, v katerih so garancije za nadomestila za zapadlost in v primeru smrti različne.

Garancija je opredeljena z minimalnim zneskom nadomestila. Če zaradi neugodnih finančnih gibanj sklad zavarovalne police v času plačila ni dovolj visok, bo plačan minimalni znesek. V splošnem smo dovolili, da je B_t nadomestilo, ki ga je potrebno plačati v času t. Če je $t = 1, 2, ..., m-1$ nadomestilo v primeru smrti, medtem ko je $t = m$ nadomestilo, ki je plačano ob zapadlosti, ne glede ali se zgodi smrt ali preživetje (glede na to da predpostavimo, da je zagotovljena enaka garancija za zapadlost in nadomestilo v primeru smrti).

Znesek garancije lahko navedemo glede na različne cilje. Najenostavnejši primer je določiti fiksno zagotovljeno količino G. Nadomestilo v času $t+1$ je opredeljeno na naslednji način

$$B_{t+1} = \max\{F_{t+1}, G\} \tag{7.25}$$

Kot primer lahko vzamemo sliko 5.



Slika 5: Zagotovljeno nadomestilo $B_{t+1} = \max\{F_{t+1}, G\}$; letna konstantne premije.

Količina

$$K_{t+1} = B_{t+1} - F_{t+1} = \max\{G - F_{t+1}, 0\} \tag{7.26}$$

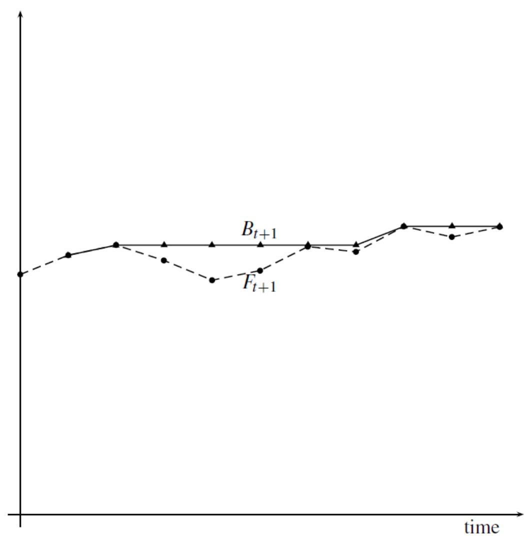
predstavlja vsoto tveganja in ustreza izplačilu prodajne opcije.

Alternativna opredelitev zneska garancije je izbrana na način, da razlika $B_{t+1} - F_{t+1}$ ustreza izplačilu določene finančne opcije.

Kot primer je lahko

$$B_{t+1} = \max\{F_{t+1}, \max\{F_s\}_{s=0,1,\dots,t}\}. \tag{7.27}$$

zagotovljeno, da je minimalni znesek plačan v času $t+1$, največja vrednost sklada zavarovalne police, ki se je zgodila pred potekom enega leta od sklenitve pogodbe. Glej sliko 6.



Slika 6: Zagotovljeno nadomestilo $B_{t+1} = max\{F_{t+1}, \max\{F_s\}_{s=0,1,\dots,t}\}$; enkratna premija.

Zagotovljeni znesek je v tem primeru opredeljen na naslednji način

$$G_t = \max\{F_s\}_{s=0,1,\dots,t}, \tag{7.28}$$

(kjer pripona t označuje, da je ta znesek znan v začetku leta $(t, t+1)$). Vsota tveganja je

$$K_{t+1} = B_{t+1} - F_{t+1} = \max\{\max\{F_s\}_{s=0,1,\dots,t} - F_{t+1}, 0\}, \tag{7.29}$$

in to ustreza izplačilu priklicne opcije.

S sklicevanjem na nadomestilo zapadlosti je garancija podana kot

$$S_m = \max\{F_m, G_{m-1}\}, \tag{7.30}$$

kjer je

$$G_{m-1} = \sum_{t=0}^{m-1} P_t^{[S]}(1+i')^{m-t}, \tag{7.31}$$

podobna garanciji, ki je vgrajena v akumulacijski faktor $f^{[4]}(s,m)$ za zavarovalne police z udeležbo pri dobičku. Glej enačbo (4.25) [6].

8 Finančne opcije v zavarovalnih policah življenjskega zavarovanja vezanega na enote premoženja

V tem poglavju bo predstavljen samo opis strukture finančnih opcij, ki so vključene v police življenjskega zavarovanja. V podpoglavju 8.2 bomo obravnavali zlasti vrednotenje takšnih opcij [6].

8.1 Struktura minimalnih garancij

Najprej si oglejmo na pokojninsko zavarovanje, vezano na naložbe, vključno z garancijo v primeru smrti in nadomestilom za zapadlost. Garancija je opredeljena na način, da je nadomestilo, ki se v primeru smrti plača ob zapadlosti, enako nadomestilu ob zapadlosti. Pri tem ne upoštevamo tistih garancij, ki se nanašajo na odkupno vrednost.

Nadomestilo, ki je plačano v času $t+1$ (torej v primeru smrti, če je $t+1=m$ preživetje ob smrti), je opredeljeno kot

$$B_{t+1} = \max\{F_{t+1}, G_t\}, \tag{8.1}$$

kjer je G_t zagotovljena vrednost, ki je znana najkasneje v času t. Če preuredimo enačbe (8.1), lahko nadomestilo izrazimo kot

$$B_{t+1} = F_{t+1} + \max\{G_t - F_{t+1}, 0\} \tag{8.2}$$

ali kot

$$B_{t+1} = G_t + \max\{F_{t+1} - G_t, 0\}. \tag{8.3}$$

V skladu z enačbo (8.2) sklad zavarovalne police in izplačilo prodajne opcije (G_t) tvorita nadomestilo (katerega vrednost ni znana) in ta temelji na referenčnem skladu. Zapadlost se zgodi v času $t+1$, kar je ravno čas morebitnega plačila nadomestila. Nasprotno pa je, v skladu z enačbo (8.3), nadomestilo sestavljeno iz fiksnega nadomestila G_t, kot tradicionalna zavarovalna polica, ki se ji doda še izplačilo prodajne opcije. Za police življenjskega zavarovanja, vezanega na enote premoženja, je opis iz enačbe (8.2) bolj naraven kot opis iz enačbe (8.3), saj je glavna značilnost dogovora ravno to, da se realizira naložba v referenčni sklad. Vendar pa je pri računanju stroškov garancije včasih lažje oceniti stroške nakupne opcije in šele nato se lahko sklicujemo na enačbo (8.3).

Glede na to, kako je izvršilna cena opredeljena, lahko dodatno preučujemo strukturo opcije. Če je $G_t = G$ konstanta, je opcija podobna evropski opciji, medtem ko je lahko G_t odvisen od preteklih učinkov sklada zavarovalne police, kot je v enačbi (7.28). Če je G_t funkcija plačanih premij, tako kot je predstavljeno z enačbo (7.31), je garancija endogena. Če izberemo garancijo (7.28) in je enkratna premija bila vplačana, potem je vrednost opcije odvisna samo od uspešnosti naložbe (v kolikor je opcija endogena, potem je njena vrednost tudi odvisna od izbire, ki se nanaša na investirani znesek).

Če je garancija vpisana v polici življenjskega zavarovanja, vezanega na enote premoženja, potem zavarovalec potrebuje provizijo. V splošnem je lažje oceniti stroške opcije, podobne evropski opciji, kakor opcije, ki je odvisna od poti (ang. *path dependent option*). Prav tako je lažje oceniti stroške eksogenih garancij kot pa tistih z endogenimi garancijami. Na podlagi običajne prakse oblikovanja cen izvedenih finančnih instrumentov, je potrebna tržna ocena. To zahteva kalibracijo s tržnimi podatki, tudi če se opcija ne trguje neposredno na trgu. Opcije, ki se trgujejo na finančnih trgih, se razlikujejo od opcij, ki so vključene v življenjske zavarovalne police, kot je zapadlost (ki je po navadi krajša za opcije, ki se trgujejo). Nadalje je treba opozoriti, da izvajanje opcij v (8.2) in (8.3) ni odvisno le od gospodarskih dogodkov (uporaba nakupne opcije je primerna, če je $F_{t+1} > G_t$, medtem ko je primerna za izvajanje prodajne opcije, v kolikor je $F_{t+1} < G_t$), niti od življenjske dobe zavarovanca. Dejansko je nadomestilo v primeru smrti v času $t+1$ plačljivo. To še dodatno otežuje vrednotenje zavarovateljske odgovornosti. Nekatere podrobnosti, povezane s tem, bodo predstavljene v podpoglavju 8.2.

Poglejmo, kako je z garancijo odkupa. Izrazimo jo lahko podobno, kot prikazuje enačba (8.1), kjer bi nadomestilo bilo odkupna vrednost R_{t+1} namesto B_{t+1}. Zagotovljeni znesek G_t je po navadi opredeljen na način, da zagotavlja finančno zaščito naložbe zavarovanca. Iz tega razloga znesek G_t predstavlja minimalno (letno ali povprečno) donosnost naložbenega zneska. Izvrševanje garancije odkupa je odvisno od gospodarskih dogodkov (izvajanje je primerno, če velja $G_t > F_{t+1}$), vendar tudi od preferenc zavarovanca (ali naj vzdržujejo zavarovalno polico ali ne). Ta zadnji vidik je zelo težko modelirati, saj garancija odkupa predstavlja pomembne stroške za zavarovatelje, vendar pa je njihova ocena še vedno odprt problem zaradi težav pri zastopanju posameznih preferenc.

V podpoglavjih 4.1 in 4.2 smo že omenili vgrajene finančne opcije, zato bomo v tem podpoglavju predstavili primer, kako eksplicitno ovrednotiti relevantno opcijo. Predpostavimo, da je privzet akumulacijski faktor $f^{[1]}(s,t)$, (glej (4.13)). Preuredimo enačbo na način, da se lahko taka količina izrazi na naslednji način:

$$f^{[1]}(s,t) = (1+i')^{t-s} \prod_{h=s+1}^{t} \left(1 + \max\left\{\frac{\eta_t g_t - i'}{1+i'}, 0\right\}\right). \tag{8.4}$$

Faktor $(1+i')^{t-s}$ predstavlja minimalno zagotovljeno akumulacijo, medtem ko člen $\prod_{h=s+1}^{t}\left(1+max\left\{\frac{\eta_t g_t - i'}{1+i'},0\right\}\right)$ izvirajo iz prodajne opcije na donosnost investicijskega sklada. Akumulacijski faktor $f^{[1]}(s,t)$ lahko prerazporedimo na način, da bi bile opcije eksplicitno izplačane, vendar je za zavarovalne police, ki imajo udeležbo v dobičku, opis iz enačbe (8.4) bolj naraven, saj sodelujoča zavarovalna polica prva zagotavlja dano donosnost in morebitni dodaten donos [6].

8.2 Vrednotenje finančnih opcij v unit-linked policy

Kot smo omenili v prejšnjem podpoglavju, je vrednotenje finančnih opcij, vključenih v kritje življenjskih zavarovanj, zapleteno. V tem podpoglavju si prizadevamo zagotoviti nekaj argumentov glede tega, kako je treba upoštevati različne dogodke, na katere se nanaša izvajanje takšnih opcij.

Pogledali si bomo pokojninsko zavarovanje, vezano na naložbe, izdano s samo eno premijo. Nadomestili v primeru smrti in zapadlosti sta definirani kot v (8.1), s konstanto $G_t = G$. Predpostavimo, da vrednost odkupa ni zagotovljena. Enkratna premija stroškov obremenitve $\Pi^{[T]}$ je razdeljena na tri komponente:

- upravljavske provizije in stroške pridobivanja, Θ;
- investirani znesek, $\Pi^{[S]}$;
- provizija za pomožna nadomestila (in sicer za tvegani znesek), $\Pi^{[R]}$.

Zgornji zapis je podoben tistemu, ki je bil sprejet pri tradicionalnih zavarovalnih policah (in sicer za obremenitvene stroške, varčevanje ter premijo za tveganje). Pomen večine količin ni enak kot pri tradicionalnih zavarovalnih policah in mora biti mišljen, kot je zgoraj navedeno.

Količino $\Pi^{[S]}$ investiramo v izbrani sklad. Predpostavimo, da je:

$$\Pi^{[S]} = Nw_0, \tag{8.5}$$

kjer je N število enot, ki so knjižene v zavarovalni polici. Količina N se določi na način, da je sklad zavarovalne police vedno sestavljen iz N enot, tj.

$$F_t = Nw_t. \tag{8.6}$$

Vstavimo enačbo (8.6) v (8.1) in dobimo:

$$B_t = Nw_t + \max\{G - Nw_t, 0\}, \tag{8.7}$$

ali, pa določimo, da je $G = N \times E$:

$$B_t = Nw_t + \max\{E - w_t, 0\}. \tag{8.8}$$

Glede na enačbo (8.8) je nadomestilo sestavljeno iz N enot referenčnega sklada in N prodajnih opcij. Enačbo (8.8) lahko prepišemo, da bo izplačilo nakupnih opcij eksplicitno.

Sedanja vrednost nadomestil, ki jih je potrebno izplačati v času t, bomo v času $t = 0$ označili z $V_0(B_t)$ in jo lahko zapišemo na naslednji način:

$$V_0(B_t) = Nw_0 + NP_{0(t)}, \tag{8.9}$$

kjer je $P_{0(t)}$ vrednost (ali cena) prodajna opcije v času 0 z zapadlostjo v času t, izvršna cena E. Ceno $P_{0(t)}$ je treba oceniti z ustreznim finančnim modelom, na primer, če sprejmemo standardne predpostavke potem lahko uporabimo Black-Scholesov model. Pogosto standardne predpostavke niso primerne in takrat je potrebno namesto analitičnih formul uporabiti numerične tehnike.

Nadomestilo B_t se plača v času t, v odvisnosti od življenjske dobe zavarovanca. Glede na ustrezen življenjski niz, s katerim se ocenjujejo stopnje umrljivosti q_{x+t}, pričakujemo:

- delež ${}_{t+1|1}q_x$ zavarovalne police, ki je izdana v času 0, nadomestilo B_t bodo prejeli v času t; $t = 1, 2, ..., m-1$ (saj se smrt zgodi v letu $(t-1, t)$),
- delež ${}_{m-1}p_x = {}_{m-1|1}q_x + {}_{m}p_x$ zavarovalnih polic, izdanih v času 0, nadomestilo B_m bodo prejeli v času m (če zavarovanec v zadnjem letu umre ali pa živi do zapadlosti).

Da bi lahko opazili aktuarsko ravnovesje med premijo in nadomestilom, mora biti izpolnjen pogoj:

$$\Pi^{[T]} - \Theta = \sum_{t=1}^{m-1} {}_{t-1}q_x V_0(B_t) + {}_{m-1}p_x V_0(B_m). \tag{8.10}$$

Če zgornjo enačbo nekoliko preuredimo, dobimo:

$$\Pi^{[T]} - \Theta = Nw_0 + \left(\sum_{t=1}^{m-1} {}_{t-1}q_x NP_{0(t)} + {}_{m-1}p_x NP_{0(m)} \right). \tag{8.11}$$

Kot je navedeno v (8.5), količina Nw_0 predstavlja investirani znesek. Količina v oklepajih predstavlje znesek $\Pi^{[R]}$, ki ustreza stroškom dodatnih nadomestil, tj. stroškov zapadlosti in stroškov garancij. V skladu s provizijami so sedanja vrednost enot referenčnega sklada, cena finančnih opcij in stopnja umrljivosti (8.11) tiste, ki omogočajo določitev števila N enot, ki jih lahko knjižimo k zavarovalni polici.

V enačbah (8.10) in (8.11) je moč opaziti, da je neodvisnost med življenjsko dobo zavarovancev in donosnostjo referenčnega sklada implicitno predvidena. Takšna predpostavka je smiselna, saj je tisto, kar ni trivialno, kako bi bilo treba izbrati verjetnost q_{x+t}.

9 Police, vezane na referenčni indeks

Police vezane na referenčni indeks so varčevalne pogodbe, ki so financirane z enkratnim plačilom, višina nadomestila pa je povezana z uspešnostjo indeksa borznega trga, tako imenovanega referenčnega indeksa. Ker smo predpostavili enkratno premijo (z drugimi besedami: investirani znesek), je pri nadomestilu ob zapadlosti garancija zagotovljena. Ta enkratna premija mora biti najvišja od akumulacijskih faktorjev in odvisna od uspešnosti referenčnega indeksa ter zagotovljenega akumulacijskega faktorja. Referenčni indeks običajno temelji na široki košarici delnic, tako da se omilijo skrajna nihanja. Z namenom izboljšanja izravnave skrajnih nihanj se lahko sklicujejo tudi na mešanico indeksov.

Vrednost referenčnega indeksa v času t označimo z I_t. Funkcija Φ, pravila udeležbe pri dobičku, opredeljuje akumulacijski faktor, ki temelji na uspešnosti referenčnega indeksa v času trajanja zavarovalne police. Načeloma so pravila udeležbe pri dobičku odvisna od celotne poti referenčnega indeksa v času trajanja zavarovalne police. Posebna oblika funkcije Φ bi lahko obravnavala samo nekatere vidike take poti.

Nadomestilo ob zapadlosti je opredeljeno na naslednji način

$$S = \Pi \times \max\{\gamma, \Phi(I_0, I_1, ..., I_m)\}, \tag{9.1}$$

kjer je Π neto enkratna premija, γ pa zagotovljen akumulacijski faktor (stroški niso obračunani pri razvijanju posamezne premije). Alternativni izraz za nadomestilo ob zapadlosti je naslednji:

$$S = \Pi\gamma + \Pi \times \max\{\Phi(I_0, I_1, ..., I_m) - \gamma, 0\}, \tag{9.2}$$

kjer je $\Pi\gamma$ zagotovljeno nadomestilo, medtem ko je $\Pi \times \max\{\Phi(I_0, I_1, ..., I_m) - \gamma, 0\}$ izplačilo prodajne opcije na referenčni indeks, s izvršilno ceno γ in zapadlostjo m.

Glede zagotovljenega akumulacijskega faktorja γ imamo na voljo več možnosti:

- $\gamma = 0$ (referenčni indeks brez eksplicitne garancije);
- $0 < \gamma < 1$ (referenčni indeks z delno garancijo);
- $\gamma = 1$ (referenčni indeks z zajamčeno glavnico);
- $\gamma > 1$ (referenčni indeks z zajamčeno obrestno mero).

Na prvi pogled se zdi, da bi bilo težko sprejeti $\gamma \leq 1$. Najprej je potrebno opozoriti, da pri policah, vezanih na referenčni indeks zavarovanec sredstva vloži v indeks borznega trga. Indeksi borznega trga so pod vplivom nihanja. V tem primeru so lahko obresti zagotovljena glavnica. Prav tako je potrebno upoštevati, da mora premija financirati zagotovljeni znesek in nakupno opcijo. Nižji kot bo zagotovljeni znesek, višji bo znesek, ki je na voljo za naložbo v nakupno opcijo. Glede na to, katero opcijo izberemo, so določene garancije vključene v izplačilo referenčnega indeksa, kar pomeni, da ni potrebno, da je γ visok.

Pravilo udeležbe pri dobičku je zelo preprost primer sodelovanja pri uspešnosti indeksa. Naj bo

$$g_t = \frac{I_t}{I_{t-1}} - 1 \tag{9.3}$$

stopnja spremembe referenčnega indeksa v letu $(t-1,t)$. Zaradi narave indeksa I_t, lahko poskusimo z $g_t \gtreqless 0$. Pravila udeležbe pri dobičku so opredeljena na naslednji način

$$\Phi(I_0, I_1, ..., I_m) = (1+g_1)(1+g_2)...(1+g_m) = \frac{I_m}{I_0} \tag{9.4}$$

V praksi je opcija, ki je vključena v enačbi (5.1), evropska vrsta opcije. Izkazati se mora, da je $\frac{I_m}{I_0} < 1$. Če je $\frac{I_m}{I_0} < \gamma$, bo zagotovljeni znesek izplačan ob zapadlosti.

V Cliquet pravilo udeležbe pri dobičku je enkratna premija izplačana v letu $(t-1,t)$, po stopnji

$$j_t = \begin{cases} 0, & \text{if } g_t < 0 \\ g_t, & \text{if } 0 \leq g_t < g' \\ g', & \text{if } g_t \geq g' \end{cases}, \tag{9.5}$$

kjer g' izraža najvišjo letno stopnjo povečanja referenčnega indeksa, ki je bil sprejet ob plačilu enkratne premije, npr. $g' = 0.20$. Pravila udeležbe pri dobičku so opredeljena kot

$$\Phi(I_0, I_1, ..., I_m) = \alpha(1+j_1)(1+j_2)...(1+j_m), \tag{9.6}$$

kjer je α, $\alpha > 0$ je delež, kar lahko predstavlja ojačanje (če je $\alpha > 1$) ali stiskanje (če je $\alpha < 1$) spremembe referenčnega indeksa. Opazimo, da je $j_t \geq 0$, torej $\Phi(I_0, I_1, ..., I_m) \geq \alpha$ tj.: cliquet pravilo udeležbe pri dobičku vnese minimalno garancijo pri akumulaciji. Pretekli pozitivni skoki referenčnega indeksa so zakljenjeni. V odvisnosti od deleža α in možne poti referenčnega indeksa bi lahko bila opcija, ki sledi iz cliquet pravila udeležbe pri dobičku, veliko dražja od opcije, ki sledi iz pravila udeležbe pri dobičku.

Izplačilo, ki ga opisuje (5.1), je strukturirana brezkuponska obveznica ((*ang. structured Zero Coupon Bond*) ali indeksna obveznica. Gre za sredstvo, ki podpira zavarovalno polico. Investicijske banke izdajo indeksne obveznice in te po navadi kupijo zavarovatelji. To nam pojasni, zakaj je polica, vezana na indeks, izdana za enkratno premijo (letne premije bi zahtevale, da so indeksne obveznice z značilnostmi, kot so opredeljene v enačbi (5.1), tudi po izdaji na razpolago in zavarovatelj ne more biti prepričan, kako je z letno premijo). Zavarovatelj krije tveganje neplačila.

Nadomestilo je plačano v primeru predčasnega prenehanja pogodbe zaradi smrti ali doživetja. Nadomestilo v primeru smrti je po navadi opredeljeno kot sedanja vrednost indeksne obveznice, ki je povečana za določen delež (recimo 5% ali 10%). Po navadi dobijo upravičenci možnost, da se naložba zadrži do zapadlosti, če menijo, da ta trenutno ni primerna za denarno naložbo. Poudariti je treba, da znesek nadomestila v primeru smrti ni zagotovljen, saj se faktor γ nanaša le na nadomestilo ob zapadlosti. Zavarovalniška komponenta je zanemarljiva, kajti polica, vezana na indeks, je naložbeni produkt. Posledično je vrednost odkupa sedanja vrednost indeksne obveznice, ki je po možnosti zmanjšana za (majhno) provizijo. Tudi to nadomestilo ni zagotovljeno.

Premija obremenitvenih stroškov $\Pi^{[T]}$ vsebuje tri komponente:

- obremenitveni stroški (kar se nanaša na stroške provizije),
- stroški indeksne obveznice,
- stroški zapadlosti.

Stroški zapadlosti so običajno ocenjeni približno, zaradi majhne velikosti vsote tveganja. Rezervacija je vrednost indeksne obveznice, ki se bo morda povečala za majhen delež, z namenom, da bi upoštevali nadomestilo v primeru smrti.

10 Zaključek

V magistrski nalogi smo se osredotočili na teoretično razlago zavarovalnih produktov z naložbenim tveganjem in smo predstavili nekaj oblik garancij. Pri garantiranih naložbenih produktih zavarovalnica prevzame del tveganja. Omenjenega tveganje nastopi v tistem trenutku, kadar se vzajemni znesek nahaja pod zajamčenim zneskom.

11 Literatura in viri

[1] N. GATZERT, C. HUBER in H. SCHMEISER, On the Valuation of Investment Guarantees in Unit-linked Life Insurance: A Costumer Perspective. *The Geneva Papers* 36 (2011) 3–29. *(Citirano na strani 1.)*

[2] M. ČERPNJAK, *Zavarovalništvo v Sloveniji in vpliv nove direktive Solventnosti II*, Magistrsko delo, Univerza v Mariboru: Ekonomsko-poslovna fakulteta, 2012. *(Citirano na straneh 5 in 6.)*

[3] A. ZALOKAR, *Optimalno upravljanje s tveganji pri naložbenih zavarovanjih z garancijami* , Doktorska disertacija, Univerza na Primorskem: Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije, 2012. *(Citirano na strani 14.)*

[4] A. MARTER, *Trendi rentnega varčevanja*, Diplomsko delo, Univerza v Ljubljani: Ekonomska fakulteta, 2009. *(Citirano na straneh 30 in 31.)*

[5] A. ŠALAMUN, *Vpliv obvladovanja tveganj na kapitalsko ustreznost zavarovalnice*, Magistrsko delo, Univerza v Ljubljani: Ekonomska fakulteta, 2009. *(Citirano na straneh 4 in 5.)*

[6] A. OLIVIERI in E. PITACCO, *Introduction to Insurance Mathematics Tehnical and Financial Features of Risk Transfers*. Springer-Verlag, Berlin, 2011. *(Citirano na straneh 10, 13, 14, 15, 17, 21, 26, 28, 40, 42, 46, 50, 51 in 53.)*

[7] T. MOLLER in M. STEFFENSEN, *Market-Valuation Methods in Life and Pension Insurance*. Cambridge University Press, New York, 2007. *(Citirano na straneh 37 in 40.)*

[8] M. HARDY, *Investment Guarantees: The New Science of Modeling and Risk Management for Equity-Linked Life Insurance 1st Edition*, John Wiley & Sond, First Edition, 2003. *(Citirano na straneh 25, 26, 27, 29 in 38.)*

[9] *Solvency II - Life Insurance*,
$file : ///C : /Users/Ivana/Downloads/IandF_SA2_solvencyII_2016.pdf\_primality\_test$.
(Datum ogleda: 21. 5. 2018.) *(Citirano na straneh 4, 5 in 6.)*

[10] *Uradni list Republike Slovenije*,
$https : //www.uradni - list.si/$. (Datum ogleda: 15. 5. 2018.) *(Citirano na strani 4.)*

[11] *Slovensko zavarovalno združenje*, *https : //www.zav − zdruzenje.si/sredisce − informacij/zavarovalne − vrste/*. (Datum ogleda: 15. 5. 2018.) *(Citirano na strani 7.)*

[12] M. KAWIŃSKI, *Guaranties in life insurance products*, *https://eiopa.europa.eu/Publications/Stakeholder%20Opinions/IRSG%20Discussion%20paper* *%20Guaranties%20in%20life%20insurance%20products.pdf*. (Datum ogleda: 20. 5. 2018.) *(Citirano na straneh 21, 22 in 23.)*

Priloge

A Dodatek A

V Dodatku A so podane stopnje smrtnosti in doživetja. Predpostavimo, da je bila oseba v času $t = 0$, t je izražen v mesecih, stara 50 let.

t	$p_{x,t}^{\tau}$	${}_tp_x^{\tau}$	${}_{t\|1}q_x^d$	t	$p_{x,t}^{\tau}$	${}_tp_x^{\tau}$	${}_{t\|1}q_x^d$
0	0.99307	1.00000	0.00029				
1	0.99307	0.99307	0.00029	45	0.99293	0.72911	0.00031
2	0.99306	0.98618	0.00029	46	0.99292	0.72396	0.00031
3	0.99306	0.97934	0.00029	47	0.99292	0.71883	0.00031
4	0.99306	0.97255	0.00029	48	0.99292	0.71374	0.00031
5	0.99306	0.96580	0.00029	49	0.99291	0.70869	0.00032
6	0.99305	0.95909	0.00029	50	0.99291	0.70366	0.00032
7	0.99305	0.95243	0.00029	51	0.99290	0.69867	0.00032
8	0.99305	0.94581	0.00029	52	0.99290	0.69372	0.00032
9	0.99304	0.93923	0.00029	53	0.99290	0.68879	0.00032
10	0.99304	0.93270	0.00029	54	0.99289	0.68390	0.00032
11	0.99304	0.92621	0.00029	55	0.99289	0.67903	0.00032
12	0.99304	0.91976	0.00029	56	0.99288	0.67420	0.00032
13	0.99303	0.91336	0.00029	57	0.99288	0.66941	0.00032
14	0.99303	0.90700	0.00030	58	0.99287	0.66464	0.00032
15	0.99303	0.90067	0.00030	59	0.99287	0.65990	0.00032
16	0.99302	0.89439	0.00030	60	0.99287	0.65520	0.00032
17	0.99302	0.88816	0.00030	61	0.99286	0.65052	0.00032
18	0.99302	0.88196	0.00030	62	0.99286	0.64588	0.00032
19	0.99302	0.87580	0.00030	63	0.99285	0.64127	0.00032
20	0.99301	0.86968	0.00030	64	0.99285	0.63668	0.00032
21	0.99301	0.86361	0.00030	65	0.99284	0.63213	0.00032
22	0.99301	0.85757	0.00030	66	0.99284	0.62761	0.00033
23	0.99300	0.85157	0.00030	67	0.99283	0.62311	0.00033
24	0.99300	0.84561	0.00030	68	0.99283	0.61865	0.00033
25	0.99300	0.83970	0.00030	69	0.99282	0.61421	0.00033
26	0.99299	0.83382	0.00030	70	0.99282	0.60980	0.00033
27	0.99299	0.82797	0.00030	71	0.99282	0.60542	0.00033
28	0.99299	0.82217	0.00030	72	0.99281	0.60107	0.00033
29	0.99298	0.81640	0.00030	73	0.99281	0.59675	0.00033
30	0.99298	0.81067	0.00031	74	0.99280	0.59246	0.00033
31	0.99298	0.80498	0.00031	75	0.99280	0.58820	0.00033
32	0.99297	0.79933	0.00031	76	0.99279	0.58396	0.00033
33	0.99297	0.79371	0.00031	77	0.99279	0.57975	0.00033
34	0.99297	0.78813	0.00031	78	0.99278	0.57557	0.00033
35	0.99296	0.78259	0.00031	79	0.99278	0.57141	0.00033
36	0.99296	0.77708	0.00031	80	0.99277	0.56728	0.00033
37	0.99296	0.77161	0.00031	81	0.99277	0.56318	0.00033
38	0.99295	0.76618	0.00031	82	0.99276	0.55911	0.00033
39	0.99295	0.76078	0.00031	83	0.99276	0.55506	0.00033
40	0.99295	0.75541	0.00031	84	0.99275	0.55104	0.00033
41	0.99294	0.75008	0.00031	85	0.99274	0.54704	0.00034
42	0.99294	0.74479	0.00031	86	0.99274	0.54307	0.00034
43	0.99293	0.73953	0.00031	87	0.99273	0.53913	0.00034
44	0.99293	0.73430	0.00031	88	0.99273	0.53521	0.00034

t	$p^{\tau}_{x,t}$	${}_{t}p^{\tau}_{x}$	${}_{t\|1}q^{d}_{x}$	t	$p^{\tau}_{x,t}$	${}_{t}p^{\tau}_{x}$	${}_{t\|1}q^{d}_{x}$
89	0.99272	0.53132	0.00034	134	0.99242	0.38009	0.00036
90	0.99272	0.52745	0.00034	135	0.99241	0.37721	0.00036
91	0.99271	0.52361	0.00034	136	0.99240	0.37435	0.00036
92	0.99271	0.51980	0.00034	137	0.99240	0.37151	0.00036
93	0.99270	0.51600	0.00034	138	0.99239	0.36868	0.00036
94	0.99269	0.51224	0.00034	139	0.99238	0.36588	0.00036
95	0.99269	0.50850	0.00034	140	0.99237	0.36309	0.00036
96	0.99268	0.50478	0.00034	141	0.99236	0.36032	0.00036
97	0.99268	0.50108	0.00034	142	0.99235	0.35757	0.00036
98	0.99267	0.49742	0.00034	143	0.99235	0.35483	0.00036
99	0.99266	0.49377	0.00034	144	0.99234	0.35212	0.00036
100	0.99266	0.49015	0.00034	145	0.99233	0.34942	0.00036
101	0.99265	0.48655	0.00034	146	0.99232	0.34674	0.00036
102	0.99265	0.48297	0.00034	147	0.99231	0.34407	0.00036
103	0.99264	0.47942	0.00034	148	0.99230	0.34143	0.00036
104	0.99263	0.47589	0.00034	149	0.99229	0.33880	0.00036
105	0.99263	0.47239	0.00035	150	0.99228	0.33619	0.00036
106	0.99262	0.46891	0.00035	151	0.99227	0.33360	0.00036
107	0.99262	0.46545	0.00035	152	0.99227	0.33102	0.00036
108	0.99261	0.46201	0.00035	153	0.99226	0.32846	0.00036
109	0.99260	0.45859	0.00035	154	0.99225	0.32591	0.00036
110	0.99260	0.45520	0.00035	155	0.99224	0.32339	0.00036
111	0.99259	0.45183	0.00035	156	0.99223	0.32088	0.00036
112	0.99258	0.44848	0.00035	157	0.99222	0.31838	0.00036
113	0.99258	0.44515	0.00035	158	0.99221	0.31591	0.00036
114	0.99257	0.44185	0.00035	159	0.99220	0.31345	0.00036
115	0.99256	0.43857	0.00035	160	0.99219	0.31100	0.00036
116	0.99255	0.43530	0.00035	161	0.99218	0.30857	0.00036
117	0.99255	0.43206	0.00035	162	0.99217	0.30616	0.00036
118	0.99254	0.42884	0.00035	163	0.99216	0.30376	0.00036
119	0.99253	0.42564	0.00035	164	0.99215	0.30138	0.00036
120	0.99253	0.42247	0.00035	165	0.99214	0.29901	0.00037
121	0.99252	0.41931	0.00035	166	0.99213	0.29666	0.00037
122	0.99251	0.41617	0.00035	167	0.99212	0.29433	0.00037
123	0.99251	0.41306	0.00035	168	0.99211	0.29201	0.00037
124	0.99250	0.40996	0.00035	169	0.99210	0.28970	0.00037
125	0.99249	0.40689	0.00035	170	0.99209	0.28741	0.00037
126	0.99248	0.40383	0.00035	171	0.99208	0.28514	0.00037
127	0.99248	0.40079	0.00035	172	0.99206	0.28288	0.00037
128	0.99247	0.39778	0.00035	173	0.99205	0.28063	0.00037
129	0.99246	0.39478	0.00035	174	0.99204	0.27840	0.00037
130	0.99245	0.39181	0.00035	175	0.99203	0.27619	0.00037
131	0.99244	0.38885	0.00036	176	0.99202	0.27399	0.00037
132	0.99244	0.38591	0.00036	177	0.99201	0.27180	0.00037
133	0.99243	0.38299	0.00036	178	0.99200	0.26963	0.00037

t	$p^{\tau}_{x,t}$	${}_{t}p^{\tau}_{x}$	${}_{t\|1}q^{d}_{x}$	t	$p^{\tau}_{x,t}$	${}_{t}p^{\tau}_{x}$	${}_{t\|1}q^{d}_{x}$
179	0.99199	0.26747	0.00037	224	0.99137	0.18385	0.00037
180	0.99198	0.26533	0.00037	225	0.99135	0.18226	0.00037
181	0.99196	0.26320	0.00037	226	0.99134	0.18069	0.00037
182	0.99195	0.26109	0.00037	227	0.99132	0.17912	0.00037
183	0.99194	0.25898	0.00037	228	0.99131	0.17757	0.00037
184	0.99193	0.25690	0.00037	229	0.99129	0.17602	0.00036
185	0.99192	0.25482	0.00037	230	0.99127	0.17449	0.00036
186	0.99190	0.25276	0.00037	231	0.99125	0.17297	0.00036
187	0.99189	0.25072	0.00037	232	0.99124	0.17146	0.00036
188	0.99188	0.24868	0.00037	233	0.99122	0.16995	0.00036
189	0.99187	0.24666	0.00037	234	0.99120	0.16846	0.00036
190	0.99186	0.24466	0.00037	235	0.99118	0.16698	0.00036
191	0.99184	0.24267	0.00037	236	0.99117	0.16551	0.00036
192	0.99183	0.24069	0.00037	237	0.99115	0.16404	0.00036
193	0.99182	0.23872	0.00037	238	0.99113	0.16259	0.00036
194	0.99181	0.23677	0.00037	239	0.99111	0.16115	0.00036
195	0.99179	0.23483	0.00037	240	0.99110	0.15972	0.00036
196	0.99178	0.23290	0.00037	241	0.99108	0.15830	0.00036
197	0.99177	0.23099	0.00037	242	0.99106	0.15688	0.00036
198	0.99175	0.22908	0.00037	243	0.99104	0.15548	0.00036
199	0.99174	0.22719	0.00037	244	0.99102	0.15409	0.00036
200	0.99173	0.22532	0.00037	245	0.99100	0.15270	0.00036
201	0.99171	0.22345	0.00037	246	0.99098	0.15133	0.00036
202	0.99170	0.22160	0.00037	247	0.99096	0.14996	0.00036
203	0.99169	0.21976	0.00037	248	0.99094	0.14861	0.00036
204	0.99167	0.21793	0.00037	249	0.99092	0.14726	0.00036
205	0.99166	0.21612	0.00037	250	0.99090	0.14593	0.00036
206	0.99164	0.21432	0.00037	251	0.99089	0.14460	0.00036
207	0.99163	0.21253	0.00037	252	0.99087	0.14328	0.00036
208	0.99161	0.21075	0.00037	253	0.99085	0.14197	0.00036
209	0.99160	0.20898	0.00037	254	0.99082	0.14067	0.00036
210	0.99159	0.20722	0.00037	255	0.99080	0.13938	0.00036
211	0.99157	0.20548	0.00037	256	0.99078	0.13810	0.00036
212	0.99156	0.20375	0.00037	257	0.99076	0.13683	0.00036
213	0.99154	0.20203	0.00037	258	0.99074	0.13556	0.00036
214	0.99153	0.20032	0.00037	259	0.99072	0.13431	0.00036
215	0.99151	0.19862	0.00037	260	0.99070	0.13306	0.00035
216	0.99150	0.19694	0.00037	261	0.99068	0.13182	0.00035
217	0.99148	0.19526	0.00037	262	0.99066	0.13060	0.00035
218	0.99147	0.19360	0.00037	263	0.99064	0.12938	0.00035
219	0.99145	0.19195	0.00037	264	0.99061	0.12816	0.00035
220	0.99143	0.19030	0.00037	265	0.99059	0.12696	0.00035
221	0.99142	0.18867	0.00037	266	0.99057	0.12577	0.00035
222	0.99140	0.18706	0.00037	267	0.99055	0.12458	0.00035
223	0.99139	0.18545	0.00037	268	0.99052	0.12340	0.00035

t	$p^{\tau}_{x,t}$	${}_tp^{\tau}_x$	${}_{t\mid 1}q^{d}_x$	t	$p^{\tau}_{x,t}$	${}_tp^{\tau}_x$	${}_{t\mid 1}q^{d}_x$
269	0.99050	0.12223	0.00035	315	0.98925	0.07672	0.00032
270	0.99048	0.12107	0.00035	316	0.98922	0.07589	0.00032
271	0.99045	0.11992	0.00035	317	0.98919	0.07508	0.00031
272	0.99043	0.11877	0.00035	318	0.98915	0.07426	0.00031
273	0.99041	0.11764	0.00035	319	0.98912	0.07346	0.00031
274	0.99039	0.11651	0.00035	320	0.98909	0.07266	0.00031
275	0.99036	0.11539	0.00035	321	0.98905	0.07187	0.00031
276	0.99034	0.11428	0.00035	322	0.98902	0.07108	0.00031
277	0.99031	0.11317	0.00035	323	0.98899	0.07030	0.00031
278	0.99029	0.11208	0.00034	324	0.98896	0.06953	0.00031
279	0.99026	0.11099	0.00034	325	0.98892	0.06876	0.00031
280	0.99024	0.10991	0.00034	326	0.98889	0.06800	0.00030
281	0.99021	0.10884	0.00034	327	0.98885	0.06724	0.00030
282	0.99019	0.10777	0.00034	328	0.98881	0.06649	0.00030
283	0.99016	0.10671	0.00034	329	0.98878	0.06575	0.00030
284	0.99014	0.10566	0.00034	330	0.98874	0.06501	0.00030
285	0.99011	0.10462	0.00034	331	0.98871	0.06428	0.00030
286	0.99009	0.10359	0.00034	332	0.98867	0.06355	0.00030
287	0.99006	0.10256	0.00034	333	0.98864	0.06283	0.00030
288	0.99004	0.10154	0.00034	334	0.98860	0.06212	0.00030
289	0.99001	0.10053	0.00034	335	0.98856	0.06141	0.00030
290	0.98998	0.09953	0.00034	336	0.98853	0.06071	0.00029
291	0.98996	0.09853	0.00034	337	0.98849	0.06001	0.00029
292	0.98993	0.09754	0.00034	338	0.98845	0.05932	0.00029
293	0.98990	0.09656	0.00033	339	0.98841	0.05863	0.00029
294	0.98987	0.09558	0.00033	340	0.98837	0.05796	0.00029
295	0.98985	0.09461	0.00033	341	0.98833	0.05728	0.00029
296	0.98982	0.09365	0.00033	342	0.98829	0.05661	0.00029
297	0.98979	0.09270	0.00033	343	0.98826	0.05595	0.00029
298	0.98976	0.09175	0.00033	344	0.98822	0.05529	0.00029
299	0.98974	0.09081	0.00033	345	0.98818	0.05464	0.00028
300	0.98971	0.08988	0.00033	346	0.98814	0.05400	0.00028
301	0.98968	0.08896	0.00033	347	0.98810	0.05336	0.00028
302	0.98965	0.08804	0.00033	348	0.98806	0.05272	0.00028
303	0.98962	0.08713	0.00033	349	0.98802	0.05209	0.00028
304	0.98959	0.08622	0.00033	350	0.98798	0.05147	0.00028
305	0.98956	0.08533	0.00032	351	0.98793	0.05085	0.00028
306	0.98953	0.08443	0.00032	352	0.98789	0.05023	0.00028
307	0.98950	0.08355	0.00032	353	0.98785	0.04963	0.00027
308	0.98947	0.08267	0.00032	354	0.98781	0.04902	0.00027
309	0.98944	0.08180	0.00032	355	0.98776	0.04843	0.00027
310	0.98941	0.08094	0.00032	356	0.98772	0.04783	0.00027
311	0.98938	0.08008	0.00032	357	0.98768	0.04725	0.00027
312	0.98935	0.07923	0.00032	358	0.98764	0.04666	0.00027
313	0.98932	0.07839	0.00032	359	0.98759	0.04609	0.00027
314	0.98928	0.07755	0.00032	360	0.98755	0.04551	0.00027