

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE
IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Jurij Kovič

UPORABA SIMETRIJSKIH GRAFOV PRI KONVEKSNIH
POLIEDRIH

Doktorska disertacija

januar 2013

mentor: prof. dr. Tomaž Pisanski

*Zahvaljujem se svojemu mentorju prof. dr. Tomažu Pisanskemu
za vsa njegova pomoč, razumevanje in motivacijo med mojim doktorskim študijem.*

Izvleček**Uporaba simetrijskih grafov pri konveksnih poliedrih**

Grafe praporov in simetrijske grafe, ki so jih odkrili okrog leta 1980, so doslej uporabljali predvsem za klasifikacijo zemljevidov – to je grafov, celično vloženih v kompaktne ploskve. Namen te disertacije je prikazati nekaj razširitev njihove uporabe.

V prvem delu disertacije uporabimo simetrijske grafe pri klasifikaciji poliedrov z regularnimi poligonskimi ali zvezdastimi lici. Podamo tudi karakterizacijo teh poliedrov z minimalnim številom parametrov.

V drugem delu disertacije na podoben način klasificiramo molekule, sestavljene iz pravilnih šestkotniških gradnikov, pri čemer upoštevamo tudi njihove točkovne grupe.

V tretjem delu disertacije pojem simetrijskih grafov razširimo na hiperzemljevide in geometrijske konfiguracije, nazadnje pa tudi na sferne poliedre in sferne molekule.

Ključne besede: polieder, graf praporov, simetrijski graf, simetrijska grupa
AMS Subj. Class. (2010): 05C99, 52B10, 52B15

Abstract**The application of symmetry-type graphs to convex polyhedra**

Flag graphs and symmetry-type graphs, discovered around 1980, were used in the past mostly for the classification of maps – i.e. graphs, cellularly embedded into compact surfaces. The purpose of this work is to demonstrate some extensions of their application.

In the first part of this work a similar classification of polyhedra with regular faces is given. We present also a characterization of these polyhedra by minimal number of parameters.

In the second part of the dissertation we classify in a similar manner the class of molecules, made of regular hexagons, considering also their point groups.

In the third part of this work we extend the definition of symmetry-type graphs to hypermaps and geometrical configurations, and finally to spherical polyhedra and spherical molecules.

Keywords: polyhedron, flag-graph, symmetry-type graph, symmetry group
AMS Subj. Class. (2010): 05C99, 52B10, 52B15

Kazalo

Kazalo slik	V
Kazalo tabel	VII
1 Uvod	1
1.1 Osnovni problem disertacije	1
1.2 Kontekst osnovnega problema disertacije	1
1.3 Teza disertacije	6
1.4 Osnovni pojmi	7
1.4.1 Osnovno o poliedrih	7
1.4.2 Osnovno o simetrijskih grupah	10
1.4.3 Osnovno o simetrijskih grafih	13
2 Simetrijski grafi poliedrov z regularnimi lici	17
2.1 Metode	17
2.2 Splošna struktura simetrijskih grafov poliedrov	20
2.3 Orodja	22
2.3.1 Algoritem za določanje $T(\mathcal{P})$ in $T_R(\mathcal{P})$	24
2.4 Simetrijski grafi platonskih in arhimedskih teles	26
2.5 Nekaj opazanj o simetrijah platonskih in arhimedskih teles	29
2.6 Simetrijski grafi uniformnih poliedrov	31
2.6.1 Nekaj opazanj o simetrijah uniformnih poliedrov	35
2.7 Dokaz Izreka 9	36
2.8 Simetrijski grafi konveksnih teles	47
2.8.1 Metoda določanja simetrijskih grafov konveksnih teles	47
2.9 Simetrijski grafi in struktura Johnsonovih teles	48
2.10 Primer strukturne analize Johnsonovega telesa	51
2.11 Karakterizacija poliedrov z minimalnim številom parametrov	53
2.11.1 Problem karakterizacije	53
2.12 Pregled parametrov	54
2.13 Vrednosti parametrov	58
2.14 Analiza teles in parametrov	60
2.14.1 Dva enostavna trika za iskanje ekvivalenčnih razredov	63
2.14.2 Problem kodiranja teles	63
2.14.3 Povzetek karakterizacije poliedrov s parametri	66

3	Simetrijski grafi molekul	67
3.1	Matematični model kekulejskih benzenoidov	69
3.2	Matematični model poljubnih policikličnih molekul	71
3.3	Simetrijske grupe prostorskih in ravninskih molekul	73
3.4	Dvo-koordinatna notacija praporov	78
3.5	Binarna in simetrijska koda molekul	79
3.6	Primeri šestkotniških molekul vseh možnih simetrijskih tipov	80
3.7	Grafi praporov in simetrijski grafi molekul	82
4	Posplošitve simetrijskih grafov	85
4.1	Simetrijski grafi hiperzemljevidov	85
4.2	Simetrijski grafi konfiguracij	91
4.3	Uporaba simetrijskih grafov pri sferoedrih in sfernih molekulah . . .	95
4.3.1	Osnovni pojmi	95
4.3.2	Problem določitve nekonveksnih poliedrov razreda \mathbb{P}	96
5	Dodatek	103
5.1	Burnsidova lema in Eulerjevo število rotacijskih orbit	103
5.2	Osnovni pojmi in notacija	103
5.3	Konstrukcija zemljevida rotacijskih orbit $O_R(\mathcal{P})$ konveksnega poliedra \mathcal{P}	104
5.4	Glavni rezultat	105
5.5	Eulerjeva karakteristika zrcalno-rotacijskih orbit	111
6	Sklep	113
	Literatura	114
	Stvarno kazalo.	118

Kazalo slik

Slika 1	Coxeterjevi diagrami grup $[]$, $[2]$, $[2, n]$ in $[3, 5, 2]$	4
Slika 2	J37, presevani oktaeder (4.6.6) in pentagamska piramida.	9
Slika 3	Fundamentalna domena grupe $[3, 3]$ na sferi in tetraedru.	11
Slika 4	Prapor in sosedni prapori, orbite in cikli ter simetrijski graf.	13
Slika 5	Dva 0-1 cikla praporov v heksagramski zvezdi.	15
Slika 6	Arhimedsko telo (3.3.3.3.4) in njegova poliedrska mreža	18
Slika 7	Projekcija Johnsonovega telesa J1 na sfero in valj.	18
Slika 8	Graf praporov in zemljevid rotacijskih orbit telesa J81.	19
Slika 9	$G(\mathcal{P})$ kot unija 1-2 ciklov in kot unija 0-1 ciklov.	20
Slika 10	Tri oblike fundamentalne domene grupe $[3, 5]^+$ na dodekaedru.	21
Slika 11	1-2 cikel praporov in simetrijski graf, dobljen iz njega z zrcaljenjem	23
Slika 12	Cikel praporov okrog oglišča in ustrezni osnovni 1-2 cikel.	25
Slika 13	Simetrijski grafi platonskih in arhimedskih teles.	28
Slika 14	Oznake za možne rotacije in zrcaljenja danega prapora Φ	30
Slika 15	Simetrijski grafi $T(\mathcal{P})$ in $T_R(\mathcal{P})$ uniformnih poliedrov.	31
Slika 16	Klasifikacija uniformnih poliedrov.	34
Slika 17	Lica in prapori U75 okrog poljubnega oglišča.	42
Slika 18	Projekcija Johnsonovega telesa J1 na sfero in valj.	47
Slika 19	Nekatere tipične plasti Johnsonovih teles.	49
Slika 20	Črkovne oznake modulov.	50
Slika 21	Johnsonovo telo J59, njegov plašč na valju, ter $T_R(J59)$ in $T(J59)$	51
Slika 22	Nekaj parametrov Johnsonovega telesa J36.	57
Slika 23	Primeri benzenoidov in ne-benzenoidov	70
Slika 24	Primer »neravninskega« benzenoida v obliki spirale in vozla	70
Slika 25	Primer molekule z robom in tremi lici s skupno stranico.	72
Slika 26	»Standardni« fundamentalni domeni grup C_5 in D_5 v ravnini	74
Slika 27	Točkovne grupe in dvo-koordinatna notacija praporov	77
Slika 28	Deset geometrijsko različnih podgrup grupe D_6	78
Slika 29	Pomembne točke in daljice v šestkotniku.	80
Slika 30	Binarna koda in simetrijska koda molekule M	81
Slika 31	Najmanjše šestkotniške molekule vseh možnih simetrijskih tipov.	81
Slika 32	Graf praporov molekule M s strukturno formulo $5_14_53_5$	82
Slika 33	Tri lica incidentna z isto stranico.	85

Slika 34	Hiperzemljevid $\mathcal{M}'(5, 10, 10)$, dobljen iz sferne 3-piramide.	86
Slika 35	Dodana zasukana lica v kocki.	88
Slika 36	Dodana pravokotna in zasukana lica v oktaedru.	88
Slika 37	Sedem lic ireducibilnega 3-hiperzemljevida.	89
Slika 38	K_6, P_2 in $K_6 \times P_2$	90
Slika 39	Ulomljeni zemljevid s strukturno formulo $6_{5/12}5_{3/10}4_{6/8}3_{3/6}$	90
Slika 40	Dve geometrijski konfiguraciji (9_3) z različnima signaturama.	92
Slika 41	Dva vložena poligona grafa, dobljenega iz konfiguracije $(10_3, 10_3)$	93
Slika 42	Graf praporov konfiguracije $(1_1, 2_2)$	94
Slika 43	Konveksen in ustrezni sferičen polieder	95
Slika 44	Konstrukcija pentagamskega kuploida	97
Slika 45	Dve piramidi z vrhom v središču sfere	98
Slika 46	Podaljšana trikotniška piramida J7 in ustrezni sferični polieder	99
Slika 47	Območje okrog oglišča s ploščino $2\pi(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1)$	102

Kazalo tabel

Tabela 1	Klasifikacija poliedrov razreda \mathbb{P}	8
Tabela 2	Končne grupe izometrij prostora E^3	12
Tabela 3	Simetrijski grafi, opisani s permutacijami orbit praporov.	27
Tabela 4	Ekvivalenčni razredi platonskih in arhimedskih teles.	27
Tabela 5	Klasifikacija platonskih in arhimedskih teles	28
Tabela 6	Simetrijski grafi uniformnih poliedrov, opisani z involucijami	32
Tabela 7	Ekvivalenčni razredi uniformnih poliedrov	33
Tabela 8	Parametri Johnsonovih teles.	60
Tabela 9	Parametri platonskih in arhimedskih teles.	61
Tabela 10	Parametri prizem in antiprizem.	61
Tabela 11	Klasifikacija Johnsonovih teles s parametroma s in EO	62
Tabela 12	Vrednosti c in i za različne množice parametrov.	63
Tabela 13	Leksikografsko sortirane vrednosti parametrov $(po, N.n, q)$	65
Tabela 14	Vrednosti vo_R, eo_R, fo_R	106

1 Uvod

1.1 Osnovni problem disertacije

Izvorna motivacija za to delo je problem, ki mi ga je l. 2010 zastavil prof. Pisanski: »Določiti simetrijske grafe platonskih in arhimedskih teles« (osnovni pojmi v zvezi s poliedri ter njihovimi simetrijskimi grafi so definirani v razdelkih 1.4.1 in 1.4.3). Kasneje sva ta problem razširila takole: *Klasificirati poliedre z regularnimi poligonskimi ali zvezdastimi lici (torej t.i. uniformne poliedre in t.i. Johnsonova telesa ter pravilne prizme in antiprizme) glede na njihove simetrijske grafe.*« Iz te tematike imam objavljena tudi dva članka [30, 32], eden pa je sprejet v objavo [31].

SORODNI PROBLEMI, OBRAVNAVANI V DISERTACIJI: S prof. T. Pisanskim in prof. A. Balabanom sem sodeloval tudi pri pisanju članka na temo: »Poiskati primere najmanjših benzenoidnih molekul (iz šestkotniških gradnikov) za vse možne simetrijske grupe in tri možne tipe točkovnih grup ter določiti njihove simetrijske grafe« (rešitev je opisana v poglavju 3). Problema *karakterizacije regularnih poliedrov z minimalnim številom parametrov* (razdelek 2.11) sem se domislil sam, prav tako pa tudi *definicije t.i. Eulerjeve karakteristike rotacijskih orbit poliedrov* (poglavje 5 – Dodatek) ter *možnosti vpeljave simetrijskih grafov pri hiperzemljevidih in konfiguracijah* (poglavje 4).

TEMELJNE REFERENCE: Pri rešitvi osnovnega problema disertacije so mi kot izhodišče za moje delo služili predvsem naslednji temeljni viri:

- i) Coxeter-Moserjeva teorija diskretnih grup [8],
- ii) Johnsonova aplikacija te teorije na konveksne poliedre [24],
- iii) članki o simetrijskih grafih zemljevidov [38, 35, 39, ?],
- iv) literatura o poliedrih in tlakovanjih ravnine [50, 15, 14].

Pri rešitvi drugih problemov pa mi je bila v pomoč:

- v) literatura s področja matematične kemije [27, 17],
- vi) osnovna informacija o Burnsidovi lemi [49], str. 229,
- vii) knjiga prof. Pisanskega in prof. Servatiusove o konfiguracijah [42].

1.2 Kontekst osnovnega problema disertacije

V zvezi s poliedri je kar nekaj težav:

1. PROBLEM NEOBSTOJA ENOTNE DEFINICIJE POLIEDROV: Poliedri (definirani bodisi kot tridimenzionalna geometrijska telesa bodisi kot dvodimenzionalni plašči teh teles ali pa kot abstraktni algebraični objekti z danimi množicami oglišč V , robov E in lic F) pritegujejo pozornost matematikov že več kot 6000 let, zato je praktično nemogoče podati enovito definicijo poliedrov. Tako odgovor na vprašanje: *Kaj je polieder?* »ni en sam, ampak jih je mnogo« (SENECHAL [44], str. 191-192).

Obstajajo npr. poliedri z neravninskimi lici, pa s t.i. »praznimi lici« (ta so definirana zgolj kot cikli oglišč), pa z neskončnimi lici, itd.

2. PROBLEM NEOBTOJA IZČRPNEGA IN ZANESLJIVEGA PREGLEDA ZGODOVINE IN ENOTNE TEORIJE POLIEDROV: Opis 23 mejnikov v zgodovini poliedrov je podal MALKEVITCH v eni prvih študij o zgodovini poliedrov (v zborniku [44], str. 80-92), kjer poleg zadrege, da o dejanskem znanju matematikov o poliedrih izpred tisočletij lahko sklepamo le na podlagi nepopolnih drobcev tekstov, ki so se ohranili do danes, omenja še eno težavo v zvezi s poliedri: marsikatera pomembna spoznanja o njih (npr. EVKLID-ova, ARHIMED-ova, KEPLER-jeva) so v zgodovini večkrat utonila v pozabo, in so bila ponovno odkrita šele mnogo stoletij kasneje (ibid. str. 86). Eden od razlogov za to je najbrž tudi v tem, da je to področje tako težko ujeti v okvir neke enotne teorije. Eden prvih poskusov predstaviti teorijo poliedrov nasploh je podala M. SENECHAL (v istem zborniku [44], str. 191-259).

3. PROBLEM NAZORNEGA PRIKAZA STRUKTURE POLIEDROV: Pri zapletenih poliedrih nam včasih niti najboljše slike ne pomagajo povsem razumeti njihove strukture. Zato ni dobro, če se pri dokazovanju trditev o poliedrih preveč zanašamo na slike in 3D-modele. Ko delamo s poliedri, moramo biti vselej zelo pozorni na to, kakšen razred poliedrov obravnavamo (npr. EULER-jeva formula $v - e + f = 2$, ki velja za vse konveksne poliedre, za mnoge druge razrede poliedrov ne velja, kot je pokazal LAKATOS v knjigi *Proofs and Refutations* [33], napisani v obliki dialogov).

4. PROBLEM VELIKEGA ŠTEVILA ZANIMIVIH POLIEDROV: Poliedrov, ki bi jih bilo vredno raziskati, je ogromno. Zato se je pri vsaki raziskavi potrebno omejiti na izbrani razred poliedrov, ki ga je treba natančno definirati. Včasih je že sama določitev vseh poliedrov danega razreda težak problem, četudi morda že vemo, da je poliedrov tega razreda končno mnogo (ne vemo pa, koliko).

5. PROBLEM ALGEBRAIČNEGA OPISA STRUKTURE POLIEDROV: Ker je številne zapletenejše poliedre tako težko predstaviti s 3D-modeli in slikami, se vprašamo, ali lahko njihovo strukturo opišemo kako drugače, algebraično? Tak zapis, če obstaja, lahko potlej služi kot »strukturna koda« za vsak polieder danega razreda.

Obstaja pa tudi kar nekaj načinov in sredstev za reševanje ali vsaj lajšanje teh težav:

ad 1) REGULARNI POLIEDRI: Ker matematiki hočejo kljub vsem omenjenim težavam vendarle priti do zanesljivih rezultatov v zvezi s poliedri (verjetno pa tudi iz estetskih razlogov), jih zanimajo predvsem tisti poliedri, ki so tako ali drugače *regularni* (npr. imajo vsa lica regularna, ali imajo enako ciklično razporeditev lic okrog vsakega oglišča, ali imajo eno samo orbito oglišč, povezav, lic, itd.).

Regularnim poliedrom z neskončno mnogo lici (odkrila sta jih PETRIE in COXETER) pravimo pravilna satja.

ad 2) SIMETRIJSKE GRUPE POLIEDROV: Od 19. stoletja dalje so ključno orodje za raziskovanje strukture poliedrov \mathcal{P} njihove simetrijske grupe $S(\mathcal{P})$, katerih elementi so tiste izometrije evklidskega prostora E^3 , ki delujejo kot avtomorfizmi na plašču poliedra.¹ Izometrije E^3 je klasificiral že EULER 1776, izometrije E^2 pa 1831 francoski geometer CHASLES [36], str. 194. Obstaja preprosta karakterizacija izometrij ([36], str. 34): »Izometrija, ki fiksira dve točki, je bodisi zrcaljenje bodisi identiteta. Izometrija, ki fiksira natančno eno točko, je produkt dveh zrcaljenj.«

ad 3) PRIPOMOČKI ZA ŠTUDIJO POLIEDROV: Danes so matematikom pri študiju poliedrov (poleg 3D-modelov teles, katerih konstrukcijo je za 119 teles lepo opisal WENNINGER [50] in sestavljanek za konstrukcijo poliedrov) v veliko pomoč tudi računalniški programi (kot. npr. Great Stella, Mathematica). V Sloveniji je za dostopnost informacij o poliedrih in njihovo popularizacijo med mladino veliko naredil I. HAFNER (z revijo *Logika in razvedrilna matematika* in spletno stranjo www.mathema.si).

ad 4) SFERNA TRIGONOMETRIJA: Pri študiju poliedrov (in grup) si lahko pomagamo tudi s sferno trigonometrijo! Tako sta COXETER in MOSER z elementarno uporabo formule za ploščino sferičnega trikotnika (GIRARD-ove formule [3], str. 108) $pl(\Delta(\alpha, \beta, \gamma)) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ pokazala, da obstaja le končno mnogo simetrijskih grup poliedrov ([8], str. 37).

ad 5) UNIFORMNA IN JOHNSONOVA NOTACIJA: Za razred t.i. uniformnih poliedrov (ki imajo sama pravilna lica in eno samo orbito oglišč) obstaja preprost opis njihove strukture: enostavno navedemo, kako se ciklično vrstijo lica okrog vsakega oglišča. JOHNSON pa je podal strukturni opis t.i. Johnsonovih teles, iz katerega je razvidno, kako so zapletenejša telesa zgrajena iz manjšega števila elementarnih [24], str. 173-174.

Z grupami na prvi pogled ni težav, ampak imamo od njih same koristi, saj toliko vemo o njih:

GRUPA IZOMETRIJ EVKLIDSKEGA PROSTORA E^3 JE ZNANA: Neskončna grupa izometrij E^3 je generirana z rotacijami, zrcaljenji in translacijami; njena podgrupa, generirana samo z rotacijami in zrcaljenji, se imenuje posebna ortogonalna grupa SO_3 (njene elemente pa v izbrani bazi predstavimo z matrikami 3×3 z determinanto ± 1).

KONČNE GRUPE IZOMETRIJ PROSTORA E^3 SO ZNANE: V svoji knjigi o diskretnih grupah sta COXETER in MOSER dokazala ([8], str. 33–66), da je takih grup le 17, vse

¹Morebitne avtomorfizme, ki bi lahko ohranjali 1-skelet poliedra, pa ne bi bili porojeni iz izometrij prostora E^3 , smo torej z gornjo definicijo izključili iz obravnave – niso elementi grupe $S(\mathcal{P})$!

Obstajajo pa tudi članki o prav takih »skritih simetrijah« poliedrov (tako je npr. LEYTEM študiral skrite simetrije v t.i. snub dodekaedru [34]), pa tudi molekul (tako je npr. SIMON v [46], str. 718-726, raziskoval t.i. »kiralne molekularne grafe«, to je take grafe, vložene v E^3 , ki jih z nobenimi transformacijami zvijanja, raztegotvanja ipd., ne moremo spremeniti v njihovo zrcalno obliko).

pa so podgrupe ene od štirih tipov *Coxeterjevih grup* $[m, n]$, generiranih z zrcaljenji z_0, z_1, z_2 in relacijami $z_0^2 = z_1^2 = z_2^2 = (z_0 z_1)^m = (z_1 z_2)^n = (z_0 z_2)^2 = E$: razširjene diedrske $D_n = [2, n]$ (ki je za $n \geq 3$ izomorfna grupi vseh simetrij n -prizme), razširjene tetraedrske $[3, 3]$, razširjene oktaedrske $[3, 4]$ in razširjene dodekaedrske $[3, 5]$. Coxeterjeva grupa $[m, n]$ je grupa simetrij uniformnega poliedra $\{m, n\}$ (SCHLÄFLI-jev simbol!), ki ima v vsakem oglišču m lic s po n stranicami. Grafi praporov poliedrov $\{m, n\}$ so torej nazorne upodobitve Coxeterjevih grup $[m, n]$.

SIMETRIJSKE GRUPE SO PREPROSTO SREDSTVO KLASIFIKACIJE: Ni težko določiti simetrijske grupe poliedra ali molekule (ko enkrat preštudiramo, katere grupe simetrij so sploh možne!) in jih na tej podlagi klasificirati: v isti ekvivalenčni razred damo tiste, ki imajo isto simetrijsko grupo.

Vendar so tudi grupe po svoje problematične, saj so obravnavo poliedrov obrnile v drugo skrajnost – od nazornosti v preveliko abstraktnost:

»ALGEBRAIZACIJA GEOMETRIJE«: Vpeljava grup v geometrijo, ki jo je promoviral zlasti F. KLEIN s svojim znanim »Erlangenskim programom« iz 1872², je v 19. stoletju prerasla v t.i. algebraizacijo geometrije; ta je zaradi vse večje uporabe algebraičnih metod postajala vse manj nazorna.

»GEOMETRIZACIJA ALGEBRE«: Temu trendu so nekateri geometri 20. stoletja močno nasprotovali. Tako je npr. COXETER pokazal, da lahko tudi z geometrijo pridemo do pomembnih odkritij v drugih vejah matematike (in ne le obratno)³. Celó za svoje grupe, opisane s *Coxeterjevim simbolom* $[z_0, z_1, z_2, \dots, z_n]$, generirane z zrcaljenji $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ in relacijami $(z_0 z_1)^{n_{0,1}} = (z_1 z_2)^{n_{1,2}} = \dots = (z_{n-1} z_n)^{n_{n-1,n}}$ je našel nazorno grafično upodobitev, t.i. *Coxeterjev diagram* (gl. npr. [25], 1310-1312):



Slika 1: Coxeterjevi diagrami grup $[\]$, $[2]$, $[2, n]$ in $[3, 5, 2]$.

COXETER in MOSER sta (s pomočjo sferne geometrije) tudi pokazala, da je grupa z relacijami $R^p = S^q = (RS)^2 = E$ neskončna, če je $(p - 2)(q - 2) \geq 4$ [8], str. 54.

ODKRITJE SIMETRIJSKIH GRAFOV: Ker je število zanimivih poliedrov, ki so jih matematiki obravnavali, strmo naraščalo, se je sčasoma pokazala potreba po novem orodju, ki bi omogočilo finejše razlikovanje med poliedri, in s katerim bi lahko kombinatorično preverili, ali sta dva poliedra izomorfna. Toda šele nedavno (okrog leta 1980) so v teoriji grafov razvili nova orodja za raziskovanje in klasifikacijo *zemljevidov* (t.j.

²V njem je KLEIN – kot pravi Coxeter v [6], ix – »poudaril, da so poleg ravninske in prostorske evklidske geometrije tudi mnoge druge geometrije vredne pozornosti«.

³Tako je npr. opozoril na pomembnost ARGAND-ovega diagrama pri vpeljavi in razumevanju kompleksnih števil [6], str. 135

grafov, celično vloženi v kompaktno ploskve) na podlagi njihovih simetrij: t.i. *grafe praporov* in njihove kvociente glede na grupo simetrij poliedra – *simetrijske grafe*. Tako npr. dva poliedra uvrstimo v isti ekvivalenčni razred, če imata isto število vozlišč simetrijskega grafa ali če imata izomorfna simetrijska grafa (v tem primeru dobimo finejšo klasifikacijo).

NEKAJ REPREZENTATIVNIH PRIMEROV UPORABE SIMETRIJSKIH GRAFOV: Enega prvih člankov o grafih praporov je napisal LINS [35] (ki je uporabil akronim »gem« za graph-encoded maps). Zelo abstraktno in močno teorijo simetrijskih grafov ter na njej utemeljeno klasifikacijo povezavno-tranzitivnih zemljevidov in povečanje njihovega cenusa je opisal ORBANIĆ v svoji disertaciji [38], kjer je navedena tudi najpomembnejša literatura v zvezi s simetrijskimi grafi. ŠIRÁN je klasificiral vse povezavno-tranzitivne zemljevide na torusu glede na njihovo grupo avtomorfizmov v [47]. Grafi praporov in transformacije zemljevidov so obravnavani v [43]. Vprašanje enumeracije uniformnih poliedrov (tudi takih z neravninskimi lici) je omenjeno v [45], Problem 26.

KLASIFIKACIJA NAJPREPROSTEJŠIH POLIEDROV NA PODLAGI SIMETRIJSKIH GRAFOV: Upošteva je zgoraj omenjene nove koncepte in rezultate v tem delu klasificiramo 167 najpreprostejših poliedrov (75 uniformnih poliedrov in 92 Johnsonovih teles) glede na njihove simetrijske grafe. V ta namen uporabljam (v skladu z idejo prof. Pisanskega) simetrijske grafe dveh vrst: (*zrcalno-rotacijski*) *simetrijski graf* $T(\mathcal{P})$ poliedra \mathcal{P} je določen z vsemi izometrijami evklidskega prostora E^3 , ohranjajočimi dani polieder \mathcal{P} , medtem ko je *rotacijski simetrijski graf* $T_R(\mathcal{P})$ določen le s tistimi izometrijami E^3 , ki ohranjajo tudi orientacijo. Bralec se morda sprašuje, čemu določati simetrijske grafe dveh vrst – ali za namene klasifikacije ne zadoščajo že simetrijski grafi $T(\mathcal{P})$? Za to obstajata dva razloga: razlika v strukturi poliedrov, ki premorejo zrcalne simetrije, in tistimi, ki jih nimajo, je ena temeljnih, zato jo je pri klasifikaciji smiselno upoštevati; poleg tega se je izkazalo, da so rotacijski simetrijski grafi udobna vmesna stopnica k določitvi zrcalno-rotacijskih simetrijskih grafov. V disertaciji se sklicujem le na osnovne pojme teorije simetrijskih grafov, saj težavnost tega klasifikacijskega problema ne leži toliko v teoriji, ampak v praksi: teh poliedrov je res veliko, in nekateri so strukturno precej zapleteni, zato je bilo treba najti preprost, a zanesljiv način določitve njihovih simetrijskih grafov. Več teoretične opore sem našel v Coxeter-Moserjevi teoriji končnih grup, generiranih z zrcaljenji [8]. Grafe praporov poliedrov in molekul ter hiperploskev v tem delu interpretiram povsem geometrijsko – prapore enačim z njihovo nazorno upodobitvijo (t.j. s pravokotnimi trikotniki baricentrično razdeljenih lic). Pri konfiguracijah (kjer prapore nazorno predstavim s po štirimi točkami vzdolž vsake povezave) pa upoštevam njihovo izvorno definicijo – da so to trojice (v, e, f) , ki jim lahko spremenimo katerikoli element (oglišče, povezavo, lice), a le enega naenkrat.

1.3 Teza disertacije

1) *Grafi praporov* in njihovi kvocienti glede na dano grupo simetrij, t.i. *simetrijski grafi*, ki so jih (od njihovega odkritja okrog 1980) matematiki doslej uporabljali predvsem pri študiju t.i. *zemljevidov* (t.j. grafov, vloženi v kompaktno ploskve), so prav tako uporabni tudi pri poliedrih in tlakovanjih ravnine; v pomoč so tudi pri analizi strukture t.i. *geometrijskih molekul* (katerih gradniki so pravilni mnogokotniki ali pravilne zvezde), *hiperzemljevidov* (v katerih si lahko več kot dve lici delita isto stranico) ter *geometrijskih konfiguracij* (v_r, b_k) (v točk in b premic v ravnini ali na projektivni ravnini, pri čemer gre skozi vsako točko r premic, skozi vsako premico pa k točk).

2) Simetrijski grafi, skupaj s simetrijskimi grupami, omogočajo zelo naravno klasifikacijo poliedrov in molekul: medtem ko t.i. CAYLEY-ev diagram ([13], str. 50) simetrijske grupe opiše »globalno simetrijsko strukturo« poliedra ali molekule, pa simetrijski grafi opišejo njihovo »lokalno simetrijsko strukturo« (znotraj vsake kopije fundamentalne domene nastopa izomorfnja kopija simetrijskega grafa).

3) V tem delu vpeljani in pogosto uporabljani pojmi *zemljevid rotacijskih orbit konveksnega poliedra*, *simetrijska shema poliedra* ter *sferoeder* nam v povezavi s temeljnim pojmom *fundamentalne domene poliedra glede na njegovo simetrijsko grupo* pomagajo bistveno bolje razumeti odnos med simetrijskim grafom in simetrijsko grupo, pomagajo pa tudi pri enostavnejši določitvi simetrijskih grafov poliedrov in molekul.

4) Simetrijski grafi nam omogočajo »rekonstruirati« konveksne poliedre s pomočjo Cayleyevega grafa njihove grupe simetrij in fundamentalne domene te grupe na sferi; v osnovi isto konstrukcijo (katere osnovno idejo v zametkih najdemo že v COXETER-MOSER-jevi teoriji diskretnih grup izometrijev evklidskega prostora E^3 , [42], str. 54–55) lahko uporabimo za konstrukcijo poliedrov s poljubno vnaprej predpisano grupo simetrij, pa tudi za dokaz izreka, da je število regularnih sfernih poliedrov razreda $S_{pol}(L, M, N)$, katerih lica imajo največ M stranic, in ki imajo cikle lic dolžine največ N , vsaka točka sfere pa pripada največ L licem, končno (Izrek 18). Ker z grafi praporov lahko določimo tudi zgornjo mejo teh števil, imamo s tem v rokah ključno orodje, s katerim lahko preverimo, ali določen nabor teh teles izčrpa vsa telesa določenega razreda $S_{pol}(L, M, N)$. Ta izrek predstavlja tudi prvi korak k sistematizaciji oz. enumeraciji razreda nekonveksnih poliedrov z regularnimi poligonskimi in zvezdastimi lici.

1.4 Osnovni pojmi

1.4.1 Osnovno o poliedrih

Najprej definirajmo temeljni pojem poliedra (kar se da splošno).

Definicija 1 (POLIEDER:.) *Mnogokotnik definiramo kot cikel oglišč – točk v trirazsežnem prostoru, njegove stranice so pari dveh sosednih oglišč tega cikla. Polieder je urejena trojica $\mathcal{P} = (V, E, F)$ množice oglišč $v \in V$, množice robov $e \in E$ in množice lic – mnogokotnikov $f \in F$, pri čemer je vsak rob stranica natanko dveh mnogokotnikov. Zahtevamo še, da nobeni dve sosedni lici (s skupno stranico) nimata vseh oglišč v isti ravnini, in da sta poljubni dve lici povezani s potjo iz zaporedoma sosednih lic.*

Naša definicija torej dopušča tudi neravninska »prazna lica«, ki nimajo vseh oglišč v isti ravnini, pa tudi lica na sferi (in drugih ploskvah). Zdaj pa zakoličimo osnovni razred poliedrov, katerega simetrijski grafi nas v okviru tega dela zanimajo.

Definicija 2 (POLIEDER PRAVILNIH LIC:.) *Poliedri, katerih lica so pravilni ravninski mnogokotniki in pravilne ravninske zvezde, sestavljajo razred \mathbb{P} »poliedrov pravilnih lic«. Pravilna poligonska lica različnih tipov bomo, kot je v navadi, označevali s simboli 3, 4, 5, 6, 8, 10, zvezdasta lica pa z ulomki $5/2$, $8/3$, itd. V SCHLÄFLI-jevem simbolu so številke lica postavljene še v zavite oklepaje, npr. $\{3\}$, $\{5/2\}$, itd.*

Temeljno orodje za študij poliedrov so njihove simetrijske grupe.

Definicija 3 (GRUPA SIMETRIJ POLIEDRA:.) *Grupa $S(\mathcal{P})$ simetrij poliedra \mathcal{P} je grupa vseh tistih automorfizmov njegovega 1-skeleta (grafa, katerega točke so oglišča poliedra, povezave pa robovi poliedra), ki so porojeni z izometrijami evklidskega prostora E^3 .*

Pomembno je razlikovati med poliedri, ki imajo lokalno (t.j. okrog vsakega oglišča) isto strukturo, in tistimi, ki imajo eno samo orbito oglišč. Zato definirajmo:

Definicija 4 (UNIMORFNI IN UNIFORMNI POLIEDER:.) *Unimorfni polieder je polieder, ki ima okrog vsakega oglišča enako ciklično zaporedje $(p_1, p_2, \dots, \dots, p_m)$ (določeno do rotacije $p_i \rightarrow p_{i+1(\text{mod } m)}$ in zrcaljenja $p_i \rightarrow p_{m+1-i(\text{mod } m)}$ natančno) pravilnih lic. Uniformni polieder je unimorfni polieder z eno samo orbito oglišč: za poljubni dve oglišči u in v obstaja izometrija h (zrcaljenje ali rotacija) evklidskega prostora E^3 , ki ohranja polieder \mathcal{P} , in za katero je $h(u) = v$. Razred uniformnih poliedrov označimo \mathbb{U} .*

Temeljna delitev poliedrov je delitev na konveksne in nekonveksne poliedre.

Definicija 5 (KONVEKSEN POLIEDER:) *Polieder je konveksen ($\mathcal{P} \in \mathbb{K}$), če vsebuje vse točke poljubne daljice s krajišči v dveh njegovih točkah.*

Definicija 6 (JOHNSONOVO TELO:) *Johnsonovo telo je neuniformen konveksen polieder z regularnimi poligonalnimi lici (torej ima vsaj dve orbiti oglišč).*

Razreda \mathbb{U} in \mathbb{J} uniformnih in Johnsonovih teles sta dobro znana in raziskana:

Izrek 1 (RAZREDA \mathbb{U} IN \mathbb{J}): *i) Poleg neskončnih družin prizem in antiprizem obstaja še 75 uniformnih teles (ki jih označujejo takole: $U1, U2, \dots, U75$)[9].*

ii) Obstaja 92 Johnsonovih teles. (To Johnsonovo domnevo so okrog 1965 dokazali JOHNSON, FREUDENTHAL in VAN DER WAERDEN ter ZALLGALER [24, 11, 52].

Izrek 2 (KLASIFIKACIJA POLIEDROV RAZREDA \mathbb{P}): *Poliedre razreda \mathbb{P} delimo na konveksne in nekonveksne, ter na tiste z eno samo orbito oglišč (prizme, antiprizme in še 75 uniformnih teles Uxy) in tiste z več kot eno orbito oglišč (Johnsonova telesa in neznano število nekonveksnih neuniformnih poliedrov).*

Poliedri razreda \mathbb{P}	Uniformni \mathbb{U} (1 orbita oglišč)	Neuniformni $\mathbb{P} - \mathbb{U}$ (vsaj 2 orbiti oglišč)
Konveksni \mathbb{K}	$\mathbb{P} \cap \mathbb{U} \cap \mathbb{K}$ 5 platonskih teles prizme in antiprizme 13 arhimedskih teles	$\mathbb{P} \cap \mathbb{K} - \mathbb{U}$ 92 Johnsonovih teles \mathbb{J}
Nekonveksni $\mathbb{P} - \mathbb{K}$	$\mathbb{P} \cap \mathbb{U} - \mathbb{K}$ 4 Kepler-Poinsotova telesa in še 53 uniformnih poliedrov z nekonveksnimi lici	$\mathbb{P} - \mathbb{K} - \mathbb{U}$ neznano število nekonveksnih neuniformnih poliedrov

Tabela 1: Klasifikacija poliedrov razreda \mathbb{P} .

Definicija 7 (SFEROEDER IN SFERNI POLIEDER:) *»Sferoeder« je polieder, ki ima vsa oglišča na neki sferi, povezave med njimi pa so glavni krogelni loki (lica sferoedra so torej lahko tudi sferne zvezde!). Sferoeder je regularen, če ima vse povezave enako dolge, oglišča vsakega lica pa ležijo v isti ravnini. »Sferni polieder« je tak polieder, katerega projekcija iz njegovega baricentra na sfero je sferoeder. Sferni polieder je regularen, če je ustrezni sferoeder regularen. Razred regularnih sfernih poliedrov označimo \mathbb{S} .*

MOTIVACIJA ZA VPELJAVO »SFEROEDROV«: Z uporabo ciklov praporov okrog oglišč in sferne trigonometrije bomo (v razdelku 4.3) pokazali, da je število poliedrov razreda $S_{pol}(L, M, N)$ sferoedrov, katerih lica imajo največ M stranic in cikle lic dolžine največ N , vsaka točka sfere pa je v največ L licih, končno; torej je končno tudi število ustreznih sfernih poliedrov, ki predstavljajo podrazred razreda $\mathbb{P} \cap \mathbb{S} - \mathbb{K} - \mathbb{U}$.

Definicija 8 (OGLIŠČNI VZOREC IN OGLIŠČNI TIP:) *Za opis uniformnih poliedrov lahko uporabimo njihov ogliščni vzorec – cikel (t.j. ciklično zaporedje) lic okrog vsakega od oglišč. Ta cikel lic lahko pri različnih ogliščih ob izbrani orientaciji nastopa v dveh zrcalnih variantah, npr. (3.4.6) okrog ene polovice vozlišč in (6.4.3) okrog druge polovice vozlišč. Vsakemu ogliščnemu vzorcu pripada njegov ogliščni tip: ciklično zaporedje črk kot npr. $(p.q.r)$ ali $(p.q.r.q)$, v katerem različne črke pripadajo različnim tipom lic.*

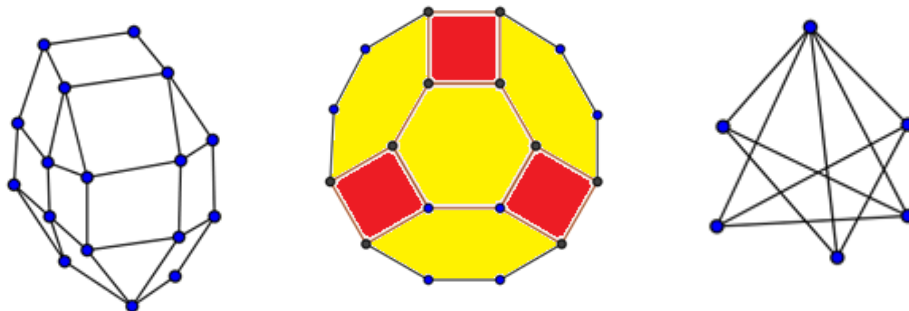
Tako imata npr. uniformna poliedra z ogliščnima vzorcema (3.8.8) in (4.6.6) isti ogliščni tip $(p.q.q)$. Prizme imajo ogliščni tip $(n.4.4)$, antiprizme pa $(n.3.3)$. Platonska (ali regularna) telesa imajo ogliščni tip (p^n) , arhimedska (ali semi-regularna) telesa pa imajo vsaj dva tipa lic (in drugačen ogliščni tip kot prizme in antiprizme).

Definicija 9 (TLAKOVANJA RAVNINE:) *Analogno definiramo unimorfna (imajo en sam ogliščni vzorec) in uniformna tlakovanja ravnine (imajo eno samo orbito oglišč glede na izometrije evklidskega prostora E^2). Regularna unimorfna tlakovanja imajo en sam tip lic, semi-regularna unimorfna (arhimedska) pa vsaj dva tipa lic.*

Trditev 1 (UNIMORFNOST \neq UNIFORMNOST:) *Vsak uniformen polieder je unimorfen, obratno pa ne velja (analogna trditev velja za tlakovanja).*

Dokaz. MILLER je odkril unimorfen polieder z ogliščnim vzorcem (3.4.4.4), ki si ga deli z rombikuboktaedrom (Slika 2). Gre za t.i. Johnsonovo telo z oznako J37 ([24], str. 172). Isto telo je odkril tudi SOMMERVILLE l. 1904 ([36], str. 208). \square

Trditev 2 (ZRCALNO-ROTACIJSKE IN ROTACIJSKE ORBITE): *Uniformni polieder lahko ima dve »rotacijski« orbiti oglišč: to velja npr. za presevani oktaeder (4.6.6).*



Slika 2: Levo: podaljšana kvadratna girobikupola J37; sredina: presevani oktaeder (4.6.6); desno: pentagamska piramida – primer poliedra iz $\mathbb{P} \cap \mathbb{S} - \mathbb{K} - \mathbb{U}$.

1.4.2 Osnovno o simetrijskih grupah

V tem razdelku so zbrani tisti osnovni pojmi in najpomembnejši rezultati COXETER-MOSER-jeve teorije diskretnih grup [8], na katere se v tem delu naslanjamo.

Definicija 10 (GENERATORJI IN RELACIJE:) *Elemente S_1, S_2, \dots, S_m diskretne grupe G imenujemo generatorje te grupe, če je vsak element $g \in G$ mogoče zapisati kot končen produkt njihovih potenc (vključno z negativnimi eksponenti). Za tako grupo se uporablja simbol $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$.*

Definicija 11 (ABSTRAKTNA DEFINICIJA GRUPE:) *Naj bo E enotski element grupe. Množica relacij $g_k(S_1, S_2, \dots, S_m) = E$, ($k = 1, 2, \dots, s$), ki jim zadoščajo generatorji grupe G , se imenuje abstraktna definicija grupe G , če je vsaka relacija, ki ji zadoščajo ti generatorji, algebraična posledica teh relacij. Relacija tipa $S^q = E$ v tem kontekstu pomeni, da je perioda S natanko q , ne samo delitelj q .*

Zdaj definirajmo t.i. Coxeterjeve grupe $[m, n]$, ki so pomembne zato, ker se da vsako od 17 končnih grup simetrijskih poliedrov izraziti kot podgrupo ene od grup $[m, n]$.

Definicija 12 (COXETERJEVE GRUPE $[m, n]$): *To so grupe simetrijskih evklidskega prostora E^3 , generirane z zrcaljenji z_0, z_1, z_2 prek treh ravnin in relacijami $z_0^2 = z_1^2 = z_2^2 = (z_0 z_1)^m = (z_1 z_2)^n = (z_0 z_2)^2 = E$.*

Brez dokaza (gl. [8], str. 37-38) navedimo osnovne lastnosti teh grup:

Izrek 3 (OSNOVNE LASTNOSTI GRUP $[m, n]$): *i) Vse zrcalne ravnine Coxeterjeve grupe $[m, n]$ gredo skozi isto točko in razrežejo sfero s središčem v tej točki na skladne sferične trikotnike Φ (s koti $\pi/m, \pi/n, \pi/2$), t.i. fundamentalne domene te grupe (uniija kopij tega trikotnika $\bigcup_{g \in [m, n]} g(\Phi)$ pokrije sfero oz. vsaka kopija fundamentalne domene ustreza enemu elementu grupe).*

ii) Ker je vsota kotov sferičnega trikotnika večja od π , mora biti $1/m + 1/n > 1/2$ oz. $(m-2)(n-2) < 4$, kar je izpolnjeno le v primerih $[2, n], [3, 3], [3, 4], [3, 5]$.

iii) Moč grupe $[m, n]$ je enaka razmerju med ploščino sfere in ploščino fundamentalne domene oziroma sferičnega trikotnika:

$$|[m, n]| = \frac{4\pi}{2\pi(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2})} = \frac{8mn}{4 - (m-2)(n-2)}.$$

Kot poročata COXETER in MOSER [8], str. 33, je končne tridimenzionalne simetrijske grupe prvi enumeriral HESSEL l. 1830, a njegovo delo je ostalo neopaženo, dokler ga l. 1897 ni uredil HESS za izdajo v zbirki *Klasiki eksaktnih znanosti* [21]. Osnovne ideje so (brez dokaza) zbrane v naslednjem izreku (zgoščenem povzetku iz [8], str. 33-40):

Izrek 4 (KONČNE SIMETRIJSKE GRUPE EVKLIDSKEGA PROSTORA E^3): i) Vsaka končna grupa izometrij E^3 ohranja vsaj eno točko: baricenter vseh slik poljubne točke.

ii) Vsaka izometrija h prostora E^3 , ki ima vsaj eno invariantno točko, je bodisi zrcaljenje z zrcalno ravnino, ki gre skozi to točko, ali pa produkt dveh ali treh takih zrcaljenj (COXETER 1948, [7]). Tak h bodisi ohranja bodisi obrne orientacijo glede na to, ali je število zrcaljenj sodo ali liho. Od tod sledi:

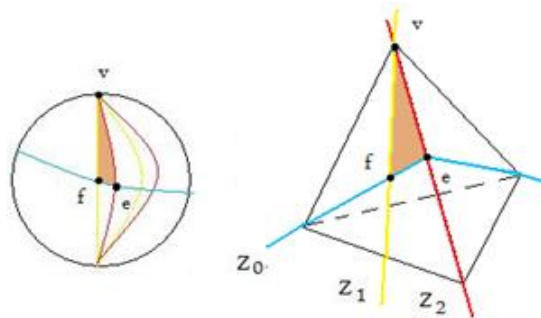
iii) Vsak $h \in S(E^3)$, ki ohranja orientacijo in ima vsaj eno fiksno točko, je produkt dveh zrcaljenj, torej je rotacija (za dvakratnik kota med ustreznima zrcalnima ravninama). Invariantna točka nam omogoča, da obravnavamo grupo kot delujočo na sferi.

iv) Poseben primer transformacije, ki obrne orientacijo, je središčna inverzija C – produkt zrcaljenj v treh paroma pravokotnih ravninah. Njen produkt s poljubnim zrcaljenjem je rotacija. Torej je vsaka transformacija, ki obrne orientacijo, t.i. rotatorna inverzija: produkt rotacije in središčne inverzije.

v) Ker je vsaka transformacija, ki ohranja orientacijo in ima vsaj eno fiksno točko, rotacija, je produkt dveh rotacij (z osema, ki gresta skozi to točko) spet rotacija. Od tod sledi, da je vsaka končna grupa transformacij, ki ohranjajo orientacijo, grupa rotacij. Edine grupe te vrste so rotacijske simetrijske grupe naslednjih teles: 1) n -piramide, 2) n -dipiramide, pa tudi n -prizme (če $n \geq 3$), 3) pravilnega tetraedra $\{3,3\}$, 4) kocke $\{4,3\}$ ali oktaedra $\{3,4\}$, 5) dodekaedra $\{5,3\}$ ali ikozaedra $\{3,5\}$.

vi) Obstaja 17 končnih grup simetrij prostora E^3 in vse so podgrupe Coxeterjevih grup $[2, n]$, $n \geq 2$, $[3, 3]$, $[3, 4]$, $[3, 5]$ (te grupe so navedene v Tabeli 2, ki je samo z imeni in definicijami teh 17 grup dopolnjena Tabela 1 iz [24], str. 181). Fundamentalna do-mena vsake od teh grup ima obliko bodisi sferičnega dvokotnika (npr. pri ciklični grupi), sferičnega trikotnika ali sferičnega štirikotnika ([8], str. 38-39).

Zanimivo je, da obstaja tudi 17 grup izometrij ravnine, njihove fundamentalne domene pa imajo obliko kvadratov, rombov, pravokotnikov ali romboidov [36], str. 109, slika 11.31.



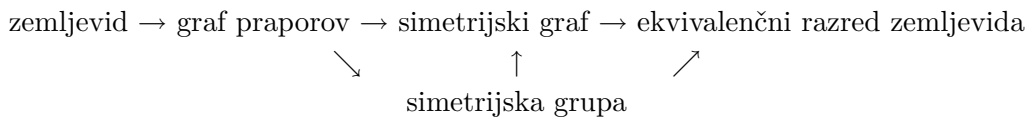
Slika 3: Fundamentalna domena grupe $[3, 3]$ na sferi in tetraedru.

rotacijska grupa	struktura	red	razširjena grupa	struktura	red
identična $[]^+$ (telo brez rotacijskih simetrij)	C_1	1	bilateralna $[]$ (telo z eno zrcalno ravnino) $Z^2 = E$	D_1	2
			središčna $[2^+, 2^+]$ (telo s središčno inverzijo $C^2 = E$) podgrupa v $[2, 2]$, generirana s $C = Z_1 Z_2 Z_3$	D_1	2
ciklična $[n]^+, n \geq 2$ (za $n \geq 3$ je to grupa rotacij pravilne n -piramide)	C_n	n	kaleidoskopska $[n]$ (dve navpični zrcalni ravnini) $Z_1^2 = Z_2^2 = (Z_1 Z_2)^2$ (za $n \geq 3$ je to grupa vseh simetrij pravilne n -piramide)	D_n	$2n$
			rotatorna $[2^+, 2n^+]$ indeksa 2 v $[2^+, 2n]$ in $[2, 2n^+]$ generirana z rotatornim zrcaljenjem $T = Z_1 Z_2 Z_3, T^{2n} = E$	A_{2n}	$2n$
			razširjena ciklična $[2, n^+]$ indeksa 2 v $[2, n]$, generirana z $R_{12} = Z_1 Z_2$, $R_{12}^2 = Z_3^2 = (R_{12} Z_3)^{2n} = E$, $[2, n^+] \cong [] \times [n]^+$	$D_1 \times A_n$	$2n$
diedrska $[2, n]^+, n \geq 2$ (za $n \geq 3$ je to rotac. grupa pravilne n -prizme)	D_n	$2n$	razširjena diedrska $[2, n]$ (za $n \geq 3$ je to grupa vseh simetrij pravilne n -prizme) $[2, n] \cong [] \times [n] \cong [] \times [2, n]^+$	$D_1 \times D_n$	$4n$
			polna antiprizemska $[2^+, 2n]$ (za $n \geq 3$ je to grupa vseh simetrij pravilne n -antiprizme) indeksa 2 v $[2, 2n]$	D_{2n}	$4n$
tetraedrska $[3, 3]^+$	A_4	12	razširjena tetraedrska $[3, 3]$	S_4	24
			piritoedrska $[3^+, 4]$ indeksa 2 v $[3, 4]$, generirana z $R_{12} = Z_1 Z_2$ in Z_3 , $R_{12}^2 = Z_3^2 = (R_{12}^{-1} Z_3 R_{12} Z_3)^2 = E$ $[3^+, 4] \cong [2^+, 2^+] \times [3, 3]^+$	$S_2 \times A_4$	24
oktaedrska $[3, 4]^+$	S_4	24	razširjena oktaedrska $[3, 4]$	$S_2 \times S_4$	48
ikozaedrska $[3, 5]^+$	A_5	60	razširjena ikozaedrska $[3, 5]$	$S_2 \times A_5$	120

Tabela 2: Končne grupe izometrij prostora E^3 .

1.4.3 Osnovno o simetrijskih grafih

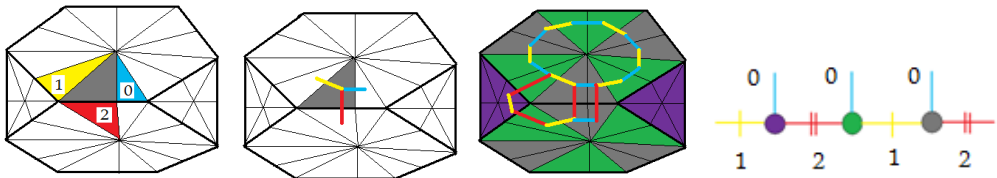
ČEMU SLUŽIJO: Grafe praporov in njihove kvociente glede na izbrano simetrijsko grupo, t.i. simetrijske grafe, lahko definiramo za kakršnekoli zemljevide (t.j. grafe, celično vložene v kompaktne ploskve) [39] in jih uporabimo kot orodje za njihovo klasifikacijo (razvrstitev v ekvivalenčne razrede) po shemi:



KAJ SO: Če za hip zanemarimo vprašanje, kako jih priredimo zemljevidom, jih lahko definiramo čisto algebraično – kot grafe z določenimi lastnostmi.

Definicija 13 (GRAF PRAPOROV, INVOLUCIJE s_0, s_1, s_2): *Graf praporov je 3-regularen graf G , v katerem vsako povezavo označimo z $0, 1, 2$ (ali jih pobarvamo modro, rumeno ali rdeče), tako da ima vsako vozlišče oziroma prapor Φ natanko tri sosedne prapore $\Phi^0 = s_0(\Phi)$, $\Phi^1 = s_1(\Phi)$ in $\Phi^2 = s_2(\Phi)$ in velja: $s_0s_2 = s_2s_0$, vsi dvobarvni cikli pa vsebujejo sodo število vozlišč. Preslikave s_0, s_1, s_2 so involucije nad množico vozlišč grafa G : $s_0^2 = s_1^2 = s_2^2 = id$.*

Definicija 14 (AVTOMORFIZMI, ORBITE, SIMETRIJSKI GRAF, POLPOVEZAVE:): *Naj bo $Aut_c(G)$ grupa tistih avtomorfizmov grafa praporov G , ki ohranjajo tudi barve povezav. Vsaka podgrupa H grupe $Aut_c(G)$ definira desno delovanje na vozliščih grafa praporov. Orbita $[\Phi] = T_H(\Phi)$ prapora Φ je množica vseh praporov $\{h(\Phi), h \in H\}$. Vsaki orbiti ustreza vozlišče simetrijskega grafa $T_H(G)$. Kadar sta sosedna prapora Φ in Φ^i v isti orbiti, je v ustreznem simetrijskem grafu (namesto zanke) polpovezava z ustrežno oznako $i \in \{0, 1, 2\}$ (torej je tudi simetrijski graf 3-regularen).*



Slika 4: Prapor in sosedni prapori, orbite in cikli ter simetrijski graf.

Definicija 15 (PRAPORI POLIEDROV RAZREDA \mathbb{P}): *Prapori poliedra $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ so trikotniki, dobljeni z baricentrično subdivizijo njegovih lic. Graf praporov poliedra \mathcal{P} bomo označevali $G(\mathcal{P})$.*

Za poljuben zemljevid pa prapore definiramo takole:

Definicija 16 (PRAPORI KOT UREJENE TROJICE $\Phi = (v, e, f)$): *Prapori poljubnega zemljevida so urejene trojice točk (v, e, f) , kjer je f lice danega zemljevida, e stranica tega lica, oglišče v pa eno od krajišč te stranice.*

Očitno velja naslednja zveza med tema dvema definicijama praporov (iz 15 in 16):

Trditev 3 *Pri poliedrih razreda \mathbb{P} dobimo dani prapor $\Phi = (v, e, f)$ baricentrične subdivizije kot konveksno ogrinjačo središča lica f , središča stranice e in oglišča v .*

Grupi izometrij evklidskih prostorov E^3 in E^2 bomo označevali $I(E^3)$ in $I(E^2)$.

Definicija 17 (GRUPA AVTOMORFIZMOV IN OBENEM IZOMETRIJ $Aut_c(G) \cap I(E^3)$): *Ker hočemo klasificirati poliedre glede na njihove simetrije, pri določitvi simetrijskih grafov upoštevamo le tiste avtomorfizme $h \in Aut_c(G)$ grafa praporov, ki so porojeni iz izometrij evklidskega prostora E^3 . Torej prapora iz različnih tipov lic (npr. iz kvadrata ter iz pravilnega petkotnika, ali iz pravilnega petkotnika in iz pentagranske zvezde) pripadata različnim orbitam.*

Neposredno iz definicij sledi, da sta orbiti dveh sosednih praporov sosedni:

Trditev 4 (ORBITE SOSEDNIH PRAPOROV SO SOSEDNE): *Poljubna dva sosedna prapora Φ and Ψ v grafu praporov, ki pripada poliedru \mathcal{P} (ali ravninskemu tlakovanju \mathcal{T}), sta povezana s povezavo iste barve 0, 1, ali 2 kot jo ima povezava med orbitama $[\Phi]$ in $[\Psi]$ v ustreznem simetrijskem grafu: če $\Phi^i = \Psi$, potem $[\Phi]^i = [\Psi]$.*

Za klasifikacijo poliedrov in tlakovanj bomo uporabili simetrijske grafe dveh vrst:

Definicija 18 (DVOJE VRST SIMETRIJSKIH GRAFOV POLIEDROV \mathcal{P} IN TLAKOVANJ \mathcal{T}): *Naj bo \mathcal{P} kakršenkoli polieder in \mathcal{T} kakršnokoli ravninsko tlakovanje. Simetrijska grafa $T(\mathcal{P})$ in $T(\mathcal{T})$ sta definirana z vsemi tistimi izometrijami evklidskega prostora (E^3 oziroma E^2), ki ohranjajo \mathcal{P} oziroma \mathcal{T} , medtem ko sta simetrijska grafa $T_R(\mathcal{P})$ in $T_R(\mathcal{T})$ definirana samo s tistimi, ki ohranjajo tudi orientacijo.*

Tako je simetrijski graf $T(\mathcal{P})$ določen z zrcaljenji (prek ravnine ter s središčnim zrcaljenjem) in rotacijami prostora E^3 , medtem ko je $T_R(\mathcal{P})$ določen samo z rotacijami. Ker obstajajo štiri vrste izometrij ravnine (zrcaljenje, rotacija, translacija in drsno zrcaljenje – kompozitum translacije in zrcaljenja [14], str. 26), je simetrijski graf $T(\mathcal{T})$ ravninskega tlakovanja \mathcal{T} definiran z vsemi temi štirimi tipi izometrij prostora E^2 , medtem ko je $T_R(\mathcal{T})$ določen samo z rotacijami in translacijami ([6], str. 96-104).

Neposredno iz definicij sledi, da iz dvobarvnih ciklov grafa praporov $G(\mathcal{P})$ lahko rekonstruiramo števila oglišč v , povezav e in lic f , iz dvobarvnih komponent simetrijskih grafov $T(\mathcal{P})$ oziroma iz $T_R(\mathcal{P})$ pa števila ustreznih zrcalno-rotacijskih orbit vo , eo in fo oziroma števila rotacijskih orbit vo_R , eo_R in fo_R poliedra \mathcal{P} .

Trditev 5 (DVOBARVNI CIKLI IN DVOBARVNE KOMPONENTE:) *Naj bo \mathcal{P} polieder s konveksnimi lici. Potem:*

i) Dvobarvni cikli v $G(\mathcal{P})$ ustrezajo ogliščem, povezavam oziroma licem poliedra:

1-2 cikli (rumeno-rdeči) \leftrightarrow oglišča poliedra

0-2 cikli (modro-rdeči) \leftrightarrow povezave poliedra

0-1 cikli (modro-rumeni) \leftrightarrow lica poliedra

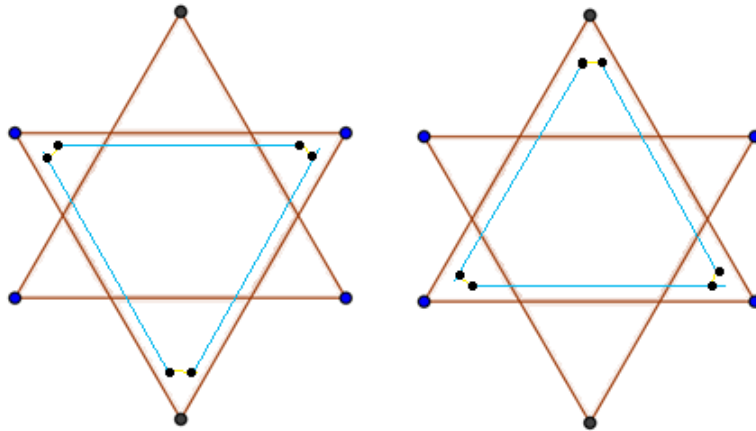
ii) Dvobarvne komponente v simetrijskem grafu $T(\mathcal{P})$ (oziroma $T_R(\mathcal{P})$) ustrezajo zrcalno-rotacijskim orbitam (oziroma rotacijskim orbitam) oglišč, povezav in lic poliedra:

1-2 komponente (rumeno-rdeče) \leftrightarrow orbite oglišč poliedra

0-2 komponente (modro-rdeče) \leftrightarrow orbite povezav poliedra

0-1 komponente (modro-rumene) \leftrightarrow orbite lic poliedra.

Opomba. Za (nekonveksno!) heksagramsko zvezdo gornja trditev ne velja, saj njeni prapori oblikujejo dva 0-1 cikla s po 6 prapori.



Slika 5: Dva 0-1 cikla praporov v heksagramski zvezdi.

Primer. S štetjem dvobarvnih ciklov simetrijskega grafa $T(\mathcal{P})$ poliedra na sliki 4 lahko določimo števila njegovih zrcalno-rotacijskih orbit lic $fo = 2$, povezav $eo = 2$ in oglišč $vo = 1$, število vozlišč tega grafa pa nam pove, da je število zrcalno-rotacijskih orbit praporov $po = 3$.

V tem uvodnem poglavju smo povzeli osnovno o poliedrih, grupah in simetrijskih grafih. V naslednjem poglavju bomo določili simetrijske grafe uniformnih poliedrov in Johnsonovih teles.

2 Simetrijski grafi poliedrov z regularnimi lici

V tem poglavju najprej predstavim različne metode (hevrstične, geometrijske, algebraične in kombinatorične), s katerimi sem si pomagal pri določitvi simetrijskih grafov poliedrov.

Nato opišem *splošno* algebraično in geometrijsko strukturo simetrijskih grafov poliedrov (Izreka 5 in 6), kar poenostavi proces določanja simetrijskih grafov do te mere, da je dovolj v to splošno shemo vnesti konkretna opažanja o simetrijah danega poliedra ali razreda poliedrov. Vpeljem tudi nekaj orodij (npr. »enkratno lice«, »položajni vektor prapora«, »pravilo domin«), ki so se izkazala za uporabna pri določitvi teh *konkretnih* informacij o poliedru.

Nazadnje apliciram ta univerzalni (za vse poliedre uporabni) postopek na razreda uniformnih in Johnsonovih poliedrov.

2.1 Metode

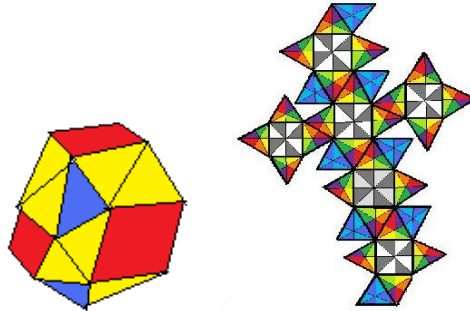
NAČELO »OD LAŽJEGA K TEŽJEMU«: Pri sistematičnem določanju simetrijskih grafov poliedrov je smiselno začeti z najpreprostejšimi (»najpravilnejšimi«) telesi, potem pa postopoma napredovati k vse bolj zapletenim (»vse manj pravilnim«) poliedrom. V skladu s tem načelom sem najprej določil simetrijske grafe platonskih in arhimedskih teles ter prizem in antiprizem, nato uniformnih in nazadnje Johnsonovih teles.

TRIDIMENZIONALNI MODELI IN SLIKE TELES: Pri določanju rotacijskih in zrcalnih simetrij (pa tudi pri prepoznavanju orbit oglišč, robov in lic) si je koristno pomagati s tridimenzionalnimi modeli in slikami teles (npr. s programom Great Stella lahko telesa »vrtimo« in si jih ogledujemo z vseh strani, označene pa imajo tudi rotacijske osi in zrcalne ravnine teles). V pomoč so tudi t.i. SCHLÄGEL-ovi diagrami [8], str. 22.

POLIEDRSKE MREŽE: Simetrijske grafe preprostejših teles lahko nazorno *prikažemo* (ne pa tudi *določimo!*) tako, da razgrnemo njihove plašče v ravnino; v tako dobljeni poliedrski mreži baricentrično razdelimo vsa lica na trikotnike – prapore, in prapore vsake orbite prikažemo s svojo barvo. *Vendar pa iz simetrij mreže v ravnini ne moremo avtomatično sklepati na obstoj ustreznih simetrij iste mreže na plašču poliedra!*

NEZADOSTNOST GEOMETRIJSKE METODE: Ta geometrijski pristop, ki je povsem uporaben za vsa platonska in arhimedska telesa, pri zapletenejših uniformnih poliedrih odpove iz preprostega razloga, da plašcev nekaterih nekonveksnih uniformnih poliedrov ni mogoče razgrniti v ravnino, njihovi tridimenzionalni modeli pa so prezapleteni, da bi si z njimi lahko kaj prida pomagali. Vendar, kot bomo videli, obstaja tudi druga pot.

ALGEBRAIČNA METODA: Algebraična metoda, uporabna pri uniformnih poliedrih (ter poliedrih z majhnim številom orbit oglišč) pri določitvi simetrijskih grafov upošteva

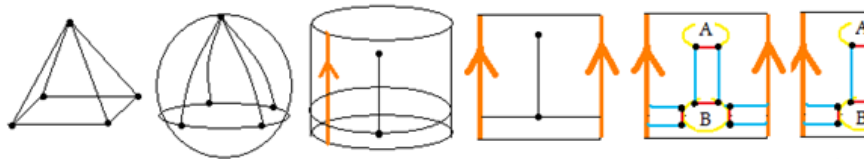


Slika 6: Levo: arhimedsko telo (3.3.3.3.4) brez zrcalnih simetrij; desno: njegova poliedrska mreža, v kateri so prapori vsake orbite označeni z drugačno barvo.

tudi ogliščne vzorce poliedra oziroma ogliščne tipe danega razreda poliedrov.

METODA ELIMINACIJE: Če že vemo, da iskani objekt (npr. simetrijski graf danega poliedra) pripada neki znani končni množici, in če znamo eliminirati vse možnosti razen ene, potem mora ta edina neizločena možnost biti to, kar iščemo⁴. Nato (ko že poznamo rezultat) lahko to potrdimo še z uporabo kakšne druge, bolj »konstruktivne« metode.

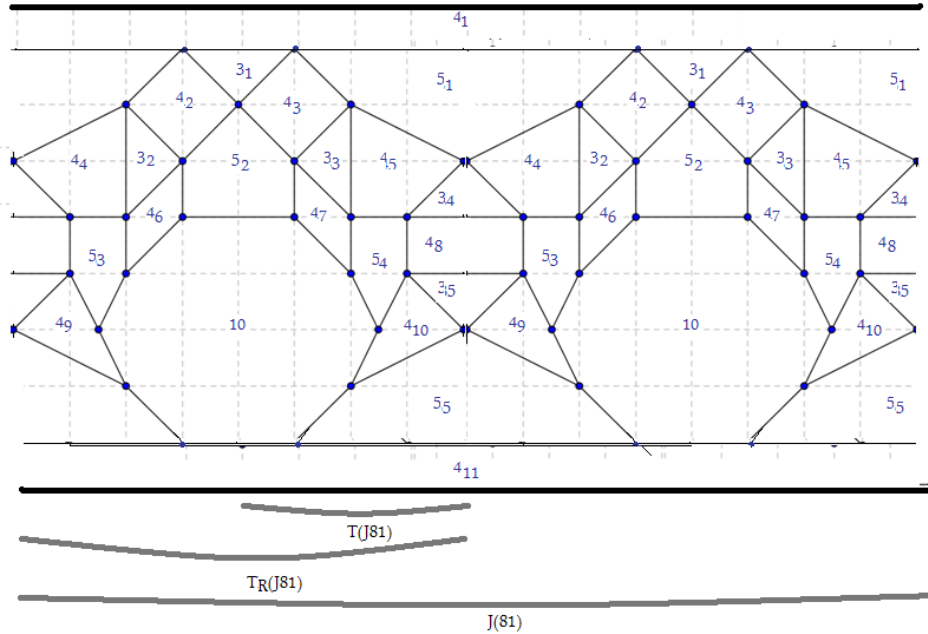
PROJICIRANJE TELES NA SFERO IN VALJ: Pri shematskem prikazu grafov praporov poliedrov sem si pomagal še z eno, v zgodovini že velikokrat uporabljeno geometrijsko metodo – projiciranjem poliedra (iz njegovega baricentra) na sfero, sfere pa na valj – uporabno za vsa konveksna telesa (ne le za uniformne poliedre, ki imajo vsa oglišča na isti sferi). Več o projekciji platonskih teles na sfero najdemo v knjigi [6], str. 280-281.



Slika 7: Projekcija Johnsonovega telesa J1 na sfero in valj.

ZEMLJEVID ROTACIJSKIH ORBIT: Kot so se rotacijski simetrijski grafi izkazali za koristno vmesno stopnico pri »algebraičnem« določanju zrcalno-rotacijskih simetrijskih grafov uniformnih poliedrov, tako se je t.i. »zemljevid rotacijskih orbit« – del površja poliedra, ki vsebuje po en prapor iz vsake rotacijske orbite (in na katerem lahko označimo rotacijske orbite lic, povezav in vozlišč) – izkazal za koristno vmesno stopnico pri »geometrijskem« določanju rotacijskih simetrijskih grafov Johnsonovih teles.

⁴Tej »detektivski« metodi, ki jo je iznašel pisatelj A. C. Doyle, bi lahko rekli tudi »metoda Sherlocka Holmesa«!



Slika 8: Graf praporov, zemljevid rotacijskih orbit s pol manj prapori (zaradi rotacije reda 2) in še pol manjši zemljevid zrcalno-rotacijskih orbit telesa J81.

Odebeljeni črti na Sliki 8 ustrezata severnemu in južnemu polu sfere, projicirane na valj. Lice iz j -te orbite tipa i je označeno i_j , kot npr. 5_4 . Da simetrijski zemljevid konveksnega poliedra vselej obstaja, je pokazano v Dodatku.

SPLOŠNA METODA: Na podlagi izkušenj, pridobljenih z določanjem simetrijskih grafov uniformnih in Johnsonovih teles, za določanje simetrijskih grafov poljubnih konveksnih poliedrov priporočam naslednjo splošno metodo: Danemu poliedru \mathcal{P} priredimo njegov graf praporov $G(\mathcal{P})$, poiščemo njegove orbite, te orbite predstavimo s točkami, te točke povežemo s povezavami pravih barv 0,1,2, in dobimo simetrijski graf $T(G) = T(G(\mathcal{P})) = T(\mathcal{P})$. Risanju grafa praporov se lahko izognemo, če nam uspe direktno konstruirati zemljevid rotacijskih orbit: z geometrijsko metodo (opazovanjem 3D-modelov in slik teles) najprej prepoznamo simetrije telesa, z algebraično metodo pa s pomočjo ogliščnega vzorca včasih lahko dokažemo, da določenih simetrij telo nima; nato določimo rotacijske orbite oglišč, robov in lic telesa in konstruiramo zemljevid rotacijskih orbit (projiciran na valj), iz katerega zlahka dobimo rotacijski simetrijski graf $T_R(\mathcal{P})$; če telo nima zrcalnih simetrij, je to tudi zrcalno-rotacijski simetrijski graf $T(\mathcal{P})$, v nasprotnem primeru pa $T(\mathcal{P})$ vsebuje le vsak drugi prapor iz $T_R(\mathcal{P})$.

2.2 Splošna struktura simetrijskih grafov poliedrov

Naslednji izrek je zelo koristen pri določitvi simetrijskih grafov poljubnega poliedra, saj nam podaja nazorno predstavo o tem, kakšen je sploh lahko tak graf.

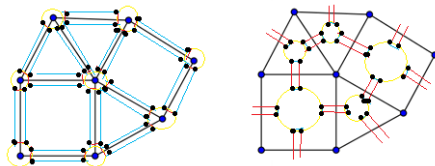
Izrek 5 (SPLOŠNA ALGEBRAIČNA STRUKTURA SIMETRIJSKIH GRAFOV POLIEDROV:)

i) Graf praporov $G(\mathcal{P})$ poljubnega poliedra \mathcal{P} lahko izrazimo bodisi kot unijo 1-2 ciklov praporov (okrog posameznih oglišč), med katerimi potekajo pari 0-povezav, bodisi kot unijo 0-1 ciklov praporov (ki ustrezajo posameznim licem), med katerimi potekajo pari 2-povezav.

ii) Vsak od dvobarvnih ciklov grafa praporov se pri poljubni rotacijski simetriji poliedra bodisi ohranja bodisi se skrči na manjši cikel.

iii) Rotacijski simetrijski graf $T_R(\mathcal{P})$ lahko izrazimo bodisi kot unijo 1-2 ciklov rotacijskih orbit praporov (po en tak cikel imamo za vsako rotacijsko orbito oglišč), med katerimi potekajo pari 0-povezav, bodisi kot unijo 0-1 ciklov orbit praporov (po en tak cikel imamo za vsako rotacijsko orbito lic), med katerimi potekajo pari 2-povezav.

iv) Če polieder nima zrcalnih simetrij, je $T(\mathcal{P}) = T_R(\mathcal{P})$; če pa jih ima, dobimo $T(\mathcal{P})$ iz $T_R(\mathcal{P})$ tako, da nekatere dvojice ciklov tega grafa zlijemo v en sam cikel, od nekaterih ciklov pa obdržimo samo polovične dvobarvne poti s polpovezavami na krajiščih.



Slika 9: $G(\mathcal{P})$ kot unija 1-2 ciklov in kot unija 0-1 ciklov.

Dokaz. Trditev i) je preprosta posledica temeljne formule $s_0 s_2 = s_2 s_0$, ki pove, da involuciji s_0 in s_2 komutirata vzdolž vsake stranice. Trditev ii) sledi iz dejstva, da znotraj vsakega cikla prapore lahko alternirajoče razdelimo na lihe in sode, in da vsako zrcaljenje preslika eno množico v drugo, vsaka rotacija pa ti dve množici ohranja. Trditev iii) sledi iz ii) in razmisleka, da vsak cikel praporov (okrog oglišča ali lica) leži v natančno določeni rotacijski orbiti oglišč ali lic. Trditev iv) je prav tako očitna. \square

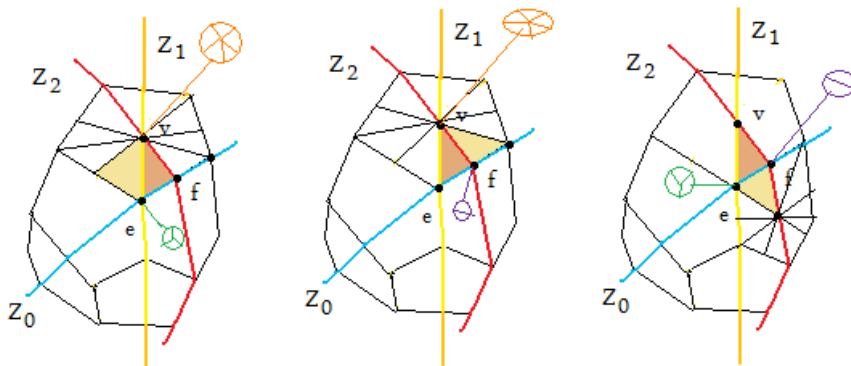
Iz te splošne *algebraične* strukture dobimo konkretni simetrijski graf za dani polieder tako, da upoštevamo dodatne informacije o poliedru – npr. kakšne simetrije ima ali jih nima. To, da določenih simetrij ne more imeti, lahko včasih sklepamo že na podlagi ogliščnih tipov okrog posameznih oglišč poliedra (tako na primer uniformni poliedri z ogliščnim tipom $(p.q.q)$ ne morejo imeti rotacijske simetrije s polom v oglišču).

Vemo že, da ima rotacijska fundamentalna domena $FD_R\mathcal{P}$ poljubnega konveksnega poliedra \mathcal{P} (določena glede na njegovo grupo rotacijskih simetrij), projicirana na sfero, obliko sfernega dvokotnika, trikotnika ali štirikotnika. Pri določitvi $T(\mathcal{P})$ (še posebej, če ima \mathcal{P} veliko rotacijskih orbit oglišč in lic) je v veliko pomoč naslednji izrek.

Izrek 6 (SPLOŠNA GEOMETRIJSKA STRUKTURA SIMETRIJSKIH GRAFOV KONVEKSNIH POLIEDROV:) *Za vsako rotacijsko orbito praporov konveksnega poliedra \mathcal{P} obstaja po en predstavnik te orbite na $FD_R\mathcal{P}$. Znotraj te domene so vsi cikli identični tistim v grafu praporov. Sosedni praporov na robu $FD_R\mathcal{P}$ pa so določeni s tem, kako se zaradi delovanja grupe rotacijskih simetrij poliedra identificirajo pari delov robov $FD_R\mathcal{P}$.*

Dokaz. Izrek sledi iz tega, kar že vemo o COXETER-MOSER-jevi teoriji fundamentalnih domen in dejstva, da lahko vsak konveksen polieder iz njegovega baricentra projiciramo na sfero, pri čemer se simetrije ohranjajo, čeprav se morda poruši prvotna enakost med dolžinami stranic. V Dodatku (razdelek 5.3) bomo dokazali še, da se rotacijska fundamentalna domena zaradi delovanja grupe rotacijskih simetrij poliedra dejansko zvije nazaj v sfero (kar tudi implicitno sledi že iz Coxeter-Moserjeve teorije).□

Primer. Oglejmo si primer fundamentalne domene grupe $[3, 5]^+$ na sferi (Slika 10). Gre za sferični štirikotnik, ki vsebuje fundamentalni prapor $\Phi = (v, e, f)$ grupe $[3, 5]$ in še njegovega 0-soseda, 1-soseda ali 2-soseda (glede na lokalna zrcaljenja prek stranic fundamentalnega prapora), torej lahko nastopa v treh oblikah: kot sferični trikotnik $\Phi \cup \Phi^0 = (v, e, f, v^0)$, kot sferični štirikotnik $\Phi \cup \Phi^1 = (e, f, v, e^1)$ ali kot sferični trikotnik $\Phi \cup \Phi^2 = (f, v, e, f^2)$. V krajiščih skupne stranice dveh fundamentalnih praporov imamo pola dveh rotacij, ki generirata tretjo.



Slika 10: Tri oblike fundamentalne domene grupe $[3, 5]^+$ na dodekaedru.

2.3 Orodja

Od gornje, splošne slike, se zdaj obrnimo h konkretnjšim orodjem, ki pomagajo pri določitvi posameznih elementov te splošne sheme za dani polieder ali razred poliedrov. Ker pri določitvi simetrijskih grafov poliedrov upoštevamo le rotacije ter zrcaljenja, lahko njihovo strukturo opišemo natančneje.

Najprej raziščimo odnos med »rotacijskimi« in »zrcalno-rotacijskimi« orbitami praporov. Naj po_R pomeni število T_R -orbit praporov (določenih samo z rotacijami), po pa število T -orbit praporov (določenih z rotacijami in zrcaljenji) danega poliedra \mathcal{P} .

Trditev 6 (ROTACIJSKE IN ZRCALNO-ROTACIJSKE ORBITE PRAPOROV POLIEDRA):

- i) Če polieder \mathcal{P} nima zrcalnih simetrij, je $T_R(\mathcal{P}) = T(\mathcal{P})$ in $po_R = po$.
- ii) Če pa ima \mathcal{P} kakršnokoli zrcalno simetrijo Z , potem je $po_R = 2po$.

Dokaz. Trditev i) je trivialna, trditev ii) pa dokažemo takole: Vsaka simetrija E^3 , ki ohranja polieder, je bodisi zrcaljenje bodisi rotacija, in kompozitum dveh rotacij ali dveh zrcaljenj je rotacija. Torej za vsako zrcaljenje Z in vsak prapor Φ velja: $T_R(\Phi) \neq T_R(Z(\Phi))$ in $T(Z(\Phi)) = T(\Phi)$, torej Z zlije po dve rotacijski orbiti praporov v eno. Alternativni dokaz: za vseh 17 grup izometrij lahko preverimo neposredno v tabeli 2, da imajo razširjene grupe dvakrat več elementov kot ustrezne rotacijske. \square

Definicija 19 (ZRCALJENJA IN ROTACIJE:) Za vsak prapor $\Phi = (v, e, f)$ ležeč na licu f poliedra \mathcal{P} in za vsak $i \in \{0, 1, 2\}$ naj bo $S_{\Phi_i} : E^3 \rightarrow E^3$ zrcaljenje prek ravnine Π_{Φ_i} , ki je pravokotna na lice f in gre skozi skupen rob praporov Φ in $s_i(\Phi)$. Podobno naj $R_{f,\alpha}$ pomeni rotacijo za kot α okrog središča lica f .

Trditev 7 (ZRCALJENJA INDUCIRAJO POLPOVEZAVE V SIMETRIJSKEM GRAFU:) Naj bo \mathcal{P} polieder. Če je $S_{\Phi_i}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ potem $T(\Phi) = T(s_i(\Phi))$. V tem primeru obstajajo polpovezave (ki predstavljajo zanke), označene z barvo i v simetrijskem grafu $T(G)$.

Dokaz. Če je $S_{\Phi_i}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, potem je S_{Φ_i} avtomorfizem grafa praporov poliedra \mathcal{P} , torej prapora Φ ter $s_i(\Phi) = S_i(\Phi)$ pripadata isti orbiti. \square

Definicija 20 (ENKRATNO LICE ALI EDINEC:) Lice f poliedra \mathcal{P} se imenuje enkratno lice (ali edinec) okrog danega oglišča v , če je to edino lice tega tipa, incidentno z v .

Primer. V uniformnem poliedru (3.4.5.4) sta lici 3 in 5 enkratni (in to okrog vsakega oglišča), medtem ko dve identični lici 4 to nista. Podobno je v uniformnem poliedru (10.10.5/2) pentagamska zvezda 5/2 enkratno lice, medtem ko dva pravilna 10-kotnika to nista.

Trditev 8 (ORBITE PRAPOROV UNIFORMNEGA POLIEDRA Z ENKRATNIM LICEM:) Če ima uniformni polieder \mathcal{P} z n lici okrog vsakega oglišča enkratno lice, potem ima simetrijski graf $T(\mathcal{P})$ bodisi n bodisi $2n$ vozlišč (ki ustrezajo T -orbitam praporov poliedra) in velja bodisi $po = n$ in $po_R = 2n$ bodisi $po = 2n$ in $po_R = 2n$ (če polieder nima nobenih zrcalnih simetrij) ali $po_R = 4n$ (če polieder zrcalne simetrije ima).

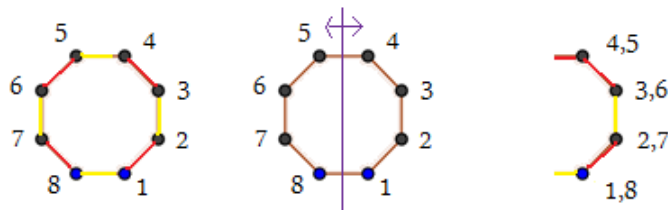
Dokaz. Uniformni poliedri so ogliščno tranzitivni po definiciji. Če je x enkratno lice uniformnega poliedra \mathcal{P} , potem x vsebuje samo prapore tipov X in X^1 . Ker vse orbite vsebujejo isto število praporov, mora biti najmanj n orbit praporov v simetrijskem grafu $T(\mathcal{P})$. In ker število orbit po deli $2n$, mora biti bodisi $po = n$ (če obstaja zrcalna simetrija $S_{X^1}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$) ali $po = 2n$ (če takšne simetrije ni). V prvem primeru je $po_R = 2n$, v drugem pa je (po Trditvi 6) $po_R = 2n$ (če ne obstaja nobena zrcalna simetrija) ali pa je (spet po Trditvi 6) $po_R = 4n$ (če obstaja kakšna druga zrcalna simetrija, različna od $S_{X^1}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$). \square

Trditev 9 (PRAVILO DOMIN:) Naj bo h poljubna preslikava grafa praporov, sestavljena iz involucij s_0, s_1 in s_2 grafa praporov. Potem je $T(X) = T(Y)$, če in samo če $T(h(X)) = T(h(Y))$. Zato, če $h(X)$ in $h(Y)$ ležita na licih različnih tipov, potem X in Y ne moreta ležati v isti orbiti.

Dokaz. Če dva prapora X in Y ležita v isti orbiti: $T(X) = T(Y)$, potem to velja tudi za njune istoležne sosede: $T(X^0) = T(Y^0)$, $T(X^1) = T(Y^1)$, $T(X^2) = T(Y^2)$. Torej velja to tudi za sosede njihovih sosedov itd. \square

Ime »pravilo domin« sem izbral zato, ker spominja na domine v vrsti, stoječe ob zrcalu: če pade ena, padejo vse ostale, hkrati z vsako pa tudi njena zrcalna slika.

Korolar 1 (KDAJ CIKEL KOLAPSIRA V POT:) Če sta dva sosedna prapora 1-2 cikla v isti 1-orbiti, prapori tega cikla v simetrijskem grafu tvorijo neko 1-2 pot, ki ima na obeh krajiščih polpovezavi (slika 11).



Slika 11: Levo: 1-2 cikel praporov; sredina: zrcaljenje s posledico $1^0 \approx 8$; desno: simetrijski graf ima obliko poti, kjer je $2 \approx 7$, $3 \approx 6$, $4 \approx 5$.

Definicija 21 (LIHO LICE:) *Lice z lihim številom robov se imenuje liho lice. Analogno definiramo sodo lice kot lice s sodim številom robov.*

Trditev 10 (LIHO ENKRATNO LICE IN PARI 0-POVEZAV:) *Če uniformni polieder \mathcal{P} vsebuje liho enkratno lice x , potem sta vzdolž vsakega roba tega lica x prapora tipov X in X^1 in velja: $X^0 = X^1$ in $(T(X))^0 = T(X^1)$. V tem primeru lahko najdemo še eno 0-povezavo med orbitami: $T(X^2)^0 = T(X^0)^2$, kajti 0-2 cikli praporov imajo dolžino 4.*

Dokaz. Liho enkratno lice vsebuje samo dva tipa praporov: X in X^1 , ki morata alternirati vzdolž robov. \square

Definicija 22 (POLOŽAJNI VEKTOR:) *Naj $f(X)$ pomeni tip 3, 4, 5, 5/2, 6, 8, 8/3, 10 itd. pravilnega poligonskega ali zvezdnega lica x , ki vsebuje prapor X . Položajni vektor $v(X)$ prapora X je definiran kot urejen par:*

$$v(X) = (f(X), f(s_2(X))).$$

Trditev 11 *Poljubna dva prapora X in Y , ki pripadata isti orbiti ali sta iz 0-sosednih orbit, imata enaka položajna vektorja:*

$$\text{če } T(X) = T(Y) \text{ ali če } T(X) = s_0(T(Y)), \text{ potem } v(X) = v(Y).$$

Zato dva prapora z različnima položajnima vektorjema ne moreta ležati v isti orbiti, pa tudi ne v dveh 0-sosednih orbitah.

Dokaz. Tudi to je neposredna posledica pravila domin. \square

2.3.1 Algoritem za določanje $T(\mathcal{P})$ in $T_R(\mathcal{P})$

V tem razdelku je predstavljen algoritem za določanje simetrijskih grafov $T(\mathcal{P})$ in $T_R(\mathcal{P})$ kateregakoli uniformnega poliedra \mathcal{P} , zasnovan na orodjih iz prejšnjega razdelka.

Za določitev simetrijskih grafov $T(\mathcal{P})$ kateregakoli uniformnega poliedra \mathcal{P} (pa tudi vsakega uniformnega tlakovanja \mathcal{T} ravnine) zadošča izvesti naslednji splošni načrt:

Algoritem 1 (SIMETRIJSKI GRAFI $T(\mathcal{P})$ UNIFORMNIH TELES)

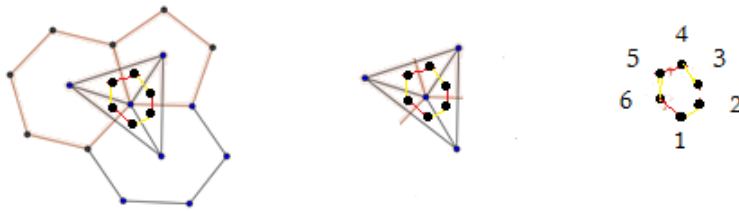
- (1) Oštevilči 1-2 cikel praporov okrog danega vozlišča $1, 2, \dots, 2n$.
- (2) Identificiraj prapore tega cikla, ležeče v isti orbiti.
- (3) Poišči 0-povezave med orbitami.

Ta algoritem pove samo, kaj storiti, ne specificira pa, kako to storiti. Eden od možnih načinov je naslednji:

(1) (NARIŠI OSNOVNI 1-2 CIKEL PRAPOROV KOT PRAVILNI $2n$ -KOTNIK) Nariši pravilni $2n$ -kotnik, oštevilči njegova oglišča $1, 2, \dots, 2n$ ter za vsak $i \in \{1, \dots, n\}$ označi povezave $(2i - 1, 2i)$ z barvo 1, povezave $(2i, 2i + 1 \pmod{2n})$ pa z barvo 2. Označi oglišča tega osnovnega poligona P s tipi poligonskih (3,4,5,6,8,10) ali zvezdnih lic (5/2, 8/3 itd.), ki vsebujejo ustrezne prapore (namesto poligona lahko narišemo tudi krog z $2n$ točkami na enakih razdaljah vzdolž njegovega roba).

(2) (IDENTIFICIRAJ ORBITE PRAPOROV) Uporabi položajne vektorje in podobna orodja zato, da dobiš spodnjo mejo m za število po orbit praporov, in uporabi simetrije poliedra, da dobiš zgornjo mejo M za po . Torej je $m \leq po \leq M$. Izpelji iz ogliščnega tipa poliedra, katere simetrije so sploh možne (potem pa preveri njihovo eksistenco s poliedrsko mrežo ali 3D-modelom). Tako je npr. v primeru poliedrov z ogliščnim tipom $(p.q.q)$ možna največ ena ogliščna zrcalna simetrija, v primeru poliedrov z ogliščnim tipom $(p.q.r)$ ogliščnih simetrij ni, medtem ko imajo poliedri z ogliščnim tipom $(p.q.p.q)$ zrcalno simetrijo in rotacijsko simetrijo z osjo, ki gre skozi oglišče poliedra.

(3) (POIŠČI ORIENTACIJE 1-2 CIKLOV IN NJIHOVE PRAPORE USTREZNO OŠTEVILČI) Ugotovi, kako morajo biti 1-2 cikli praporov $1, 2, \dots, 2n$ orientirani v vseh sosednjih ogliščih danega oglišča. Na primer, če ima \mathcal{P} liho enkratno lice p , potem obstaja alternirajoči 0-1 cikel, ki vsebuje samo dva tipa praporov v p (ki pripadata največ dvema različnima orbitama). Posledično morajo imeti vsi 1-2 cikli praporov isto orientacijo, in če začnemo pri enkratnem licu, lahko prapore okrog vsakega oglišča le na en način označimo s števili $1, 2, \dots, 2n$. Zdaj lahko določimo, katere orbite so 0-sosedne enostavno tako, da si ogledamo tisti del poliedrove mreže, ki vsebuje 1-2 cikle okrog poljubno izbranega oglišča in okrog vseh njegovih sosedov. To deluje v primeru šestih arhimedskih teles (3.6.6), (3.8.8), (3.10.10), (5.6.6), (3.4.4.4), (3.4.5.4), (3.3.3.3.5), pa tudi v primeru enega od arhimedskih tlakovanj (3.12.12).



Slika 12: Cikel praporov okrog oglišča in ustrezni osnovni 1-2 cikel.

Pri določitvi simetrijskih grafov $T_R(\mathcal{P})$ kateregakoli uniformnega poliedra \mathcal{P} moramo biti previdnejši. Kajti če prepovemo zrcaljenja, potem dobimo npr. pri uniformnih poliedrih z ogliščnim tipom $(p.q.r)$ dva različna osnovna 1-2 cikla praporov: 1, 2, 3, 4, 5, 6 in 7, 8, 9, 10, 11, 12 okrog dveh tipov oglišč (črnih in belih), in orbite praporov 1, 2, 3, 4, 5, 6 so različne od orbit praporov 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Izrek 7 (TRI OBLIKE SIMETRIJSKIH GRAFOV UNIFORMNIH POLIEDROV:) *Naj bo \mathcal{P} uniformni polieder z n lici okrog vsakega oglišča in naj bo po število orbit – vozlišč simetrijskega grafa $T(\mathcal{P})$. Potem po deli $2n$, in $T(\mathcal{P})$ ima eno od naslednjih treh oblik:*

- i) ima samo eno vozlišče*
- ii) njegova vozlišča tvorijo 1-2 cikel*
- iii) njegova vozlišča tvorijo 1-2 pot ali 2-1 pot.*

Dokaz. Naj bo \mathcal{P} katerikoli uniformni polieder. Naj bosta X in Y dva prapora osnovnega 1-2 cikla C praporov $1, 2, 3, \dots, 2n$ okrog izbranega oglišča poliedra \mathcal{P} . Če sta X in Y v isti orbiti, potem obstaja izometrija evklidskega prostora E^3 , ki preslika X v Y . Ta izomorfizem tudi preslika osnovni 1-2 cikel C vase in ohranja sosednost praporov. Toda to pomeni, da ohranja tudi sosednost oglišč v osnovnem poligonu P . Zato je lahko algebraično predstavljen z neko rotacijo ali zrcaljenjem osnovnega poligona P . Tako je lahko predstavljen z bijektivno transformacijo $f : \{1, 2, \dots, 2n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 2n\}$ oblike $i \rightarrow i+a \pmod{2n}$ (v primeru rotacije) ali $i \rightarrow -i+a \pmod{2n}$ (v primeru zrcaljenja). Očitno je tudi, da rotacije ohranjajo množici liho in sodo oštevilčenih praporov, medtem ko zrcaljenja preslikajo liho oštevilčene prapore v sode in obratno. Rotacije $i \rightarrow i+a \pmod{2n}$ identificirajo oglišča $i, i+a, i+2a, \dots$ osnovnega poligona P in nam dajo nov poligon z $a = 2n/b$ oglišči (ki predstavljajo ekvivalenčne razrede praporov cikla C , identificirane s to rotacijo). Zrcaljenja $i \rightarrow -i+a \pmod{2n}$ identificirajo pare oglišč i in $-i+a$ za vsak i , in tako transformirajo cikel na robu poligona v pot. Tako imajo vsi tisti uniformni poliedri, ki nimajo nobenih zrcaljenj, simetrijske grafe $T(\mathcal{P})$, katerih orbite oblikujejo 1-2 cikel v obliki kroga (oziroma regularnega poligona), medtem ko imajo vsi drugi poliedri simetrijske grafe $T(\mathcal{P})$, katerih orbite oblikujejo 1-2 pot ali imajo eno samo orbito (regularni poliedri). \square

2.4 Simetrijski grafi platonskih in arhimedskih teles

Klasifikacija platonskih in arhimedskih teles glede na njihove simetrijske grafe je zajeta v naslednjem izreku (KOVIČ, [30]):

Izrek 8 *Obstaja 11 različnih simetrijskih grafov $T(\mathcal{P})$ in $T_R(\mathcal{P})$, pripadajočih platonskim in arhimedskim telesom in ti grafi imajo 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10 ali 12 vozlišč (slika 13). Ti simetrijski grafi, opisani s permutacijami orbit praporov a, b, c, \dots , induciranimi z involucijami s_0, s_1, s_2 , so (tabela 3):*

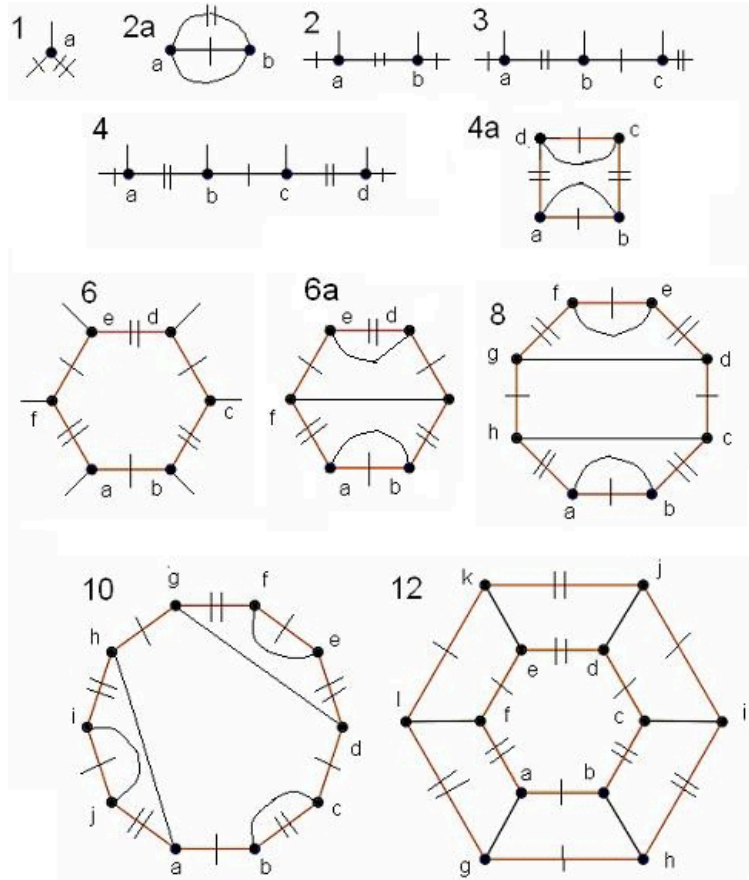
graf	s_0	s_1	s_2
1	id	id	id
2a	(ab)	(ab)	(ab)
2	id	id	(ab)
3	id	$(a)(bc)$	$(ab)(c)$
4	id	$(a)(bc)(d)$	$(ab)(cd)$
4a	$(ab)(cd)$	$(ab)(cd)$	$(bc)(da)$
6	id	$(ab)(cd)(ef)$	$(af)(bc)(de)$
6a	$(ab)(cf)(de)$	$(ab)(cd)(ef)$	$(af)(bc)(de)$
8	$(ab)(ch)(dg)(ef)$	$(ab)(cd)(ef)(gh)$	$(ah)(bc)(de)(fg)$
10	$(ah)(bc)(dg)(ef)(ij)$	$(ab)(cd)(ef)(gh)(ij)$	$(aj)(bc)(de)(fg)(hi)$
12	$(ag)(bh)(ci)(dj)(ek)(fl)$	$(ab)(cd)(ef)(gh)(ij)(kl)$	$(af)(bc)(de)(hi)(jk)(lg)$

Tabela 3: Simetrijski grafi, opisani s permutacijami orbit praporov.

Simetrijski grafi platonskih in arhimedskih teles definirajo šest ekvivalenčnih razredov teh teles, ki so odvisni le od njihovega ogliščnega tipa (tabela 4):

razred	platonsko ali arhimedsko telo \mathcal{P}	ogliščni tip	$T(\mathcal{P})$	$T_R(\mathcal{P})$
I.	tetraeder	(3.3.3)	1	2a
I.	oktaeder	(3.3.3.3)	1	2a
I.	kocka	(4.4.4)	1	2a
I.	ikozaeder	(3.3.3.3.3)	1	2a
I.	dodekaeder	(5.5.5)	1	2a
II.	kuboktaeder	(3.4.3.4)	2	4a
II.	ikozidodekaeder	(3.5.3.5)	2	4a
III.	prisekani tetraeder	(3.6.6)	3	6a
III.	prisekana kocka	(3.8.8)	3	6a
III.	prisekani oktaeder	(4.6.6)	3	6a
III.	prisekani dodekaeder	(3.10.10)	3	6a
III.	prisekani ikozaeder	(5.6.6)	3	6a
IV.	rombikuboktaeder	(3.4.4.4)	4	8
IV.	rombikozidodekaeder	(3.4.5.4)	4	8
V.	prisekani kuboktaeder	(4.6.8)	6	12
V.	prisekani ikozidodekaeder	(4.6.10)	6	12
VI.	snub kocka	(3.3.3.3.4)	10	10
VI.	snub dodekaeder	(3.3.3.3.5)	10	10

Tabela 4: Ekvivalenčni razredi platonskih in arhimedskih teles.



Slika 13: Simetrijski grafi platonskih in arhimedskih teles.

<i>razred \mathcal{P}</i>	<i>ogliščni tip \mathcal{P}</i>	$T(\mathcal{P})$	$T_R(\mathcal{P})$
<i>I. Regularna (platonska)</i>	(p^n)	1	$2a$
<i>II. Kvazi-regularna</i>	$(p.q.p.q)$	2	$4a$
<i>III. Prisekana regularna</i>	$(p.q.q)$	3	$6a$
<i>IV. Verzi-kvazi regularna</i>	$(p.q.r.q)$ in $(p.q.q.q)$	4	8
<i>V. Prisekana kvazi-regularna</i>	$(p.q.r)$	6	12
<i>VI. Snub kvazi-regularna</i>	$(p.p.p.p.q)$	10	10

Tabela 5: Klasifikacija platonskih in arhimedskih teles glede na njihove simetrijske grafe.

Na podlagi tega rezultata sem oblikoval naslednjo hipotezo:

Hipoteza 1 (SIMETRIJSKI GRAFI UNIFORMNIH POLIEDROV SO ODVISNI LE OD NJIHOVEGA OGLIŠČNEGA TIPA:) *Uniformni poliedri z istim ogliščnim tipom imajo isti simetrijski graf $T(\mathcal{P})$ in isti simetrijski graf $T_R(\mathcal{P})$.*

Videli bomo, da se je ta hipoteza izkazala za resnično.

Simetrijske grafe platonskih in arhimedskih teles sem najprej določil z uporabo geometrijske metode in neposrednim opazovanjem simetrij za vsako telo posebej. Ugotovitve, dobljene na ta način, sem šele kasneje, ko sem v rezultatih začel prepoznavati odvisnost simetrijskega grafa zgolj od ogliščnega tipa poliedra, znal strniti in dokazati za vse poliedre posameznih razredov hkrati [32]. Izkazalo se je, da se da simetrijska grafa $T(\mathcal{P})$ in $T_R(\mathcal{P})$ vseh uniformnih poliedrov določiti neposredno iz ogliščnega tipa poliedra \mathcal{P} , ne z geometrijsko metodo (risanjem plaščev poliedrov za vsak polieder posebej), ampak z algebraično metodo (logičnim sklepanjem, enakim za vse poliedre z istim ogliščnim vzorcem, pa tudi z upoštevanjem znanega seznama 75 uniformnih poliedrov, opisanih z njihovim ogliščnim vzorcem).

Po zgledu dokaza Izreka 8 (podanega v [30]), ki bolj kot na določanju simetrij posameznih teles temelji na sklepanju, sem izdelal analogen »algebraičen« dokaz klasičnega izreka za vse uniformne poliedre (Izrek 9) v razdelku 2.6).

2.5 Nekaj opazanj o simetrijah platonskih in arhimedskih teles

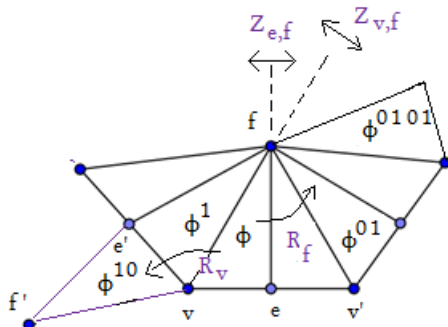
S pomočjo 3D-modelov in poliedrskih mrež ali pa s programom Great Stella zlahka ugotovimo, da imajo platonska in arhimedska telesa naslednje simetrije:

Lema 1 *i) Vsa platonska in arhimedska telesa, z izjemo snub kocke (3.3.3.3.4) in snub dodekaedra (3.3.3.3.5), ki nimata nobenih zrcalnih simetrij, imajo zrcalno simetrijo $Z_{e,f}$, ki preslika prapor $\Phi = (v, e, f)$ poljubno izbranega lica f (prek zrcalne ravnine, ki gre skozi simetralo stranice e , incidentne licu f) v prapor $\Phi^0 = (v', e, f)$ (Slika 14).*

ii) Vseh pet arhimedskih teles z ogliščnim vzorcem (p.q.r) ima po dve rotacijski orbiti oglišč; vsa ostala platonska in arhimedska telesa imajo po eno rotacijsko orbito oglišč.

iii) Vsa platonska telesa imajo v poljubnem licu f ogliščno rotacijo R_v , ki preslika prapor $\Phi = (v, e, f)$ v prapor Φ^{12} , dve arhimedski telesi z ogliščnim tipom (p.q.p.q) pa imata ogliščno rotacijo R_v^2 , ki preslika prapor Φ v Φ^{1212} . Druga telesa nimajo ogliščnih rotacij (razen potenc rotacije R_v^n , kjer je n število robov, ki se sekajo v oglišču v).

iv) Snub kocka (3.3.3.3.4) in snub dodekaeder (3.3.3.3.5) nimata nobene zrcalne simetrije, torej je zanju $T_R(\mathcal{P}) = T(\mathcal{P})$; ker imata po pet oglišč, je to graf z enim samim 1-2 ciklom iz 10 vozlišč, 0-povezave med njimi pa lahko določimo s pomočjo ustreznih baricentrično razdeljenih poliedrskih mrež teh dveh teles (mreža snub kocke je prikazana na sliki 6).



Slika 14: Oznake za možne rotacije in zrcaljenja danega prapora Φ .

Na podlagi opažanj i), ii) in iii) lahko določimo tudi simetrijske grafe vseh drugih platonskih in arhimedskih teles. Tako ima pet arhimedskih teles z ogliščnim tipom $(p.q.r)$ v $T_R(\mathcal{P})$ dva 1-2 cikla dolžine 6, med katerima poteka šest 0-povezav. Zrcalna simetrija $Z_{e,f}$, ki identificira ta dva cikla, spremeni te 0-povezave iz $T_R(\mathcal{P})$ v 0-polpovezave v $T(\mathcal{P})$. Vsa ostala telesa pa imajo $T(\mathcal{P})$ v obliki 1-2 poti, vse 0-povezave pa so polpovezave. Ustrezni grafi $T_R(\mathcal{P})$ imajo obliko 1-2 ciklov z dvakrat več oglišči.

Iz tabele 5 vidimo, da so predstavniki dobljenih ekvivalenčnih razredov med seboj povezani z naslednjimi znanimi operacijami na poliedrih (te operacije so definirane npr. v [4]): trunkacija Tr (prisekanje), medial Me , snub Sn ter dual Du , in sicer takole: vsi poliedri iz III so dobljeni kot Tr poliedrov iz I, oba poliedra iz II sta dobljena kot Me dveh teles iz I, oba poliedra iz VI sta dobljena kot Tr poliedrov iz II, vsi poliedri iz IV so dobljeni kot Me poliedrov iz II. Zdaj lahko primerjamo našo klasifikacijo na osnovi simetrijskih grafov z JOHNSON-ovo klasifikacijo uniformnih poliedrov na osnovi ogliščne konfiguracije lic ([26], 2000). Ker naša klasifikacija arhimedskih in platonskih poliedrov sovpada z njegovo, uporabljamo njegova imena (regularni, kvazi-regularni, prisekani regularni, verzi kvazi-regularni, prisekani kvazi-regularni in snub kvazi-regu-larni poliedri) za naših šest različnih razredov arhimedskih in platonskih teles. Naša klasifikacija – če jo razširimo na druge uniformne poliedre – je finejša kot Johnsonova, saj sta v njegovem razredu snub kvazi-regularnih poliedrov poliedra $(3.3.3.3.4)$ in $(3.5/3.3.5/2.3.3)$ s 5 in 6 lici okrog vsakega oglišča, katerih simetrijski grafi ne morejo imeti istega števila orbit.

ODPRT PROBLEM O TRANSFORMACIJAH SIMETRIJSKIH GRAFOV: Gornja opažanja govorijo v prid smiselnosti vprašanja: »Kako se spremeni simetrijski graf poliedra z znano grupo simetrij, če na njem uporabimo eno od transformacij Tr , Me , Sn «?

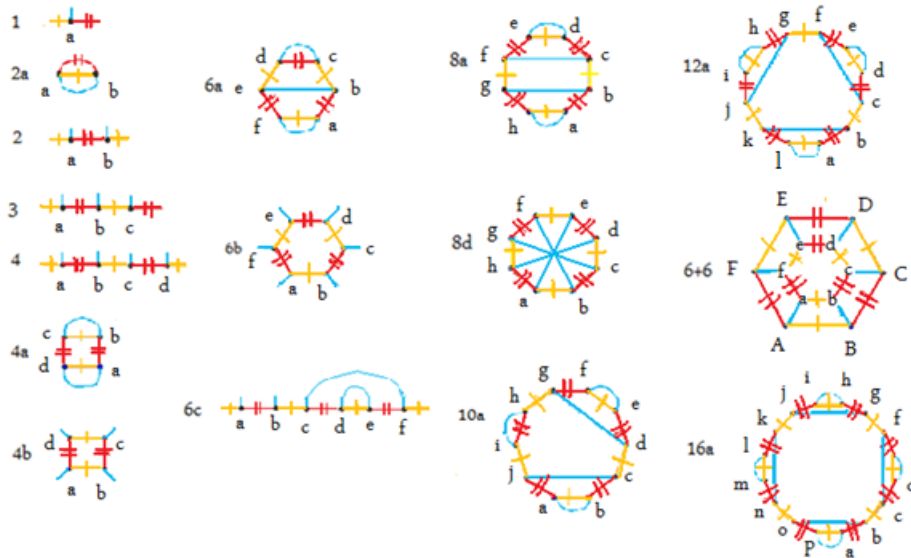
Morda je ključ do odgovora CONWAY-eva poliedrska notacija [4], ki opiše, kako iz danega poliedra s preprostimi transformacijami dobimo poliedre z isto grupo simetrij.

2.6 Simetrijski grafi uniformnih poliedrov

V tem razdelku je predstavljena klasifikacija uniformnih poliedrov glede na njihove simetrijske grafe $T(\mathcal{P})$ in $T_R(\mathcal{P})$. Za simetrijske grafe $T(\mathcal{P})$ sem že v Izreku 7 pokazal, da imajo le tri možne oblike (graf z enim vozliščem, pot ali cikel), prav tako sem omenil, da imajo nekateri uniformni poliedri dva osnovna 1-2 cikla. Zdaj lahko to splošno shemo konkretiziramo oziroma dopolnimo z detajli.

Slika 15 prikazuje vseh 16 simetrijskih grafov 75 uniformnih poliedrov. Nekateri od teh grafov so dobro znani [38]. Notacijo zanje sem izbral tako, da:

- i) kaže število njihovih oglišč,
- ii) razlikuje med neizomorfni grafi z istim številom oglišč in različnimi 0-povezavami,
- iii) poudarja dejstvo, da ima simetrijski graf 6+6 dva 1-2 cikla;
- iv) poudarja podobnost med simetrijskimi grafi različnih razredov (primerjaj strukturo simetrijskih grafov s črkami a), b) in c), ki sledijo številkam).



Slika 15: Simetrijski grafi $T(\mathcal{P})$ in $T_R(\mathcal{P})$ uniformnih poliedrov.

Izrek 9 *Obstaja 16 različnih simetrijskih grafov $T(\mathcal{P})$ in $T_R(\mathcal{P})$ pripadajočih 75 uniformnim poliedrom in ti simetrijski grafi imajo 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12 ali 16 vozlišč (ki predstavljajo orbite praporov v grafu praporov $G(\mathcal{P})$).*

Te simetrijske grafe lahko opišemo s permutacijami orbit a, b, c, \dots , induciranimi z involucijami s_0, s_1, s_2 , takole (tabela 6):

<i>graf</i>	s_0	s_1	s_2
1	id	id	id
2a	(ab)	(ab)	(ab)
2	id	id	(ab)
3	id	$(a)(bc)$	$(ab)(c)$
4	id	$(a)(bc)(d)$	$(ab)(cd)$
4a	$(ad)(bc)$	$(ad)(bc)$	$(ab)(cd)$
4b	id	$(ab)(cd)$	$(ad)(bc)$
6a	$(af)(be)(cd)$	$(af)(bc)(de)$	$(ab)(cd)(ef)$
6b	id	$(ab)(cd)(ef)$	$(af)(bc)(de)$
6c	$(a)(b)(cf)(de)$	$(a)(bc)(de)(f)$	$(ab)(cd)(ef)$
8a	$(ah)(bg)(cf)(de)$	$(ab)(cd)(ef)(gh)$	$(ah)(bc)(de)(fg)$
8d	$(ae)(bf)(cg)(dh)$	$(ab)(cd)(ef)(gh)$	$(ah)(bc)(de)(fg)$
10a	$(ab)(cj)(dg)(ef)(ih)$	$(ab)(cd)(ef)(gh)(ij)$	$(aj)(bc)(de)(fg)(hi)$
12a	$(al)(bk)(cf)(de)(gj)(hi)$	$(al)(bc)(de)(fg)(hi)(jk)$	$(ab)(cd)(ef)(gh)(ij)(kl)$
6+6	$(aA)(bB)(cC)$	$(ab)(cd)(ef)$	$(af)(bc)(de)$
	$(dD)(eE)(fF)$	$(AB)(CD)(EF)$	$(AF)(BC)(DE)$
16a	$(ap)(bo)(cf)(de)$	$(ap)(bc)(de)(fg)$	$(ab)(cd)(ef)(gh)$
	$(gj)(hi)(kn)(lm)$	$(hi)(jk)(lm)(no)$	$(ij)(kl)(mn)(op)$



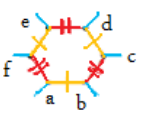
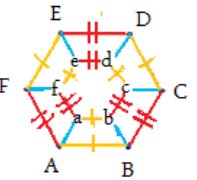


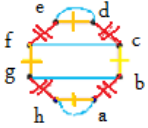
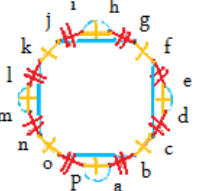
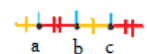
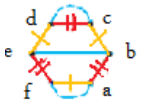
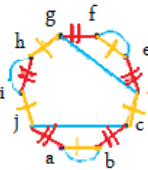
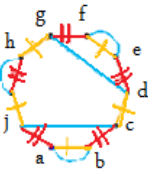
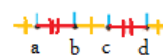
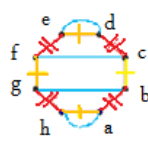
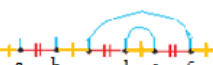
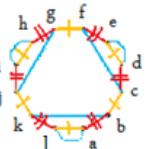

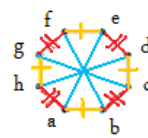
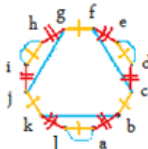
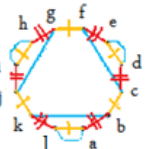
Tabela 6: Simetrijski grafi uniformnih poliedrov,
opisani z involucijami s_0 , s_1 in s_2 .

Simetrijski grafi $T(\mathcal{P})$ in $T_R(\mathcal{P})$ uniformnih poliedrov \mathcal{P} so odvisni samo od ogliščnega tipa poliedrov in definirajo naslednjih 10 razredov uniformnih poliedrov (tabela 7):

razred \mathcal{P} ogliščni tip \mathcal{P}	$T(\mathcal{P})$	$T_R(\mathcal{P})$
<i>I. Regularni</i> $(p.p.p)$, $(p.p.p.p)$, $(p.p.p.p.p)$ $(p.p.p.p.p)/2$	1	2a
<i>II. Kvazi-regularni</i> $(p.q.p.q)$, $(p.q.p^*.q)$, $(p.q.p.q.p.q)$	2	4a
<i>III. Prisekani regularni</i> $(p.q.q)$	3	6a
<i>IV. Verzi-kvazi regularni</i> $(p.q.r.q)$, $(p.q.q.q)$	4	8
<i>V. Semi-kvazi regularni</i> $(p.q.p^*.q^*)$	4b	8
<i>VI. Prisekani kvazi-regularni</i> $(p.q.r)$	6b	6 + 6
<i>VII. U75 Veliki dirombikozidodekaeder</i> $(p.q.r.q.p^*.q.r^*.q)$	8a	16a
<i>VIII. Snub kvazi-regularni z $n = 5$ lici</i> $(p.q.q.q.q)$, $(p.q.q.q.q)/2$, $(p.q.r.q.q)$	10a	10a
<i>IX. Snub kvazi-regularni z $n = 6$ lici</i> <i>in zrcalno simetrijo</i> $(p.q.q.q.q.q)$, $(p.q.q.q.q.q)/2$	6c	12a
<i>X. Snub kvazi-regularni z $n = 6$ lici</i> <i>in brez zrcalne simetrije</i> $(p.q.r.q.q.q)$, $(p.q.p^*.q.q.q)$	12a	12a

Tabela 7: Ekvivalenčni razredi uniformnih poliedrov glede na njihove simetrijske grafe.

Lica p^* , q^* , so istega tipa kot lica p , q , vendar nasprotno orientirana. Imena nekaterih od teh razredov so ista kot v JOHNSON-ovi klasifikaciji uniformnih poliedrov glede na njihovo ogliščno konfiguracijo ([26]).

I. REGULAR $(p.p.p), (p.p.p.p), (p.p.p.p.p), (p.p.p.p.p.p)/2$		VI. TRUNCATED QUASI-REGULAR $(p.q.r)$	
1 	2a 	6b 	6+6 
II. QUASI-REGULAR $(p.q.p.q), (p.q.p^*.q), (p.q.p.q.p.q)$		VII. U75 GREAT DIRHOMBICOSIDODECAHEDRON $(p.q.r.q.p^*.q.r^*.q)$	
2 	4a 	8a 	16a 
III. TRUNCATED REGULAR $(p.q.q)$		VIII. SNUB QUASI-REGULAR, $n=5$ $(p.q.q.q.q), (p.q.q.q.q)/2$	
3 	6a 	10a 	10a 
IV. VERSI QUASI-REGULAR $(p.q.r.q), (p.q.q.q)$		IX. SNUB, $n=6$, reflection symmetry S_{p1} $(p.q.q.q.q.q), (p.q.q.q.q.q)/2$	
4 	8a 	6c 	12a 
V. SEMI QUASI-REGULAR $(p.q.p^*.q^*)$		X. SNUB, $n=6$, no reflection symmetries $(p.q.r.q.q.q), (p.q.p^*.q.q.q)$	
4b 	8d 	12a 	12a 

Slika 16: Klasifikacija uniformnih poliedrov.

2.6.1 Nekaj opažanj o simetrijah uniformnih poliedrov

Preden dokažem Izrek 8, naj strnem svoja opažanja o simetrijah 75 uniformnih poliedrov (pridobljena s pomočjo njihovih slik, 3D-modelov ali poliedrskih mrež) v obliki leme:

Lema 2 (SIMETRIJE UNIFORMNIH POLIEDROV:)

i) Mnogi uniformni poliedri imajo zrcalno simetrijo S_{P_1} , ki identificira prapora P in P^1 v licu p . Tako je v primeru razredov I, II, III, IV, IX.

ii) Če ima polieder zrcalne simetrije S_{X-0} v vseh svojih licih x , potem so vse 0-povezave v simetrijskem grafu $T(\mathcal{P})$ polpovezave. Tako je v primeru razredov I, II, III, IV, V and VI.

iii) Poliedri iz razredov V in VII imajo zrcalno simetrijo, ki identificira pare nasprotnih praporov i and $i + n$ v osnovnem 1-2 ciklu (ki vsebuje $2n$ vozlišč).

iv) Poliedri iz razredov VIII in X nimajo nobenih zrcalnih simetrij.

Pri obravnavi posameznih simetrij poliedra \mathcal{P} bomo uporabljali naslednje izraze in oznake za najpogostejše simetrije poliedrov (uporabni so tudi za tlakovanja ravnine):

Definicija 23 (ZRCALNE IN ROTACIJSKE SIMETRIJE POLIEDROV:)

Zrcalna vozliščno-lična simetrija je zrcaljenje, ki identificira prapora s skupnim ogliščem v , ležeča na licu f . Označimo jo takole: $Refl(v, f)$.

Zrcalna stranično-lična simetrija je zrcaljenje, ki identificira prapora s skupno stranico e , ležeča na licu f . Označimo jo takole: $Refl(e, f)$.

Zrcalna vozliščno-stranična simetrija je zrcaljenje, ki identificira prapora s skupnim ogliščem v , in skupno stranico e . Označimo jo takole: $Refl(v, e)$.

Naravna rotacijska simetrija v licu f je rotacija okrog središča tega lica za kot $2\pi/n$, kjer je n število stranic lica. Označimo jo takole: $Rot(f)$.

Naravna rotacijska simetrija v vozlišču v je rotacija okrog tega vozlišča za kot $2\pi/n$, kjer je n število lic okrog vozlišča v . Označimo jo takole: $Rot(v)$.

Naravna rotacijska simetrija v stranici e je rotacija okrog središča te stranice za kot π . Označimo jo takole: $Rot(v)$.

Pri določitvi simetrijskih grafov posameznih razredov uniformnih poliedrov lahko uporabljamo dva diametralno nasprotna pristopa:

MAKSIMALNO UPOŠTEVANJE SIMETRIJ: Tu iščemo kar se da hitro pot do določitve simetrijskega grafa – izbiramo tiste simetrije, ki kar najhitreje vodijo do cilja.

MINIMALNO UPOŠTEVANJE SIMETRIJ: Tu skušamo čim več dognati s sklepanjem in se kolikor mogoče malo sklicevati na simetrije poliedra.

V dokazu Izreka 9 za vsak polieder navajam njegovo številko v uniformni notaciji Uxy in WENNINGER-jevo ([50]) notacijsko številko Wxy .

2.7 Dokaz Izreka 9

Obravnavali bomo naslednjih deset razredov poliedrov:

Razred I (REGULARNI POLIEDRI) vsebuje $N = 9$ poliedrov z ogliščnimi tipi $(p.p.p)$, $(p.p.p.p)$, $(p.p.p.p.p)$ in $(p.p.p.p.p)/2$, in sicer:

pet platonskih teles (podrazred I.a)

U01 W01 Tetraeder (3.3.3)

U05 W02 Oktaeder (3.3.3.3)

U06 W06 Kocka (4.4.4)

U22 W04 Ikozaeder (3.3.3.3.3)

U23 W05 Dodekaeder (5.5.5)

in štiri Kepler-Poinsotove poliedre (podrazred I.b)

U34 W20 Mali ozvezdeni dodekaeder $(5/2.5/2.5/2.5/2.5/2)$

U35 W21 Veliki dodekaeder $(5.5.5.5.5)/2$

U52 W22 Veliki ozvezdeni dodekaeder $(5/2.5/2.5/2)$

U53 W41 Veliki ikozaeder $(3.3.3.3.3)/2$.

ROTACIJSKE SIMETRIJE: Vsi poliedri razreda I imajo naravne rotacijske simetrije $Rot(v, 2\pi/n)$, $Rot(e, 2\pi/2)$ in $Rot(f, 2\pi/f)$ v vsakem oglišču v , robu e in licu f .

ZRCALNE SIMETRIJE: Imajo tudi ogliščno-lična zrcaljenja $RefI(v, p)$, ki identificirajo prapora 1 in $2n$, ter zrcalne simetrije prek vsake stranice vsakega prapora.

T -ORBITE PRAPOROV: Pri vsakem od teh teles zrcaljenja prek vseh stranic vseh praporov preslikajo vsak prapor v vsak drug prapor, torej je $po = 1$.

T -ORBITE OGLIŠČ, ROBOV IN LIC: Simetrijski graf $T(\mathcal{P})$ ima eno samo vozlišče s polpovezavami 0, 1 in 2, torej je $vo = eo = fo = 1$.

T_R -ORBITE PRAPOROV: Naravne rotacije okrog središča vsakega lica in oglišča za kot $2\pi/p$ zagotavljajo, da sta samo dve T_R -orbiti praporov: $po_R = 2$.

SIMETRIJSKI GRAF $T_R(\mathcal{P})$: Torej ima $T_R(\mathcal{P})$ dve vozlišči, povezani s povezavami 0, 1 in 2, saj v $T_R(\mathcal{P})$ ni polpovezav. Posledično je $vo_R = eo_R = fo_R = 1$.

ALTERNATIVEN RAZMISLEK: Ogliščna zrcalna simetrija $RefI(v, p)$ (po Trditvi 6) implicira $vo_R = 1$, torej vozlišča $T_R(\mathcal{P})$ pripadajo le orbitam praporov $1, 2, \dots, 2n$ okrog poljubno izbranega oglišča u . Naravne ogliščne rotacije $Rot(v, 2\pi/n)$ implicirajo $1 \sim 3 \dots \sim 2n - 1$ in $2 \sim 4 \sim \dots \sim 2n$, in ker v $T_R(\mathcal{P})$ ni polpovezav, je $1^0 = 1^1 = 1^2 \sim 2$. Zrcalna simetrija $RefI(v, p)$ zlije T_R -orbiti praporov 1 in 2 v eno samo T -orbito s tremi polpovezavami.

Razred II (KVAZI-REGULARNI POLIEDRI) sestoji iz $N = 16$ poliedrov z ogliščnim tipom $(p.q.p.q)$ $(p.q.p^*.q)$, $(p.q.p.q.p.q)$ ali $(p.q.p.q.p.q)/2$, in sicer:

telesa z $n = 4$ lici okrog vsakega oglišča (podrazred II.a)

- U07 W11 Kuboktaeder (3.4.3.4)
- U24 W12 Ikozidodekaeder (3.5.3.5)
- U36 W73 Dodekadodekaeder (5/2.5.5/2.5)
- U54 W94 Veliki ikozidodekaeder (5/2.3.5/2.3)
- U03 W68 Oktahemioktaeder (3.6.3/2.6)
- U04 W67 Tetrahemiheksaeder (3.4.3/2.4)
- U15 W78 Kubohemioktaeder (4.6.4/3.6)
- U49 W89 Mali ikozihemidodekaeder (3.10.3/2.10)
- U51 W91 Mali dodekahemidodekaeder (5.10.5/4.10)
- U62 W100 Mali dodekahemikozaeder (5/2.6.5/3.6)
- U65 W102 Veliki dodekahemikozaeder (5.6.5/4.6)
- U71 W106 Veliki ikozihemidodekaeder (3.10/3.3/2.10/3)

telesa z $n = 6$ lici okrog vsakega oglišča (podrazred II.b)

- U70 W107 Veliki dodekahemidodekaeder (5/2.10/3.5/3.10/3)
- U30 W70 Mali ditrigonalni ikozidodekaeder (5/2.3.5/2.3.5/2.3)
- U41 W80 Ditrigonalni dodekadodekaeder (5/3.5.5/3.5.5/3.5)
- U47 W87 Veliki ditrigonalni ikozidodekaeder (5.3.5.3.5.3)/2.

OSNOVNI 2-1 CIKEL: Okrog poljubno izbranega oglišča u so prapori $1, 2, \dots, 8$; par $2i - 1$, $2i = (2i - 1)^2$ je ob robu e_i , par $2i$, $2i + 1 \pmod{8} = (2i)^1$ pa v licu f_i .

ROTACIJSKE SIMETRIJE: Vsi ti poliedri \mathcal{P} imajo naravne rotacije $Rot(f, 2\pi/f)$ v vsakem licu f in rotacije $Rot(v, 2\pi/2)$ v vsakem oglišču v .

ZRCALNE SIMETRIJE: Imajo tudi zrcalne simetrije $Ref1(v, f)$ in $Ref1(e, f)$ v vsakem oglišču v in v vsaki stranici e vsakega lica f .

$vo_R = 1$: Zaradi zrcalne simetrije $Ref1(v, f)$ (po Trditvi 6) ogliščno tranzitivnost \mathcal{P} zagotavljajo že rotacije. Torej so v $T_R(\mathcal{P})$ le orbite praporov $1, 2, \dots, 8$.

$po_R = 4$: Ogliščna rotacija za kot $2\pi/2$ implicira $T_R(i) = T_R(i + 4) \pmod{2n}$. Rotacijske orbite a, b, c, d , pripadajo praporom $8 \sim 4, 1 \sim 5, 2 \sim 6, 3 \sim 7$.

POVEZAVE v $T_R(\mathcal{P})$: $a^1 = b, b^2 = c, c^1 = d, d^2 = a$ in $a^0 = b, c^0 = d$, ker v $T_R(\mathcal{P})$ nikoli ni polpovezav in ker 0-sosedna prapora vselej pripadata istemu licu.

PREHOD OD $T_R(\mathcal{P})$ K $T(\mathcal{P})$: Zrcaljenje $Ref1(v, p)$ zlije T_R -orbiti a in b v eno T -orbito $T(1)$, zrcaljenje $Ref1(v, q)$ pa zlije c in d v $T(2)$, in $1^0 = 1^1 = 1^2 \approx 2$.

ALTERNATIVEN KOMBINATORIČNI RAZMISLEK: Ker obstajajo naravne rotacijske simetrije v vsakem licu, je $eo_R = 1$, od koder sledi, da je $po_R \leq 4$, saj vsak prapor leži vzdolž neke povezave e (tu smo upoštevali $vo_R = 1$, kar po Trditvi 6 sledi iz obstoja ogliščne zrcalne simetrije)! Zaradi ogliščnega zrcaljenja $Ref1(v, p)$ je $po_R = 2 \cdot po = 4$, in ker je $2 \leq po$, pride v poštev samo $po = 2$ in $po_R = 2 \cdot po = 4$, torej je $po(p) = po(q) = 1$.

Zaradi rotacijskih simetrij za kot $2\pi/(n/2)$ v vsakem oglišču so vsa lica p v isti rotacijski orbiti (in posledično vsebujejo le prapore 1 in 2), vsa lica q pa v drugi rotacijski

orbiti (in posledično vsebujejo le prapore 3 in 4). Obstoj naravnih rotacijskih simetrij v vseh licih p in q je vsaj v primeru, ko sta obe lici p in q lihi, zagotovljen avtomatično! Denimo namreč, da je p liho lice. Ker že vemo, da sta v njem le prapora 1 in 2, morata ta dva prapora alternirati. Analogno sklepamo v primeru lihih lic q . To pomeni, da lahko za vse poliedre razreda III, pri katerih sta obe lici p in q lihi (in takih poliedrov je šest) določimo njihov rotacijski simetrijski graf $T_R(\mathcal{P})$ že iz dejstva, da imajo vsi ti poliedri rotacijsko simetrijo za kot $2\pi/(n/2)$ v vsakem oglišču!

Razred III (PRISEKANI REGULARNI POLIEDRI) sestoji iz $N = 10$ poliedrov z ogliščnim tipom $(p.q.q)$:

U02 W6 Prisekani tetraeder (3.6.6)

U08 W7 Prisekani oktaeder (4.6.6)

U09 W8 Prisekana kocka (3.8.8)

U25 W9 Prisekani ikozaeder (5.6.6)

U26 W10 Prisekani dodekaeder (3.10.10)

U19 W92 Ozvezdeni prisekani heksaeder (3.8/3.8/3)

U37 W75 Veliki prisekani dodekaeder (5/2.10.10)

U55 W95 Veliki prisekani ikozaeder (5/2.6.6)

U58 W97 Mali ozvezdeni prisekani dodekaeder (5.10/3.10/3)

U66 W104 Veliki ozvezdeni prisekani dodekaeder (3.10/3.10/3).

ROTACIJSKE SIMETRIJE: Vsi ti poliedri imajo naravne rotacije v licih p in v skupnih stranicah po dveh sosednih lic q , nimajo pa ogliščne rotacijske simetrije.

ZRCALNE SIMETRIJE: Imajo tudi ogliščne zrcalne simetrije $RefI(v, p)$ v licih p in zrcalne simetrije $RefI(e, f)$ prek simetrane vsake stranice e vsakega lica f .

OSNOVNI 2-1 CIKEL: Okrog poljubno izbranega oglišča u je šest praporov: $1^2 = 2, 2^1 = 3, 3^2 = 4, 4^1 = 5, 5^2 = 6, 6^1 = 1$ (prapora 6 in 1 ležita v licu p).

POLOŽAJNI VEKTORJI: $v(6) = v(1) = (p, q)$, $v(2) = v(5) = (q, p)$, $v(3) = v(4) = (q, q)$, zato obstajajo najmanj tri orbite praporov: $po \geq 3$ in $po_R \geq 3$.

VOZLIŠČA $T_R(P)$: Ker obstaja ogliščno zrcaljenje, je (po Trditvi 6) $vo_R = 1$, in ker ni ogliščne rotacije, vozlišča $T_R(P)$ ustrezajo orbitam praporov $1, 2, \dots, 6$.

2-1 CIKEL v $T_R(P)$: Torej obstaja 2-1 cikel šestih T_R -orbit: $1^2 \sim 2, 2^1 \sim 3, 3^2 \sim 4, 4^1 \sim 5, 5^2 \sim 6, 6^1 \sim 1$.

0-POVEZAVE v $T_R(\mathcal{P})$: Ker v $T_R(\mathcal{P})$ nikoli ni polpovezav in ker imata 0-sosedna prapora isti položajni vektor, mora biti $1^0 \sim 6, 2^0 \sim 3$ in $4^0 \sim 5$.

T -ORBITE: Ker zrcalna simetrija $RefI(v, p)$ identificira pare praporov: $1 \approx 6, 2 \approx 5$ in $3 \approx 4$, obstajajo tri T -orbite praporov.

POVEZAVE v $T(\mathcal{P})$: Iz $T(1) = T_R(1) \cup T_R(6)$, $T(2) = T_R(2) \cup T_R(5)$ in $T(3) = T_R(3) \cup T_R(4)$ sledi $1^0 \approx 1, 2^0 \approx 2, 3^0 \approx 3, 1^1 \approx 1, 1^2 \approx 2, 2^1 \approx 3, 3^2 \approx 3$.

ALTERNATIVEN RAZMISLEK: $T_R(P)$ lahko določimo že samo z upoštevanjem rotacij, in sicer takole: Zaradi naravne rotacije okoli središča skupne stranice dveh sosednih lic q je $vo_R = 1$ in $po_R \leq 6$. Potem sklepamo dalje kot prej.

Razred IV (VERZI KVAZI-REGULARNI POLIEDRI) sestoji iz $N = 14$ poliedrov; dvanajst od njih (podrazred IV.a) ima ogliščni tip $(p.q.r.q)$:

U13 W69 Mali kubikuboktaeder (3/2.8.4.8)

U14 W77 Veliki kubikuboktaeder (3.8/3.4.8/3)

U27 W14 Rombikozidodekaeder (3.4.5.4)

U31 W71 Mali ikozikozidodekaeder (5/2.6.3.6)

U33 W72 Mali dodekikozidodekaeder (5.10.3/2.10)

U38 W76 Rombidodekadodekaeder (5/2.4.5.4)

U42 W81 Veliki ditrigonalni dodekikozidodekaeder (5.10/3.3.10/3)

U43 W82 Mali ditrigonalni dodekikozidodekaeder (5/3.10.3.10)

U44 W83 Ikozidodekadodekaeder (5.6.5/3.6)

U48 W88 Veliki ikozikozidodekaeder (5.6.3/2.6)

U61 W99 Veliki dodekikozidodekaeder (3.10/3.5/2.10/3)

U67 W105 Veliki rombikozidodekaeder (3.4.5/3.4)

in dva od njih (podrazred IV.b) imata ogliščni tip $(p.q.q.q)$:

U10 W13 Rombikuboktaeder (3.4.4.4)

U17 W85 Veliki rombikuboktaeder (3/2.4.4.4).

LIHA IN ENKRATNA LICA: Vsi ti poliedri imajo enkratno liho lice p . Vseh dvanajst poliedrov iz razreda IV.a ima še eno (ne nujno liho) enkratno lice r .

OGLIŠČNE SIMETRIJE: Vsi ti poliedri imajo zrcalne simetrije $Refl(v,p)$ v vseh ogliščih vseh lic p . Ogliščnih rotacijskih simetrij pa nimajo.

OSNOVNI 2-1 CIKEL: Okrog poljubno izbranega oglišča u so prapori: $1^2 = 2, 2^1 = 3, 3^2 = 4, 4^1 = 5, 5^2 = 6, 6^1 = 7, 7^2 = 8, 8^1 = 1$ (prapora 8 in 1 sta v licu p).

VOZLIŠČA $T_R(P)$: Ker obstaja ogliščno zrcaljenje, je $vo_R = 1$, in ker ni ogliščne rotacije, vozlišča $T_R(P)$ ustrezajo orbitam praporov $1, 2, \dots, 8$.

2-1 CIKEL v $T_R(P)$: Orbite praporov $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ tvorijo edini 1-2 cikel v $T_R(P)$: $1^2 \sim 2, 2^1 \sim 3, 3^2 \sim 4, 4^1 \sim 5, 5^2 \sim 6, 6^1 \sim 7, 7^2 \sim 8, 8^1 \sim 1$.

PRAPORA V LICIH $f_1 = p$ IN f_3 : Enkratno lice p vsebuje le prapora 8 in 1, in ker lice f_3 ni sosedno p (tako kot sta to f_2 in f_3), lahko vsebuje le prapora 4 in 5.

0-POVEZAVE v $T_R(P)$: Ker v $T_R(P)$ ni polpovezav, je $1^0 \sim 8$ in $4^0 \sim 5$, in posledično $2^0 \sim (1^2)^0 \sim (1^0)^2 \sim 8^2 \sim 7$ in $3^0 \sim (4^2)^0 \sim (4^0)^2 \sim 5^2 \sim 6$.

$T(P)$: Zrcalna simetrija $Refl(v,p)$ zlije po dve T_R -orbiti v eno T -orbito: $1 \approx 8, 2 \approx 7, 3 \approx 6, 4 \approx 5$. Torej je $1^0 \approx 1, 2^0 \approx 2, 3^0 \approx 3, 4^0 \approx 4, 1^2 \approx 1$ in $4^1 \approx 4$.

Razred V (SEMI KVAZI-REGULARNI POLIEDRI) sestoji iz $N = 7$ poliedrov z ogliščnim tipom $(p.q.p^*.q^*)$:

U18 W86 Mali rombiheksaeder (8.4.8/7.4/3)

U21 W103 Veliki rombiheksaeder (8/3.4.8/5.4/3)

U39 W74 Mali rombiododekaeder (10.4.10/9.4/3)

U50 W90 Mali dodekikozaeder (10.6.10/9.6/5)

U56 W96 Rombikozaeder (6.4.6/5.4/3)

U63 W101 Veliki dodekikozaeder (10/3.6.10/7.6/5)

U73 W109 Veliki rombiododekaeder (10/3.4.10/7.4/3)

SODOST VSEH LIC: Pregled seznama poliedrov tega razreda pokaže, da so vsa njihova lica soda in imajo 4, 6, 8 ali 10 oglišč.

OSNOVNI 1-2 CIKEL: Okrog poljubno izbranega oglišča u poliedra \mathcal{P} obstaja osnovni 1-2 cikel praporov 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

OGLIŠČNE ROTACIJSKE SIMETRIJE: Ogliščnih rotacijskih simetrij ni (o čemer se prepričamo npr. s pomočjo programa Great Stella), torej je $po_R \geq 8$.

OGLIŠČNE ZRCALNE SIMETRIJE: Obstaja ogliščno zrcaljenje Z , ki pa ne ohranja nobenega lica okrog u (lice $p = f_1$ preslika v $p^* = f_3$, lice $q = f_2$ pa v $q^* = f_4$).

$vo_R = 1$: Zaradi obstoja ogliščnih zrcaljenj vsi ti poliedri (po Trditvi 6) ostajajo ogliščno tranzitivni tudi če prepovemo zrcaljenja. Torej je $po_R \leq 8$.

SODOST 0-1 CIKLOV v $T_R(P)$: Ker so vsi 0-1 cikli v grafu praporov sodi, jih morebitne rotacije lic $i \rightarrow i + 2k \pmod{2m}$ reducirajo v sode 0-1 cikle v $T_R(P)$.

DOLŽINA 0-1 CIKLOV v $T_R(P)$: Ker $p \neq q$, so v vsakem licu f največ štiri rotacijske orbite praporov, torej je: $po_R(f) = 2$ ali $po_R(f) = 4$.

ROTACIJSKE SIMETRIJE $Ref(f, 2\pi/f)$: Torej v vseh licih f obstajajo rotacijske simetrije za kot $2\pi/(f/2)$.

T -ORBITE PRAPOROV SO ŠTIRI: Zrcaljenje Z identificira prapora $1 \approx 5$ in posledično, po pravilu domin, še naslednje pare:

$$2 = 1^2 \approx 5^2 = 6,$$

$$3 = 2^1 \approx 6^1 = 7,$$

$$4 = 3^2 \approx 7^2 = 8;$$

druga možnost $1 \approx 8$ preslikave praporov iz p bi namreč implicirala

$$2 = 1^2 \approx 8^2 = 7,$$

$$3 = 2^1 \approx 7^1 = 6,$$

$$4 = 3^2 \approx 6^2 = 5,$$

torej bi se lice $f_3 = p^*$ (ki vsebuje prapora 4 in 5) prezrcalilo vase, kar se pa ne.

PARADOKS: Ta zrcalna simetrija na 1-2 ciklu 8 praporov okrog oglišča u deluje kot rotacijska simetrija tega cikla: $Z(i) = i + 4(\text{mod } 8)$!

1-2 DEL GRAFA $T(\mathcal{P})$: To je 1-2 cikel, ki natančno ustreza ciklu štirih praporov v grafu praporov $F_{\mathcal{P}}$: $1^1 \approx 2$, $2^2 \approx 3$, $3^1 \approx 4$, $4^1 \approx 1$.

ZRCALNE SIMETRIJE $Ref1(e, f)$: Vsi ti poliedri imajo tudi zrcalne simetrije $Ref1(e, f)$ prek simetrane vsakega roba e vsakega lica f .

VSE 0-POVEZAVE V $T(\mathcal{P})$ SO POLPOVEZAVE: Te zrcalne simetrije implicirajo $T(X) = T(X^0)$ za vsak prapor X .

ŠTEVILO T -ORBIT ROBOV IN LIC: Ker ima simetrijski graf $T(\mathcal{P})$ dve 2-0 komponenti in dve 0-1 komponenti, je $eo = 2$ in $fo = 2$.

1-2 DEL GRAFA $T_R(\mathcal{P})$: To je 1-2 cikel, ki natančno ustreza ciklu osmih praporov v grafu praporov $G_{\mathcal{P}}$: $(2i - 1)^1 \sim 2i$, $(2i)^2 \sim (2i + 1)(\text{mod } 8)$ za vse $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

0-POVEZAVE V $T_R(\mathcal{P})$: 0-povezave v $T_R(\mathcal{P})$ povezujejo T_R -orbite tistih parov praporov, ki jih ogliščno zrcaljenje Z zlije v eno: $1^0 \sim 5$, $2^0 \sim 6$, $3^0 \sim 7$, $4^0 \sim 8$.

SIMETRIJSKI GRAF $T_R(\mathcal{P})$: Sestoji iz cikla 1-2 osmih praporov z 0-povezavami $i^0 = i + 4(\text{mod } 8)$.

ŠTEVILO ROTACIJSKIH ORBIT ROBOV IN LIC: Ker ima $T_R(\mathcal{P})$ dve 2-0 komponenti in dve 0-1 komponenti, je $eo_R = 2$ in $fo_R = 2$.

Razred VI (PRISEKANI KVAZI-REGULARNI POLIEDRI) sestoji iz $N = 7$ poliedrov z ogliščnim tipom $(p.q.r)$:

U11 W15 Prisekani kuboktaeder (4.6.8)

U16 W79 Kubiprisekani kuboktaeder (8/3.6.8)

U20 W93 Veliki prisekani kuboktaeder (8/3.6.4)

U28 W16 Prisekani ikozidodekaeder (4.6.10)

U45 W84 Ikoziprisekani dodekadodekaeder (10/3.6.10)

U59 W98 Prisekani dodekadodekaeder (10/3.4.10)

U68 W108 Veliki prisekani ikozidodekaeder (10/3.4.6)

SODOST VSEH LIC: Pregled seznama poliedrov tega razreda pokaže, da so vsa njihova lica soda, in imajo 4, 6, 8 ali 10 stranic.

OSNOVNI 1-2 CIKEL: Okrog poljubno izbranega oglišča u poliedra je $n = 3$ lic in zato 1-2 cikel iz praporov 1, 2 (iz p), 3, 4 (iz q) in 5, 6 (iz r).

OGLIŠČNE SIMETRIJE: Ker obstajajo tri enkratna lica p , q , r okrog vsakega oglišča, ti poliedri nimajo nobene ogliščne simetrije (ne rotacijske, ne zrcalne).

POLOŽAJNI VEKTORJI: Obstaja šest različnih položajnih vektorjev praporov: $v(1) = (p, r)$, $v(2) = (p, q)$, $v(3) = (q, p)$, $v(4) = (q, r)$, $v(5) = (r, q)$, $v(6) = (r, p)$.

T -ORBIT PRAPOROV: Torej obstaja šest T -orbit praporov, ki tvorijo 1-2 cikel v $T(\mathcal{P})$: $1^1 \approx 2$, $2^2 \approx 3$, $3^1 \approx 4$, $4^2 \approx 5$, $5^1 \approx 6$, $6^2 \approx 1$.

0-POVEZAVE v $T(\mathcal{P})$: Ker imajo 0-sosedni prapori enak položajni vektor, prapori 1, 2, 3, 4, 5, 6 pa imajo različne položajne vektorje, je $X^0 \approx X$ za vsak prapor X . torej imamo polpovezave tipa 0 v vsakem od vozlišč $T(\mathcal{P})$.

ZRCALJENJA PREK SIMETRAL: Polpovezave tipa 0 v vsakem od vozlišč $T(\mathcal{P})$ implicirajo zrcaljenja $RefI(e, f)$ prek simetrale vsake stranice e vsakega lica f .

ROTACIJE v LICIH: V vsakem licu f ima 0-1 cikel periodo iz štirih praporov: X, X, X^1, X^1 , torej obstaja rotacija za kot $2\pi/(f/2)$ v vsakem licu.

$vo_R \geq 2$: Če prepovemo zrcaljenja, ti poliedri niso več ogliščno tranzitivni, saj le zrcaljenje prek simetrale stranice $e = uv$ preslika oglišče u v sosedno oglišče v .

$vo_R \leq 2$: Rotacijske simetrije za kot $2\pi/(f/2)$ v vsakem licu nam zagotavljajo, da obstajata največ dve rotacijski orbiti oglišč.

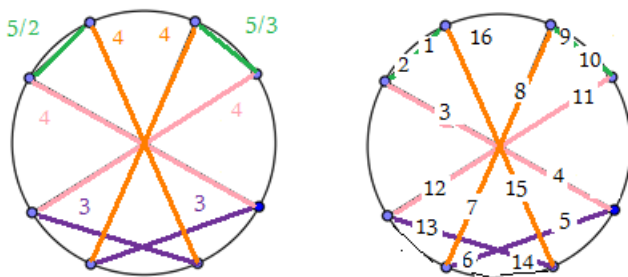
ORIENTACIJA CIKLOV: Ker le zrcaljenje identificira sosedni oglišči u in v , sta orientaciji 1-2 ciklov praporov 1, 2, 3, 4, 5, 6 in 7, 8, 9, 10, 11, 12 okrog u in v nasprotni.

0-POVEZAVE v $T_R(P)$: Ker imajo 0-sosedni prapori enake položajne vektorje, mora biti $X^0 = X + 6 \pmod{12}$.

Razred VII (U75) sestoji iz samo enega uniformnega poliedra z ogliščnim tipom $(p.q.r.q.p^*.q.r^*.q)$:

U75 W119 Veliki dirombikozidodekaeder $(5/2.4.3.4.5/3.4.3/2.4)/2$.

OSNOVNI 1-2 CIKEL: Okrog poljubno izbranega oglišča u poliedra je $n = 8$ lic in zato 1-2 cikel iz šestnajstih praporov 16, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.



Slika 17: Lica in prapori U75 okrog poljubnega oglišča.

OGLIŠČNE ROTACIJSKE SIMETRIJE: Ogliščnih rotacijskih simetrij ni (o čemer se prepričamo npr. s pomočjo računalniškega programa Great Stella).

OGLIŠČNE ZRCALNE SIMETRIJE: Obstaja pa ogliščno zrcaljenje Z , ki identificira pentagamski lici $f_1 = 5/3$ in $f_5 = 5/2$ ter trikotni lici f_3 in f_5 .

IDENTIFIKACIJA KVADRATNIH LIC: Ker vsako zrcaljenje ohranja sosednost lic, mora biti $Z(f_2) = f_6$ in $Z(f_4) = f_8$, torej je $Z(f_i) = f_{i+4} \pmod{8}$.

IDENTIFIKACIJA PRAPOROV: Zrcaljenje Z identificira prapora 1 in 9 in posledično, po pravilu domin, še naslednje pare:

$$2 = 1^2 \approx 9^2 = 10,$$

$$3 = 2^1 \approx 10^1 = 11,$$

$$4 = 3^2 \approx 11^2 = 12,$$

$$5 = 4^1 \approx 12^2 = 13,$$

$$6 = 5^2 \approx 13^2 = 14,$$

$$7 = 6^1 \approx 14^2 = 15,$$

$$8 = 7^2 \approx 15^2 = 16,$$

torej $Z(i) = i + 8 \pmod{16}$; druga možnost preslikave zvezdnih praporov $1 \approx 8$ bi namreč po principu domin implicirala

$$2 = 1^2 \approx 8^2 = 7,$$

$$3 = 2^1 \approx 7^1 = 6,$$

$$4 = 3^2 \approx 6^2 = 5,$$

torej bi se trikotno lice f_3 (ki vsebuje prapora 5 in 6) prezrcalilo vase, kar se pa ne.

PARADOKS: Ta zrcalna simetrija na 1-2 ciklu 16 praporov okrog oglišča u deluje kot rotacijska simetrija tega cikla!

ŠTEVILO T -ORBIT LIC IN PRAPOROV: Torej obstajajo štiri T -orbite lic in osem orbit praporov.

PRAPORI V LIHIH LICIH: V pentagramskih licih sta le prapora $1 \approx 9$ in $2 \approx 10$, v trikotniških licih pa le prapora $5 \approx 13$ in $6 \approx 14$.

ALTERNIRANJE PRAPOROV V LIHIH LICIH: Posledično, v lihih licih po dva prapora alternirata vzdolž zaporednih robov lica: $1^0 = 8, 8^1 = 1$ in $4^0 = 5, 5^1 = 4$.

NARAVNE ROTACIJSKE SIMETRIJE V LIHIH LICIH: Torej ima U75 v vsaki pentagramskih zvezdi in v vsakem trikotnem licu naravno rotacijo za kot $2\pi/f$.

PREOSTALE 0-POVEZAVE V $T(\mathcal{P})$: Iz $1^0 \approx 8$ sledi $2^0 = (1^2)^0 = (1^0)^2 \approx (8^2) = 7$, iz $3 = (4^2)^0 = (4^0)^2 \approx 5^2 = 6$. Torej je simetrijski graf $T(\mathcal{P})$ znan.

ŠTEVILO T -ORBIT ROBOV: Ker ima simetrijski graf $T(\mathcal{P})$ dve 0-2 komponenti, je $e_0 = 2$.

$vo_R = 1$: Ker imamo naravne rotacijske simetrije v vseh lihih licih, je vozliščna tranzitivnost poliedra U75 zagotovljena že z rotacijami.

ŠTEVILO ROTACIJSKIH ORBIT PRAPOROV: Torej je $po_R \leq 16$. Ker pa obstaja zrcaljenje Z , je $po_R = 2 \cdot po = 16$.

1-2 CIKEL PRAPOROV v $T_R(\mathcal{P})$: Ti prapori tvorijo 1-2 cikel 16, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

ROTACIJSKE ORBITE LIHIH LIC: Ni rotacije, ki bi zvezdo $f_1 = 5/3$ prevedla v zvezdo $f_5 = 5/2$, in ni rotacije, ki bi trikotno lice f_3 prevedla v trikotno lice f_7 .

ROTACIJSKE ORBITE PRAPOROV V LIHIH LICIH: Torej v f_1 alternirata prapora 16 in 1, v f_3 prapora 4 in 5, v f_5 prapora 9 in 10, v f_7 pa prapora 13 in 14.

0-POVEZAVE v $T_R(\mathcal{P})$: Torej je $1^0 = 16, 5^0 = 4, 9^0 = 8, 13^0 = 12$. Od tod, zaradi relacije $(X^0)^2 = (X^2)^0$, sledi še: $2^0 = 15, 6^0 = 3, 10^0 = 7, 14^0 = 11$.

ŠTEVILO ROTACIJSKIH ORBIT ROBOV IN LIC: Ker ima simetrijski graf $T(\mathcal{P})$ dve 0-2 komponenti in pet 0-1 komponent, je $eo = 2$ in $fo_R = 5$.

PRAPORI SODIH LIC: Vsa kvadratna lica vsebujejo 1-0 cikel iz osmih praporov: $2^1 = 3, 3^0 = 6, 6^1 = 7, 7^0 = 10, 10^1 = 11, 11^0 = 14, 14^1 = 15, 15^0 = 2$.

Razred VIII (SNUB KVAZI-REGULARNI POLIEDRI Z $n = 5$ LICMI) sestoji iz $N = 7$ poliedrov;

petorica (podrazred VIII.a) ima ogliščni tip $(p.q.q.q.q)$ ali $p.q.q.q.q/2$:

U12 W17 Snub kocka (4.3.3.3.3)

U29 W18 Snub dodekaeder (5.3.3.3.3)

U57 W113 Veliki snub ikozidodekaeder (5/2.3.3.3.3)

U69 W116 Veliki invertirani snub ikozidodekaeder (5/3.3.3.3.3)

U74 W117 Veliki invertirani retrosnub ikozidodekaeder (5/2.3.3.3.3)/2

in dva od njih (podrazred VIII.b) imata ogliščni tip $(p.q.r.q.q)$:

U40 W111 Snub dodekadodekaeder (5/2.3.5.3.3)

U60 W114 Invertirani snub dodekadodekaeder (5.3.5/3.3.3)

ZRCALNE SIMETRIJE: Ti poliedri nimajo nobenih ogliščnih (niti kakšnih drugih) zrcalnih simetrij, zato je zanje $T_R(\mathcal{P}) = T(\mathcal{P})$.

OSNOVNI 1-2 CIKEL: Torej ima $T_R(\mathcal{P}) = T(\mathcal{P})$ 1-2 cikel iz deset vozlišč, ki pripadajo praporom 1, 2 (iz p), 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

ALTERNIRANJE PRAPOROV v p : Edina dva prapora 1 in 2 v enkratnem licu p morata biti 0-sosedna drug drugemu: $1^0 \approx 2$, kajti v $T_R(\mathcal{P})$ ni nobenih polpovezav.

UPORABA KOMUTIRANJA INVOLUCIJ $s_2s_0 = s_0s_2$: Posledično je $3^0 = (2^2)^0 = (2^0)^2 \approx 1^2 = 10$.

DOLŽINE PREOSTALIH 0-1 CIKLOV: Prapori 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 so porazdeljeni med 0-1 cikle na enega od načinov: $2 + 2 + 2 + 2, 2 + 2 + 4, 4 + 4, 2 + 6, 8$.

LIHOST NE-ENKRATNIH LIC: Vsa od $p = f_1$ različna lica f_2, f_3, f_4, f_5 sedmih poliedrov razreda VIII imajo tri ali pet oglišč in torej šest ali deset praporov.

DOLŽINE 0-1 CIKLOV V LIH LICIH: Trikotna lica imajo 0-1 cikle orbit praporov dolžine 2 ali 6, petkotna lica pa 0-1 cikle orbit praporov dolžine 2 ali 10.

NAJDALJŠI 0-1 CIKEL: Torej mora 0-1 cikel, ki vsebuje orbite praporov 4, $4^1 = 3, 3^0 = 10$ in 9, vsebovati šest orbit praporov, ki pripadajo nekemu trikotnemu licu.

PREOSTALI 0-1 CIKEL IMA DOLŽINO 2: Preostali dve orbiti praporov $X^0 = Y, Y^1 = X$ oblikujeta 0-1 cikel dolžine 2.

DVE REŠITVI: To se lahko zgodi le v dveh primerih: bodisi je $5^0 \approx 6, 4^0 \approx 7$ in $8^0 \approx 9$, ali pa $7^0 \approx 8, 6^0 \approx 9$ in $4^0 \approx 5$. Dobljena simetrijska grafa sta izomorfna.

RAZLAGA PARADOKSA DVEH REŠITEV: Vsak od snub poliedrov ima dve enantiomorfni različici (zrcalni sliki druga druge), a njuna simetrijska grafa sta izomorfna.

DOBLJENI SIMETRIJSKI GRAF POTRJUJE NEOBTOJ ZRCALNIH SIMETRIJ: Če bi obstajalo kakršnokoli zrcaljenje poliedrov razreda VIII, bi morale identificirati prapora 1 in 2 edinega lica p . Toda tedaj bi moral rotacijski simetrijski graf $T_R(P)$ biti prav tak, kot smo ga določili ob predpostavki, da zrcaljenj ni, vidimo pa, da ta graf ne dopušča takega zrcaljenja!

ALTERNATIVEN RAZMISLEK Z GEOMETRIJSKO METODO: Ker imajo vsi ti poliedri najmanj eno enkratno lice p in rotacijsko simetrijo okrog njegovega središča za kot $2\pi/p$, morajo imeti isto orientacijo 1-2 ciklov praporov 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 okrog vsakega vozlišča, zato lahko določimo 0-povezave v njihovih simetrijskih grafih tako, da označimo 1-2 cikle desetih praporov okrog vsakega vozlišča v poliedrski mreži, pri čemer začnemo pri enkratnem licu p . Vemo že, da ima vsak od teh dveh poliedrov dve enantiomorfni obliki, ki sta zrcalni sliki druga druge, in isto velja tudi za njuni poliedrski mreži. Toda simetrijski grafi obeh enantiomorfni oblik sta izomorfni.

Razred IX (SNUB KVAZI-REGULARNI POLIEDRI Z $n = 6$ LICMI IN ZRCALNIMI SIMETRIJAMI) sestoji iz $N = 2$ poliedrov z ogliščnim tipom $(p.q.q.q.q.q)$ ali $(p.q.q.q.q.q)/2$:

U32 W110 Mali snub ikozikozidodekaeder $(5/2.3.3.3.3.3)$

U72 W118 Mali invertirani retrosnub ikozikozidodekaeder $(5/2.3.3.3.3.3)/2$.

OSNOVNI 1-2 CIKEL: Okrog poljubno izbranega oblišča u obstaja 1-2 cikel iz praporov 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

OGLIŠČNA ZRCALNA SIMETRIJA V LICMIH p : Oba poliedra imata ogliščno zrcalno simetrijo $Ref(v, p)$.

$vo_R = 1$: Zato ostajata vozliščno tranzitivna tudi če prepovemo zrcaljenja. Poiščimo najprej $T_R(\mathcal{P})$.

PRAPORA ENKRATNEGA LICA: Prapora 1 in 2 v enkratnem licu p morata biti 0-sosedna drug drugemu: $1^0 \approx 2$, torej je $3^0 = 3^{202} \approx 12$.

VSA NE-ENKRATNA LICA SO TRIKOTNIŠKA: Vsa od $p = f_1$ različna lica f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 lica teh dveh poliedrov so trikotniška, zato vsebujejo po šest praporov.

DOLŽINE 0-1 CIKLOV IZ TRIKOTNIŠKIH LIC: Trikotniškim licem pripadajo v rotacijskem grafu $T_R(P)$ 0-1 cikli dolžine 2 ali 6.

DOLŽINA NAJDALJŠEGA 0-1 CIKLA: Torej mora 0-1 cikla, ki vsebuje orbite $4, 4^1 = 3, 3^2 = 12$ in 11 , vsebovati 6 rotacijskih orbit praporov.

PREOSTALI 0-1 CIKLI V $T_R(P)$: Preostale štiri orbite se razdelijo na dva 0-1 cikla s po dvema orbitama v vsakem od njiju.

PREOSTALE 0-POVEZAVE V $T_R(P)$: To se lahko zgodi le v enem primeru: $4^0 \approx 7, 5^0 \approx 6, 8^0 \approx 11, 9^0 \approx 10$. Torej je $T_R(\mathcal{P})$ znan.

PREHOD OD $T_R(P)$ K $T(P)$: Iz $T_R(\mathcal{P})$ zlahka dobimo $T(\mathcal{P})$, kajti zrcalna simetrija $Ref(v, p)$ implicira: $1^0 \approx 2, 3^0 \approx 12, 4^0 \approx 11, 5^0 \approx 10, 6^0 \approx 9, 7^0 \approx 8$.

Razred X (SNUB KVAZI-REGULARNI POLIEDRI Z $n = 6$ LICMI BREZ ZRCALNIH SIMETRIJ) vsebuje $N = 2$ poliedra z ogliščnim tipom $(p.q.r.q.q.q)$ ali $(p.q.p^*.q.q.q)$:

U46 W112 Snub ikozidodekadodekaeder (5.3.5/3.3.3.3)

U64 W115 Veliki snub dodekikozidodekaeder (5/3.3.5/2.3.3.3)

OSNOVNI 1-2 CIKEL: Okrog poljubno izbranega oglišča u obstaja 1-2 cikla s prapori 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

NEOBSTOJ ZRCALNIH SIMETRIJ: Ta dva poliedra nimata nobenih zrcalnih simetrij (o čemer se prepričamo npr. s programom Great Stella).

$vo_R = 1$: Torej je $T(\mathcal{P}) = T_R(\mathcal{P})$ in obstaja natanko 12 orbit praporov.

LIHOST LIC: Vsak od teh dveh poliedrov ima dve lici $p = f_1$ in f_3 s petimi vozlišči in štiri trikotna lica q .

DVE ORBITI PRAPOROV V PETKOTNIH LICMIH: V vsakem od petkotnih lic $p = f_1$ in f_3 obstajata natanko po dve orbiti praporov (ki alternirata).

0-POVEZAVE V $T_R(P)$, DOBLJENE IZ PETKOTNIH LIC: $1^0 \approx 2$ v licu p implicira $3 \approx 12$; podobno $5^0 \approx 6$ v licu f_3 implicira $4^0 \approx 7$.

PREOSTALI 0-1 CIKLI IZ TRIKOTNIŠKIH LIC: Preostala trikotniška lica q lahko vsebujejo le prapore dveh ali šestih različnih orbit.

PREOSTALE 0-POVEZAVE: Torej mora biti 1-2 pot, ki gre skozi vozlišča 11,12,3,4,7,8, del 1-2 cikla dolžine 6, torej je $8^0 \approx 11$ in $9^0 \approx 10$.

S tem je končan dokaz Izreka 9. \square

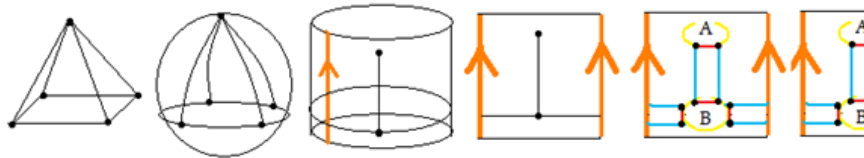
2.8 Simetrijski grafi konveksnih teles

Simetrijskih grafov 92 Johnsonovih teles (ki imajo po definiciji vsaj dve orbiti oglišč, nekatera od njih pa jih imajo več kot sto!) ne moremo določiti s sklepanjem na podlagi njihovih ogliščnih vzorcev, kot smo to lahko pri uniformnih poliedrih. V želji, da vendarle najdem kakšno boljšo (lažjo in hitrejšo) metodo od risanja poliedrskih mrež za vsako telo posebej, sem sčasoma ugotovil, kako lahko izkoristim njihovo drugo temeljno lastnost: konveksnost!

2.8.1 Metoda določanja simetrijskih grafov konveksnih teles

Namesto da bi najprej baricentrično razdelili lica na prapore, nato pa iskali orbite praporov glede na grupo vseh simetrij konveksnega poliedra (zrcalnih in rotacijskih), raje (s pomočjo 3D-modelov teles in programa Great Stella) poiščemo rotacijske orbite oglišč in povezav in narišemo ustrezen *graf rotacijskih orbit*; pri tem moramo paziti, da v vsakem vozlišču tega grafa (ki ustreza rotacijski orbiti oglišč poliedra) ohranimo pravo ciklično zaporedje posameznih povezav (ki ustrezajo rotacijskim orbitam povezav poliedra). Na ta način smo dejansko našli tudi rotacijske orbite lic (kar je dokazano v Dodatku) – torej smo konstruirali *zemljevid rotacijskih orbit* (oglišč, povezav in lic) prvotnega poliedra. Zdaj samo še poiščemo graf praporov tega zemljevida orbit, in našli smo rotacijski simetrijski graf $T_R(\mathcal{P})$! Če telo nima zrcalnih simetrij, je to tudi zrcalno-simetrijski graf $T(\mathcal{P})$, v nasprotnem primeru pa samo še identificiramo pare rotacijskih orbit praporov in dobimo $T(\mathcal{P})$.

Pri določitvi simetrijskih grafov rotacijskih orbit ter zemljevidov rotacijskih orbit konveksnih teles njihov plašč najprej projiciramo na sfero, sfero pa na valj; tega nato prerežemo po poldnevniku in razgrnemo v pravokotnik. Del tega pravokotnika je fundamentalna domena, na katero je narisana simetrijski zemljevid.



Slika 18: Projekcija Johnsonovega telesa J1 na sfero in valj.

Primer. Kvadratna piramida J1 na sliki 18 ima dve rotacijski orbiti oglišč A in B , okrog njiju pa $2 + 6 = 8$ rotacijskih orbit praporov ter $1 + 3 = 4$ zrcalno-rotacijske orbite praporov.

Gornji postopek pa lahko še poenostavimo!

Ko enkrat razumemo, da je res najbolj smiselno poiskati zemljevid rotacijskih orbit $O_R(\mathcal{P})$ in iz njega izpeljati najprej $T_R(\mathcal{P})$, nato pa še $T(\mathcal{P})$, se vprašamo: *Kako bi najlažje določili $O_R(\mathcal{P})$?* In potem se spomnimo, da si pri tem (po zgledu Coxeter-Moserjeve rekonstrukcije poljubne orientabilne ploskve iz njene fundamentalne domene, pripadajoče simetrijski grupi ploskve) lahko pomagamo z grupo rotacijskih simetrij $S_R(\mathcal{P})$ poliedra, s pomočjo katere lahko določimo rotacijsko fundamentalno domeno poliedra; zemljevid rotacijskih orbit $O_R(\mathcal{P})$ namreč ni nič drugega kot na prapore razdeljena rotacijska fundamentalna domena $FD_R(\mathcal{P})$! Ker že vemo, da imajo rotacijske fundamentalne domene končnih grup izometrijev evklidskega prostora E^3 na sferi obliko sferičnih dvokotnikov, trikotnikov ali štirikotnikov, nam ni težko določiti tistega dela poliedrovega plašča, ki ustreza njegovi rotacijski fundamentalni domeni.

2.9 Simetrijski grafi in struktura Johnsonovih teles

IZHODIŠČNA REFERENCA: Pri določitvi simetrijskih grafov 92 Johnsonovih teles so mi bile v pomoč predvsem naslednje JOHNSON-ove ugotovitve [24], str. 182 in 173-174, ki so me učvrstile v prepričanju, da se naloge lotevam na ustrezen način:

Izrek 10 (SIMETRIJE IN STRUKTURA JOHNSONOVIIH TELES:)

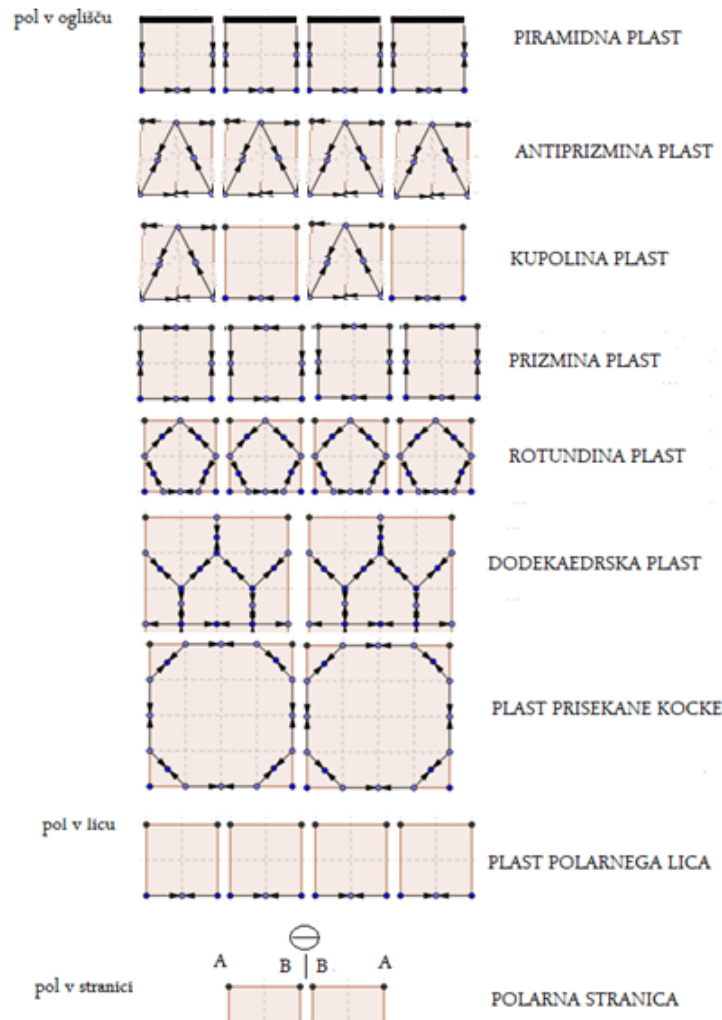
i) Grupa rotacijskih simetrij vsakega neuniformnega poliedra z regularnimi lici je bodisi trivialna grupa bodisi ena od cikličnih grup $[n]^+$ bodisi ena od diedrskih grup $[2, n]^+$, kjer je $n \in \{2, 3, 4, 5\}$.

ii) Vsa Johnsonova telesa imajo vsaj eno zrcalno ali rotacijsko simetrijo.

iii) Natanko 83 od 92 Johnsonovih teles lahko sestavimo iz delov (npr. piramid, kupol, rotund) tistih uniformnih poliedrov, ki jih lahko s primerno ravnino razrežemo na dva konveksna poliedra z regularnimi lici, ter iz prizem in antiprizem.

Točka i) pove, da so fundamentalne domene Johnsonovih teles še posebej preproste (saj Johnsonova telesa nimajo tetraedrske, oktaedrske ali ikozaedrske grupe simetrij). Točka ii) pove, da je simetrijski graf $T(\mathcal{P})$ vsakega Johnsonovega telesa res manjši od ustreznega grafa praporov. Točka iii) pove, da je večina Johnsonovih teles razdeljena na »vodoravne plasti«, pri čemer vsaka plast leži med dvema vzporednima ravninama. JOHNSON-ova *strukturna notacija* teh teles spominja na formule kemijskih molekul (njihovi »atomarni gradniki« so piramide, kupole, rotunde, prizme in antiprizme), a z majhno razliko: oznake za te »atome« lahko v ustrezni strukturni formuli nastopajo enkrat, dvakrat, trikrat (npr. MILLER-jevo telo – podaljšana kvadratna girobikupola J37 – ima formulo $gQ_4^2P_8$), pa tudi minus enkrat, minus dvakrat, minus trikrat, če so ustrezni atomarni gradniki z nekimi ravninami odrezani od kakšnega večjega telesa!

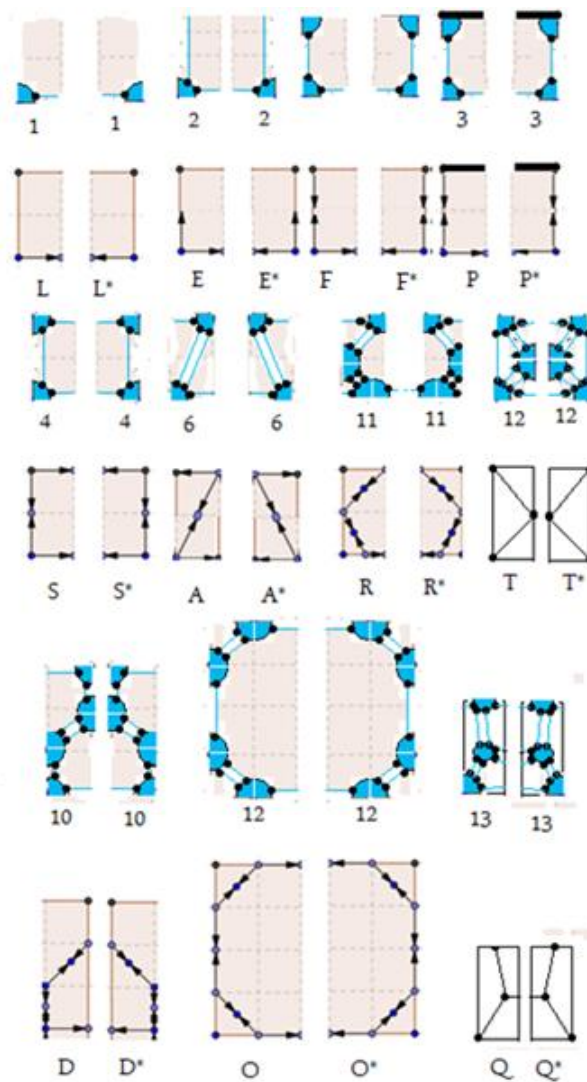
Strukturo Johnsonovih teles pa lahko opišemo še natančneje, če upoštevamo, da so posamezne plasti (slika 19) zaradi rotacijskih simetrij (os glavne rotacije vselej poteka skozi severni in južni pol sfere) razdeljene na manjše enake dele – *module*. Tako sem lahko izdelal »strukturne matrice« Johnsonovih teles, iz katerih se lepo vidi, da so ne le telesa sama, ampak tudi plašči večine teh teles zgrajeni iz nekaj osnovnih gradnikov – modulov (slika 19). Za označitev modulov in števila praporov v njih sem uporabil posebne črkovne in številske oznake (slika 20). Zdaj lahko število orbit praporov (oz. vozlišč v $T(\mathcal{P})$) dobimo kot vsoto praporov ustreznih modulov fundamentalne domene!



Slika 19: Nekatere tipične plasti Johnsonovih teles.

Trditev 12 (ŠTETJE ORBIT Z MODULI:) Če znamo plašč poliedra \mathcal{P} razstaviti na module, potem samo seštejemo številke m_1, m_2, \dots, m_k vseh modulov (ki so enake številu njihovih praporov) znotraj fundamentalne domene $FD(\mathcal{P})$, in že poznamo število vozlišč simetrijskega grafa poliedra (enako je vsoti $m_1 + m_2 + \dots + m_k$).

To je lahko včasih, če je stranic poliedra veliko, še preprosteje kot uporaba znane formule ([2]) za število orbit $po = 4e/s$ (glej razdelek 2.12).



Slika 20: Črkovne oznake modulov.

2.10 Primer strukturne analize Johnsonovega telesa

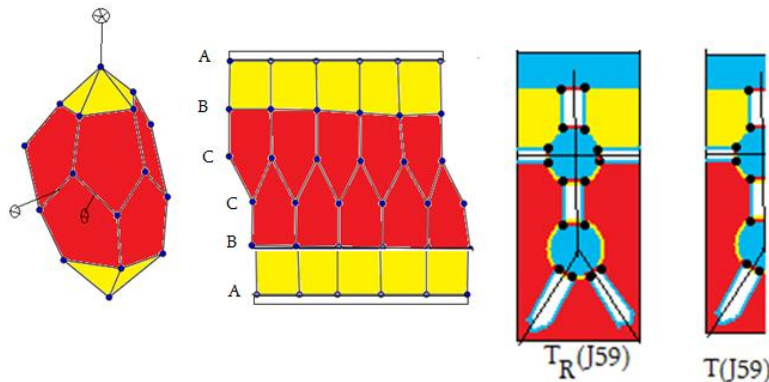
Oglejmo si primer strukturne analize parabiavgmentiranega dodekaedra J59 (na analogen način sem analiziral vsa Johnsonova telesa, dobljeni parametri so zbrani v tabeli 8 v razdelku 2.13). *Burnsidova lema*, na katero se sklicujem, je predstavljena v Dodatku, tako kot tudi pojem *Eulerjevega števila rotacijskih orbit* E_{OR} , ki sem ga vpeljal kot enega od parametrov pri analizi poliedrov.

Parabiavgmentirani dodekaeder J59

POVZETEK STRUKTURNE ANALIZE V ENI VRSTICI: Ker je strukturna formula lic J59 = $5_{10}3_{10}$, in ker ima $s = 20$ simetrij, ima njegov zemljevid orbit strukturno formulo lic

$$O(J59) = \frac{5_{10}3_{10}}{20} = 5_{1/2}3_{1/2}.$$

Slika 21 prikazuje Johnsonovo telo J59, projekcijo njegovega plašča na valj, graf rotacijskih orbit $T_R(J59)$ in simetrijski graf $T(J59)$. Iz nje razberemo število rotacijskih orbit $po_R = 2 + 8 + 6 = 16$ in število zrcalno-rotacijskih orbit $po = 1 + 4 + 3 = 8$.



Slika 21: Johnsonovo telo J59, njegov plašč na valju, ter graf rotacijskih orbit $T_R(J59)$ in simetrijski graf $T(J59)$, vrisana v ustrezna zemljevida orbit.

Na dolgo in široko pa lahko to utemeljimo takole:

DRUŽINA IN OPIS STRUKTURE: J59 je dodekaeder z dvema dodanima piramidama nad dvema nasprotnima licema. Strukturno njegovih lic povzema formula $5_{10}3_{10}$.

ROTACIJSKE SIMETRIJE: Pola rotacije $R_1(2\pi/5)$ sta vrhova dodanih piramid. Poli petih rotacij $R_2(2\pi/2)$ so središča skupnih robov po dveh petkotnikov.

$E_{OR} = 0$: Ker je $E_p = 2$ in ker je $E_{p'} = -2$, je po Burnsidovi lemi in Trditvi 38 $E_{OR} = \frac{1}{2n}(E + (n-1)E_p + n \cdot E_{p'}) = \frac{1}{10}(2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-2)) = \frac{0}{10} = 0$.

$vo_R = 3$: Ker je $v = 22, v_p = 2, v_{p'} = 0$, je $vo_R = \frac{1}{2n}(v + (n-1)v_p + n \cdot v_{p'}) = \frac{1}{10}(22 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 0) = \frac{30}{10} = 3$ (to so rotacijske orbite oglišč A, B in C na sliki 21).

$eo_R = 5$: Ker je $e = 40, e_p = 0, e_{p'} = 2$, je $eo_R = \frac{1}{2n}(e + (n-1)v_p + n \cdot e_{p'}) = \frac{1}{10}(40 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 2) = \frac{50}{10} = 5$.

$fo_R = 2$: Ker je $f = 20, f_p = 0, f_{p'} = 0$, je $fo_R = \frac{1}{2n}(f + (n-1)f_p + n \cdot f_{p'}) = \frac{1}{10}(20 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0) = \frac{20}{10} = 2$. To sta orbiti lic trikotnikov 3 in petkotnikov 5.

$O_R(\mathcal{P})$ KOT DEL $F(\mathcal{P})$: $O_R(\mathcal{P})$ lahko narišemo na sferični šestkotnik v velikosti desetine sfere, ki obsega eno trikotno in eno sosedno petkotno lice.

IZRAČUN po_R IZ LIC PREDSTAVNIKOV ROTACIJSKIH ORBIT: Torej $O_R(\mathcal{P})$ vsebuje $2(3+5) = 16$ praporov.

VALENCE OGLIŠČ V $O_R(\mathcal{P})$: V zemljevidu rotacijskih orbit \mathcal{P}_0 je: $val_R(A) = 1, val_R(B) = val_R(C) = 3$.

IZRAČUN po_R IZ VALENC ROTACIJSKIH ORBIT OGLIŠČ: Torej je $po_R = 2(1+4+3) = 16$, kot že vemo.

ZRCALNE SIMETRIJE: Obstaja pet navpičnih zrcalnih ravnin, vsaki dve sosedni se sekata pod kotom $2\pi/10$.

$vo = vo_R, eo = eo_R - 1, fo = fo_R$: Zrcaljenja identificirajo rotacijski orbiti povezav $(CC)_1$ in $(CC)_2$.

$po = 8$: Ker ima telo zrcalne simetrije, je število vozlišč $T(\mathcal{P})$ enako $po = \frac{po_R}{2} = \frac{16}{2} = 8$.

MOČ ORBIT: Ker je $po_R = 16, vo_R = 3, eo_R = 5, fo_R = 2$, je $po = 8, vo = 3, eo = 4, fo = 2, Eo = vo - eo + fo = 1$.

FUNDAMENTALNA DOMENA IN ZEMLJEVID ORBIT: Zemljevid orbit $O(\mathcal{P})$ vsebuje prapore sferičnega štirikotnika, ki obsega polovici lic 3 in 5.

STRUKTURNA MATRIKA GRAFA PRAPOROV: Strukturna matrika $M(\mathcal{P})$ parabiavgmentiranega dodekaedra sestoji iz 3×5 modulov 1×1 .

i/j	1	2	3	4	5
1	P^*P	P^*P	P^*P	P^*P	P^*P
2	DD^*	DD^*	DD^*	DD^*	DD^*
3	P_*P_*	P_*P_*	P_*P_*	P_*P_*	P_*P_*

SIMETRIJSKA GRUPA $G(\mathcal{P})$: To je polna antiprizemska grupa $[2^+, 2 \cdot 5]$, generirana z dvema zrcaljenjema in eno rotacijo: $z_1^2 = z_2^2 = (z_1 z_2)^5 = E$. Število vseh simetrij je $s(\mathcal{P}) = \frac{p}{po} = \frac{4 \cdot 40}{8} = 20$.

Klasifikacija Johnsonovih teles (in tudi drugih poliedrov razreda \mathbb{P}) glede na število vozlišč v njihovih simetrijskih grafih $T(\mathcal{P})$ je (poleg vrednosti številnih drugih parametrov) dana v razdelku 2.13 (tabele 8, 9 in 10).

2.11 Karakterizacija poliedrov z minimalnim številom parametrov

Tu je opisana metoda, s katero je (v razdelkih 2.12, 2.13, 2.14 oziroma v KOVIČ [31]) rešen problem karakterizacije konveksnih poliedrov z regularnimi poligonalnimi lici s čim manjšim številom parametrov (eden od njih je število vozlišč v simetrijskem grafu $T(\mathcal{P})$ poliedra \mathcal{P}). Vsakemu od poliedrov razreda $C = \mathbb{K} \cap \mathbb{P}$ bomo priredili neki vektor, katerega komponente so številske vrednosti primerno izbrane množice parametrov. Ti vektorji morajo biti različni za vsakega od poliedrov našega razreda. Za takšno množico parametrov bomo rekli, da karakterizira (ali separira) dane poliedre.

2.11.1 Problem karakterizacije

Za kakršenkoli razred objektov lahko formuliramo naslednji problem: »Poišči čim manjšo množico parametrov (ki opisujejo neke lastnosti elementov danega razreda), za katero velja, da je zaporedje številskih vrednosti teh parametrov (p_1, p_2, \dots, p_k) drugačno za vsak element danega razreda.«

Če najdemo takšne parametre, potem zaporedja (p_1, p_2, \dots, p_k) enolično določajo oziroma »kodirajo« elemente danega razreda. To pa še ne pomeni, da lahko te elemente rekonstruiramo iz njihovih kod, pomeni samo, da jih lahko s pomočjo teh kod razlikujemo. Z drugimi besedami, ni potrebno, da je naša »generična«, biti pa mora »separirajoča«. Problem, ki ga raziskujemo v zvezi s poliedri: »Poišči minimalno množico parametrov, ki karakterizirajo konveksne poliedre z regularnimi poligonskimi lici.« sodi v to kategorijo problemov. Naša »metoda ovrednotenja različnih množic parametrov glede na njihovo sposobnost razlikovanja elementov danega razreda«, uporabljena za rešitev tega posebnega problema, je uporabna tudi za druge karakterizacijske probleme. Po drugi strani pa naš karakterizacijski problem sodi v veliko družino problemov z isto splošno temo: *kako dobro različne množice parametrov določajo konveksne poliedre*⁵. Metoda, ki jo bomo uporabili za karakterizacijo poliedrov našega razreda C , je univerzalno uporabna za karakterizacijo kakršnegakoli razreda objektov, zato jo bomo tu opisali v vsej njeni splošnosti.

Definicija 24 (KARAKTERIZIRAJOČI PARAMETRI:) *Za dano množico parametrov p_1, p_2, \dots, p_n , prirejenih danemu razredu objektov, bomo rekli da karakterizira elemente tega razreda, če vsakemu objektu x tega razreda pripadajo drugačne številske vrednosti teh parametrov oziroma drug vektor $p(x) := (p_1, p_2, \dots, p_n)$.*

⁵Različne vrste takšnih problemov je predstavil ALEXANDROV v svoji knjigi o konveksnih poliedrih ([1]). Tam sta, na primer, obravnavani vprašanji enoličnosti in eksistence konveksnih poliedrov s predpisanim razvitjem v plašč, ali s predpisanimi orientacijami lic. Neki drug podoben, čeprav drugačen problem kombinatorične ekvivalence poliedrov, ki ostaja nerešen od Eulerjevih časov, obravnava GRÜNBAUM v [15], str. 294.

Da bi poiskali čim manjšo množico parametrov, ki karakterizira dani razred objektov, najprej poiščemo primerno množico parametrov, ki karakterizira te objekte. Podatke o številskih vrednostih različnih parametrov vnašamo v tabelo. Če dani nabor parametrov še ne zadošča za karakterizacijo, dodajamo nove in nove parametre, dokler je to potrebno. Nato pa začnemo z obratnim postopkom – izpuščamo odvečne parametre in jih poizkušamo izpustiti čim več. Če je bilo začetnih parametrov n , je vseh njihovih možnih podmnožic 2^n , zato je zelo težko presoditi, ali smo na koncu dejansko dobili *minimalno* množico parametrov. Prav tako je mogoče, da bi z vpeljavo kakšnega drugega parametra, ki ga v naši tabeli sploh nismo upoštevali, lahko dobili še manjšo množico parametrov, ki bi karakterizirali elemente danega razreda. Vendar, če dobimo razmeroma majhno množico parametrov (npr. z do 4 parametri), smo v praksi lahko zadovoljni – za enoličen opis elementov danega razreda lahko potlej uporabimo ustrezní vektor številskih vrednosti teh parametrov. To je veliko boljše, kot uporabljati različna imena za elemente danega razreda (npr. poliedre), saj vektor parametrov dejansko vsebuje neko bistveno informacijo o elementih danega razreda oziroma dovolj informacije, da lahko ta objekt razlikujemo od vseh drugih elementov danega razreda.

Da bi torej karakterizirali konveksne poliedre z regularnimi poligonalnimi lici z minimalnim številom parametrov, najprej (poleg že znanih, kot so npr. število oglišč, robov in lic) vpeljemo še nekaj novih parametrov, nato analiziramo tabelo njihovih vrednosti, da vidimo, kako dobro različne podmnožice dane množice parametrov razlikujejo dane poliedre, in končno poiščemo karakterizacijo poliedrov razreda C s čim manj parametri. V razdelku 2.13 so podane vrednosti različnih parametrov poliedrov iz razreda C , v razdelku 2.14 pa iz njih izpeljana klasifikacija ter karakterizacija poliedrov razreda C s štirimi parametri⁶. Če izključimo antiprizme, pa lahko poliedre preostalega razreda (sestoječega iz Johnsonovih teles, arhimedskih teles, platonskih teles in prizem) karakteriziramo že s tremi parametri.

2.12 Pregled parametrov

V tabelah 8,9,10 (v razdelku 2.13) so zbrane vrednosti 16 parametrov konveksnih poliedrov z regularnimi poligonalnimi lici, za katere sem domneval, da mi lahko pomagajo rešiti problem karakterizacije teh poliedrov z minimalnim številom parametrov. Vnaprej nisem mogel vedeti, kateri od njih bodo koristni in kateri odveč; to se je izkristaliziralo šele po dolgotrajni analizi zbranih podatkov. Preglejmo zdaj po vrsti uporabljene parametre.

⁶Če je klasifikacija namenjena temu, da opozori na podobnosti med objekti danega razreda (s tem ko podobne uvrsti v isti ekvivalenčni razred), pa karakterizacija omogoča razlikovati med njimi. Oba postopka sta torej komplementarna in pomagata pri razumevanju podobnosti in razlik med elementi danega razreda.

(PARAMETRI v, e, f): Za vsako od teles $\mathcal{P} \in C$ najprej navajam števila njegovih oglišč, povezav in lic (te podatke se da najti tudi v programu Great Stella), označena po vrsti takole: v, e, f . Ti trije parametri, ki nastopajo v Eulerjevi formuli $v - e + f = 2$ ([33]), očitno ne zadoščajo za razlikovanje teles iz razreda C (saj so, na primer, pri telesih J72, J73, J74 in J75 njihove vrednosti enake: $v = 60, e = 120$ in $f = 62$).

(PARAMETRA po, s): Potem navajamo število orbit praporov po , in število simetrij s poliedra \mathcal{P} . Ker so vzdolž vsakega roba poliedra po štirje prapori, je skupno število praporov v grafu praporov enako $4e$; in ker je število praporov v vsaki orbiti enako, dobimo število simetrij poliedra po formuli (BALABAN, PISANSKI [2]):

$$s(\mathcal{P}) = 4e/po.$$

(PARAMETRI vo, eo, fo, Eo): Sledijo števila vo, eo, fo orbit oglišč, robov in lic, ter »Eulerjevo število zrcalno-rotacijskih orbit«, ki sem ga definiral s formulo:

$$Eo = vo - eo + fo.$$

V tabelah ne navajam Eulerjevega števila rotacijskih orbit, definiranega s pomočjo rotacijskih orbit oglišč, robov in lic s formulo $Eo_R = vo_R - eo_R + fo_R$. Iz tabel 8, 9, 10 zlahka vidimo, da za vsak $P \in C$ velja nepričakovana neenakost:

$$0 \leq Eo \leq 5.$$

Torej se Eo razlikuje od E za največ 3 za vsak $P \in C$:

$$|Eo - E| \leq 3.$$

Iz tabel 8, 9, 10 sledi tudi, da je najpogostejša vrednost parametra Eo za telesa iz razreda C enaka 2, in da je tudi povprečna vrednost Eo blizu 2.

(PARAMETRA N, n): Naslednja dva parametra sta N , ki označuje število maksimalnih lic (takih z največjim številom stranic v danem poliedru), in pa n , ki označuje tip (torej število stranic 3, 4, 5, 6, 8, ali 10) maksimalnega lica v danem telesu.

(PARAMETRI vo^p, eo^p, fo^p): Potem navajam števila »polarnih orbit« oglišč, povezav in lic (to je orbit, katerih oglišča, robovi ali lica so invariantni za neko netrivialno rotacijo za kot $2\pi/a$, kjer je $a \geq 2$). Te parametre označujem vo^p, eo^p, fo^p .

Trditev 13 (Eo KONVEKSNEGA POLIEDRA S CIKLIČNO GRUPO SIMETRIJ): Če ima konveksen polieder \mathcal{P} samo eno rotacijsko os in nobenih zrcalnih simetrij, potem je njegovo Eulerjevo število orbit izračunljivo iz števila stranic, ki jih seka ta rotacijska os, takole: $Eo = 2 - eo^p$. Torej:

$Eo = 0$, če je vektor (vo^p, eo^p, fo^p) enak $(2, 0, 0)$ ali $(1, 0, 1)$ ali $(0, 0, 2)$;

$Eo = 1$, če je vektor (vo^p, eo^p, fo^p) enak $(1, 1, 0)$ ali $(0, 1, 1)$;

$Eo = 2$, če je (vo^p, eo^p, fo^p) enak $(0, 2, 0)$.

Dokaz. Za poljuben sferičen polieder je njegova Eulerjeva karakteristika $E = v - e + f = 2$. Če je \mathcal{P} sferičen polieder in ima eno samo rotacijsko os ter nima nobenih zrcalnih simetrij, potem ima natančno dve polarni orbiti. Ker je grupa simetrij takega poliedra $I(\mathcal{P}) = \mathbb{Z}_m$, vse druge orbite (oglišč, robov in lic) vsebujejo natanko m elementov. Naj vo_m, eo_m, fo_m označujejo števila orbit vozlišč, povezav in lic z m elementi. Potem je $Eo = (vo^p - eo^p + fo^p) + (vo_m - eo_m + fo_m)$. In iz Eulerjeve formule sledi relacija: $2 = E = (vo^p - eo^p + fo^p) \cdot 1 + (vo_m - eo_m + fo_m) \cdot m$, iz nje pa: $vo_m - eo_m + fo_m = (2 - (vo^p - eo^p + fo^p))/m$. Torej je: $Eo = (vo^p - eo^p + fo^p) + (2 - (vo^p - eo^p + fo^p))/m$. Edine možne vrednosti $vo^p - eo^p + fo^p$ so 2, 0 in -2. Če je $vo^p - eo^p + fo^p = 2$, potem je $Eo = vo^p - eo^p + fo^p = 2$. Če je $vo^p - eo^p + fo^p = 0$, potem je $m = 2$ in $Eo = 0 + 2/2 = 1$. Če je $vo^p - eo^p + fo^p = -2$, potem je $m = 2$ in $Eo = -2 + 4/2 = 0$. \square

(PARAMETRA r, q .) Zadnja dva parametra, označena s črkama r in q , sem vpeljal potem, ko sem ugotovil, da celo vseh 14 prejšnjih skupaj ne zadošča za razlikovanje teles iz razreda C . Odkril sem ju z opazovanjem takšnih parov teles (npr. J76 in J77) in razmišljanjem, na kakšen način bi lahko opisal njihovo strukturno različnost.

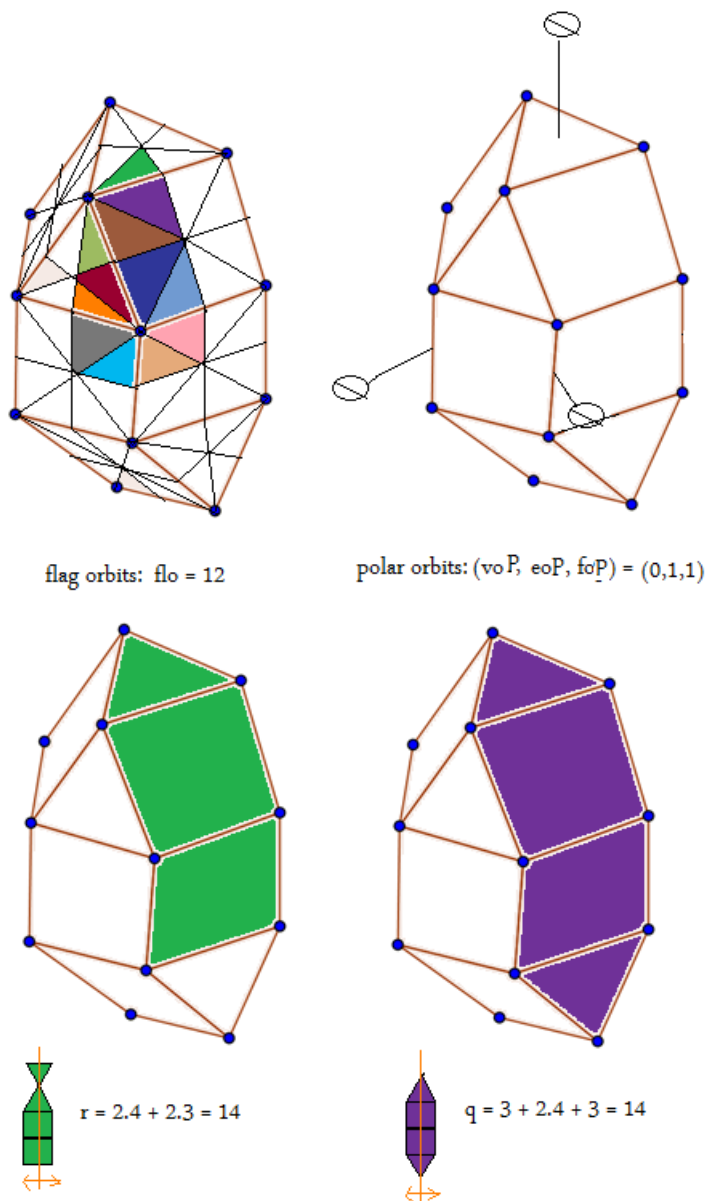
Parameter r je definiran kot maksimalna vsota $f_1 + \dots + f_k$ vseh lic v zaporedjih (f_1, \dots, f_k) z naslednjimi lastnostmi:

- i) lica f_1, \dots, f_k sekajo isto zrcalno ravnino danega telesa;
- ii) poljubni dve zaporedni lici f_i, f_{i+1} si delita bodisi rob bodisi oglišče poliedra;
- iii) imajo obliko (a^p) or $(a^p.b^q)$ (sestojijo iz $p \geq 2$ enakih lic tipa a , lahko pa imajo tudi $q \geq 2$ lic tipa b). Če ne obstaja nobeno tako zaporedje lic v danem poliedru, potem naj bo vrednost tega parametra $r = 0$.

Parameter q je definiran kot maksimalna vsota $f_1 + \dots + f_k$ vseh lic v zaporedjih (f_1, \dots, f_k) z naslednjimi lastnostmi:

- i) lica f_1, \dots, f_k sekajo isto zrcalno ravnino danega telesa;
- ii*) poljubni dve sosedni lici f_i, f_{i+1} si delita povezavo;
- iii*) vsaj dve zaporedni lici v tem zaporedju sta enaki. Če ni nobenega takega zaporedja lic, naj bo $q = 0$.

Primer. Slika 22 prikazuje, kako določimo nekaj bolj zapletenih parametrov (za Johnsonovo telo J36). To telo ima 12 orbit praporov, 2 orbiti oglišč, 5 orbit robov in 4 orbite lic, nima nobenih polarnih orbit oglišč, 1 polarno orbito povezav in 1 polarno orbito lic. Vrednosti parametrov r in q za to telo sta obe 14, vendar nista izračunani na enak način: r je dobljen iz zaporedja 4-4-3-3 dveh kvadratov, ki jima sledita dva trikotnika, medtem ko je q dobljen iz zaporedja 3-4-4-3). Paziti moramo, da zaporedja lic res sekajo isto zrcalno ravnino. Zato zaporedja 6 kvadratov vzdolž »ekvatorja« telesa nismo mogli uporabiti za izračun parametrov r in q .



Slika 22: Nekaj parametrov Johnsonovega telesa J36.

2.13 Vrednosti parametrov

Zdaj pa si oglejmo tabele 8, 9, 10 z vrednostmi teh 16 parametrov za vsa telesa iz razreda C , najprej za 92 Johnsonovih teles, nato za 5 platonskih in 13 arhimedskih teles, in nazadnje še za dve neskončni družini n -kotniških prizem in n -kotnih antiprizem.

Jxx	v, e, f	po	s	v_o, e_o, f_o	E_o	N, n	v_o^p, e_o^p, f_o^p	r	q
J1	5, 8, 5	4	8	2, 2, 2	2	1, 4	1, 0, 1	0	0
J2	6, 10, 6	4	10	2, 2, 2	2	1, 5	1, 0, 1	0	0
J3	9, 15, 8	10	6	2, 4, 4	2	1, 6	0, 0, 2	6	0
J4	12, 20, 10	10	8	2, 4, 4	2	1, 8	0, 0, 2	12	20
J5	15, 25, 12	10	10	2, 4, 4	2	1, 10	0, 0, 2	0	0
J6	20, 35, 17	14	10	3, 5, 5	3	1, 10	0, 0, 2	16	0
J7	7, 12, 7	8	6	3, 4, 3	2	3, 4	1, 0, 1	0	0
J8	9, 16, 9	8	8	3, 4, 3	2	5, 4	1, 0, 1	12	18
J9	11, 20, 11	8	10	3, 4, 3	2	1, 5	1, 0, 1	0	0
J10	9, 20, 13	10	8	3, 4, 4	3	1, 4	1, 0, 1	12	6
J11	11, 25, 16	10	10	3, 4, 4	3	1, 5	1, 0, 1	6	6
J12	5, 9, 6	3	12	2, 2, 1	1	6, 3	2, 1, 0	6	6
J13	7, 15, 10	3	20	2, 2, 1	1	10, 3	2, 1, 0	6	6
J14	8, 15, 9	5	12	2, 3, 2	1	3, 4	1, 1, 1	12	12
J15	10, 20, 12	5	16	2, 3, 2	1	4, 4	1, 1, 1	16	16
J16	12, 25, 15	5	20	2, 3, 2	1	5, 4	1, 1, 1	20	20
J17	10, 24, 16	6	16	2, 3, 2	1	16, 3	1, 1, 0	12	6
J18	15, 27, 14	18	6	3, 7, 6	2	1, 6	0, 0, 2	8	16
J19	18, 36, 20	18	8	3, 7, 6	2	1, 8	0, 0, 2	20	28
J20	25, 45, 22	18	10	3, 7, 6	2	1, 10	0, 0, 2	8	21
J21	30, 55, 27	22	10	4, 8, 7	3	1, 10	0, 0, 2	16	0
J22	15, 33, 20	22	6	4, 7, 7	4	1, 6	0, 0, 2	9	6
J23	20, 44, 26	22	8	4, 7, 7	4	1, 10	0, 0, 2	12	18
J24	25, 55, 32	22	10	4, 7, 7	4	1, 10	0, 0, 2	6	6
J25	30, 65, 37	26	10	5, 8, 8	5	1, 10	0, 0, 2	9	6
J26	8, 14, 8	7	8	2, 3, 2	1	4, 4	1, 1, 0	8	14
J27	12, 24, 14	8	12	2, 4, 3	1	6, 4	0, 2, 1	20	14
J28	16, 32, 18	8	16	2, 4, 3	1	10, 4	0, 2, 1	24	24
J29	16, 32, 18	8	16	2, 4, 3	1	10, 4	1, 0, 1	12	18
J30	20, 40, 22	8	20	2, 4, 3	1	2, 5	0, 2, 1	8	18

Jxx	v, e, f	po	s	v_o, e_o, f_o	E_o	N, n	v_o^p, e_o^p, f_o^p	r	q
J31	20, 40, 22	8	20	2, 3, 3	2	2, 5	1, 0, 1	0	0
J32	25, 50, 27	20	10	4, 7, 7	4	7, 5	0, 0, 2	16	0
J33	25, 50, 27	20	10	4, 7, 7	4	7, 5	0, 0, 2	19	6
J34	30, 60, 32	12	20	3, 5, 4	2	12, 5	0, 2, 1	32	10
J35	18, 36, 20	12	12	2, 5, 5	2	12, 4	0, 0, 3	24	24
J36	18, 36, 20	12	12	2, 5, 4	1	12, 4	0, 1, 1	14	14
J37	24, 48, 26	12	16	2, 5, 4	1	18, 4	0, 1, 1	20	26
J38	30, 60, 32	12	20	2, 5, 5	2	2, 5	0, 0, 3	40	40
J39	30, 60, 32	12	20	2, 5, 4	1	2, 5	0, 1, 1	8	16
J40	35, 70, 37	28	10	5, 10, 9	4	7, 5	0, 0, 2	8	16
J41	35, 70, 37	28	10	5, 10, 9	4	7, 5	0, 0, 2	18	18
J42	40, 80, 42	16	20	3, 6, 6	3	10, 5	0, 0, 3	40	40
J43	40, 80, 42	16	20	3, 6, 5	2	12, 5	0, 1, 1	20	0
J44	18, 42, 26	28	6	3, 8, 5	0	6, 4	0, 2, 1	0	0
J45	24, 56, 34	28	6	3, 8, 5	0	10, 4	0, 2, 1	0	0
J46	30, 70, 42	28	10	3, 8, 5	0	2, 5	0, 2, 1	0	0
J47	35, 80, 47	64	5	7, 16, 11	2	7, 5	0, 0, 2	0	0
J48	40, 90, 52	36	10	4, 10, 6	0	12, 5	0, 2, 1	0	0
J49	7, 13, 8	13	4	3, 5, 4	2	2, 4	1, 1, 0	14	14
J50	8, 17, 11	17	4	3, 6, 5	2	1, 4	0, 1, 1	12	6
J51	9, 21, 14	7	12	2, 3, 3	2	14, 3	1, 1, 1	12	6
J52	11, 19, 10	19	4	4, 6, 5	3	2, 5	1, 1, 0	22	22
J53	12, 23, 13	23	4	4, 8, 6	2	2, 5	0, 1, 1	14	14
J54	13, 22, 11	22	4	4, 8, 6	2	2, 6	1, 0, 1	26	26
J55	14, 26, 14	13	8	3, 5, 4	2	2, 6	1, 1, 1	14	14
J56	14, 26, 14	26	4	4, 9, 7	2	2, 6	0, 0, 2	18	18
J57	15, 30, 17	10	12	2, 4, 4	2	2, 6	1, 0, 2	6	0
J58	21, 35, 16	14	10	5, 6, 4	3	11, 5	1, 0, 1	10	10
J59	22, 40, 20	8	20	3, 4, 2	1	10, 5	1, 1, 0	0	0
J60	22, 40, 20	40	4	8, 10, 7	5	10, 5	0, 2, 0	10	10
J61	23, 45, 24	30	6	7, 10, 6	3	9, 5	2, 0, 0	10	10
J62	10, 20, 12	20	4	4, 7, 5	2	2, 5	0, 2, 0	16	10
J63	9, 15, 8	10	6	3, 4, 4	3	3, 5	2, 0, 0	6	6
J64	10, 18, 10	12	6	4, 5, 4	3	3, 5	1, 0, 1	6	6
J65	15, 27, 14	18	6	4, 7, 6	3	3, 6	0, 0, 2	6	0
J66	28, 48, 22	24	8	5, 9, 7	3	5, 8	0, 0, 2	24	30
J67	32, 60, 30	15	16	3, 6, 5	2	4, 8	0, 1, 2	32	32
J68	65, 105, 24	42	10	9, 15, 10	4	11, 5	0, 0, 2	16	22

Jxx	v, e, f	po	s	v_o, e_o, f_o	E_o	N, n	v_o^p, e_o^p, f_o^p	r	q
J69	70, 120, 52	24	20	5, 9, 6	2	10, 10	0, 1, 1	0	0
J70	70, 120, 52	120	4	20, 35, 18	3	10, 10	0, 2, 0	16	22
J71	75, 135, 62	90	6	15, 27, 16	4	9, 10	0, 0, 2	16	22
J72	60, 120, 62	48	10	8, 16, 13	5	12, 5	0, 0, 2	8	16
J73	60, 120, 62	24	20	4, 8, 7	3	12, 5	0, 0, 2	8	16
J74	60, 120, 62	120	4	17, 34, 22	5	12, 5	0, 0, 2	12	22
J75	60, 120, 62	80	6	12, 24, 17	5	12, 5	0, 0, 2	8	16
J76	55, 105, 52	42	10	7, 14, 11	4	1, 10	0, 0, 2	0	0
J77	55, 105, 52	42	10	7, 14, 11	4	1, 10	0, 0, 2	8	16
J78	55, 105, 52	210	2	29, 56, 31	4	1, 10	0, 0, 0	8	23
J79	55, 105, 52	210	2	29, 56, 31	4	1, 10	0, 0, 0	0	0
J80	50, 90, 42	18	20	3, 6, 5	2	2, 10	0, 0, 2	0	0
J81	50, 90, 42	90	4	14, 26, 16	4	2, 10	0, 0, 2	0	0
J82	50, 90, 42	180	2	27, 49, 27	5	2, 10	0, 0, 0	8	16
J83	45, 75, 32	50	6	9, 16, 11	4	3, 10	0, 0, 2	0	0
J84	8, 18, 12	9	8	2, 4, 2	0	12, 3	0, 3, 0	6	6
J85	16, 40, 26	10	16	3, 4, 3	2	2, 4	0, 1, 1	0	0
J86	10, 22, 14	22	4	4, 8, 5	1	2, 4	0, 2, 0	8	14
J87	11, 26, 17	52	2	7, 15, 11	3	1, 4	0, 0, 0	12	6
J88	12, 28, 18	28	4	5, 10, 6	1	2, 4	0, 2, 0	8	14
J89	14, 33, 21	33	4	5, 11, 8	2	2, 4	0, 1, 1	12	18
J90	16, 38, 24	19	8	3, 7, 4	0	4, 4	0, 2, 0	8	14
J91	14, 26, 14	13	8	3, 5, 4	2	4, 5	1, 1, 1	20	10
J92	18, 36, 20	24	6	4, 8, 7	3	1, 6	0, 0, 2	6	0

Tabela 8: Parametri Johnsonovih teles.

To je bila tabela s parametri Johnsonovih teles. Parametri platonskih in arhimedskih teles ter prizem in antiprizem so podani v tabelah 9 in 10.

2.14 Analiza teles in parametrov

Informacija, zbrana v tabelah 8, 9 in 10, nam omogoča ne samo primerjati in klasificirati *teles* (glede na različne množice parametrov), ampak tudi primerjati različne *množice parametrov* (glede na njihovo zmožnost razlikovanja teh teles – da jih npr. razvrstijo v kar se da veliko število različnih ekvivalenčnih razredov)!

telo	v, e, f	po	s	v_o, e_o, f_o	E_o	N, n	v_o^p, e_o^p, f_o^p	r	q
3^3	4, 6, 4	1	24	1, 1, 1	1	4, 3	1, 1, 1	6	6
3^4	6, 12, 8	1	48	1, 1, 1	1	8, 3	1, 1, 1	12	6
4^3	8, 12, 6	1	48	1, 1, 1	1	6, 4	1, 1, 1	16	16
3^5	12, 30, 20	1	120	1, 1, 1	1	20, 3	1, 1, 1	6	6
5^3	20, 30, 12	1	120	1, 1, 1	1	12, 5	1, 1, 1	10	10
3.4.3.4	12, 24, 14	2	48	1, 1, 2	2	6, 4	1, 0, 2	16	0
3.5.3.5	30, 60, 32	2	120	1, 1, 2	2	12, 5	1, 0, 2	16	0
3.6^2	12, 18, 8	3	24	1, 2, 2	1	4, 6	0, 1, 2	12	18
3.8^2	24, 36, 14	3	48	1, 2, 2	1	6, 8	0, 1, 2	32	32
4.6^2	24, 36, 14	3	48	1, 2, 2	1	8, 6	0, 1, 2	12	20
3.10^2	60, 90, 32	3	120	1, 2, 2	1	12, 10	1, 0, 2	20	26
5.6^2	60, 90, 32	3	120	1, 2, 2	1	20, 6	1, 0, 2	12	22
3.4^3	24, 48, 26	4	48	1, 2, 3	2	18, 4	0, 0, 3	32	32
3.4.5.4	60, 120, 62	4	120	1, 2, 3	2	12, 5	0, 0, 3	0	0
4.6.8	120, 180, 62	6	48	1, 3, 3	1	6, 8	0, 0, 3	0	0
4.6.10	24, 60, 38	6	120	1, 3, 3	1	12, 10	0, 0, 3	0	0
$3^4.4$	16, 38, 24	10	24	1, 3, 3	1	6, 4	0, 1, 2	0	0
$3^4.5$	60, 150, 92	10	60	1, 3, 3	1	12, 5	0, 1, 2	0	0

Tabela 9: Parametri platonskih in arhimedskih teles.

Nazadnje, tabela 10 prikazuje vrednosti parametrov dveh neskončnih družin n -kotniških prizem $4^2.n$ in n -kotniških antiprizem $3^3.n$:

telo	v, e, f	po	s	v_o, e_o, f_o	E_o	N, n	v_o^p, e_o^p, f_o^p	r	q
$4^2.n$	$2n, 3n, n+2$	3	$4n$	1, 2, 2	1	$2, n$	1, 1, 1	n^2	n^2
$3^3.n$	$2n, 4n, 2n+2$	4	$4n$	1, 2, 1	1	$2, n$	0, 2, 1	0	0

Tabela 10: Parametri prizem in antiprizem.

Definicija 25 (DVA KOLIČNIKA ZA ANALIZO PARAMETROV:) Če množica parametrov $\{p_1, \dots, p_k\}$ razdeli razred m objektov v c ekvivalenčnih razredov (dva objekta sta v istem ekvivalenčnem razredu natanko takrat, ko imata iste vrednosti vseh parametrov) in če ta množica parametrov izolira i objektov (objekt je izoliran, če je sam v svojem ekvivalenčnem razredu), nam to daje dve razmerji: »razredni količnik« m/c (povprečno število objektov v ekvivalenčnih razredih), in $0 \leq i/m \leq 1$, imenovan »izolirajoči količnik« i dane množice parametrov (glede na dani razred objektov, ki smo ga klasificirali s temi parametri). Objekti so popolnoma separirani z neko množico parametrov $\{p_1, \dots, p_k\}$, če in samo če je njegov izolirajoči količnik enak 1.

Primer. Za množico parametrov $\{E_o, s\}$ in razred Johnsonovih teles je razredni količnik enak $m/c = 92/31$, izolirajoči količnik pa $i/m = 10/92$ (glej Tabela 11).

E_o / s	2	4	5	6	8	10	12	16	20	Σ
0				J44	J84	J46				6
0				J45	J90	J48				
1		J86			J26		J12	J15	J13	17
1		J88					J14	J17	J16	
1							J27	J28	J30	
1							J36	J29	J39	
1								J37	J59	
2		J49	J47	J3	J1	J2	J35	J67	J31	32
2		J50		J7	J4	J5	J51	J85	J34	
2		J53		J18	J8	J9	J57		J38	
2		J54			J19	J20			J43	
2		J56			J55				J69	
2		J62			J91				J80	
2		J89								
3	J87	J52		J61	J10	J6			J42	16
3		J70		J63	J66	J11			J73	
3				J64		J21				
3				J65		J58				
3				J92						
4	J78	J81		J22	J23	J24				15
4	J79			J71		J32				
4				J83		J33				
4						J40				
4						J41				
4						J68				
4						J76				
4						J77				
5	J82	J60		J75		J25				6
5		J74				J72				
Σ	4	14	1	12	12	20	7	7	13	92

Tabela 11: Klasifikacija Johnsonovih teles s parametroma s in E_o .

Iz gornje tabele lahko razberemo tudi, da je najbolj pogosta vrednost Eulerjevega števila orbit na razredu Johnsonovih teles enaka 2.

Odgovor na vprašanje, ali obstajata spodnja in zgornja meja vrednosti parametra Eo za poljubne poliedre, je dan v Dodatku.

Tabela 12 kaže število ekvivalenčnih razredov c in števila izoliranih teles i ki jih dobimo pri nekaterih od 2^{16} podmnožic naših 16 parametrov:

množica parametrov	c	i
$\{Eo\}$	6	0
$\{n\}$	6	0
$\{s\}$	9	1
$\{v_o^p, e_o^p, f_o^p\}$	9	1
$\{n\}$	14	3
$\{s, Eo\}$	31	10
$\{N, n\}$	34	3
$\{po\}$	36	16
$\{po, Eo\}$	53	33
$\{po, Eo, s\}$	72	60
$\{po, Eo, N, n\}$	86	80
$\{v, e, f, po, s, vo, eo, fo, Eo, N, n, v_o^p, e_o^p, f_o^p\}$	87	82

Tabela 12: Vrednosti c in i za različne množice parametrov.

2.14.1 Dva enostavna trika za iskanje ekvivalenčnih razredov: sumacija parametrov in leksikografsko sortiranje

Pri iskanju ekvivalenčnih razredov teles glede na dano množico parametrov $\{p_1, \dots, p_k\}$ si lahko pomagamo tako, da poiščemo vsoto vrednosti $p_1 + \dots + p_k$ teh parametrov. Če sta za dve telesi ti dve vsoti različni, potem morajo biti vrednosti nekaterih od teh parametrov za ti dve telesi različne, in telesi morata biti v različnih ekvivalenčnih razredih. Potem moramo preveriti samo še za telesa z isto vsoto $p_1 + \dots + p_k$, ali imajo kakšne parametre različne. To lahko storimo z leksikografskim sortiranjem vektorjev (p_1, \dots, p_k) .

2.14.2 Problem kodiranja teles

Nekateri poliedri (J28, J29), (J32, J32), (J40, J419), (J76, J77), (J78, J79) se razlikujejo samo v vrednostih parametrov r and q (glej Tabele 10,11 in 12). To je bil tudi razlog, zakaj smo vpeljali parametra r in q . *Kateri od naših 16 parametrov so odveč za namen kodiranja teles razreda C ?*

Če uporabimo sumacijski trik in leksikografsko sortiranje parametrov, lahko vidimo, da parametri $(v, e, f, po, s, n, m, q)$ zadoščajo, da razlikujemo med telesi razreda C . *Toda kakšno je minimalno število parametrov, s katerimi lahko kodiramo telesa iz razreda C ?*

Naslednji primeri kažejo, zakaj določene kombinacije treh parametrov ne zadoščajo za razlikovanje teles iz razreda C :

$(v, e, f) = (14, 26, 14)$ za telesi J55 in J56, $(f, m, q) = (8, 4, 14)$ za J26 in J49,
 $(v, s, r) = (9, 6, 6)$ za J3 in J63, $(s, q, m) = (10, 0, 10)$ za J5 in J6,
 $(e, m, q) = (80, 5, 0)$ za J31 in J59, $(v, s, q) = (25, 10, 6)$ for J33 and J24,
 $(s, q, e) = (20, 0, 20)$ za J31 in J59, $(s, q, f) = (10, 0, 27)$ za J21 in J32,
 $(s, q, po) = (6, 0, 28)$ za J44 in J45, $(v, m, r) = (9, 4, 12)$ za J10 in J8,
 $(v, m, q) = (40, 5, 0)$ za J48 in J43, $(po, N.n, q) = (4, 60, 0)$ za arhimedsko telo (3.4.5.4) in za 30-kotno antiprizmo.

S preprostim »trikom množenja« lahko dobimo iz dveh parametrov N in n en sam parameter $N.n$:

Trditev 14 (KARAKTERIZACIJA POLIEDROV RAZREDA C S TREMI PARAMETRI:) *Urejene trojice parametrov $(po, N.n, q)$ so različne za vsako telo iz razreda, sestoječega iz 92 Johnsonovih teles, petih platonskih teles in 13 arhimedskih teles.*

Dokaz. To zlahka vidimo, če ta zaporedja leksikografsko sortiramo. (Tabela 13). \square

Trditev 15 (KARAKTERIZACIJA POLIEDROV RAZREDA C S ŠTIRIMI PARAMETRI:) *Urejene četverice parametrov (po, N, n, q) so različne za vsako telo razreda C . Podobno, četverice (q, s, f, e) in (q, s, f, n) so drugačne za vsako telo razreda C .*

Dokaz. Iz tabel Tabel 11, 12 in 15 vidimo, da so zaporedja parametrov $(po, N.n, q)$ drugačna za vsako telo razreda C razen za arhimedsko telo 3.4.5.4 in 30-kotno antiprizmo, za kateri je $(po, N.n, q) = (4, 60, 0)$. Ker se ti dve telesi razlikujeta v parametrih N in n , so zaporedja štirih parametrov (po, N, n, q) drugačna za vsako telo razreda C . Podobno lahko zlahka vidimo, da parametri (q, s, f) separirajo vsa Johnsonova, arhimedska in platonska telesa razen dveh parov: J21 in J22, ki imata oba $(q, s, f) = (0, 10, 27)$, ter J48 in J76, ki imata oba $(q, s, f) = (0, 10, 52)$ in da sta vrednosti e in n različni tudi za te pare teles. \square

Tabela 13, skupaj z vrednostmi $po = 3$ za prizme in $po = 4$ za antiprizme iz Tabele 12, nam daje tudi klasifikacijo konveksnih poliedrov glede na število orbit praporov.

Trditev 16 (KLASIFIKACIJA POLIEDROV RAZREDA C GLEDE NA ŠTEVILO NJIHOVIH ORBIT PRAPOROV:) *Razred C konveksnih poliedrov z regularnimi poligonalnimi lici razpade na 38 ekvivalenčnih razredov glede na število njihovih orbit praporov.*

$(po, N.n, q)$: telo	$(po, N.n, q)$: telo	$(po, N.n, q)$: telo	$(po, N.n, q)$: telo
(1, 12, 6) : 3^3	(8,10,18): J30	(14,10,0): J6	(26,12,18): J56
(1, 24, 6) : 3^4	(8,12,0): J7	(14,55,10): J58	(28,8,14): J88
(1, 24, 16) : 4^3	(8,20,18): J8	(15,32,32): J67	(28,10,10): J46
(1, 60, 6) : 3^5	(8,24,14): J27	(16,50,40): J42	(28,24,0): J44
(1, 60, 10) : 5^3	(8,40,18): J29	(16,60,0): J43	(28,35,16): J40
(2, 24, 0) : $3.4.3.4$	(8,40,24): J28	(17,4,6): J50	(28,35,18): J41
(2, 60, 0) : $3.5.3.5$	(8,50,0): J59	(18,6,16): J18	(28,40,0): J45
(3, 18, 6) : J12	(9,36,6): J84	(18,8,28): J19	(30,45,10): J61
(3, 24, 18) : 3.6^2	(10,4,6): J10	(18,10,21): J20	(33,8,18): J89
(3, 30, 6) : J13	(10,5,6): J11	(18,18,0): J65	(36,60,0): J48
(3, 48, 20) : 4.6^2	(10,6,0): J3	(18,20,0): J80	(40,50,10): J60
(3, 48, 32) : 3.8^2	(10,8,0): J85	(19,10,22): J52	(42,10,0): J76
(3, 120, 22) : 5.6^2	(10,8,20): J4	(19,16,14): J90	(42,10,16): J77
(3, 120, 26) : 3.10^2	(10,10,0): J5	(20,10,0): J32	(42,55,22): J68
(4, 4, 0) : J1	(10,12,0): J57	(20,10,10): J62	(48,60,16): J72
(4, 5, 0) : J2	(10,15,6): J63	(20,35,6): J33	(50,30,0): J83
(4, 60, 0) : $3.4.5.4$	(10,24,0) : $3^4.4$	(22,6,6): J22	(52,4,6): J87
(4, 72, 32) : 3.4^3	(10,60,0) : $3^4.5$	(22,8,14): J86	(64,35,0): J47
(5, 12, 12) : J14	(12,10,16): J39	(22,10,0): J21	(80,60,16): J75
(5, 16, 16) : J15	(12,10,40): J38	(22,10,6): J24	(90,20,0): J81
(5, 20, 20) : J16	(12,15,6): J64	(22,10,18): J23	(90,90,22): J71
(6, 48, 0) : $4.6.8$	(12,48,14): J36	(22,12,26): J54	(120,60,22): J74
(6, 48, 6) : J17	(12,48,24): J35	(23,10,14): J53	(120,100,22): J70
(6, 120, 0) : $4.6.10$	(12,60,10): J34	(24,6,0): J92	(180,20,16): J82
(7, 6, 14) : J26	(12,72,26): J37	(24,40,30): J66	(210,10,0): J79
(7, 42, 6) : J51	(13,8,4): J49	(24,60,16): J73	(210,10,23): J78
(8, 5, 0) : J9	(13,12,14): J55	(24,100,0): J69	
(8, 10, 0) : J31	(13,20,10): J91	(26,10,6): J25	

Tabela 13: Leksikografsko sortirane vrednosti parametrov $(po, N.n, q)$ za Johnsonova, platonska in arhimedska telesa.

Nazadnje je tu še preprosta zvižaja (zasnovana na izreku o enolični faktorizaciji naravnih števil na produkt praštevil), s katero lahko razlikujemo telesa razreda C že z enim samim parametrom:

Trditev 17 (KLASIFIKACIJA POLJUBNEGA RAZREDA OBJEKTOV Z ENIM SAMIM SESTAVLJENIM PARAMETROM:) *Če so telesa kateregakoli razreda objektov razdeljena v različne ekvivalenčne razrede s pomočjo k parametrov q_1, q_2, \dots, q_k , potem se jih da razlikovati že z enim samim sestavljenim parametrom $2^{q_1} \cdot 3^{q_2} \dots p_k^{q_k}$, kjer je $2, 3, 5, \dots, p_k$ zaporedje prvih k praštevil (torej se da telesa razreda C razlikovati že z enim samim sestavljenim parametrom $2^{p_0} \cdot 3^N \cdot 5^n \cdot 7^q$).*

2.14.3 Povzetek karakterizacije poliedrov s parametri

Da smo dobili karakterizacijo konveksnih poliedrov z regularnimi poligonalnimi lici z minimalnim številom parametrov, smo analizirali 16 parametrov (tabele 8,9,10). Nekateri od njih so dobljeni iz simetrijskih grafov teh teles. Vpeljali smo parameter Eo , imenovan »Eulerjevo število orbit« in dokazali nekaj njegovih lastnosti. S primerjavo različnih vrednosti parametrov glede na to, kako dobro zmorejo razlikovati telesa smo našli karakterizacijo razreda $C = \mathbb{K} \cap \mathbb{P}$ konveksnih poliedrov z regularnimi poligon-skimi lici s samo štirimi parametri. Klasificirali smo telesa razreda C glede na število njihovih orbit praporov, in pokazali, da se da telesa razreda C razlikovati že z enim samim sestavljenim parametrom $2^{p_0} \cdot 3^N \cdot 5^n \cdot 7^q$. Našli smo torej njihovo »separirajočo kodo«, kot smo želeli. Ta sestavljeni parameter (oziroma parametri (p_0, N, n, q)) lahko torej služi pri razlikovanju Johnsonovih teles na podoben način kot služijo ogliščni vzorci za razlikovanje uniformnih poliedrov. V primerjavi z Johnsonovo strukturo notacijo (str. 52) teles $J1, J2, \dots, J92$, ki uporablja za »molekularni« opis teh teles kar precej atomarnih gradnikov (prizme, antiprizme, kupole, rotunde, piramide), ima naša koda to prednost, da opiše telesa z manj osnovnimi informacijami. Johnsonova »kemijska« notacija pa ima pred našo to prednost, da se da iz nje lažje rekonstruirati telesa. »Generična koda«, ki bi omogočala preprosto algoritemsko izgradnjo poljubnega poliedra $P \in \mathbb{P}$, pa bi bila nujno veliko bolj zapletena: polieder bi morali opisati z naslednjima dvema ključnima elementoma: 1) z zemljevidom rotacijskih orbit $O_R(\mathcal{P})$ ter zemljevidom zrcalno-rotacijskih orbit $O(\mathcal{P})$ oziroma z baricentrično razdeljeno rotacijsko fundamentalno domeno $FD_R(\mathcal{P})$ in fundamentalno domeno $FD(\mathcal{P})$; 2) z grupo rotacijskih simetrij $S_R(\mathcal{P})$ in z grupo simetrij $S(\mathcal{P})$ (lega zrcalnih ravnin in poli ter stopnje rotacij bi morali biti vrisani na fundamentalni domeni – temu bi lahko rekli »simetrijska shema« poliedra). Takšna zelo nazorna »geometrijska« rekonstrukcija poliedra temelji na COXETER-MOSER-jevi rekonstrukciji ploskev iz njihovih fundamentalnih domen glede na njihove grupe avtomorfizmov [8]. Možna pa je tudi »algebraična« rekonstrukcija poliedra \mathcal{P} iz njegovega simetrijskega grafa $T(\mathcal{P})$ in simetrijske grupe $S(\mathcal{P})$, ki temelji na dobro znani teoriji krovnih grafov in napetostnih grafov, opisani npr. v disertaciji prof. PISANSKEGA [40] in v knjigi [42].

3 Simetrijski grafi molekul

Simetrijske grafe, ki so jih doslej uporabljali predvsem pri tlakovanjih in zemljevidih na *sklenjenih ploskvah* (in katerih uporabo pri poliedrih smo spoznali v prvem delu disertacije), so enako uporabni tudi za zemljevide na *ploskvah z robom*. V tem poglavju predstavim njihovo uporabo pri klasifikaciji t.i. »benzenoidnih molekul« (ravninskih ogljikovodikovih molekul, v katerih ogljikovi atomi tvorijo šestkotniške obroče). Vpeljem tudi dve novi orodji za opisovanje simetrijskih lastnosti poljubnih ravninskih »geometrijskih molekul« iz pravih mnogokotnikov in pravih zvezd ter opišem splošno strukturo grafa praporov poljubne policiklične »ploskovne« molekule.

MOTIVACIJA IN OSNOVNA IDEJA: Pobuda za ta drugi del disertacije prihaja iz matematične kemije. Grafe praporov in simetrijske grafe lahko priredimo tudi t.i. »policikličnim kemijskim molekulam«, (pretežno) sestavljenim iz ravninskih ciklov atomov (npr. ogljikovih, medtem ko atome vodika pri opisu strukture molekul ignoriramo) v obliki pravih mnogokotnikov, če le-te interpretiramo kot lica in jih baricentrično razdelimo na pravokotne trikotnike – prapore.

IZHODIŠČNA REFERENCA: Prof. PISANSKI in BALABAN sta l. 2011 začela raziskovati grafe praporov pri t.i. benzenoidnih molekulah (ravninskih molekulah, katerih osnovna struktura, če zanemarimo vodikove atome, sestoji iz končnega števila šestkotniških obročev ogljikovih atomov); iz tega področja smo napisali skupen članek »*Classification of benzenoid molecules by their symmetry-type graphs*« (ki še čaka na objavo).

MATEMATIČNI MODEL BENZENOIDNIH MOLEKUL: Za matematični model benzenoidov se ponavadi uporablja ustrezen molekularni graf (s »praznimi« lici). Mi pa smo 6-cikle tega grafa interpretirali kot pravilne šestkotnike (da smo jih lahko baricentrično razdelili na pravokotne trikotnike – prapore), in temu modelu (s »polnimi« lici) bomo rekli »šestkotniška molekula« (kemiki ustrezne matematične modele delijo dalje na »benzenoidne sisteme« in »koronoidne sisteme«).

NOVA ORODJA: V tem poglavju je predstavljenih (in razširjenih) nekaj osnovnih idej iz zgoraj omenjenega članka, v katerem sem kot dodatno orodje klasifikacije predlagal t.i. *binarno kodo* in *simetrijsko kodo* benzenoidnih molekul.

DRUGE REFERENCE: V terminologiji in definicijah osnovnih pojmov sledim temeljni knjigi o teoriji benzenoidnih ogljikovodikov GUTMAN, CYVIN [17], z eno samo izjemo: ker je simetrijske grupe benzenoidov najenostavneje prikazati kot podgrupe diedrskih grup D_6 , $D_2 = Z_2 \times Z_2$ in D_3 , klasifikacijo v tej disertaciji (ker jo bodo brali matematiki) podajam v teh oznakah ter navajam le referenco na analogno klasifikacijo ([17], str. 19, 31) s pomočjo grup D_{6h} , C_{6h} , D_{3h} , C_{3h} , D_{2h} , C_{2h} , C_{2v} , C_s , ki so bolj domače kemikom in upoštevajo poleg zrcaljenj v navpičnih ravninah tudi zrcaljenje v vodoravni ravnini, v kateri leži benzenoidna molekula (to pomenita oznaki v in h).

SPLOŠNA STRUKTURA SIMETRIJSKIH GRAFOV BENZENOIDNIH MOLEKUL: Opisal bom tudi splošno (algebraično in geometrijsko) strukturo grafov praporov in simetrijskih grafov benzenoidnih molekul. Bistvena novost, ki jo prinašajo grafi praporov šestkotniških molekul (ki jih lahko interpretiramo kot primer zemljevidov na ploskvah z robom!) – v primerjavi z grafi praporov poliedrov in tlakovanj celotne ravnine – je, da prapori, ležeči ob robnih stranicah molekule, nimajo 2-sosedov!

RAZŠIRITEV OSNOVNE IDEJE: Vendar ni nujno, da se omejimo na benzenoidne molekule, dejansko obstoječe v kemiji, ampak lahko priredimo simetrijske grafe tudi veliko splošnejšim »geometrijskim« molekulam, sestavljenim iz poljubnih pravilnih mnogokotnikov (ali celo pravilnih zvezd!).

SPLOŠNI PROBLEM KLASIFIKACIJE MOLEKUL: Naš cilj je (na posebej preprostem vzorčnem primeru t.i. »benzenoidnih sistemov«) pokazati, »kako lahko klasificiramo kakršnekoli (ravninske ali prostorske) molekule, katerih gradniki so cikli atomov, glede na njihove simetrijske lastnosti«. V ta namen kombiniramo nekaj klasičnih matematičnih orodij, dobro znanih iz matematične kemije (simetrijske grupe, točkovne grupe) z nekaterimi relativno novimi matematičnimi orodji iz teorije grafov (grafi praporov, simetrijski grafi).

POSEBNI PROBLEM KLASIFIKACIJE BENZENOIDOV: Praviloma je kemijskih molekul v primerjavi z geometrijskimi molekulami iz istih gradnikov manj, saj jih vežejo dodatne omejitve fizikalno-kemijske narave. Videli bomo, da že natančna formulacija, kaj šele rešitev našega klasifikacijskega problema za t.i. »benzenoidne molekule«, sestavljene iz šestkotniških obročev, zahteva precej zahteven matematični aparat, pri čemer je treba upoštevati tudi določene omejitve iz kemije. Razlog za to je v dejstvu, da obstajajo »šestkotniške geometrijske molekule«, ki ne predstavljajo benzenoidne molekule. Grupo simetrij posamezne molekule, sestavljene iz šestkotnikov, bomo identificirali z ustrezno podgrupo simetrij šestkotniške mreže v ravnini, v kateri so vsi šestkotniki razdeljeni na 12 skladnih pravokotnih trikotnikov (»praporov«), enakoležni trikotniki pa so označeni z enakimi številkami od 1 do 12. Grupe, ki ohranjajo posamezne točke šestkotniške molekule (»točkovne grupe«) bomo predstavili s transformacijami ciklov praporov (razporejenih okrog središča stranice, oglišča ali središča lica).

OSNOVNA TEZA O KLASIFIKACIJI MOLEKUL: Tako kot poliedre je tudi molekule zelo naravno klasificirati glede na njihovo grupo simetrij (tistih, ki so porojene iz izometrijev evklidskega prostora) in glede na njihov simetrijski graf; pri podrobnejši klasifikaciji pa lahko upoštevamo še točkovne grupe (ter binarne in simetrijske kode) molekul. Pri ravninskih molekulah je treba upoštevati tiste simetrije, ki so dobljene iz izometrijev evklidskega prostora E^2 ; pri prostorskih pa tiste, porojene iz izometrijev prostora E^3 (avtomorfizmi molekul, ki niso porojeni iz izometrijev, nas v tem delu ne bodo zanimali).

3.1 Matematični model kekuléjskih benzenoidov

Definicija »benzenoida« je zanimiva tako iz matematičnega kot kemijskega zornega kota. Benzenoidne ogljikovodikove molekule so policiklične molekule, oblikovane iz ogljikovih atomov (z valenco 4), med katerimi so bodisi enojne ali dvojne vezi (včasih pa si celo po več ogljikovih atomov »deli« neke skupne elektrone!) ter vodikovih atomov H (z valenco 1).

V ustreznem matematičnem modelu, t.i. »molekularnem (kemijskem) grafu« benzenoidov ([18], str. 508) oz. v t.i. »benzenoidnem sistemu« (tri ekivalentne definicije tega pojma so podane v [17], str. 11-16) so vodikovi atomi izpuščeni, povezava med dvema vozliščema pa lahko predstavlja bodisi enojno vez bodisi dvojno vez med dvema ogljikovima atomoma (ohranjena je torej le informacija, kateri ogljikovi atomi so sosedni drug drugemu).

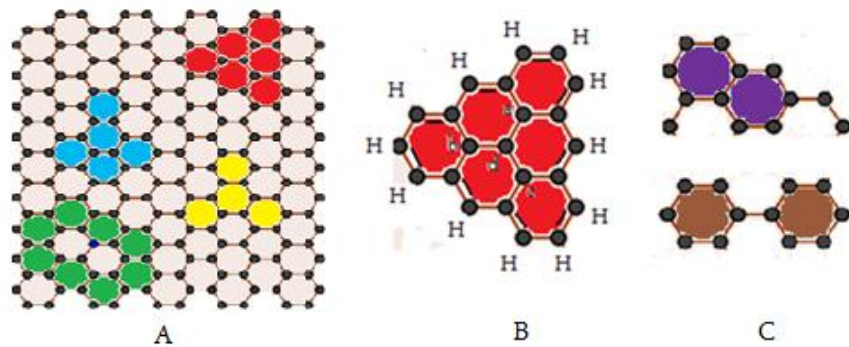
V kekuléjskih molekulah obstajajo t.i. kekuléjske strukture, v katerih ima vsak ogljikov atom poleg dveh enojnih tudi eno dvojno vez. Policiklična struktura kekuléjskih benzenoidov nam omogoča, da lahko o njih razmišljamo ne le kot o molekularnih grafih, sestavljenih zgolj iz vozlišč in povezav, ampak si njihove šestkotniške cikle predstavljamo kot šestkotniška lica nekega končnega ravninskega zemljevida z robom.

Obstajajo tudi drugi (ne-kekuléjski) benzenoidi, imenovani »prosti radikali«, ki imajo liho število ogljikovih atomov, vendar pa se takšnih molekul ne da predstaviti s šestkotniškimi lici.

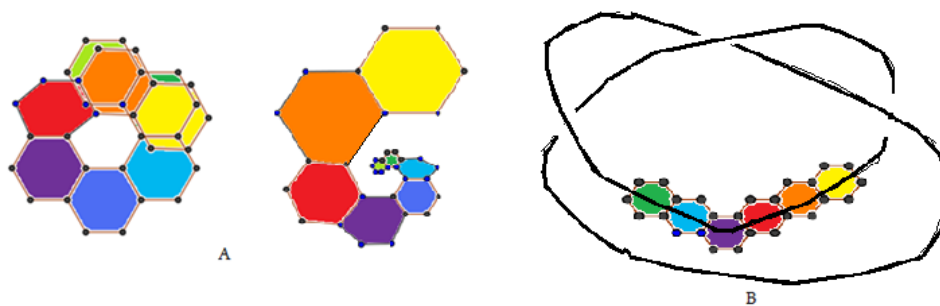
Kemiki klasificirajo te molekule v tri skupine takole:

Definicija 26 (ŠESTKOTNIŠKA GEOMETRIJSKA MOLEKULA IN KLASIFIKACIJA BENZENOIDOV:) *Matematični model kekuléjskega benzenoida je »šestkotniška geometrijska molekula«, sestavljena iz šestkotnikov, zlepljenih po stranicah tako, da jo lahko vložimo v ravninsko šestkotniško tlakovanje, in v kateri sta vsaki dve lici povezani s »potjo iz lic« (v kateri si dve zaporedni lici delita stranico. Dodatno zahtevamo še, da ima ustrezní graf 1-faktor (ki je določen z razporeditvijo dvojnih vezi med ogljikovimi atomi). Če je dualni graf acikličén, se imenuje ustrezní benzenoid »kata-kondenziran« (ima obliko verige ali splošneje drevesa iz šestkotnikov), če ima dualni graf cikle dolžine 3, je »peri-kondenziran« (trije šestkotniki imajo skupno »notranje oglišče), če pa ima (vsaj) dve robni komponenti in če manjša vsebuje vsaj 10 stranic, pa to ni več benzenoidni, ampak »koronoidni« sistem.*

Opomba k sliki 23. »Rumena« molekula iz štirih šestkotniških gradnikov na sliki A je primer »kata-kondenziranega« benzenoida (ker je njegov dual acikličen). »Modra« molekula iz petih šestkotniških gradnikov, je primer »peri-kondenziranega« benzenoida (ker njegov dual vsebuje trikotnike). »Zelena« molekula, sestavljena iz osmih šestkotniških gradnikov, je primer »koronoida« (ker njegov dual vsebuje n -kotnike, v katerih je $n > 6$). »Rdeča« geometrijska molekula na sliki B, oblikovana iz šestih šestkotniških gradnikov, pa ne predstavlja kekuléjskega benzenoida. Položaji dvojnih vezi »na robu« so enolično določeni, vendar vzorca ni mogoče nadaljevati na »kekuléjski« način v vozliščih a, b, c in d . Na sliki C sta dva primera ne-benzenoidov.



Slika 23: A: primeri geometrijskih molekul, vloženih v šestkotniško mrežo; B: primer molekule, ki ni kekuléjski benzenoid; C: primera ne-benzenoidov.



Slika 24: Primer »neravninskega« benzenoida v obliki spirale in vozla.

Natančno katerim dodatnim pogojem mora šestkotniška molekula zadoščati, da predstavlja molekulo benzenoida? Samo kemik, ne pa matematik, lahko odgovori na to vprašanje. Da bi videli, kako zapleteno je to, si oglejmo primer šestkotniške molekule, ki je ni mogoče vložiti v ravninsko šestkotniško mrežo (slika 24 A), saj njeni šestkotniški gradniki tvorijo dvigujačo se spiralo. Matematik bi rekel, da je takšna molekula del šestkotniške mreže, narisane na neko RIEMANN-ovo ploskev.

Z risanjem šestkotnikov različnih velikosti ni težko predstaviti tudi takšnih »neravninskih« molekul. Matematik bi si potlej zlahka zamislil tudi zapletenejše strukture, sestavljene iz šestkotniških gradnikov, na primer tridimenzionalne »vozle« iz šestkotnikov (na sliki 24 B se šestkotniki nizajo vzdolž ukrivljene črte in oblikujejo šestkotniški vozle – cikel sestavljen iz šestkotnikov). In tu se zastavlja odprto vprašanje: *Ali je mogoče, da takšni »ogljikovodikovi vozli« obstajajo v naravi (oziroma ali jih človek lahko naredi)?*

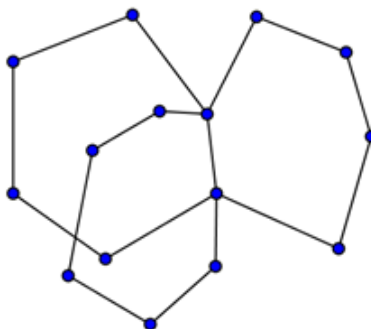
3.2 Matematični model poljubnih policikličnih molekul

Vendar nam za naš osnovni namen klasifikacije ravninskih benzenoidov ni potrebno študirati takšnih spiralnih ali zavozlanih molekul niti nam ni treba iskati natančne definicije benzenoidov, ki bo zadovoljila kemika (in bo izključila vse ne-benzenoide, vse benzenoide pa vključila). Po drugi strani pa se nam tudi ni treba posebej globoko zatakopati v ta posebni problem klasifikacije benzenoidov, ampak se lahko takoj obrnemo k *splošnemu problemu klasifikacije poljubnih policikličnih molekul glede na njihove simetrijske grupe in simetrijske grafe!*

Precej bolj smiselno je torej razviti splošno strukturno teorijo (ravninskih in prostorskih) »geometrijskih molekul« (z robom ali brez njega), katerih lica so lahko poljubni pravilni poligoni, potem pa jo aplicirati na tiste šestkotniške molekule, ki se jih da vložiti v ravninsko šestkotniško mrežo. V okviru takšne splošne teorije, neodvisne od trenutno znanih kemijskih molekul, lahko matematik obravnava in (ko sistematično preišče vse možne geometrijske molekule danega razreda) morda slučajno odkrije tudi kakšne kemij-ske molekule, ki še niso bile sintetizirane, morda pa nekoč bodo. Podoben pristop je uporabil MENDELJEJEV, ko je klasificiral kemijske elemente v času, ko nekateri od njih še niso bili odkriti, vendar je njihov obstoj predvidel in vnaprej upošteval.

Najsplošnejša definicija geometrijske molekule, ki sem se je lahko domislil, da bi lahko bila matematični model poljubne policiklične kemijske molekule, je naslednja:

Definicija 27 (GEOMETRIJSKA MOLEKULA:) *Mnogokotnik definiramo (tako kot pri poliedrih) kot cikel točk v ravnini ali prostoru, katerega stranice so daljice s krajišči v parih zaporednih točk tega cikla. Geometrijska molekula je (ne nujno ravninski) geometrijski objekt, ki ga dobimo iz (ne nujno končno mnogo, ne nujno pravilnih, ne nujno ravninskih) mnogokotnikov z »lepljenjem« (identifikacijo parov) njihovih stranic, (pri čemer ni nujno, da si isto stranico delita največ dva mnogokotnika oz. »lici« molekule). Rob molekule ∂M je unija stranic, ki pripadajo le enemu njenemu licu. Molekula je ravninska, če vsa njena lica ležijo v isti ravnini. Molekula je ploskovna, če si isto stranico delita največ dve lici molekule.*



Slika 25: Primer molekule z robom in tremi lici s skupno stranico.

Poljubni dve lici geometrijske molekule sta torej povezani s »potjo iz lic«. Gornji definiciji ustrezajo tudi spiralne in zavozlane molekule, ki dejansko nastopajo tudi v kemiji (npr. molekula DNA ima spiralno obliko). Tudi t.i. fulereni, sestavljeni iz samih petkotniških in šestkotniških obročev ogljikovih atomov, ustrezajo gornji definiciji. Če si vsako stranico delita dva pravilna mnogokotnika, imamo opravka s poliedrom našega dobro znanega razreda \mathbb{P} . Če si isto stranico delita več kot dva mnogotnika, molekula ne leži več na nobeni ploskvi, ampak na neki hiperploskvi (simetrijske grafe takšnih »hiperzemljevidov« na hiperploskvah definiram v Poglavju 4).

Definicija 28 (GRAF PRAPOROV PLOSKOVNE MOLEKULE:) *Prapore poljubne ploskovne molekule lahko definiramo kot urejene trojice $\Phi = (v, e, f)$, kjer je f lice, e stranica tega lica, v pa krajišče te stranice. Kot pri poliedrih definiramo sosedne prapore $\Phi^0 = (v', e, f)$, $\Phi^1 = (v, e', f)$, $\Phi^2 = (v, e, f')$ prapora Φ , ki se od Φ razlikujejo le v eni komponenti, s to razliko, da robni prapori (ki ležijo ob robu molekule) nimajo 2-sosedov. Na množici praporov P lahko definiramo tri involucije $s_0(\Phi) = \Phi^0$, $s_1(\Phi) = \Phi^1$, $s_2(\Phi) = \Phi^2$ (in potem kot pri poliedrih velja: $s_0^2 = s_1^2 = s_2^2 = id$ in $s_0 s_2 = s_2 s_0$). Če vsak prapor Φ*

predstavimo z vozliščem, povezave, ki povezujejo prapor Φ s prapori $s_0(\Phi)$, $s_1(\Phi)$, $s_2(\Phi)$ pa označimo s številkami 0, 1 in 2 (ali pobarvamo z modro, rumeno in rdečo barvo), dobimo graf praporov molekule. Simetrijski graf molekule $T(\mathcal{M})$ (in rotacijski simetrijski graf $T_R(\mathcal{M})$) dobimo kot kvocient grafa praporov glede na ustrezno grupo simetriji $S(\mathcal{M})$ (oziroma $S_R(\mathcal{M})$) molekule \mathcal{M} . Vozlišča simetrijskega grafa so orbite prvotnega grafa praporov. Vsebujejo lahko tudi polpovezave, ki povezujejo orbite s seboj.

Za molekule, katerih lica so sami pravilni mnogokotniki ali pravilne zvezde, lahko prapore $\Phi = (v, e, f)$ predstavimo tudi s pravokotnimi trikotniki z oglišči v središču lica f , središču stranice e in oglišču v :

Definicija 29 (GRAFI PRAPOROV MOLEKUL PRAVILNIH LIC:) *Geometrijska molekula je regularna, če so vsa njena lica robovi pravilnih mnogokotnikov ali pravilne zvezde. V tem primeru lahko vsako tako »prazno« lice »zapolnimo« z 2-celico in ga baricentrično razdelimo na skladne pravokotne trikotnike – prapore. Na ta način dobimo graf praporov ploskovne molekule kot pri poliedrih (pri ne-ploskovnih molekulah pa imajo nekateri prapori lahko več kot enega 2-sosedo!), s to razliko, da »robni« prapori nimajo 2-sosedov. Razred regularnih ploskovnih geometrijskih molekul označimo \mathbb{P}' .*

3.3 Simetrijske grupe prostorskih in ravninskih molekul

Kot že vemo, so simetrijske grupe osnovno orodje pri študiju simetriji različnih geometrijskih ali kemijskih objektov (npr. poligonov, poliedrov, tlakovanj, molekul). Njihovi elementi, imenovani simetrije, so izometrije evklidskega prostora E^2 ali E^3 , ki ohranjajo dani geometrijski objekt. Pri molekulah lahko simetrijske grupe (podobno kot pri poliedrih) najlepše vpeljemo prek grafov praporov.

Definicija 30 (SIMETRIJSKA GRUPA MOLEKULE:) *Za vsako ploskovno geometrijsko molekulo M definiramo grupo njenih simetriji $S(\mathcal{M})$ kot grupo vseh izometriji ustreznega evklidskega prostora E^2 ali E^3 , ki ohranjajo njen graf praporov (pa tudi barve 0,1,2 povezav tega grafa). Podobno definiramo grupo $S_R(\mathcal{M})$ rotacijskih simetriji molekule \mathcal{M} , ki vsebuje le rotacije. S tema grupama sta definirana (analogno kot pri poliedrih in tlakovanjih) tudi zrcalno-simetrijski graf molekule $T(\mathcal{M})$ in rotacijski graf molekule $T_R(\mathcal{M})$.*

Medtem ko nekatera tlakovanja ravnine premorejo simetrije, porojene iz izometriji ustreznega evklidskega prostora, ki nimajo nobenih fiksnih točk (translacije in t.i. drsna zrcaljenja, sestavljena iz zrcaljenja in translacije), pa so simetrije poliedrov in molekul iz končno mnogo lic porojene le iz takih izometriji, ki premorejo vsaj eno fiksno točko (četudi ta ni nujno vsebovana v poliedru ali molekuli).

Definicija 31 (TOČKOVNA GRUPA:) *Simetrijska grupa, ki ohranja določeno točko T (v ravninski ali v prostorski mreži ali v poliedru ali v molekuli), se imenuje točkovna grupa. Označimo jo takole: S_T .*

To področje je študiral že Leonardo, ki je dokazal naslednji izrek:

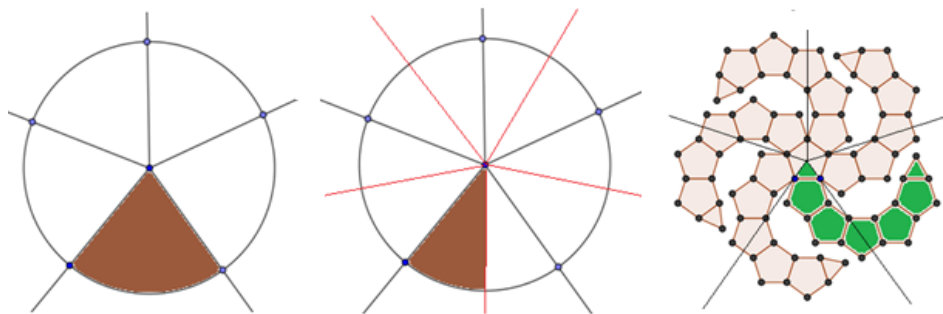
Trditev 18 (LEONARDOV IZREK:) *»Če je G podgrupa evklidske grupe E ravnine (grupe izometrij ravnine z evklidsko metriko d) in če G ne vsebuje nobenih translacij, potem obstaja točka O ravnine, ki jo ohranja poljuben element grupe G .«*

Od tod sledi, kot je pokazano v [23]:

Korolar 2 (TOČKOVNE GRUPE RAVNINE:) *Vsaka netrivialna končna podgrupa evklidske grupe E je bodisi ciklična C_n bodisi diedrska D_n .*

Ta korolar lahko lepo ilustriramo s pojmom fundamentalne domene, ki smo ga že spoznali v zvezi s poliedri in sfero, uporaben pa je tudi za simetrijske grupe ravnine.

Korolar 3 (FUNDAMENTALNE DOMENE TOČKOVNIH GRUP RAVNINE:) *Fundamentalne domene grup C_n in D_n lahko vselej predstavimo kot del ravnine med dvema poltrakoma – pri ciklični grupi je kot med poltrakoma enak $2\pi/n$, pri diedrski pa π/n (slika 26).*



Slika 26: »Standardni« fundamentalni domeni grup C_5 in D_5 v ravnini in fundamentalna domena molekule s simetrijsko grupo C_5

Sorodni pojem fundamentalne domene molekule je zelo koristen tako pri določitvi kot pri samem opisu simetrijskega grafa molekule.

Definicija 32 (FUNDAMENTALNA DOMENA MOLEKULE:) *Fundamentalna domena FD ploskovne geometrijske molekule \mathcal{M} je takšen najmanjši njen del, ki ga elementi njene grupe simetrij $S(\mathcal{M})$ preslikajo na celotno molekulo: $\bigcup_{g \in S(\mathcal{M})} g(FD) = \mathcal{M}$. Analogno definiramo rotacijsko fundamentalno domeno FD_R molekule.*

Fundamentalne domene ravninske molekule se ne da vselej lepo prikazati (vsaj ne kot povezano območje) na »standardni« fundamentalni domeni ravnine za isto grupo (Slika 26 desno). Izrazimo pa jo lahko kot unijo predstavnikov praporov orbit molekule.

Definicija 33 (ZEMLJEVID ORBIT MOLEKULE:) *Zemljevid orbit $O(M)$ ravninske ali ploskovne molekule M sestoji iz tistih praporov, ki ležijo znotraj izbrane fundamentalne domene. Iz njega zlahka razberemo orbite oglišč in robov ter konstruiramo simetrijski graf – samo za prapore na robu te fundamentalne domene moramo posebej označiti, kateri so njihovi 0-sosed, 1-sosed in 2-sosed.*

Naslednja trditev lepo uvaja idejo o točkovnih grupah, predstavljenih s permutacijami, uporabljeno tudi v Izreku 11.

Trditev 19 (TOČKOVNE GRUPE POLIEDROV:) *Točkovne grupe, ki fiksirajo središče poliedra (kadar obstaja), lahko opišemo kot grupe permutacij oglišč poliedra.*

Dokaz. Vsaka simetrija poliedra, ki fiksira njegovo središče, je namreč popolnoma opisana s permutacijo $\pi : V \rightarrow V$ množice oglišč poliedra: $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. \square

Takšna točkovna grupa je, kot že vemo (po COXETER-MOSER-jevi teoriji [8]) vselej izomorfna eni od 17 grup izometrijev evklidskega prostora E^3 . Pri poliedrih so zanimive tudi tiste točkovne grupe, ki ohranjajo kakšno točko na plašču poliedra (npr. oglišče, središče stranice ali lica). Te grupe so vselej podgrupe grupe simetrijev poliedra.

UPORABA TOČKOVNIH GRUP – IZHODIŠČNE REFERENCE: Točkovne grupe se uporabljajo npr. v matematični kemiji pri študiju simetrije molekul. Konkretna, jasna in zelo natančna navodila za določitev točkovnih grup molekul so dana npr. v [27], str. 174–179. V zvezi s prostorskimi molekulami je matematike, ki bi za opis njihovih simetrijskih grup raje uporabili npr. Coxeter-Moser-jevo notacijo, vredno opozoriti, da imajo kemiki izdelan sistem označevanja grup izometrijev trirazsežnega prostora E^3 , ki jim omogoča razlikovati med navpičnimi (te potekajo skozi glavno rotacijsko os) in vodoravnimi zrcalnimi ravninami (KETTLE [27]).

BALABAN in PISANSKI sta klasificirala in opisala točkovne grupe šestkotniških ravninskih molekul s permutacijami njihovih lic, stranic in oglišč ([2]); njuno idejo sem razširil na točkovne grupe poljubnih ravninskih molekul:

Izrek 11 (KLASIFIKACIJA IN OPIS TOČKOVNIH GRUP RAVNINSKIH MOLEKUL S PERMUTACIJAMI LIC, STRANIC OZIROMA OGLIŠČ MOLEKULE:) *Obstajajo tri vrste točkovnih grup (pa tudi tri vrste posameznih simetrijev) ravninske geometrijske molekule M :*

1. *Simetrija, ki fiksira oglišče v , okrog katerega je cikel m lic $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, je popolnoma opisana s permutacijo $\pi : F \rightarrow F$ teh lic. Lahko jo gledamo kot element diedrske grupe D_m .*

2. Simetrija, ki ohranja povezavo ab (kar pa še ne pomeni nujno, da ohranja tudi njeni krajišči a in b !) in fiksira središče povezave ab med točkama a in b , je popolnoma opisana s permutacijo $\pi : E \rightarrow E$ množice štirih stranic $E = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$, kjer imata stranici a_1 in a_2) za eno od krajišč točko a , stranici b_1 in b_2 pa imata za eno krajišče točko b . Lahko jo gledamo kot element diedrske grupe D_2 .

3. Simetrija, ki ohranja lice f z n stranicami in fiksira njegovo središče, je popolnoma opisana s permutacijo $\pi : V \rightarrow V$ množice oglišč lica: $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Lahko jo gledamo kot element diedrske grupe D_n .

Nekatere simetrije so mešanega tipa: 1-2, 1-3, 2-3.

Analogne simetrije tipov 1, 2, 3, ki ohranjajo kakšno oglišče, povezavo in njeno središče ter lice in njegovo središče, lahko definiramo za poljubne molekule.

Trditev 20 (SIMETRIJE KOMBINIRANEGA TIPA 1-2-3:) *Pri geometrijskih molekulah iz samih sodih lic (ne nujno istega tipa) je vsaka simetrija s kombinirane tipa 1-2-3 identiteta. Analogna trditev pa ne velja za geometrijske molekule, ki vsebujejo tudi lica z liho mnogo stranicami (npr. za lica v trikotniški mreži ali v trikotniški molekuli).*

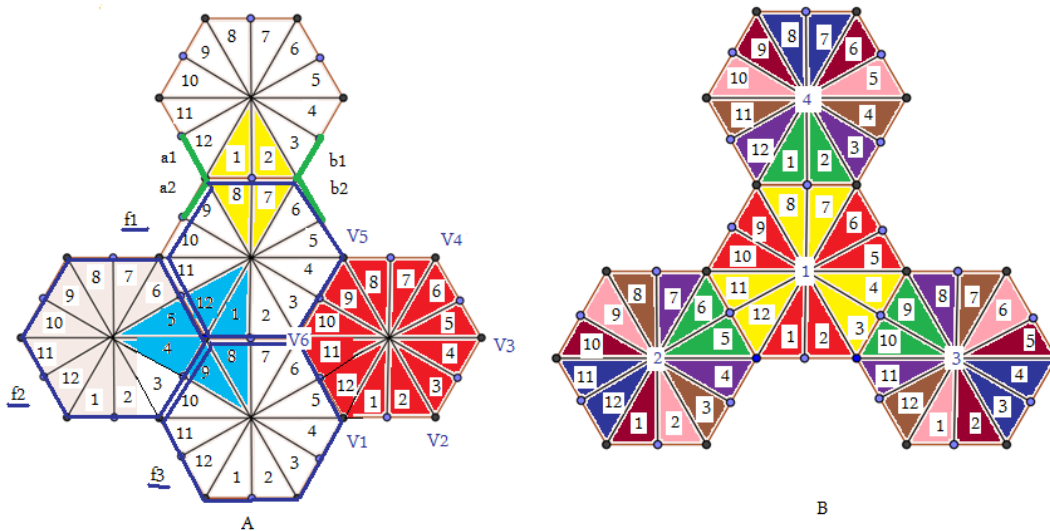
Dokaz. Če s ohranja stranico ab in točko c izven nje (središče nekega lica), potem je s bodisi identiteta bodisi zrcaljenje prek simetrane stranice ab . Če to zrcaljenje ohranja še kakšno oglišče, potem mora ležati na tej simetrali. Vendar na tej simetrali ne more ležati nobeno oglišče, če je molekula sestavljena iz samih sodih lic. Pri licih trikotniške molekule npr. zrcaljenje prek simetrane trikotnika ohranja tako oglišče trikotnika kot tudi središče trikotnega lica in središče ene njegove stranice. \square

Moj prispevek k članku o benzenoidih v zvezi s točkovnimi grupami pa je bila naslednja uporaba grafa praporov, na podlagi katere je mogoče vse tri točkovne grupe šestkotniških ravninskih molekul obravnavati na isti način (isti trik je uporaben tudi za molekule iz samih kvadratov ali iz samih enakostraničnih trikotnikov).

Trditev 21 (OPIS TOČKOVNIH GRUP ŠESTKOTNIŠKE MOLEKULE S SIMETRIJAMI ŠESTKOTNIŠKE MREŽE:) *Vse tri tipe točkovnih grup šestkotniške molekule lahko opišemo kot podgrupe iste diedrske grupe D_6 simetrij ravninske šestkotniške mreže, v katero je vložena molekula.*

Dokaz. Vsako šestkotniško geometrijsko molekulo lahko (po definiciji) vložimo v šestkotniško mrežo, v kateri so vsi šestkotniki razdeljeni na 12 praporov, ciklično oštevilčenih $1, 2, \dots, 12$. Torej so točkovne grupe šestkotniške geometrijske molekule M hkrati tudi točkovne grupe šestkotniške mreže, v katero je molekula vložena. Posledično lahko predstavimo točkovne grupe D_6, D_2 in D_3 ter podgrupe teh grup s poenotenim

pristopom – kot permutacijske grupe dvanajstih, štirih oziroma šestih praporov šestkotniške mreže (glej sliko 27 levo)! Prav tako lahko vsako simetrijo v mrežo vložene šestkotniške molekule predstavimo s simetrijo celotne šestkotniške mreže. \square



Slika 27: Levo: točkovne grupe D_6 , D_2 in D_3 , predstavljene kot permutacijske grupe praporov; desno: dvo-koordinatna notacija praporov v šestkotniški molekuli ali v šestkotniški mreži.

Opomba k Sliki 27. Vsaka od 12 simetrij 0-1 cikla 12 praporov heksagona je enolično določena s sliko prapora 1. Torej je smiselno vpeljati oznako s_j za simetrijo, ki preslika prapor 1 v prapor j poljubnega pravilnega n -kotnika. Lahko je videti:

Trditev 22 (SIMETRIJE PRAVILNEGA n -KOTNIKA:) *Simetrije s_j delujejo na $2n$ praporih X v n -kotniku, kjer je $(X \in \{1, 2, 3, \dots, 2n\})$, takole:*

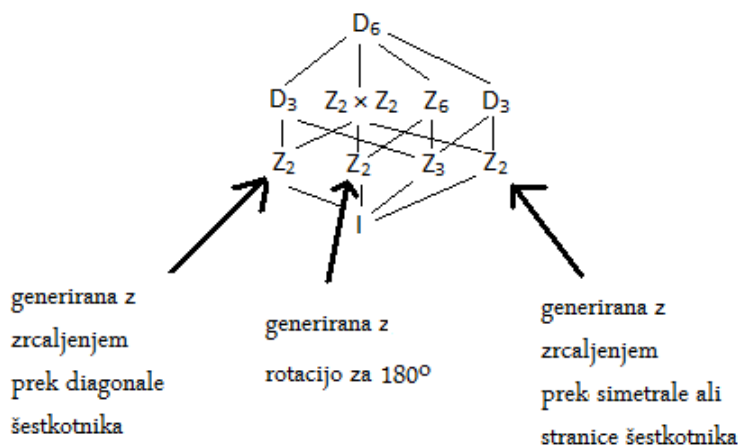
Rotacije: $s_{1+2i}(X) = X + 2i \pmod{2n}$, torej je $s_{1+2i}(1) = 1 + 2i \pmod{2n}$.

Zrcaljenja: $s_{-1+2i-1}(X) = -X + 2i - 1 \pmod{2n}$, torej je $s_{-1+2i-1}(1) = -1 + 2i - 1 \pmod{2n}$. Lahko je najti kompozitume teh simetrij $s_a s_b(X) = s_a(s_b(X))$. \square

Gornja trditev ni nič drugega kot s formulami konkretiziran Korolar 2 k Leonardovemu izreku. Zdaj je mogoče pokazati:

Trditev 23 (GEOMETRIJSKO RAZLIČNE PODGRUPE GRUPE D_6 ;) *Grupa D_6 ima v algebraičnem smislu 16 podgrup ($[1]$), toda samo 7 od njih ni izomorfnih nobeni drugi od njih in samo 10 od njih je geometrijsko različnih (slika 28).*

Dokaz. Prvi del trditve sta dokazala že BALABAN in PISANSKI v [2]. Da je geometrijsko različnih le 10 podgrup, pa lahko pokažemo z uporabo zgoraj opisanih simetrij šestkotniške mreže takole: Tri podgrupe, izomorfne $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, so generirane s tremi pari zrcaljenj: $\{s_0, s_6\}$, $\{s_2, s_8\}$, $\{s_4, s_{10}\}$; vsak od teh parov geometrijsko ustreza zrcaljenju prek ene od diagonal d šestkotnika ter zrcaljenju prek simetrale s neke stranice, pravokotne na to diagonalo: $s \perp d$ (tukaj sta dve podgrupi »izgubljeni«). Tri podgrupe, izomorfne \mathbb{Z}_2 , so generirane z enim od zrcaljenj s_0, s_4, s_8 prek diagonale (tu sta dve podgrupi »izgubljeni«). Nadaljne tri podgrupe, izomorfne \mathbb{Z}_2 , so generirane z enim od zrcaljenj s_2, s_6, s_{10} prek simetrale neke stranice (tukaj sta »izgubljeni« nadaljnji dve podgrupi). Obstaja še ena podgrupa, izomorfna \mathbb{Z}_2 , generirana z rotacijo s_7 (za kot $2\pi/2$). Obstaja ena podgrupa, izomorfna \mathbb{Z}_3 , generirana z rotacijo s_7 (za kot $2\pi/3$). Obstaja tudi ena podgrupa, izomorfna \mathbb{Z}_3 , ki je generirana z rotacijo s_3 (za kot $2\pi/6$). Obstajata tudi dve geometrijsko različni podgrupi, izomorfni D_3 ; ena je generirana z rotacijo s_7 in zrcaljenjem s_{12} , druga pa z rotacijo s_7 in zrcaljenjem s_2 . Torej, skupaj s celotno grupo D_6 in trivialno grupo I , obstaja natančno deset geometrijsko različnih podgrup grupe D_6 . \square



Slika 28: Deset geometrijsko različnih podgrup grupe D_6 .

3.4 Dvo-koordinatna notacija praporov

Kako so povezane točkovne grupe D_6 , D_3 , D_2 in grupa izometrij šestkotniške mreže? Da bi lahko natančno odgovorili na to vprašanje, bomo vpeljali »dvo-koordinatno notacijo« praporov, definirano takole: Vsak prapor šestkotniške mreže (ali šestkotniške geometrijske molekule) ima dve koordinati (h, X) . Prva koordinata h je zaporedna

številka heksagona $h \in \{1, 2, \dots\}$, druga koordinata je zaporedna številka prapora $X \in \{1, 2, \dots, 12\}$ (slika 27 desno). Opazimo lahko, da je prapor 1 vedno v spodnjem levem vogalu vsakega šestkotnika in da smo uporabili orientacijo nasprotno vrtenju kazalcev na uri za prapore v ciklu 12 praporov. V zgornjem primeru (slika 27 desno) je prapor (3,9) preslikan z rotacijo v nasprotni smeri urinih kazalcev za $2\pi/3$ v prapor (4,1): $(3,9) \sim (4,1)$, to pomeni: ležita v isti orbiti. Podobno je: $(3,10) \sim (4,2)$, $(3,11) \sim (4,3)$, $(3,12) \sim (4,4)$, $(3,1) \sim (4,4)$, $(3,2) \sim (4,5)$, $(3,3) \sim (4,6)$, $(3,4) \sim (4,7)$, $(3,5) \sim (4,8)$, $(3,6) \sim (4,9)$, $(3,7) \sim (4,10)$, $(3,8) \sim (4,11)$.

Trditev 24 (SIMETRIJE PRAPOROV ŠESTKOTNIŠKE MREŽE:) *Pri vsaki simetriji šestkotniške mreže se druga koordinata njenih praporov transformira natančno tako kot v pripadajoči diedrski grupi D_6 .*

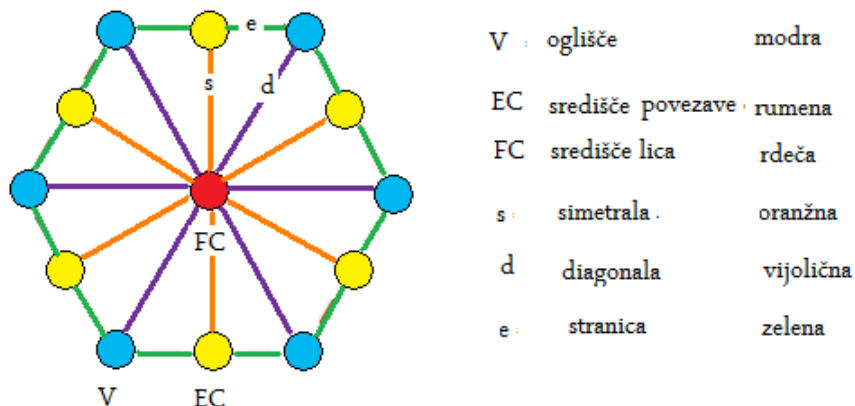
Dokaz. Pri vsakem zrcaljenju šestkotniške mreže preko neke premice p gre ta premica skozi središče nekega lica x te mreže, zato je to zrcaljenje element točkovne grupe D_6 , ki ohranja središče tega lica. Vsaka rotacija šestkotniške mreže ima svoje središče v nekem vozlišču ali v središču neke povezave ali lica. Torej je element vsaj ene od grup D_3, D_2 ali D_6 . Toda vsak element iz D_3 in D_2 lahko izrazimo z eno od šestih rotacij $s_1, s_3, s_5, s_7, s_9, s_{11}$ ali pa z enim od šestih zrcaljenj $s_2, s_4, s_6, s_8, s_{10}, s_{12}$ v grupi D_6 . Torej lahko grupi D_3 in D_2 naravno vložimo v D_6 . \square

3.5 Binarna in simetrijska koda molekul

Za vsako geometrijsko molekulo lahko določimo značilne točke ali daljice (središče lica, središče stranice, oglišče, diagonala, simetrala, stranica mnogokotnika), ki se ohranjajo s kakšno od simetrij tega objekta. Videli bomo, da pri šestkotniških molekulah te elemente lahko predstavimo s šestimi barvnimi točkami, tako kot 0-, 1-, 2-povezave simetrijskih grafov predstavimo s tremi barvami, kar omogoča zelo nazorno predstavitev njihovih simetrijskih grafov. Vpeljali bomo tudi dve kodi («binarna koda» in »simetrijska koda») molekule, s katerima na preprost način opišemo, kateri od šestih omenjenih elementov molekule se ohranjajo pri različnih simetrijah oziroma koliko jih je.

Definicija 34 (BINARNA IN SIMETRIJSKA KODA POLJUBNE MOLEKULE:) *Poljubni molekuli M lahko priredimo njeno binarno kodo $b(M) = (VC, EC, FC; s, d, e; C)$, kjer so števila VC, EC, FC, s, d, e, C definirana takole: Če ima M netrivialne rotacijske simetrije, potem je središče C ustreznih rotacij bodisi neko oglišče (V), bodisi središče neke povezave (EC), ali pa središče nekega lica (FC); v teh treh primerih pišemo: $VC = 1, EC = 1, FC = 1$. Če središče C netrivialne rotacije pripada molekuli M , pišemo $C = 1$ (sicer $C = 0$).*

V šestkotniški geometrijski molekuli bomo razlikovali tri vrste daljic (glej sliko 29): simetrane stranice bomo označili s črko s (ali z oranžno barvo), diagonale (spojnice nasprotnih oglišč v šestkotniku) bomo označili s črko d ali z vijolično barvo, in stranice šestkotnika bomo označili s črko e (ali z zeleno barvo).



Vsak šestkotnik ima 6V, 6EC, 1 FC, 3s, 3d, 6e.

Slika 29: Pomembne točke in daljice v šestkotniku.

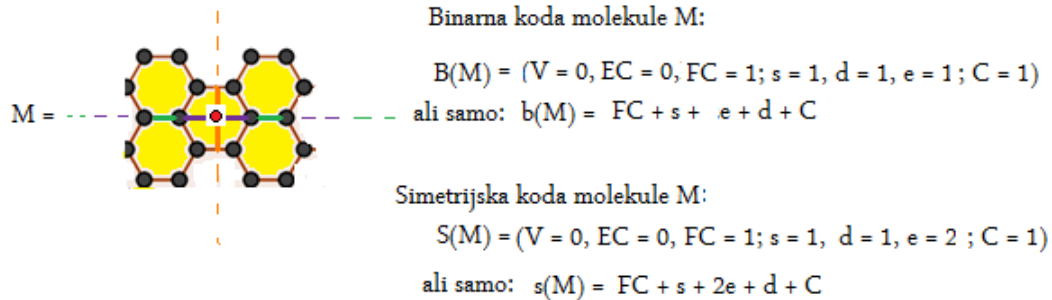
Če ima M neke zrcalne simetrije, potem nas zanima, katere od teh daljic (v molekuli M , ne samo v šestkotniški mreži!) se ohranjajo (zahtevamo, da se ohranjajo vse točke dane daljice!) pri vsaj eni od zrcalnih simetrij, pripadajočih $S(M)$? Če se ohranja vsaj ena simetrana molekule, pišemo $s = 1$ (sicer $s = 0$); če se ohranja vsaj ena diagonala, pišemo $d = 1$ (sicer $d = 0$); če se ohranja stranica, pišemo $e = 1$ (sicer $e = 0$).

Podobno definiramo simetrijsko kodo $s(M)$, pri kateri štejemo število elementov s, d, e , ki se ohranjajo pri vsaj enem od zrcaljenj v M .

Opazimo lahko (glej sliko 30) razliko med simetrijsko kodo (ki šteje daljice, ohranjene pri vsaj eni simetriji), in binarno kodo, ki samo identificira, kateri tipi daljic (simetrane, diagonale, stranice) se ohranjajo pri vsaj enem zrcaljenju molekule.































3.6 Primeri šestkotniških molekul vseh možnih simetrijskih tipov

Slika 31 prikazuje, katere šestkotniške molekule so možne pri dani simetrijski grupi S , kadar neka netrivialna rotacija ohranja neko oglišče $V = 1$ ali neko središče povezave $EC = 1$ ali neko središče lica ($FC = 1$), ali če neko zrcaljenje ohranja eno ali več daljic: simetrane $s = (EC, FC, EC)$, diagonale $d = (V, FC, V)$ ali stranice $e = (V, EC, V)$.



Slika 30: Binarna koda in simetrijska koda molekule M .

Dane so tudi simetrijske kode najmanjših šestkotniških molekul z dano simetrijsko grupo S . Oznaka C pomeni središče molekule M (obstaja samo, če obstaja netrivialna rotacija molekule M ; če obstaja, je lahko del molekule M (takrat pišemo $C = 1$); če pa takega središča ni ali če ni v M , pišemo $C = 0$). Kot lahko vidimo, se koronoidne molekule pojavljajo le v primerih $C = 0$ (molekula nima središča ali pa središče ne pripada nobenemu licu molekule).

group G	$C = 1$ (C in M)	$C = 0$ (no C or C not in M)	group G	$C = 1$ (C in M)	$C = 0$ (no C or C not in M)
I	no such M	 $S(M) = (0,0,0,0,0) = 0$	I_2 rotation for 2s2	 $S(M) = (0,1,0,0,1) = FC + C$	 $S(M) = (0,1,0,0,0) = FC$
Z_2 reflection	no such M	 $S(M) = (0,0,0,1,0) = d$	Z_2 rotation for 2s3	 $S(M) = (1,0,0,0,0) = V + C$	 $S(M) = (1,0,0,0,0) = V$
Z_2 reflection	no such M	 $S(M) = (0,0,0,0,1) = s$	Z_2 rotation for 2s3	 $S(M) = (0,1,0,0,1) = FC + C$	 $S(M) = (0,1,0,0,0) = FC$
Z_2 reflection	no such M	 $S(M) = (0,0,0,1,1) = d + s$	Z_2 rotation for 2s6	 $S(M) = (0,1,0,0,1) = FC + C$	 $S(M) = (0,1,0,0,0) = FC$
Z_2 reflection	no such M	 $S(M) = (0,1,1,0,0) = s$	Z_2 rotation for 2s6	 $S(M) = (0,1,0,2,1) = FC + C$	 $S(M) = (0,1,0,2,0) = FC$
Z_2 reflection	no such M	 $S(M) = (0,1,0,0,1) = s + d$	Z_2 rotation for 2s6	 $S(M) = (0,1,0,2,1) = FC + C$	 $S(M) = (0,1,0,2,0) = FC$
Z_2 reflection	no such M	 $S(M) = (0,1,0,0,1) = s + d$	Z_2 rotation for 2s6	 $S(M) = (0,1,0,2,1) = FC + C$	 $S(M) = (0,1,0,2,0) = FC$
Z_2 reflection	no such M	 $S(M) = (0,1,0,0,1) = s + d$	Z_2 rotation for 2s6	 $S(M) = (0,1,0,2,1) = FC + C$	 $S(M) = (0,1,0,2,0) = FC$
Z_2 reflection	no such M	 $S(M) = (0,1,0,0,1) = s + d$	Z_2 rotation for 2s6	 $S(M) = (0,1,0,2,1) = FC + C$	 $S(M) = (0,1,0,2,0) = FC$
Z_2 reflection	no such M	 $S(M) = (0,1,0,0,1) = s + d$	Z_2 rotation for 2s6	 $S(M) = (0,1,0,2,1) = FC + C$	 $S(M) = (0,1,0,2,0) = FC$

Slika 31: Najmanjše šestkotniške molekule vseh možnih simetrijskih tipov.

3.7 Grafi praporov in simetrijski grafi molekul

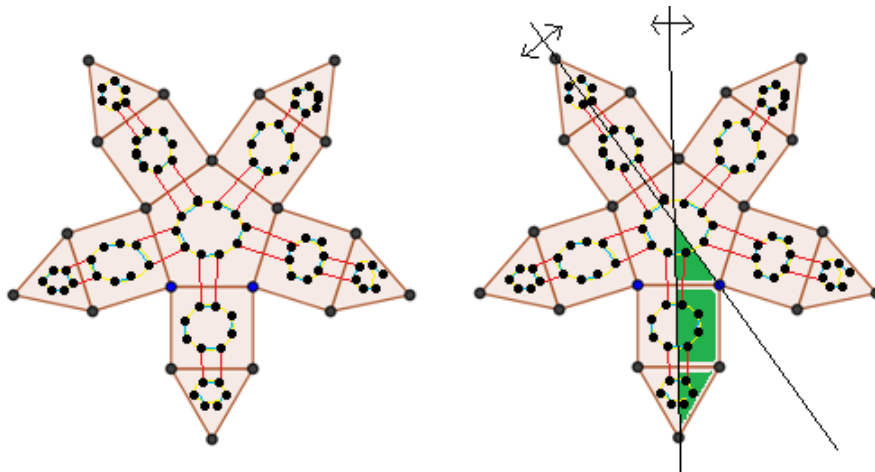
Izrek 12 (SPLOŠNA STRUKTURA GRAFA PRAPOROV POLJUBNE PLOSKOVNE MOLEKULE:) *i)* Če ima molekula f_i lic z $i \leq k$ stranicami, potem ima njen graf praporov $p = 2 \sum_{i=3}^k f_i \cdot i$ praporov. Razporejeni so v $f = \sum_{i=3}^k f_i$ 0-1 ciklov, med katerimi potekajo pari 2-povezav. Robni prapori pa 2-osedov nimajo.

ii) Če je $s = r \cdot z$ število njenih simetrij, r pa število rotacijskih simetrij, je $z = s/r$ bodisi 1 (če molekula zrcaljenj nima) ali 2 (če jih ima).

iii) Število rotacijskih orbit praporov je $po_R = p/r$, število orbit praporov pa $po = p/s$.

iv) Naj bo število lic molekule $f = \sum_{i=3}^k f_i$. Če je molekula »aciklična« (t.j. njen »dualni graf« je drevo), potem je število »notranjih« (t.j. ne-robnih) povezav $f - 1$, število robnih povezav pa $e_r = \sum f_i \cdot i - (f - 1) = 1 + \sum f_i \cdot (i - 1)$ in to število mora biti, če je $r > 3$, deljivo s številom r rotacijskih simetrij molekule.

Dokaz. Trditev i) je očitna, resničnost trditve ii) v primeru prostorskih molekul dokažemo kot pri poliedrih, v primeru ravninskih molekul pa sledi iz dejstva, da je vsaka grupa simetrij ravnine bodisi diedrska D_n bodisi ciklična C_n , ki ima v njej indeks 2. Trditev iii) sledi iz ii). Trditev iv) sledi iz dejstva, da se pri rotaciji za $2\pi/r$, $r > 3$, robne stranice preslikajo v robne in da nobena stranica ne preslika vase). \square



Slika 32: Graf praporov in simetrijski zemljevid, vrisan v fundamentalno domeno molekule M , katere strukturno formulo bi lahko »po kemijsko« zapisali takole: $P_1K_4T_3$ ali $5_14_53_5$. Zemljevid orbit ima strukturno formulo $O(M) = 5_{1/10}4_{1/2}3_{1/2}$.

Splošno strukturo simetrijskega grafa poljubne ravninske molekule si najlažje predstavimo s pomočjo njene rotacijske fundamentalne domene (ki jo poskusimo izraziti kot unijo predstavnikov rotacijskih orbit lic) in pripadajočega rotacijskega simetrijskega zemljevida, ki ga dobimo iz fundamentalne domene, razdeljene na prapore:

Izrek 13 (SPLOŠNA GEOMETRIJSKA STRUKTURA ROTACIJSKEGA SIMETRIJSKEGA ZEMLJEVIDA POLJUBNE RAVNINSKE MOLEKULE:) *Rotacijsko fundamentalno domeno poljubne ravninske geometrijske molekule lahko sestavimo iz po enega predstavnika vsake rotacijske orbite lic, ki ji je edino v primeru, da ima molekula pol rotacije za $2\pi/r$ v središču pravilnega n -kotnika, ki pripada molekuli, treba dodati $2 \cdot n/r$ praporov tega n -kotnika. Če to rotacijsko fundamentalno domeno razdelimo na prapore, dobimo rotacijski simetrijski zemljevid, iz njega pa s primerno identifikacijo stranic na robu te rotacijske fundamentalne domene dobimo rotacijski simetrijski graf. Ko imamo enkrat rotacijski simetrijski zemljevid, je samo še korak do simetrijskega zemljevida (ki upošteva tudi zrcaljenja) oziroma do simetrijskega grafa.*

Trditev 25 *Simetrijska grupa fulerena ne more biti razširjena oktaedrska grupa.*

Dokaz. Graf praporov molekule t.i. »fulerenov« – molekul s strukturo formulo 6_h5_{12} iz h šestkotnikov in 12 petkotnikov, ima $p = 12h + 120$ praporov. Moč simetrijske grupe $s = p/p_0$ fulerena mora deliti 120 (kajti toliko je praporov v petkotnikih), razširjena oktaedrska grupa pa ima 48 elementov – glej tabelo 2). \square

Lahko je videti tudi:

Trditev 26 (POLI POLJUBNE RAVNINSKE MOLEKULE IZ SAMIH PRAVILNIH MNOGOKOTNIKOV:) *Pol rotacije, če obstaja, je en sam. Če je pol v stranici, gre lahko le za rotacijo za $2\pi/2$. Če je pol v oglišču, gre lahko le za rotacijo za kote $2\pi/i$, kjer je $i = 3, 4, 6$. Če je pol v središču lica, imamo lahko rotacijo za poljuben kot $2\pi/i$.*

Rob molekule pove marsikaj o njenih simetrijah. Primer takšne trditve je:

Trditev 27 (ROTACIJSKE SIMETRIJE MOLEKULE Z ROBOM:) *Naj bosta v_r in $v_n = v - v_r$ števili robnih in notranjih oglišč ravninske molekule s konveksnimi lici. Če je v_r praštevilo p , potem ima molekula eno samo lice, ki je pravilni p -kotnik; če je v_n praštevilo $p \neq 3$, potem molekula nima nobenih rotacijskih simetrij.*

Dokaz. Trditev je posledica dejstva, da se notranja oglišča preslikajo v notranja, robna pa v robna, in da pol nobene rotacije ravninske molekule ne more biti v robnem oglišču (saj bi potlej molekula imela lica, ki imajo skupno le oglišče), prav tako pa ne more biti v notranjem oglišču (saj so edine možne rotacije v notranjem oglišču za kote $2\pi/3$, $2\pi/4$ in $2\pi/6$). Torej rotacija ne ohranja nobenega notranjega in nobenega zunanjega oglišča. To pa pomeni, da mora biti v vsaki rotacijski orbiti robnih oglišč enako število robnih oglišč, analogno pa velja tudi za notranja oglišča. Torej morajo biti vsa robna oglišča v isti rotacijski orbiti, to pa je možno le, če je molekula pravilni p -kotnik (in v tem primeru notranjih oglišč sploh ni). \square

Tu potegnimo črto pod to poglavje, sicer bi to delo postalo preobsežno. Splošno teorijo geometrijskih molekul in njihovih simetrijskih grafov je mogoče na podoben način, kot je bilo na nekaj primerih prikazano tukaj, razvijati še naprej. Sicer pa bomo v okviru te disertacije geometrijske molekule srečali še enkrat – in to na sferi (v razdelku 4.3)!

REFERENCE O BENZENOIDIH: V matematični kemiji obravnavajo benzenoide z najrazličnejših vidikov. Problem enumeracije benzenoidnih grafov z danim številom šestkotniških obročev obravnavata npr. DŽONOVA-JERMAN-BLAŽIČ in TRINAJSTIĆ v [10]. Nekaj osnovnih lastnosti benzenoidnih grafov ter nekaj njihovih spektralnih lastnosti je opisal GUTMAN ([19], str. 210-214); tako je npr. glede spektra teh grafov znana formula $\prod_{j=1}^N x_j = (-1)^{N/2} K^2$, kjer je N število ogljic, $\{x_1, \dots, x_N\}$ spekter grafa, K pa število njegovih kekuléjskih struktur. Mnogi avtorji, npr. KIRBY, MALLION in POLLAK [29] (1993) študirajo pokritja torusa s šestkotniki (t.i. »polihekse na torusu«) in med drugim (ibid. str. 1948-1949) opišejo, kako je tak poliheks (predstavljen z ravninsko mrežo) mogoče generirati iz skladnih »modulov« (kopij izbrane fundamentalne domene ustrezne simetrijske grupe). CYVIN in GUTMAN sta objavila izčrpno delo v zvezi s preštevanjem kekuléjskih struktur v benzenoidnih ogljikovodikih [5].

DRUGE REFERENCE IZ MATEMATIČNE KEMIJE: Dodatno motivacijo za obravnavo simetrijskih grafov poljubnih ravninskih (geometrijskih) molekul, katere obrise predstavljam v tem poglavju, sem dobil iz člankov s področja matematične kemije. Tako GUTMAN ([19], str. 209) že v članku iz 1974 ugotavlja: »Policiklične molekule so bile v preteklih letih intenzivno preučevane s pomočjo teorije grafov in številne njihove kemijske in fizikalne lastnosti so bile lahko opisane in napovedane«. T.i. »fulerene« (poliedrske ogljikove kletke, v katerih so vsa lica bodisi pravilni petkotniki ali šestkotniki) in njihove »skrite simetrije« (avtomorfizme njihovih grafov, ki niso porojeni z rotacijami in zrcaljenji E^3) je raziskoval KING [28] v članku o aplikacijah topologije in teorije grup. JOHN [22] je podal formulo za število 1-faktorjev v benzenoidnih verigah (t.j. nerazvejanih kata-kondenziranih benzenoidnih ogljikovodikih).

4 Posplošitve simetrijskih grafov

V tem poglavju definiram grafe praporov in simetrijske grafe hiperzemljevidov in konfiguracij in opišem njihovo uporabo pri sfernih poliedrih in sfernih molekulah. Tudi vse te objekte lahko, podobno kot smo to videli pri poliedrih, klasificiramo glede na njihove simetrijske grupe in simetrijske grafe. Možna bi bila tudi posplošitev grafov praporov na večdimenzionalne objekte, sestavljene iz n -simpleksov (npr. pri $n = 3$ bi vlogo praporov odigrale trikotniške piramide, involucije s_0, s_1, s_2, s_3 pa bi ustrezale zrcaljenjem prek ravnin robnih trikotnikov piramid).

4.1 Simetrijski grafi hiperzemljevidov

OSNOVNA IDEJA: Simetrijske grafe lahko definiramo tudi za t.i. »hiperzemljevide«. Nanje smo dejansko naleteli že pri definiciji geometrijske molekule (Definicija 27 in slika 27), kjer smo v matematičnem modelu predvideli možnost, da si isto stranico deli več ciklov kemijske molekule. Hiperzemljevide pa lahko definiramo tudi kot abstraktne, kombinatorične objekte, ne da bi natančno povedali, kaj so njihovi elementi (oglišča, povezave in lica), medtem ko je geometrijska reprezentacija hiperzemljevida vložena v evklidski prostor E^3 ; v tem primeru je vsako lice homeomorfno 2-disku, povezave so homeomorfne intervalom $[0, 1]$, oglišča pa so predstavljena s točkami.

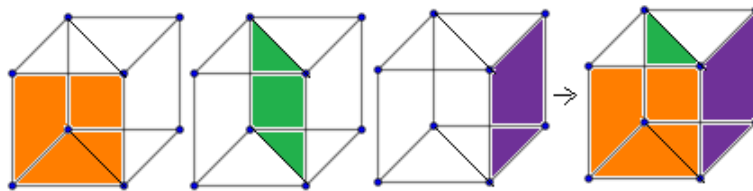
Definicija 35 (HIPERZEMLJEVID:) *Hiperzemljevid \mathcal{H} je (bodisi geometrijski bodisi kombinatoričen) objekt, za katerega velja:*

i) Sestoji iz treh vrst elementov, imenovanih oglišča, povezave (pari oglišč) in lica (cikli oglišč), in vsaka dva ta objekta sta lahko incidentna ali ne.

ii) Za vsak hiperzemljevid z v oglišči, e povezavi in f lici bomo rekli, da pripada razredu $\mathcal{M}(v, e, f)$.

iii) Hiperzemljevid, ki ima natančno k lic incidentnih z vsako povezavo, imenujemo k -hiperzemljevid.

iv) Zemljevid je hiperzemljevid, ki zadošča dodatnemu pogoju: vsaka povezava je incidentna največ dvema licema (a lahko je incidentna istemu licu dvakrat!).



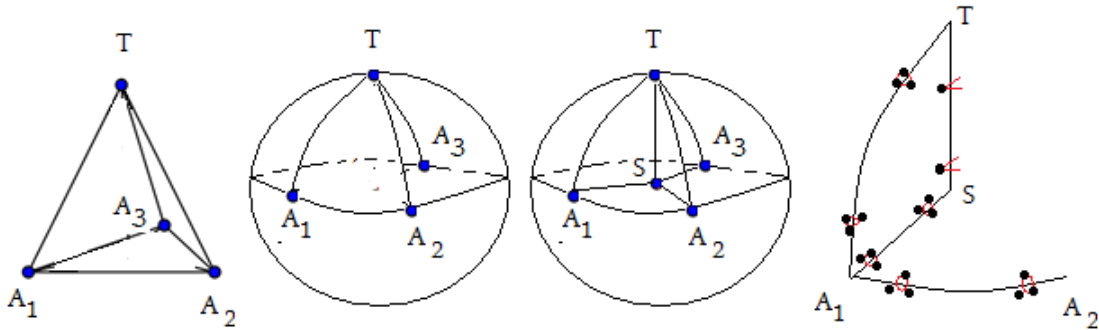
Slika 33: Tri lica incidentna z isto stranico.

v) trojice $\Phi(v, e, f)$ lic f , njim incidentnih stranic e in njim incidentnih oglišč v imenujemo prapori; vsak prapor ima 0-soseda $\Phi(v', e, f)$, ki se od Φ razlikuje le v oglišču, 1-soseda $\Phi(v, e', f)$, ki se od Φ razlikuje le v stranici, in množico 2-sosedov, ki se od Φ razlikujejo le v licu – z izjemo robnih praporov (katerih stranica e je robna), ki nimajo 2-sosedov. Tako dobljeni graf imenujemo graf praporov hiperzemljevida, njegov kvocientni graf glede na izbrano grupo simetrij pa simetrijski graf $S(H)$ hiperzemljevida.

Orbite hiperzemljevidov se obnašajo presenetljivo drugače kot orbite zemljevidov (tako se npr. dokaza Trditve 6 ne da posplošiti na hiperzemljevide).

Izrek 14 (ORBITE HIPERZEMLJEVIDOV:) *Pri hiperzemljevidih lahko obstajajo zrcaljenja, ki ohranjajo posamezne prapore (česar pri zemljevidih ni). Posledično pri hiperzemljevidih po_R ne deli vselej po , po ne deli vselej p , in orbite praporov so lahko različno velike.*

Dokaz. Vzemimo (sferično) n -piramido $\mathcal{M}(n+1, 2n, n+1)$ z n »ekvatorialnimi« oglišči A_1, \dots, A_n in vrhom T v severnem polu sfere. Dodajmo k njenim $n+1$ licem n (»ekvatorialnih«) n -kotnikov $A_i A_{i+1} S$, kjer je S središče krogle, nato pa še n (»poldnevniških«) trikotnikov $A_i S T$. Tako dobimo hiperzemljevid $\mathcal{M}'(n+2, 3n+1, 3n+1)$ z dodatnimi $2n$ lici, dodatnimi $n+1$ povezavami in dodatnim ogliščem (S). Če je $n=3$, potem je $\mathcal{M}'(5, 10, 10)$ očitno 3-hiperzemljevid (Slika 34). Njegov graf praporov ima po 6 praporov vzdolž vsake od 10 stranic. Rotacijskih orbit praporov je $po_R = 6 \times 3 + 2 \times 1 = 20$, zrcalno-rotacijskih orbit praporov pa $po = 4 \times 2 + 3 \times 1 + 2 \times 1 = 13$ (7 orbit ima po 6 praporov, 6 pa po 3). Prapori lic $A_1 S T$ se pri zrcaljenju prek ravnine tega lica ohranjajo. \square



Slika 34: 3-hiperzemljevid $\mathcal{M}'(5, 10, 10)$, dobljen iz sferne 3-piramide.

Lahek način, kako lahko dobimo še več primerov 3-hiperzemljevidov, katerih lica so regularni poligoni, regularne zvezde in pravokotniki ali štirikotniki), je opisan v naslednji trditvi.

Izrek 15 (HIPERZEMLJEVIDI IZ ZEMLJEVIDOV S SREDIŠČNIM ZRCALJENJEM:) *Vsak konveksen polieder \mathcal{M} , ki ima središčno zrcaljenje, ki pošlje vsak element x poliedra \mathcal{M} v nasprotni element x^* , lahko vložimo v hiperzemljevid \mathcal{M}' z istim številom oglišč na najmanj dva načina:*

- a) tako da dodamo vsa možna pravokotna lica uvu^*v^* ,
- b) tako da dodamo vsa možna štirikotna »zasukana« lica uu^*v^*v . Če je \mathcal{M} 3-regularen, potem ta konstrukcija proizvede 3-hiperzemljevid \mathcal{M}' .

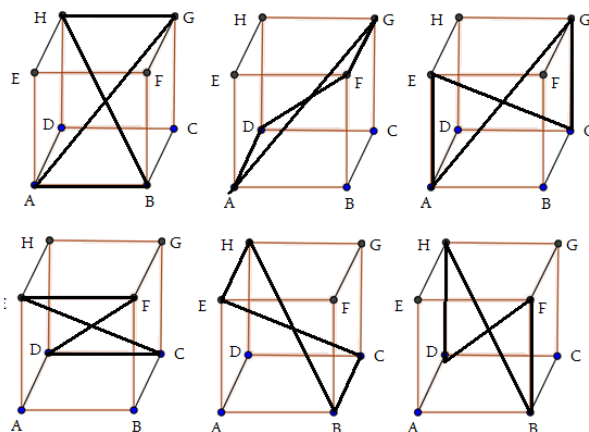
Dokaz. a) Naj bo \mathcal{M} konveksen polieder, ki ima središčno zrcaljenje. Naj bo središče c inverzije začetna točka vektorjev cv in cw , ki kažeta v začetno točko v in končno točko w povezave $e = vw$. Lahko je videti, da sta za vsako povezavo $e = vw$ vektorja $e = vw = cw - cv$ and $e^* = v^*w^* = cw^* - cv^* = -e$ nasprotna, torej vzporedna. Trikotnika uvc in u^*v^*c sta skladna in ležita v isti ravnini, podobno trikotnika vcu^* in ucv^* . Torej je uvu^*v^* pravokotnik. Torej, če povežemo pare e in e^* s takimi pravokotniki, dobimo hiperzemljevid \mathcal{M}' ki ima isto število oglišč kot \mathcal{M} . S tem je dokazana točka a). b) Če dodamo vsa možna štirikotna »ukrivljena« lica uu^*v^*v , dobimo $e/2$ novih lic in $v/2$ novih povezav. Če ima oglišče u valenco k v \mathcal{M} , potem je povezava uu^* incidentna s k novimi lici. Torej, če je $k = 3$ za vsak u iz \mathcal{M} , potem je \mathcal{M}' 3-regularen.

Konstrukcija a) transformira kocko v 3-hiperzemljevid z $12/2 = 6$ dodatnimi lici ($ABGH, DAFG, EACG, EFCD, HEBC, BFHD$) in 12 dodatnimi povezavami ($EH, BG, ED, FC, AC, EG, BD, FH, EF, DG, BE, CH$), medtem ko konstrukcija b) transformira kocko v 3-hiperzemljevid z $12/2 = 6$ dodatnimi lici ($ABHG, DAGF, EAGC, EFDC, HECE, BFDH$) in $8/2 = 4$ dodatnimi povezavami (AG, BH, CE, DF) (slika 35).

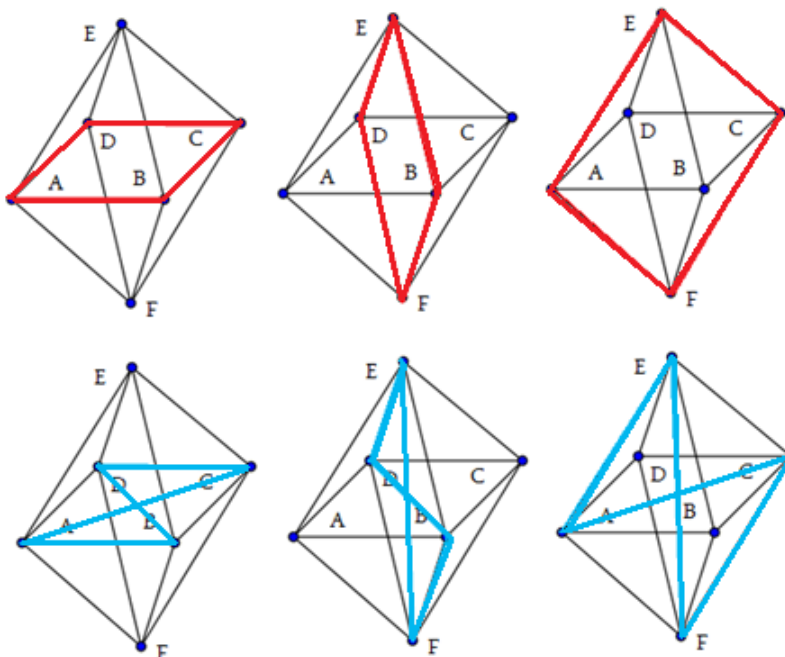
Podobno, a) transformira oktaeder v 3-hiperzemljevid s $3 = 6/2$ dodatnimi lici ($ABCD, EDFB, EAFB$) in istim številom povezav, medtem ko konstrukcija b) transformira oktaeder v 3-hiperpovezavo z $3 = 6/2$ dodatnimi lici ($ABDC, EDBF, EACF$) in tremi dodatnimi povezavami (AC, BD, EF) (slika 36).

Ali je vsak $(k + 1)$ -hiperzemljevid mogoče dobiti tako, da dodamo nekaj oglišč, povezav in lic k nekemu k -hiperzemljevidu? Odgovor je presenetljiv: ne!

Trditev 28 (»IREducIBILNI« HIPERZEMLJEVIDI:) *Obstajajo 3-hiperzemljevidi, ki jih ni mogoče dobiti z dodajanjem nekaj lic, povezav in oglišč k nekemu zemljevidu.*

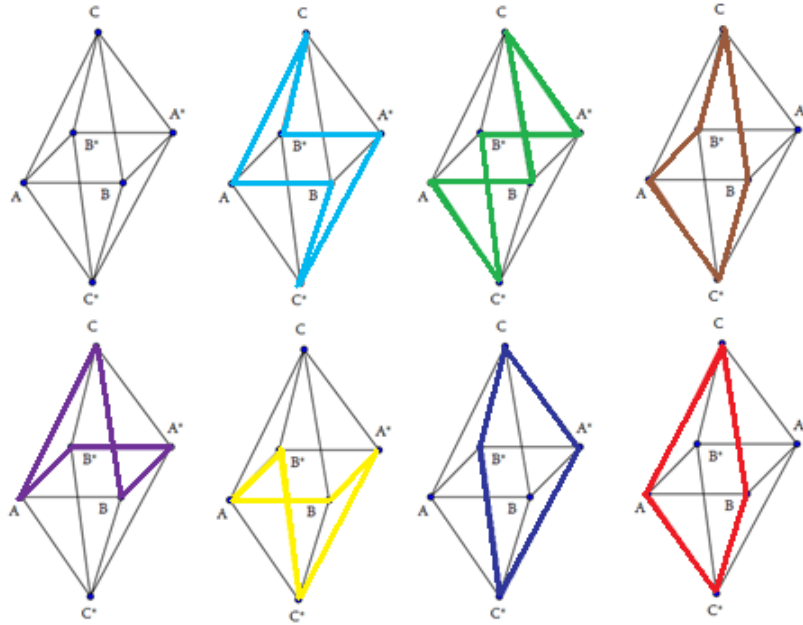


Slika 35: Dodana zasukana lica v kocki.



Slika 36: Dodana pravokotna in zasukana lica v oktaedru.

Dokaz. Vzemimo oktaeder s pari nasprotnih oglišč A, A^*, B, B^*, C, C^* in definirajmo hiperzemljevid \mathcal{M} z naslednjimi sedmimi lici: $CABC^*A^*B^*$, $CBAC^*B^*A^*$, $CB^*AC^*BA^*$, $B^*ABA^*C^*$, CAB^*A^*B , CAC^*B in $CB^*C^*A^*$. Lahko je videti, da je to 3-hiperzemljevid in da ne moremo izpustiti nekaj njegovih lic, povezav in oglišč in dobiti 2-hiperzemljevid (glej sliko 37) \square .



Slika 37: Sedem lic ireducibilnega 3-hiperzemljevida.

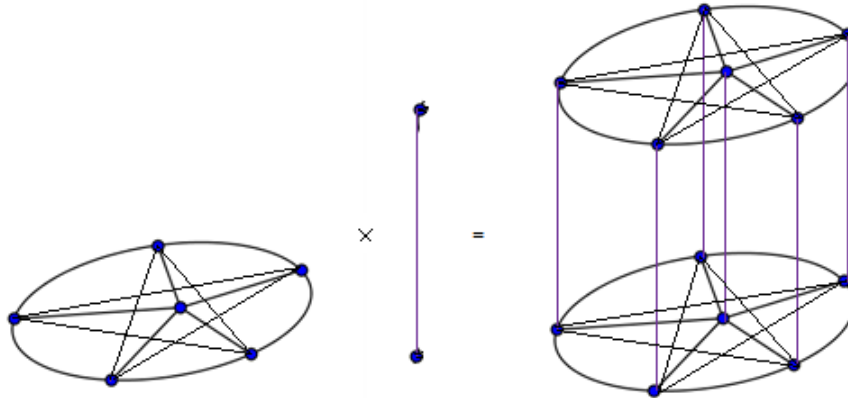
Torej ima smisel naslednja definicija:

Definicija 36 (IREducIBILEN HIPERZEMLJEVID:) *k*-hiperzemljevid je ireducibilen, če ga ni mogoče konstruirati tako, da dodamo nekaj oglišč, povezav in lic nekemu $(k - 1)$ -hiperzemljevidu.

Primere reducibilnih 3-hiperzemljevidov lahko dobimo iz kateregakoli 3-regularnega zemljevida z naslednjim postopkom:

Trditev 29 (KONSTRUKCIJA PRIMEROV REDUCIBILNIH 3-HIPERZEMLJEVIDOV:) *Za vsak k-regularen zemljevid \mathcal{M} (vsako od njegovih oglišč je incidentno s k povezavami) je njegov kartezični produkt s potjo na dveh ogliščih $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \times P_2$ neki $(k + 1)$ -regularen hiperzemljevid (vsako njegovo oglišče je incidentno s $k + 1$ povezavami); vsaka njegova povezava je incidentna z bodisi tremi bodisi k lici in vsako od njegovih oglišč je incidentno s $k + k$ »starimi« in »novimi« lici. Če je $k = 3$ potem je \mathcal{M}' 3-hiperzemljevid.*

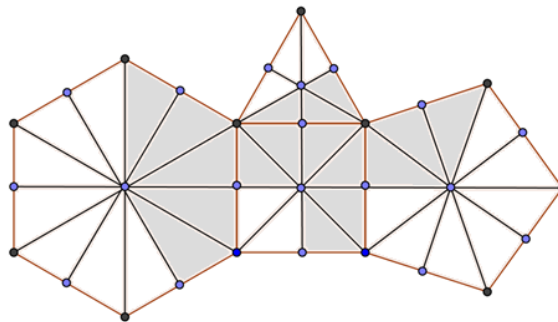
Dokaz. Obstajata dve vrsti povezav in tri vrste lic v \mathcal{M}' : vsaki povezavi e in vsakemu licu f iz \mathcal{M} pripadata dve povezavi (e^0 in e^1) in dve lici (f^0 in f^1) v \mathcal{M}' in vsakemu oglišču v in povezavi e iz \mathcal{M} pripada povezava v^0v^1 in štirikotno lice, ki povezuje e^0 in e^1 v \mathcal{M}' . Torej, »kopije« povezav so incidentne enemu licu več kot prej ($2 + 1 = 3$), in »nove« povezave, dobljene iz oglišč, so sosedne k licem, dobljenim iz povezav.

Slika 38: K_6 , P_2 in $K_6 \times P_2$.

Definicija 37 (ULOMLJEN ZEMLJEVID:): *Ulomljen zemljevid \mathcal{M}' razreda \mathcal{M}_D je zemljevid, ki ga dobimo iz zemljevida ali hiperzemljevida \mathcal{M} tako, da izbrišemo neko množico D njegovih praporov (Slika 39). Torej lahko vsebuje dele 0-1 ciklov, 1-2 ciklov in 2-0 ciklov praporov (torej ulomke tipa $\frac{m}{2n}f$, kjer $m < 2n$ sestoji iz katerihkoli m trikotnikov iz baricentrične subdivizije poligonalnega ali zvezdnega lica f z n oglišči).*

Tako dobimo naslednjo hierarhijo razredov: zemljevidi \subset hiperzemljevidi \subset ulomljeni zemljevidi.

Simetrijske grafe lahko očitno definiramo tudi za ulomljene zemljevide. Ulomljene zemljevide smo dejansko že srečali kot simetrijske grafe geometrijskih molekul (npr. Slika 32).



Slika 39: Ulomljeni zemljevid s strukturo formulo $6_{5/12}5_{3/10}4_{6/8}3_{3/6}$ in izračun števila njegovih praporov: $2 \cdot (\frac{5}{12}6 + \frac{6}{8}4 + \frac{3}{6}3 + \frac{3}{5}5) = 17$.

4.2 Simetrijski grafi konfiguracij

Osnovna ideja: Simetrijske grafe lahko definiramo tudi za t.i. »geometrijske konfiguracije«. Pravzaprav lahko prav s pomočjo 0-1 ciklov praporov najenostavneje definiramo lica konfiguracij, s tem pa tudi zemljevid, prirejen konfiguraciji. Ker je ta zemljevid že po konstrukciji razdeljen na prapore, lahko torej vsaki konfiguraciji priredimo njen graf praporov; kvocientni graf tega grafa praporov glede na grupo simetrij konfiguracije je tedaj simetrijski graf konfiguracije. Če ima konfiguracija kakšno rotacijsko simetrijo, lahko torej poenostavimo njen grafični prikaz na ta način, da narišemo le tisti njen del, ki pripada ustrezni rotacijski fundamentalni domeni (ta postopek smo že spoznali in uporabili pri poliedrih in molekulah).

V tem razdelku predstavim, sledeč terminologiji v [14] in [42], samo nekaj osnovnih definicij, primerov in dejstev (označenih D_i , E_i , F_i) v zvezi s konfiguracijami ter njihovimi grafi praporov in simetrijskimi grafi. Ta osnovna predstavitev konfiguracij, skupaj z zgoraj omenjeno osnovno idejo, nakazuje nekatere možne smeri nadaljnega raziskovanja različnih problemov v zvezi s konfiguracijami z vidika njihovih grafov praporov in simetrijskih grafov.

D1. *Realna projektivna ravnina* je ploskev, dobljena iz sfere S^2 z identifikacijo vseh parov njenih nasprotnih točk. Lahko jo predstavimo kot krog z identificiranimi pari nasprotnih točk na robu.

D2. *Evklidska ravnina z dodano točko v neskončnosti* ustreza sferi S^2 . Projekcija s severnega pola N (ki predstavlja točko v neskončnosti) vpelje bijekcijo med $S^2 - N$ in evklidsko ravnino (stereografska projekcija).

D3. *Kombinatorična konfiguracija* C je urejena trojica (V, B, I) , kjer so elementi V imenovani vozlišča, elementi L pa bloki ali premice, in obstaja incidenčna relacija $I \subseteq V \times B$.

D4. *Levičev graf* $L(C)$ konfiguracije C je dvodelen graf, katerega črna in bela vozlišča ustrezajo ogliščem in premicam C , in katerega povezave povezujejo incidenčne pare vozlišč in povezav v C .

D5. V *geometrijski konfiguraciji* $G = G(C)$ so premice C predstavljene s premicami ali s končnimi odseki premic na evklidski ravnini (z dodano točko v neskončnosti) ali v realni projektivni ravnini, relacija $(v, b) \in I$ pa implicira $v \in b$. Medtem ko se vsaki dve premici na projektivni ravnini sekata v natančno eni točki, pa vsaka presečna točka dveh premic ni nujno vozlišče G .

D6. *Kombinatorična konfiguracija*, v kateri je vsako oglišče incidentno z r premicami, vsaka premica pa je incidentna s k oglišči, se označi takole: (v_r, b_k) . Če je $r = k$, potem takšno konfiguracijo imenujemo *uravnotežena konfiguracija* in jo označimo v_r .

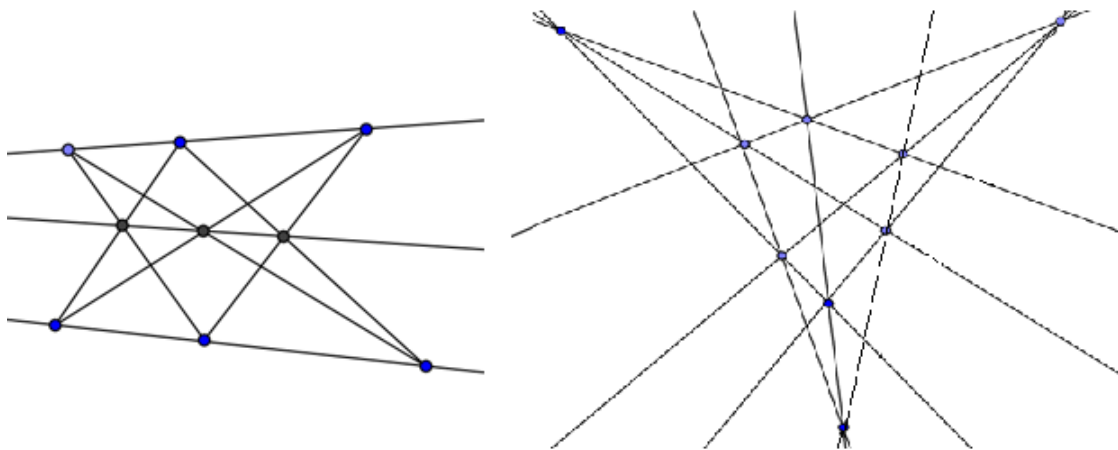
F1. Če je $G = (v_r, b_k)$ potem je $vr = bk$.

D7. Unijo vseh poligonov (z robom in notranjostjo) s samo končno mnogo povezavami (odseki premic med dvema ogliščema konfiguracije G , takšne, da ni nobenega drugega oglišča G med njima), imenujemo *končna lupina* $F(G)$ konfiguracije G .

F2. Očitno je $F(G)$ povezana in obstaja enolično ciklično zaporedje povezav na robu $F(G)$. Lahko se zgodi, da presečna točka $P_i = e_i \cap e_{i+1}$ dveh takšnih zaporednih povezav ni vozlišče konfiguracije.

D8. Ciklično zaporedje števil $s(G) = (n_1, n_2, \dots, n_s)$, kjer je n_i število vozlišč konfiguracije na i -ti robni povezavi, imenujemo *signatura konfiguracije* G .

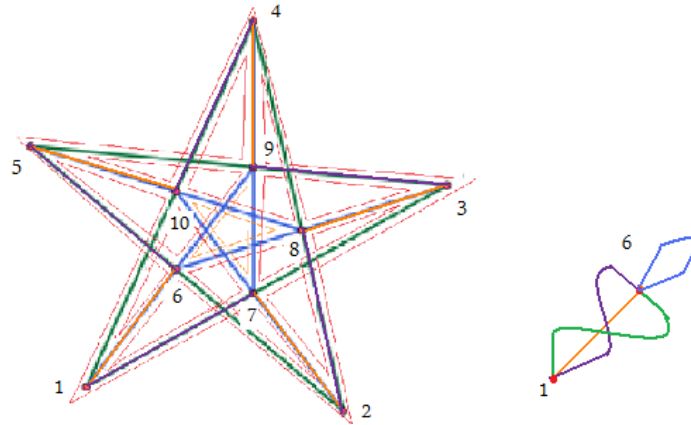
E1. Obstajajo lahko geometrijske konfiguracije, ki ustrezajo isti kombinatorični konfiguraciji, imajo pa različne signature. Na Sliki 40 sta dve geometrijski konfiguraciji G_1 in G_2 , ki ustrezata dobro znani Pappusovi konfiguraciji, ki je ena od treh 9_3 kombinatoričnih konfiguracij (PISANSKI, SERVATIUS, [42], str. 6–9). Lahko je videti, da sta njuni signaturi $s(G_1) = (3, 2, 2, 3, 2, 2)$ in $s(G_2) = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$.



Slika 40: Dve geometrijski konfiguraciji (9_3) z različnima signaturama.

D9. *Vloženi poligoni* geometrijske konfiguracije $G = G(C)$ so definirani takole: postavi svinčnik v bližino poljubne povezave (vendar ne na njo); potuj vzdolž te povezave, dokler skoraj ne dosežeš naslednjega vozlišča konfiguracije; nato nadaljuj vzdolž naslednje premice do naslednjega vozlišča konfiguracije; ponavljaj ta postopek tako dolgo, dokler se ne vrneš v začetno točko. Vložene poligone lahko na enak način definiramo tudi za grafe, vložene v ravnino (slika 41).

D10. Naj bo $G = G(C)$ poljubna geometrijska konfiguracija. Potem je *zemljevid* $M(G(C))$ konfiguracije $G(C)$ definiran takole: Njegova vozlišča so vozlišča konfiguracije G . Vsaka premica b konfiguracije je razdeljena (z zaporedjem v_1, v_2, \dots, v_k vozlišč, incidentnih z njo) na k povezav $e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3 \dots, e_{k-1} = v_{k-1}v_k, e_k = v_kv_1$.



Slika 41: Levo: dva vložena poligona grafa, dobljenega iz konfiguracije $(10_3, 10_3)$, če od vsake premice ohranimo le končne odseke med oglišči; desno: zemljevid rotacijskih orbit z dvema orbitama oglišč in štirimi orbitami povezav.

Lica tega zemljevida ustrezajo vložnim poligonom konfiguracije (v [42], str. 125–126 je dana analogna konstrukcija za zemljevide namesto konfiguracije, je pa definirana s pomočjo cikličnih zaporedij polpovezav, in jo imenujemo *projekcijski zemljevid*).

D11. Prapori zemljevida $M(G(C)) = M(G)$ so definirani kot urejene trojice $\Phi = (v, e, f)$.

F2. Vsakemu praporu $\Phi = (v, e, f)$ ustrezajo 0-sosedni, 1-sosedni in 2-sosedni prapori $\Phi^0 = (v', e, f)$, $\Phi^1 = (v, e', f)$ in $\Phi^2 = (v, e, f')$, ki se razlikujejo od Φ samo v oglišču, povezavi ali licu.

E2. Če premice konfiguracije pripadajo projektivni ravnini, je 0-sosedni prapor prapora (v, e, f) vzdolž poltraka z začetkom v v »nasprotni« prapor (glej Sliko 42). Torej je v grafu praporov konfiguracije $(1_1, 2_2)$ na sliki 42 0-sosedni prapor prapora 1 prapor $1^0 = 8$, podobno je $4^0 = 5$, $12^0 = 13$, $16^0 = 9$.

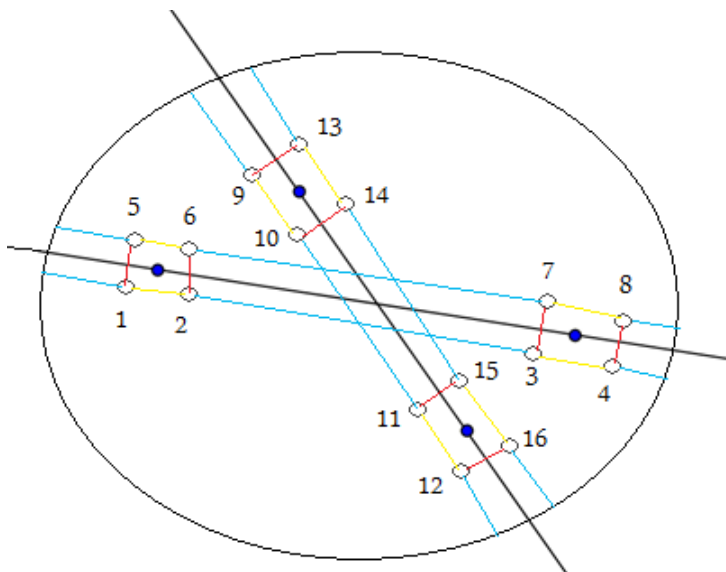
D12. Ustrezni 3-regularni povezavno označeni graf imenujemo *graf praporov* $F(G)$ konfiguracije G .

F3. 0-1 cikli praporov: $\Phi, \Phi^0, \Phi^{01}, \Phi^{010}, \Phi^{0101}, \dots$ ustrezajo vložnim poligonom konfiguracije.

D13. Oglišča, povezave, lica in prapori $M(G)$ so štirje tipi *elementov* konfiguracije G .

D14. Naj bo $S(G) = Rot(G) \cup Refl(G)$ grupa simetrij G (t.j. grupa rotacij $Rot(G)$ ali zrcaljenj $Refl(G)$ prek premice evklidskega prostora, ki ohranja konfiguracijo G).

F4. Poljubna simetrija $s \in S(G)$ inducira oznake povezav ohranjajoč avtomorfizem grafa praporov $F(G)$.

Slika 42: Graf praporov konfiguracije $(1_1, 2_2)$

D15. Dva elementa x in y (istega tipa) konfiguracije G ležita v isti *orbiti* (oglišč, povezav, lic ali praporov), če obstaja simetrija $s \in S(G)$, tako da je $s(x) = y$.

D16. Graf $T_R(G)$, katerega oglišča so rotacijske orbite praporov od G in katerega povezave so rotacijske orbite povezav G , imenujemo *rotacijski simetrijski graf* G .

D16. Graf $T(G)$, katerega oglišča so orbite praporov konfiguracije G in katerega povezave so orbite povezav od G , imenujemo *simetrijski graf konfiguracije* G .

F5. Za vsako (ravninsko) geometrijsko konfiguracijo G je njena grupa rotacij ciklična grupa $Rot(G) = C_n$ za nek $n \geq 1$.

Mimogrede smo v tem razdelku ugotovili tudi (slika 41), da lahko definiramo grafe praporov tudi za grafe, necelično vložene v ravnino.

Naj sklenem ta razdelek z nekaj predlogi za nadaljnje raziskovanje:

1) Simetrijske grafe, narisane na fundamentalni domeni, je morda mogoče uporabiti za konstruiranje konfiguracij.

2) S pomočjo simetrijskih grafov bi lahko našli npr. vse teoretično možne konfiguracije z dvema rotacijskima orbitama vozlišč in največ 5 premicami, incidentnimi vsakemu vozlišču (potem pa bi za vsako od dobljenih možnosti morali še preveriti, ali se jo da realizirati kot geometrijsko konfiguracijo).

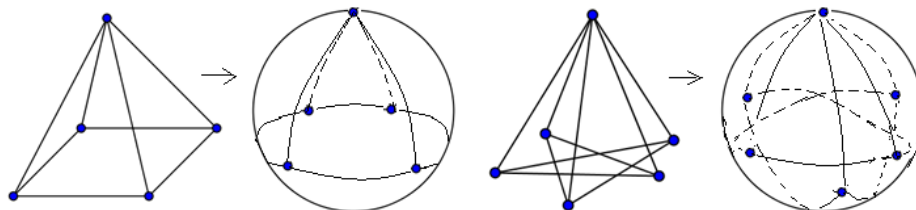
3) Če za dve geometrijski konfiguraciji pokažemo, da nimata izomorfnih grafov praporov, morata ustrezati kombinatorično različnim konfiguracijama.

4.3 Uporaba simetrijskih grafov pri sferoedrih in sfernih molekulah

Skoraj vsi poliedri, s katerimi so se matematiki v zgodovini ukvarjali, so tako ali drugače povezani s sfero (spomnimo se, da lahko vsem uniformnih poliedrom očrtamo sfero, vsa Johnsonova telesa pa imajo plašč, homeomorfen sferi); šele v novejšem času raziskujejo tudi poliedre na torusu⁷. Že Platonu, po katerem se imenujejo najregularnejši poliedri, je sfera veljala za najpopolnejše telo (verjetno tudi zato, ker ima največ simetrij). Nam pa bo v tem razdelku sfera (z radijem 1) služila kot prizorišče oziroma kraj srečanja, na katerem bomo lahko simultano obravnavali dva glavna razreda objektov, katerih simetrijski grafi nas v tem delu zanimajo: poliedre (sferoedre) in (sferne) molekule.

4.3.1 Osnovni pojmi

Še enkrat se spomnimo na razliko med pojmi *sferični polieder*, *sferni polieder* in *sferoeder*, kot smo jih definirali v Definiciji 7: v sferičnem poliedru se povezave – glavni krogelni loki – sekajo le v ogliščih poliedra, v sferoedru se lahko sekajo tudi izven oglišč, sferni polieder pa ima ravninska lica in se s središčno projekcijo projicira na neki sferoeder (slika 43). Torej je vsak sferoeder sferični polieder, ne velja pa obratno.



Slika 43: Konveksen in ustrezni sferičen polieder ter nekonveksen sferni polieder in ustrezni sferoeder.

Definicija 38 (SFERNA MOLEKULA:): *Sferna molekula je molekula M z ravninskimi lici, ki ji lahko očrtamo sfero (torej vsa njena oglišča ležijo na sferi). Ustrezni molekuli na sferi pravimo sferična molekula in jo označimo M^* . Če so vsa lica sferne molekule pravilni poligoni ali pravilne zvezde, ji pravimo regularna sferna molekula.*

⁷En tak primer so npr. STEWART-ovi toroidi [48], katerih slike ter njihove zrcalne ravnine ter osi in stopnje njihovih rotacijskih simetrij so prikazane tudi v računalniškem programu Great Stella. Drug tak primer pa so tlakovanja torusa s šestkotnimi lici – toroidni poliheksi. Tako npr. KIRBY argumentira, da je – čeprav ustrezne policiklične kemijske molekule doslej še niso znane – vendarle smiselno raziskovati njihove lastnosti, npr. njihove kekuléjske strukture, saj bi stabilnost takšnih molekul, ki ne vsebujejo petkotniških ciklov, lahko bila celo večja kot pri buckminsterskem fullerenu C_{60} [29], str. 1945, 1951 (in tudi pri drugih sfernih fulerenih, ki vselej vsebujejo po 12 petkotniških ciklov).

Kot smo jih definirali (v Definiciji 7), so sferni poliedri isto kot sferne molekule brez roba! Ker ima sfera bogatejšo grupo simetrij kot ravnina, se na sferi lahko pojavljajo tudi molekule z bogatejšo grupo simetrij, kot jo imajo ravninske molekule (katerih grupa simetrij je, kot že vemo, vselej podgrupa neke diedrske grupe D_n)⁸.

Primer. Če v prisekanem ikozidodekaedru (10.3.4), projiciranem na sfero, izbrišemo vseh 12 desetkotniških lic, dobimo sferično molekulo z 20 šestkotniškimi in 30 trikotniškimi lici ter 12 robnimi komponentami s po 10 robnimi stranicami; ta molekula ima grupo simetrij ikozaedra.

Po zgledu ravninskih benzenoidov definirajmo glede na število notranjih oglišč n_i še splošna pojma peri-kondenziranih in kata-kondenziranih molekul:

Definicija 39 (PERI- IN KATA-KONDEZIRANA MOLEKULA:) *Molekula je peri-kondenzirana, če vsebuje vsaj eno notranje oglišče: $n_i > 0$ (ki ni krajišče nobene robne stranice). Molekula je kata-kondenzirana, če nima notranjih oglišč: $n_i = 0$.*

Definicija 40 (OGLIŠČNI CIKEL LIC IN OGLIŠČNA POT IZ LIC:) *Tudi za robna oglišča lahko definiramo njihov ogliščni vzorec (ki pa ni cikel lic, ampak pot iz paroma sosednih lic, incidentnih danemu oglišču). Da bi razlikovali med ogliščnimi vzorci notranjih in robnih točk, bomo uporabljali izraza ogliščni cikel lic in ogliščna pot iz lic.*

4.3.2 Problem določitve nekonveksnih poliedrov razreda \mathbb{P}

Kot smo že omenili, razred regularnih nekonveksnih poliedrov razreda \mathbb{P} še ni sistematiziran. Regularni sferični poliedri pa so dobro znani in raziskani (njihova klasifikacija glede na ustrezne simetrijske grupe je npr. opisana v Wikipediji [51]). Če povežemo ti dve dejstvi, dobimo naslednjo idejo: Morda je mogoče razmeroma enostavno enumerirati tudi regularne sferoedre? Videli bomo, da je to res!

V tem razdelku predstavim metodo (iz treh korakov), po kateri bo problem enumeracije nekonveksnih poliedrov mogoče algoritemsko rešiti (s pomočjo računalnikov) vsaj za podrazred regularnih sfernih nekonveksnih poliedrov.

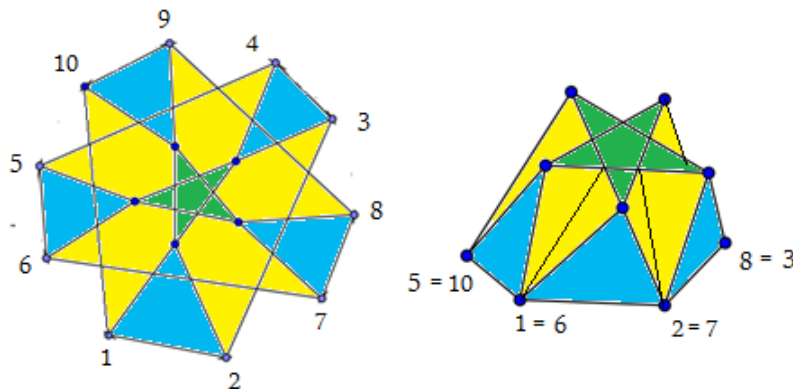
(ENUMERACIJA REGULARNIH SFERNIH NEKONVEKSNIH POLIEDROV – 1. KORAK:) Vsekakor lahko vsak nekonveksen regularen polieder (iz njegovega baricentra) projiciramo na (dovolj veliko) sfero (ki ta polieder vsebuje v svoji notranjosti), tako da so stranice glavni krogelni loki (ne več nujno enake dolžine); pri tem se (tudi če so vsa lica poliedra konveksna) lahko zgodi, da se projekcije stranic na sferi sekajo, in da je ista točka na sferi v notranjosti več lic!

⁸Ker se da (z izjemo sfere!) vsako orientabilno ploskev dobiti iz nekega $4n$ -kotnika s primerno identifikacijo parov njegovih usmerjenih stranic [8], str. 24, načeloma ni razloga, da se ne bi v prihodnosti matematiki ukvarjali tudi s poliedri in molekulami na splošnejših ploskvah.

Primer. Če označimo z L maksimalno število lic, v katerih se nahaja neka točka sfere, potem je npr. za sferoeder, dobljen iz pentagamske piramide, $L = 2$.

Obstoj nekaterih teles tega razreda lahko *dokažemo* z »dinamično konstrukcijo« (glej spodnji primer), potlej pa jih lahko *shematično prikažemo* npr. s SCHLÄGL-ovim diagramom [6], str. 152 (takšne »kinematične dokaze« je npr. rad uporabljal ARHIMED pri odkrivanju novih trditev, ki jih je nato dokazal še z običajnimi geometrijskimi metodami).

Primer (konstrukcija pentagamskega kuploida). Pentagamski zvezdi v vodoravni legi dodajmo v ravnini zvezde ob vsaki stranici po en kvadrat (to lahko storimo in notranjosti dveh sosednih kvadratov se ne sekata, ker je vsota kotov teh likov v ravnini $90^\circ + 36^\circ + 90^\circ = 144^\circ < 360^\circ$). Zdaj te kvadrate enakomerno »spuščamo« (rotiramo okrog skupne stranice z zvezdo) toliko časa, dokler ne dobimo med dvema sosednima kvadratom kota 60° (to lahko storimo, kajti če bi bili kvadrati pravokotni na ravnino zvezde, bi bil kot med dvema sosednima kvadratom 0° , pri zveznem gibanju od 144° do 0° pa morajo biti zavzeti vsi vmesni koti). Zdaj lahko tja vmes postavimo enakostranični trikotnik. Desetkotni cikel stranic na naši sliki 44, ki dozdevno alternirajo med trikotniki in kvadrati, se dejansko dvakrat navije na petkotni cikel (kjer si vsako stranico tega cikla delita neki kvadrat in trikotnik), ki pa ni rob pravilnega petkotniškega lica ustreznega sfernega poliedra – o tem se lahko prepričamo, če si ogledamo sliko tega poliedra v programu Great Stella (kjer najdemo pod rubriko *Miscellaneous* še nekaj takih teles). Lahko je videti tudi, da je $L = 3$ (nekaj točk je v notranjosti treh lic). Strukturno formulo pentagamskega kuploida bi lahko »po kemijsko« zapisali takole: $(5/2)_4 5_3 3_5$. Zemljevid rotacijskih orbit je sestavljen iz petine pentagamske zvezde ter po enega kvadratnega in trikotnega lica, torej ima strukturno formulo $(5/2)_{1/5} 4_1 3_1$ in število njegovih rotacijskih orbit praporov je enako $po_R = 2 + 8 + 6 = 16$, medtem ko je številno zrcalno-rotacijskih orbit enako $po = 8$.

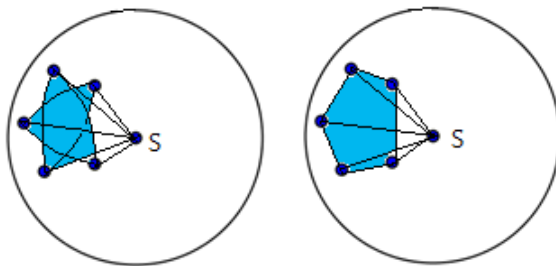


Slika 44: Konstrukcija pentagamskega kuploida.

Sferni poliedri razreda \mathbb{P} so v 1-1 korespondenci z regularnimi sferoedri, kot to potrjuje naslednji izrek:

Izrek 16 (VSAKEMU REGULARNEMU SFEROEDRU PRIPADA USTREZNI SFERNI POLIEDER RAZREDA \mathbb{P}):) *i) Vsakemu regularnemu sferoedru S pripada sferni polieder $P \in \mathbb{P}$, ki se s središčno projekcijo projicira nazaj na S .*

Dokaz. Ker so v S vsi loki poljubnega lica f regularnega sferoedra med oglišči enako dolgi, velja to tudi za ustrezne tetive. Te pa ležijo v isti ravnini (ker smo v definiciji sferoedra to zahtevali za oglišča vsakega lica sferoedra). Ker je f sferno poligonsko ali zvezdno lice sferoedra, morajo tetive tega lica ustrezati robovom osnovne ploskve navadne ali zvezdaste piramide z vrhom v središču krogle (slika 45).



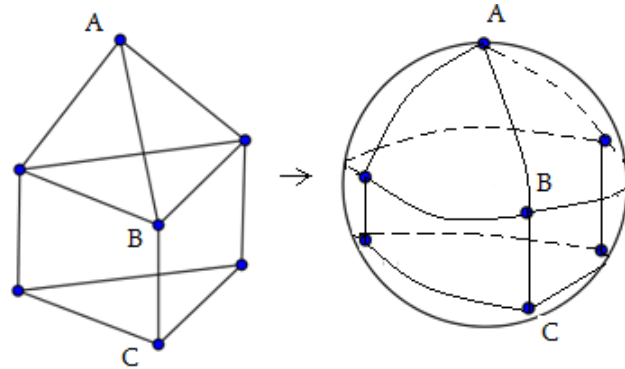
Slika 45: Piramidi z vrhom v središču sfere in oglišči v sfernem pentagamskem in regularnem petkotniškem licu.

Lahko je videti:

Trditev 30 (KDAJ JE $P \in \mathbb{P}$ REGULAREN SFERNI POLIEDER:) *Polieder razreda \mathbb{P} je regularen sferni polieder natanko takrat, ko so vsa njegova oglišča enako oddaljena od njegovega baricentra (v tem primeru mu samo očrtamo sfero in ga iz središča projiciramo nanjo).*

Primer. Vsi uniformni poliedri so regularni sferni poliedri, medtem ko obstajajo Johnsonova telesa, ki niso regularni sferni poliedri, npr. podaljšana trikotna piramida $J7$ ni sferni polieder, kajti v nasprotnem primeru bi (v ogliščih A , B in C – glej sliko 47) v ustreznem sferičnem poliedru za sferične trikotnike in kvadrate z notranjima kotoma α in β dobili protisloven sistem enačb: $3\alpha = 2\pi$, $2\alpha + 2\beta = 2\pi$, $\alpha + 2\beta = 2\pi$.

Primer. Še eno Johnsonovo telo, ki ni sferni polieder, je petkotniška dipiramida $J13$. Obe njeni polovici nastopata kot dela ikozaedra (ki je sferni polieder) npr. ob njegovem severnem in južnem polu, vendar ne izčrpata vsega ikozaedra.



Slika 46: Podaljšana trikotna piramida J7 in ustrezní sferični polieder, ki pa ne more biti regularen sferoeder.

(ENUMERACIJA REGULARNIH SFERNIH NEKONVEKSNIH POLIEDROV – 2. KORAK:)
 Če smo se (v 1. koraku) že odločili, da določimo *sferne* poliedre razreda \mathbb{P} , zakaj ne bi hkrati določili tudi sfernih *molekul*? Ker pa je regularnih sfernih molekul neskončno mnogo (pomislimo le na kata-kondenzirane sferne molekule v obliki verig iz samih enakostraničnih sfernih trikotnikov), je smiselno ta razred razslojiti oz. poskusiti predstaviti kot neskončno unijo končnih podrazredov, odvisnih od nekaj preprostih parametrov. Očitno velja:

Da bi dobili neki *končen* razred regularnih sferoedrov in regularnih sfernih molekul s pravilnimi poligonskimi ali zvezdnimi lici, moramo očitno izključiti naslednje možnosti: a) lica s poljubno mnogo stranicami; b) cikle lic poljubno velike dolžine; c) točke na sferi, ki bi bile pokrite s poljubno velikim številom lic; d) molekule brez ciklov lic.

Torej je smiselno definirati:

Definicija 41 (RAZRED $S(L, M, N)$ REGULARNIH SFERNIH POLIEDROV IN MOLEKUL:)
 Razred $S(L, M, N) = S_{mol}(L, M, N) \cup S_{pol}(L, M, N)$ je sestavljen iz dveh disjunktih podrazredov regularnih sfernih molekul z nepraznim robom $S_{mol}(L, M, N)$ in regularnih sfernih poliedrov $S_{pol}(L, M, N)$, ki zadoščajo pogojem:

- 1) nobena točka sfere ne leži v notranjosti več kot L lic;
- 2) nobeno oglišče nima več kot M sosedov;
- 3) vsi cikli (ne nujno le ogliščni) imajo dolžino največ N ;
- 4) vsaka molekula ima vsaj en cikel lic (ne nujno ogliščni).

Očitno velja, da je unija $\bigcup_{L=1}^{\infty} \bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} S(L, M, N)$ vseh teh razredov ravno razred vseh regularnih sfernih molekul.

(ENUMERACIJA REGULARNIH SFERNIH NEKONVEKSNIH POLIEDROV – 3. KORAK:) Videli bomo (Izrek 18), da je vsak od razredov $S_{pol}(L, M, N)$ končen in da je končen vsak od razredov $S_{mol}(L, M, N) \cap Pe$, kjer je Pe razred peri-kondenziranih molekul.

Lema 3 (VELIKOST STRANIC LIC OGLIŠČNEGA VZORCA NA SFERI:) *i) Vsak ogliščni cikel lic $x = (p_1 \cdots p_m)$ iz pravilnih sfernih mnogokotnikov in sfernih zvezd z enako dolgimi stranicami a lahko na sferi nastopi kvečjemu pri končno mnogo velikostih stranice a : torej obstaja neka končna množica $A(x) = \{a_1, \cdots, a_k\}$, tako da je $a \in A(x)$.*

ii) Če so vsa lica pravilni sferni n -kotniki in je presek notranjosti poljubnih dveh lic prazen ($L = 1$), potem dani ogliščni cikel na sferi lahko nastopi le pri eni velikosti stranice y vseh lic (ki je torej neka funkcija $y = f(x)$ ogliščnega cikla, ki pa seveda ni definirana za prav vsako ciklično zaporedje lic).

Dokaz. i) Vsota kotov $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ danega zaporedja lic na sferi okrog danega oglišča mora biti enaka nekemu celoštevilskemu večkratniku števila 2π . Recimo, da je to res pri neki velikosti stranice – sfernega loka a . Ali lahko a zmanjšamo ali povečamo tako, da se velikost vsote spremeni za neki večkratnik števila 2π ? Načelno da: tako npr. pet trikotniških lic lahko oblikuje ogliščni cikel (3.3.3.3.3) z vsoto kotov 2π kot pri ikozaedru, ali pa ogliščni cikel kot pri pentagramski piramidi (kjer je vsota kotov vseh teh trikotnikov 4π). Toda vsota kotov m regularnih lic, katerih koti so vsi manjši od π , ne more preseči $m\pi$. Torej obstaja kvečjemu končno mnogo naravnih števil k , za katere je $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = k \cdot 2\pi$.

ii) Če so vsa lica konveksna in brez skupnih notranjih točk, je vsota kotov teh lic okrog oglišča enaka 2π . Če a zmanjšamo, se vsi koti lic zmanjšajo in njihova vsota ni več 2π ; če a povečamo, se vsi koti lic povečajo in njihova vsota ni več 2π .

Izrek 17 (ZADOSTEN POGOJ, DA JE ŠTEVILO SFERNIH POLIEDROV IN SFERNIH MOLEKUL Z DANIM OGLIŠČNIM CIKLOM LIC KONČNO MNOGO:) *Naj bo L maksimalno število sfernih lic, ki vsebujejo kakšno točko na sferi. Denimo, da dovolimo le lica z največ M stranicami. Potem obstaja le končno mnogo regularnih sfernih poliedrov in le končno mnogo regularnih peri-kondenziranih sfernih molekul z danim ogliščnim ciklom lic.*

Dokaz. To sledi iz Leme 3 i). Naj bo namreč $y_{min}(x)$ najmanjša možna stranica, ki je možna pri danem ogliščnem ciklu lic x . Ta stranica natančno določa notranje kote vseh pravilnih sfernih mnogokotnikov in zvezd - s tem pa je natančno določena minimalna ploščina vsakega od lic. Od pravilnih n -kotnikov z dano stranico ima najmanjšo ploščino sferni trikotnik. Od pravilnih zvezd na sferi pa ima najmanjšo ploščino pentagramska zvezda. Naj bo q manjša od teh dveh ploščin (trikotnika in zvezde). Ker je vsaka točka sfere kvečjemu v L licih, vsa lica poliedra (ali molekule) skupaj pa sfero pokrijejo največ L -krat, je njihova skupna ploščina največ $L \cdot 4\pi$. To pa pomeni, da je število lic f poliedra ali molekule omejeno navzgor z razmerjem ploščin $f \leq L \cdot 4\pi/q$.

Konstruirajmo zdaj polieder ali molekulo okrog danega ogliščnega cikla lic x tako, da že postavljenim licem na sferi (teh lic je končno mnogo) po vrsti dodajamo vzdolž katerekoli robne stranice (tudi teh je končno mnogo) po eno od končno mnogo možnih lic (vselej izbiramo med največ $M - 2$ poligonskimi in $M - 4$ zvezdastimi lici). Ker je število lic, ki jih lahko na ta način dodamo, ne da bi kakšna točka bila vsebovana v več kot L licih, končno (vemo že, da je manjše od $L \cdot 4\pi/q$), je jasno, da je poliedrov in molekul, ki jih lahko na ta način konstruiramo, lahko le končno mnogo. \square

Izrek 18 (POLIEDROV RAZREDA $S_{pol}(L, M, N)$ IN PERI-KONDEMZIRANIH MOLEKUL RAZREDA $S_{mol}(L, M, N) \cap Pe$ JE KONČNO MNOGO:) *i) Sfernih poliedrov in regularnih peri-kondenziranih sfernih molekul razreda $S_{mol}(L, M, N) \cap Pe$ je končno mnogo;*

ii) Za moč vsakega od razredov $S_{pol}(L, M, N)$ in $S_{mol}(L, M, N) \cap Pe$ lahko dobimo zgornjo mejo, izraženo s parametri L, M, N .

Dokaz. i) Ker je dovoljenih tipov lic končno mnogo ($2M - 6$), je iz njih možno oblikovati le končno mnogo možnih ogliščnih ciklov lic (saj je vsota notranjih kotov lic okrog vsakega oglišča večkratnik kota 2π , ki pa ne sme biti večji od $L \cdot 2\pi$). Za vsakega od teh ogliščnih ciklov lic je (po Izreku 17) ustreznih regularnih sferoedrov in regularnih sfernih molekul le končno mnogo. Vsota končno mnogo končnih števil pa je končna.

ii) Iz GIRARD-ove formule $pl(\Delta(\alpha, \beta, \gamma)) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ neposredno sledi, da je ploščina $pl(j)$ sfernega mnogokotnika $A_1 A_2 \dots A_n$ okrog oglišča u_j , katerega oglišča A_i so središča cikla lic (k_1, k_2, \dots, k_n) okrog u_j , enaka

$$pl(j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i - (n - 2)\pi = \sum_{i=1}^n 2\pi/k_i - (n - 2)\pi.$$

Vsak od teh sfernih mnogokotnikov natančno ustreza 1-2 ciklu praporov okrog danega oglišča (idejo, uporabiti ploščino tega mnogokotnika, sem dobil pri COXETER-ju in MOSER-ju [8]). Vsota ploščin vseh teh sfernih mnogokotnikov pa ne presega L -kratnika ploščine sfere 4π . Naj bo $q = \min\{pl(j)\}$ najmanjša od ploščin, ki jo dobimo na ta način (iz končno mnogo možnih kombinacij parametrov $l \leq L, n \leq N, m \leq M$). Kvocient $4L\pi/q$ je potlej že neka (četudi zelo groba) zgornja meja za število oglišč poliedrov oz. molekul razredov $S_{pol}(L, M, N)$ oz. $S_{mol}(L, M, N) \cap Pe$. Iz te ocene lahko izpeljemo tudi zgornji meji za število lic in stranic elementov teh razredov (saj lahko vsak polieder ali molekulo teh razredov zgradimo tako, da nekemu ciklu lic na sferi postopoma dodajamo po eno lice (vsako oglišče ima kvečjemu N sosedov). \square

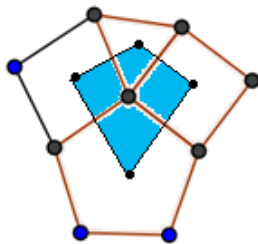
Dejanska določitev števila poliedrov ali molekul danega razreda $S(L, M, N)$ je lahko tudi za majhne vrednosti parametrov kar zahteven problem.

Primer. Oglejmo si razred $S_{mol}(1, 5, 5) \cap Pe$ peri-kondenziranih molekul, katerih lica so le regularni poligoni 3,4,5, v katerih ima cikel lic največ 5 lic, preseki notranjosti lic pa so prazni. V primeru $L = 1$ je vsota ploščin vseh lic pri molekuli z robom manjša od ploščine sfere 4π . Okrog oglišč s ciklom iz treh lic imamo območja s ploščino $pl = 2\pi(1/a+1/b+1/c-1/2)$, okrog oglišč s ciklom iz štirih lic imamo območja s ploščino $pl = 2\pi(1/a + 1/b + 1/c + 1/d - 1)$, okrog oglišč s ciklom iz petih lic imamo območja s ploščino $pl = 2\pi(1/a + 1/b + 1/c + 1/d + 1/e - 3/2)$. Vsi ti izrazi morajo biti pozitivni. Iščemo minimalno pozitivno vrednost q teh ploščin pri pogoju, da za a, b, c, d, e lahko vzamemo le števila 3, 4, 5. Od tod dobimo zgornjo mejo za število oglišč teh molekul: $v \leq 4\pi/q$. Poiskati moramo torej minimum vrednosti največ $3^{M-2} + 4^{M-2} + 5^{M-2}$ izrazov. To je očitno problem, za katerega rešitev lahko uporabimo računalnik.

Za konec tega razdelka samo omenimo dva trika, s katerima lahko bistveno zmanjšamo število možnosti, ki jih je potrebno pregledati:

1) Iz vsakega uniformnega poliedra, pa tudi iz (redkih!) sfernih Johnsonovih teles lahko dobimo obilo informacij o ploščinah sfernih mnogokotnikov pri različnih ogliščnih vzorcih. Tako je npr. v peri-kondenzirani molekuli tipa $L = 1$ z ogliščnim vzorcem ikozaedra (3.3.3.3) največ 20 trikotnih lic. Ker ima vsak drug sferni mnogokotnik iste molekule ploščino večjo od ploščine sfernega trikotnika, je 20 tudi zgornja meja za število vseh takih molekul.

2) Nekateri ogliščni vzorci – cikli lic – so *nekompatibilni* - ne morejo nastopiti pri isti regularni sferni molekuli! Primere takšnih nekompatibilnih ogliščnih vzorcev lahko dobimo npr. iz tistih Johnsonovih teles, ki jim ne moremo očrtati sfere. Tako imamo npr. v podaljšani trikotniški dipiramidi J14 ogliščna vzorca (3.3.3) in (3.3.4.4), ki bi, če bi to telo bilo sferno, dala protisloven sistem enačb $3\alpha = 2\pi$ in $2\alpha + 2\beta = 2\pi$ za notranje kote α in β lic 3 in 4.



Slika 47: Območje okrog oglišča med središči lic s ploščino $2\pi(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1)$.

5 Dodatek

POVZETEK POGLAVJA: Za vsak konveksen polieder \mathcal{P} lahko konstruiramo njegov zemljevid rotacijskih orbit $O_R(\mathcal{P})$, katerega oglišča, povezave in lica so orbite poliedra \mathcal{P} , določene z grupo $\Gamma_R = S_R(\mathcal{P}) = S^+(\mathcal{P})$ vseh rotacijskih simetrij \mathcal{P} . Z uporabo Burnsidove leme ([49], str. 229) lahko pokažemo, da Eulerjeva karakteristika rotacijskih orbit zemljevida $O_R(\mathcal{P})$ vselej leži med -1 and 2 : $E(O_R(\mathcal{P})) \in \{-1, 0, 1, 2\}$ in da so te meje eksaktne. Pokažemo lahko tudi, da je $O_R(\mathcal{P})$ sferičen zemljevid (t.j. homeomorfen zemljevidu na sferi).

5.1 Burnsidova lema in Eulerjevo število rotacijskih orbit

IZHODIŠČNA REFERENCA: Euler je odkril enega od temeljnih izrekov o konveksnih poliedrih, slavno relacijo $v - e + f = 2$ med števili njihovih oglišč v , povezav e in lic f .

NAMEN POGLAVJA: V tem poglavju bomo izpeljali zelo podobno relacijo (vendar ne v obliki enakosti, ampak dvojne neenakosti) glede števila $Eo_R := vo_R - eo_R + fo_R$, kjer so vo_R , eo_R in fo_R števila rotacijskih orbit oglišč, povezav in lic konveksnega poliedra \mathcal{P} . Temu številu bomo rekli Eulerjeva karakteristika rotacijskih orbit danega poliedra (ali na kratko kar Eulerjeva rotacijska karakteristika poliedra).

MOTIVACIJA – ŽELJA, TEORETIČNO POJASNITI EMPIRIČNO ODKRITO DVOJNO NEENAKOST: Neposredno motivacijo za to poglavje sem dobil iz empiričnega opažanja, da vrednosti Eo_R za 92 Johnsonovih teles (t.j. konveksnih poliedrov z regularnimi poligonskimi lici (pri čemer nobeni dve sosedni lici ne smeta ležati v isti ravnini!) in vsaj dvema orbitama oglišč [24]) ostaja v razmeroma majhnem razponu števil (med -1 in 2). Pri računanju števila orbit oglišč, povezav in lic Johnsonovih poliedrov si bomo pomagali s formulami, ki jih bomo izpeljali iz Burnsidove leme.

NOVI REZULTATI: Glavni rezultat tega poglavja je, da relacija $-1 \leq Eo_R \leq 2$ velja za vse konveksne poliedre (Izrek 20). Dokažemo ga z neposredno z uporabo Burnsidove leme. Podobno bomo dobili dvojno neenakost $-2 \leq Eo_R \leq 2$ za zemljevide s konveksnimi lici na torusu. Obravnavali bomo tudi problem določitve zgornje in spodnje meje za število $Eo = vo - eo + fo$, kjer so vo, eo, fo orbite oglišč, povezav in lic, definirane z grupo $G(\mathcal{P})$ vseh simetrij danega konveksnega poliedra \mathcal{P} , vključno z zrcaljenji prek ravnine in s središčno inverzijo. Dokazali bomo, da je $-1 \leq Eo \leq 2 + 2eo_R$.

5.2 Osnovni pojmi in notacija

Naj v, e, f pomenijo števila oglišč, povezav in lic poljubnega zemljevida \mathcal{P} (t.j. vložnega v kompaktno ploskev tako, da je vsako lice homeomorfno disku). Potem je njegova

Eulerjeva karakteristika definirana kot število $E = v - e + f$. Po dobro znani Eulerjevi formuli je $E = 2$ za vsak konveksen polieder. Podobni karakteristiki, označeni $Eo_R = Eo_R(\mathcal{P})$ in $EO = EO(\mathcal{P})$, imenovani *Eulerjeva karakteristika rotacijskih orbit zemljevida* \mathcal{P} in *Eulerjeva karakteristika zrcalno-rotacijskih orbit zemljevida* \mathcal{P} lahko vpeljemo za vsak zemljevid, in določamo spodnje in zgornje meje teh karakteristiki na določenem razredu poliedrov (tu smo to naredili za razred konveksnih poliedrov).

Definicija 42 (EULERJEVA KARAKTERISTIKA ROTACIJSKIH ORBIT ZEMLJEVIDA:) *Naj vo_R, eo_R, fo_R pomenijo števila rotacijskih orbit oglišč, povezav in lic danega zemljevida \mathcal{P} na neki ploskvi S (te orbite so definirane z grupo $G_R(\mathcal{P})$ vseh rotacij evklidskega prostora E^3 , ki ohranjajo \mathcal{P}). Eulerjeva karakteristika rotacijskih orbit zemljevida \mathcal{P} je definirana kot število $Eo_R := vo_R - eo_R + fo_R$.*

Isto število bi lahko definirali tudi drugače – kot Eulerjevo karakteristiko $E = v - e + f$ zemljevidov rotacijskih orbit, katerih oglišča, povezave in lica ustrezajo orbitam oglišč, povezav in lic poliedra \mathcal{P} . Če lahko dokažemo, da za vsak konveksen polieder \mathcal{P} obstaja zemljevid $O_R(\mathcal{P})$, katerega oglišča, povezave in lica ustrezajo orbitam oglišč, povezav in lic poliedra \mathcal{P} (to zlahka sledi npr. iz našega seznama fundamentalnih domen za vseh 17 možnih simetrijskih grup poliedrov), potem je $Eo_R(\mathcal{P}) = E(O_R\mathcal{P})$. Podobno definiramo Eulerjevo karakteristiko (zrcalno-rotacijskih) orbit $EO := vo - eo + fo$, kjer so vo, eo, fo števila orbit oglišč, povezav in lic zemljevida \mathcal{P} .

5.3 Konstrukcija zemljevida rotacijskih orbit $O_R(\mathcal{P})$ konveksnega poliedra \mathcal{P}

Najtežji del tega poglavja je verjetno dokaz izreka, da z grupo rotacij $G_R(\mathcal{P})$ določeni kvocientni zemljevid $O_R(\mathcal{P}) = \mathcal{P}/G_R(\mathcal{P})$ konveksnega poliedra \mathcal{P} (imenovan zemljevid rotacijskih orbit poliedra \mathcal{P}) dejansko obstaja za vsak konveksen polieder \mathcal{P} in da je to nek sferičen zemljevid (dokaz obstoja fundamentalne domene je dan tudi v razdelku 4.5.1 o regularnih zemljevidih in fundamentalnih domenah v [42]).

Skica tega dokaza je podana, čeprav lahko spodnjo in zgornjo mejo za Eo_R najdemo tudi brez uporabe eksistence kvocientnega zemljevida $O_R(\mathcal{P})$.

GRAF PRAPOROV $F(\mathcal{P})$: Vsi ti prapori skupaj z njihovimi grafi praporov sestavljajo graf praporov $F(\mathcal{P})$ poliedra \mathcal{P} .

ROTACIJSKI SIMETRIJSKI GRAF $T_R(\mathcal{P})$: To je kvocient grafa praporov $F(\mathcal{P})$, dobljen z identifikacijo vseh praporov, ki leže v isti rotacijski orbiti.

Trditev 31 (OBSTOJ ZEMLJEVIDA ROTACIJSKIH ORBIT:) *Za vsak konveksen polieder \mathcal{P} obstaja zemljevid $O_R(\mathcal{P})$, katerega oglišča, povezave in lica so rotacijske orbite oglišč, povezav in lic poliedra \mathcal{P} , in ta zemljevid $O_R(\mathcal{P})$, imenovan zemljevid rotacijskih orbit poliedra \mathcal{P} , je sferičen zemljevid (t.j. homeomorfen nekemu zemljevidu na sferi).*

Dokaz. Dokaz lahko razdelimo na naslednje korake:

i) Vsako rotacijsko simetrijo sferičnega poliedra \mathcal{P} lahko opišemo kot avtomorfizem grafa praporov $F(\mathcal{P})$.

ii) Ker je sfera orientabilna ploskev, lahko prapore okrog vsakega oglišča iste rotacijske orbite oštevilčimo z $1, 2, \dots, 2m$; pri tem so praporom iz iste rotacijske orbite dane iste številke in orientacija vseh teh ciklov praporov je ista.

iii) Če je $2m$ praporov okrog pola neke rotacije, potem vsaka rotacija poliedra, ki ohranja ta pol, pošlje lihe prapore $\{1, 3, 5, \dots, 2m - 1\}$ v lihe prapore in sode prapore $\{2, 4, 6, \dots, 2m\}$ v sode prapore.

iv) Grupa vseh rotacij lahko reducira nekatere od teh ciklov praporov okrog nekaterih oglišč v manjše sode cikle $1, 2, \dots, 2k$. Ti cikli, skupaj z informacijo, kaj so 0-, 1- in 2-sosedni prapori vsakega prapora definirajo lokalno orientacijsko shemo (podrobneje opisano v doktoratu prof. Pisanskega s pomočjo usmerjenih lokov na povezavah) okrog vsake orbite oglišč. Takšna lokalna orientacijska shema definira ploskev, v katero je graf lahko vložen. Vsi prapori (trikotniki baricentrične subdivizije poliedra \mathcal{P}) in vse povezave rotacijskega simetrijskega grafa ležijo na sferi. Torej je tudi (\mathcal{P}) sferičen zemljevid.

Skica alternativnega dokaza: Konveksen polieder lahko radialno preslikamo na sfero, tako da se njegove simetrije ohranijo. Zemljevid rotacijskih orbit leži na rotacijski fundamentalni domeni FD_R , ki je določena z grupo rotacijskih simetrij danega poliedra. Ta pa je (po COXETER-MOSER-jevi teoriji in Johnsonovi aplikaciji te teorije na poliedre) sferični mnogokotnik, kateremu rotacije identificirajo stranice tako, da dobimo sfero (da je to res, se prepričamo s podrobnim pregledamo vseh 17 možnih simetrijskih grup oziroma vseh šest njihovih ustreznih rotacijskih podgrup). \square

5.4 Glavni rezultat

Pokazali bomo, da relacija $-1 \leq E_{O_R} \leq 2$ velja za poljuben konveksen polieder.

Trditev 32 (VREDNOSTI E_{O_R} ZA PLATONSKA IN ARHIMEDSKA TELESA:) $E_{O_R} = 1$ za vsako platonsko telo in n -prizme ter n -antiprizme, in $E_{O_R} = 2$ za vsako arhimedsko telo.

Dokaz. V tabeli 14 so dana števila rotacijskih orbit platonskih in arhimedskih teles, ki jih že poznamo. Pet platonskih teles ima samo eno rotacijsko orbito oglišč, povezav in lic. Trinajst arhimedskih teles ima največ 3 rotacijske orbite oglišč in največ 3 rotacijske orbite povezav. \square

razred	telo \mathcal{P}	ogliščni vzorec	vo_R	eo_R	fo_R	EO_R
I.	tetraeder	(3.3.3)	1	1	1	1
I.	oktaeder	(3.3.3.3)	1	1	1	1
I.	kocka	(4.4.4)	1	1	1	1
I.	ikozaeder	(3.3.3.3.3)	1	1	1	1
I.	oktaeder	(5.5.5)	1	1	1	1
II.	kuboktaeder	(3.4.3.4)	1	1	2	2
II.	ikozidodekaeder	(3.5.3.5)	1	1	2	2
III.	prisekani tetraeder	(3.6.6)	1	1	2	2
III.	prisekana kocka	(3.8.8)	1	1	2	2
III.	prisekani oktaeder	(4.6.6)	1	1	2	2
III.	prisekani dodekaeder	(3.10.10)	1	1	2	2
III.	prisekani ikozaeder	(5.6.6)	1	1	2	2
IV.	rombikuboktaeder	(3.4.4.4)	1	2	3	2
IV.	rombikozidodekaeder	(3.4.5.4)	1	2	3	2
V.	prisekani kuboktaeder	(4.6.8)	2	3	3	2
V.	prisekani ikozidodekaeder	(4.6.10)	2	3	3	2
VI.	snub kocka	(3.3.3.3.4)	1	3	3	2
VI.	snub dodekaeder	(3.3.3.3.5)	1	3	3	2
VII.	n -prizma	(4.4.n)	1	2	2	1
VIII.	n -antiprizma	(3.3.n)	1	2	2	1

Tabela 14 : Vrednosti vo_R, eo_R, fo_R za platonska in arhimedska telesa ter za neskončni družini n -prizem in n -antiprizem

Podobne meje za EO_R obstajajo za Johnsonova telesa (t.j. za konveksne poliedre z regularnimi poligonalnimi lici in najmanj dvema orbitama oglišč [24]).

Izrek 19 (MEJE EO_R ZA JOHNSONOVA TELESA:) *Za vsako Johnsonovo telo je $-1 \leq EO_R \leq 2$.*

Ta rezultat je bil stranski produkt in obenem korak h konstrukciji tabele različnih parametrov Johnsonovih teles, danih v članku [31]. Vendar, ker bomo kasneje dokazali (in to neodvisno od te trditve, z uporabo Burnsidove leme), da ista relacija $-1 \leq EO_R \leq 2$ velja za poljuben konveksen polieder (Izrek 20), ni potrebno, da tu poročam, kako sem dobil vrednosti za števila rotacijskih orbit oglišč, robov in lic za vsako od Johnsonovih teles posebej.

Definicija 43 (KONVEKSNO LICE:) *Lice f zemljevida \mathcal{P} na sferi ali na torusu se imenuje konveksno, če za vsak par točk A in B njegovih notranjih točk obstaja geodetska krivulja AB , ki ne gre skozi noben rob zemljevida \mathcal{P} .*

Lahko je videti, da lahko vsak konveksen polieder radialno projiciramo iz njegovega težišča na sfero (in da so projicirana lica na sferi konveksna). Torej vsakemu konveksnemu poliedru pripada zemljevid na sferi (obratno ni res, kajti sferični zemljevid ima lahko tudi dvokotnike, ki se ne pojavijo v nobenem poliedru).

Zdaj lahko formuliramo glavni rezultat tega poglavja:

Izrek 20 (MEJE E_{O_R}): *Natančni spodnji in zgornji meji za E_{O_R} za zemljevide s konveksnimi lici na sferi in torusu sta:*

$$\begin{aligned} -1 &\leq E_{O_R} \leq 2 \text{ za zemljevide na sferi in} \\ -2 &\leq E_{O_R} \leq 2 \text{ za zemljevide na torusu.} \end{aligned}$$

Pri dokazu tega izreka bomo potrebovali nekaj priprav.

Definicija 44 (EULERJEVA POLARNA KARAKTERISTIKA ROTACIJE:): *Naj bo \mathcal{P} zemljevid na sferi ali na torusu in naj bo R_i poljubna rotacija, ki ohranja \mathcal{P} . Poli rotacije R_i so točke, v katerih os rotacije R_i seka rob od \mathcal{P} . Naj $v_p(R_i)$, $e_p(R_i)$, $f_p(R_i)$ pomenijo števila polov v ogliščih, središčih stranic in središčih lic \mathcal{P} . Število $E_p(R_i) := v_p(R_i) - e_p(R_i) + f_p(R_i)$ bomo imenovali Eulerjeva polarna karakteristika rotacije R_i .*

Obstajajo tri možne vrste »rotacij« na torusu: z osjo brez polov, z osjo s štirimi poli in s »krožno osjo«, potekajočo po sredini torusa (tudi ta os je brez polov).

Lema 4 (RELACIJE V ZVEZI Z v_p, e_p, f_p, E_p): *Za vsako rotacijo R_i sferičnega zemljevida \mathcal{P} veljajo naslednje relacije:*

$$\begin{aligned} \{v_p(R_i), e_p(R_i), f_p(R_i)\} &\subseteq \{0, 1, 2\}, \\ v_p(R_i) + e_p(R_i) + f_p(R_i) &= 2, \\ E_p(R_i) &\in \{-2, 0, 2\}, \\ E_p(R_i) &= 2 - 2e_p(R_i). \end{aligned}$$

Če je $e_p = 0$ potem je $E_p = 2$, če $e_p = 1$ potem $E_p = 1$, in če $e_p = 2$ potem $E_p = -2$.

Če je red rotacije R_i večji od 2 (če je torej najmanjši n , za katerega je $R_i^n = I$, večji od 2, potem je $e_p(R_i) = 0$ in $E_p(R_i) = 2$).

Za vsako rotacijo R_i torusnega zemljevida \mathcal{P} veljajo naslednje relacije:

$$\begin{aligned} \{v_p(R_i), e_p(R_i), f_p(R_i)\} &\subseteq \{0, 1, 2, 3, 4\}, \\ v_p(R_i) + e_p(R_i) + f_p(R_i) &\in \{0, 4\}, \\ E_p(R_i) &\in \{-4, -2, 0, 2, 4\}, \end{aligned}$$

Če $v_p(R_i) + e_p(R_i) + f_p(R_i) = 4$, potem $E_p(R_i) = 4 - 2e_p(R_i)$. Če $v_p(R_i) = e_p(R_i) = f_p(R_i) = 0$, potem $E_p(R_i) = 0$.

Dokaz. Vsaka rotacija R_i sferičnega zemljevida \mathcal{P} ima natančno dva pola in vsak pol je bodisi oglišče, središče povezave ali središče lica. Obstaja samo šest urejenih trojic $(v_p(R_i), e_p(R_i), f_p(R_i))$, za katere velja $v_p(R_i) + e_p(R_i) + f_p(R_i) = 2$, in to so: $(2,0,0)$, $(1,0,1)$, $(0,0,2)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ in $(0,2,0)$. Če $e_p = 0$, potem $E_p = 2$, če $e_p = 1$, potem $E_p = 1$, in če $e_p = 2$, potem $E_p = -2$. Torej formula $E_p(R_i) = 2 - e_p(R_i)$ drži. Če je red rotacije R_i večji od 2, potem R_i ne more imeti pola v središču povezave, torej je $e_p(R_i) = 0$ in posledično $E_p(R_i) = v_p - e_p(R_i) + f_p(R_i) = v_p(R_i) + e_p(R_i) + f_p(R_i) = 2$.

Formule za torusne zemljevide se dokažejo na povsem enak način. \square

Lema 5 (BURNSIDOVA LEMA:) *Naj grupa G deluje na neki množici Q . Naj $|G|$ pomeni moč grupe G in naj $|Fix(g)|$ pomeni število tistih elementov a množice Q , ki se ohranjajo pri danem elementu $g \in G$, za katere torej velja: $g(a) = a$. Potem lahko število orbit Qo množice Q izračunamo po formuli*

$$Qo = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|.$$

Če je grupa rotacijskih simetrij sferičnega zemljevida ciklična grupa C_n , potem lahko natančne vrednosti Eulerjeve karakteristike $Eo_R(\mathcal{P})$ dobimo z neposredno uporabo Burnsidove leme.

Trditev 33 (MEJE Eo_R KONVEKSNEGA POLIEDRA S CIKLIČNO GRUPO ROTACIJSKIH SIMETRIJ:) *Naj bo \mathcal{P} konveksen polieder. Če je $G_R(\mathcal{P}) = C_n$, kjer je C_n generirana z rotacijo R_1 (torej je $R_1^n = I$), potem*

$$Eo_R(\mathcal{P}) = 2 - \frac{n-1}{n} \cdot e_p(R_1) \in \{0, 1, 2\}.$$

Dokaz. Identična transformacija ohranja vsa oglišča, povezave in lica, medtem ko preostalih $n - 1$ rotacij ohranja samo pole). Torej dobimo po Burnsidovi lemi in z uporabo Eulerjeve formule $v - e + f = 2$ (ki velja za poljuben konveksen polieder) naslednje formule za števila rotacijskih orbit:

$$vo_R = \frac{1}{n}(v + (n-1)v_p),$$

$$eo_R = \frac{1}{n}(e + (n-1)e_p),$$

$$fo_R = \frac{1}{n}(f + (n-1)f_p),$$

$$Eo_R = \frac{1}{n}(2 + (n-1)E_p(R_1)),$$

in ker $E_p(R_1) \in \{-2, 0, 2\}$, imamo $Eo_R \in \{0, 1, 2\}$.

Če gredo osi rotacije R_1 skozi dve oglišči, dve lici ali skozi eno oglišče in eno lice, je $E_p = 2$ in $E_{oR} = 2$. Če gre os skozi eno oglišče ali en rob ali skozi eno lice in en rob, potem je $n = 2$, $E_p = 1$ in $E_{oR} = 1$. Če gre os skozi dva robova, potem je $n = 2$, $E_p = -2$ in $E_{oR} = 0$. Torej, če $n > 2$, potem $E_o = 2$. Enačba $E_p(R_1) = 2 - 2e_p(R_1)$ implicira $E_{oR}(\mathcal{P}) = \frac{2+(n-1)(2-2e_p(R_1))}{n} = 2 - \frac{n-1}{n} \cdot e_p(R_1) \in \{0, 1, 2\}$. \square

Zdaj pa dokažimo prvi del glavnega rezultata – Izreka 20.

Trditev 34 (MEJE E_{oR} NA SFERI:.) *Naj bo \mathcal{P} sferični zemljevid s konveksnimi lici. Potem je*

$$-1 \leq E_{oR} \leq 2.$$

Dokaz. Naj bo n število elementov v grupi $G_R(\mathcal{P})$. Identična transformacija ohranja vsako oglišče, povezavo in lice. Vsaka druga rotacija R_i ohranja samo $vp_R(R_i)$ oglišč, $ep_R(R_i)$ povezav in $fp_R(R_i)$ lic, in $vp_R(R_i) + ep_R(R_i) + fp_R(R_i) = 2$. Zato, po Burnsidovi lemi:

$$E_{oR} = \frac{1}{n} \left(E + \sum_{i=1}^{i=n-1} E_p(R_i) \right).$$

In tako, ker je maksimalna možna vrednost vsakega $E_p(R_i)$ za sferične zemljevide enaka 2, imamo:

$$\frac{1}{n} (2 + (n-1)2) = 2 \leq E_{oR} \leq \frac{1}{n} (2 + (n-1)2) = 2.$$

Podobno, ker je najmanjša možna vrednost vsakega $E_p(R_i)$ enaka -2 , imamo:

$$E_{oR} \geq \frac{1}{n} (2 + (n-1)(-2)) = \frac{1}{n} (4 + n(-2)) \geq -2 + \frac{4}{n} \geq -1,$$

ker je $\frac{4}{n} > 0$ in ker mora biti E_{oR} celo število. \square

Ali je spodnja meja $E_{oR} = -1$ dejansko dosežena in (če je tako) za katere konveksne poliedre?

Trditev 35 (FORMULA ZA E_{oR}):) *Naj bodo a, b, c števila rotacij R_i v grupi $G_R(\mathcal{P})$ konveksnega poliedra, za katere je karakteristika $E_p(R_i)$ enaka 2, 0 in -2 , v tem vrstnem redu. Če je n moč grupe $G_R(\mathcal{P})$, potem je*

$$E_{oR}(\mathcal{P}) = \frac{1}{n} (2 + a \cdot 2 + c(-2)) = \frac{2}{n} (1 + a - c).$$

Torej je število $1 + a - c$ celoštevilski večkratnik od $\frac{n}{2}$. Števili a in c lahko (za vsako od štirih možnih vrednosti E_{oR}) izrazimo s števili b , n in E_{oR} .

Dokaz. Ta formula sledi neposredno iz Burnsidove leme. Prav tako je jasno, da je

$$a + b + c + 1 = n,$$

torej je

$$a + c = n - b - 1.$$

Enačba $\frac{2}{n}(1 + a - c) = E_{OR}$ implicira $2(1 + a - c) = E_{OR} \cdot n$ in

$$c - a = 1 - \frac{E_{OR} \cdot n}{2}.$$

Torej je $(a + c) + (c - a) = 2c = n - b - 1 + 1 - \frac{E_{OR} \cdot n}{2} = \frac{(2 - E_{OR}) \cdot n}{2} - b$ in

$$c = \frac{(2 - E_{OR})n - 2b}{4}.$$

Podobno dobimo $2a = n - b - 1 - 1 + \frac{E_{OR} \cdot n}{2}$ in zato

$$a = \frac{n \cdot (2 + E_{OR}) - (2b + 4)}{4}.$$

Na primer, če je $E_{OR} = -1$ in $b = 0$ potem je $a = \frac{n}{4} - 1$ in $c = \frac{3n}{4}$. V tem primeru mora biti število n deljivo s 4. \square

Primer. Da bi našli telo s štirimi (rotacijskimi) simetrijami, moramo poiskati takšno, ki ima tri rotacije reda 2 v središčih robov! Spodnja meja $E_{OR} = -1$ je dejansko dosežena za Johnsonovo telo J84 (snub disfenoid), pri katerem je $v_{OR} = 2$, $e_{OR} = 6$, $f_{OR} = 3$, torej je $E_{OR} = 2 - 6 + 3 = -1$. Tu je število simetrij enako 4 (identična transformacija in 3 rotacije reda dva z osmi, ki gredo skozi središča robov), $b = 0$, $a = 0$ in $c = 3$. Torej je spodnja meja -1 natančna.

Zdaj pa dokažimo drugi del glavnega rezultata (Izrek 20).

Trditev 36 (MEJE ZA E_{OR} NA TORUSU:) *Naj bo \mathcal{P} torusni zemljevid s konveksnimi lici. Potem je*

$$-2 \leq E_{OR} \leq 2.$$

Dokaz. Na enak način kot za sferične zemljevide dobimo

$$E_{OR} = \frac{1}{n} \left(E + \sum_{i=1}^{i=n-1} E_p(R_i) \right).$$

Ker je $E = 0$ za torusne zemljevide s konveksnimi lici, in ker je $-4 \leq E_p(R_i) \leq 4$, imamo

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{i=n-1} (n-1)(-4) \right) \leq E_{OR} \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{i=n-1} (n-1)4 \right).$$

Ker so vrednosti Eo_R cela števila, dobimo $-4 + \frac{4}{n} \leq -3 \leq Eo_R \leq 3 \leq 4 - \frac{4}{n}$. Če $n = 2$, potem $-2 \leq Eo \leq 2$. Če $n > 2$, potem ima vsaj polovica rotacij os brez polov, torej je $-2 \leq \frac{1}{n}(\frac{n}{2} \cdot 0 + \frac{n}{2} \cdot (-4)) \leq Eo \leq \frac{1}{n}(\frac{n}{2} \cdot 0 + \frac{n}{2} \cdot 4) \leq 2$. \square

Primer. Meji -2 in 2 sta natančni! Na primer, če je $n = 2$ in gre os edine rotacije skozi središča štirih povezav, potem je $Eo = \frac{-4}{2} = -2$. Če pa so poli edine rotacije le oglišča in središča lic, potem je $Eo = \frac{4}{2} = 2$.

Tako obstajajo 4 razredi konveksnih poliedrov (z $Eo_R \in \{-1, 0, 1, 2\}$) in 5 razredov torusnih zemljevidov s konveksnimi lici (kjer je $Eo_R \in \{-2, 1, 0, 1, 2\}$)

5.5 Eulerjeva karakteristika zrcalno-rotacijskih orbit

Definicija 45 (EULERJEVA KARAKTERISTIKA ZRCALNO-ROTACIJSKIH ORBIT:) *Za vsak konveksen polieder \mathcal{P} je njegova Eulerjeva karakteristika zrcalno-rotacijskih orbit definirana kot število $Eo := vo - eo + fo$, kjer so vo, eo, fo orbite oglišč, povezav in lic poliedra \mathcal{P} , definirane z grupo vseh simetrij (rotacij, zrcaljenj prek ravnine, in središčne inverzije) poliedra \mathcal{P} .*

Primer. Za Johnsonovo telo J58 (avgmentirani dodekaeder) je $vo = 5, eo = 6, fo = 4$, torej je $Eo = vo - eo + fo = 3$. Za Johnsonovo telo J63 (trizmanjšani ikozaeder) je $vo = 4, eo = 4, fo = 4$, torej je $Eo = vo - eo + fo = 4$.

Ni fiksne zgornje meje za Eo , kajti za polieder s samo eno zrcalno simetrijo (za katerega je $n = 2$), ki ohranja samo oglišča in središča lic, je Eo lahko poljubno velik. Podobno, lahko je videti:

Trditev 37 (NEKAJ RELACIJ V ZVEZI Z Eo): *Naj bo \mathcal{P} konveksen polieder.*

- i) *Če \mathcal{P} nima nobenih simetrij, potem je $Eo = E = 2$.*
- ii) *Če ima \mathcal{P} samo središčno inverzijo C (ki ne pušča nobenega elementa fiksnega) in nobene druge simetrije, potem je po Burnsidovi lemi $Eo = \frac{1}{2}(1 \cdot (v - e + f) + 1 \cdot 0) = 1$.*
- iii) *Če ima konveksni polieder \mathcal{P} zrcaljenje Z prek ravnine, ki gre skozi cikel v_z oglišč, e_z središč povezav in f_z središč lic, potem je najmanj eden od dveh zaporednih elementov v tem (sodem!) ciklu bodisi oglišče ali središče lica, torej je $E_z := v_z - e_z + f_z \geq 0$.*
- iv) *Če je edina simetrija \mathcal{P} zrcaljenje Z prek ravnine, potem je $1 \leq Eo$.*
- v) *Za vsak konveksen polieder veljajo naslednje neenakosti:*

$$-1 \leq Eo \leq 2 + 2eo_R.$$

Dokaz. Primeri i), ii), iii) so očitni. V primeru iv) je $Eo = E_Z + \frac{E - E_Z}{2} = \frac{2 + E_Z}{2} = 1 + \frac{E_Z}{2} \geq 1$, saj iz iii) sledi $E_z \geq 0$. V primeru v) imamo

$$Eo = \frac{1}{n} \left(E + \sum_{i=1}^{n/2-1} E_p(R_i) + \sum_{j=1}^{n/2} E_z(Z_j) \right).$$

Vemo, da je $E = 2$, $E_p(R_i) \geq -2$ in $E_z(Z_j) \geq -2$, torej je $Eo \geq \frac{1}{n}(2 - (n-1)2) = -2 + \frac{4}{n} - 1$, kajti Eo mora biti celo število. Zgornjo mejo dobimo takole:

$$\begin{aligned} Eo &= vo - eo + fo \leq vo + fo \leq vo_R + fo_R \leq \\ &\leq (vo_R - eo_R + fo_R) + 2eo_R = Eo_R + 2eo_R \leq 2 + 2eo_R. \square \end{aligned}$$

Dokažimo še eno trditev, ki tudi pomaga pri izračunu števila rotacijskih orbit nekaterih Johnsonovih teles.

Trditev 38 (FORMULA ZA Eo_R TELESA Z DVEMA ROTACIJAMA:) *Če ima konveksni polieder rotacijsko simetrijsko grupo, generirano z dvema rotacijama R reda n in R' reda 2, ki imata pravokotni rotacijski osi, potem je*

$$Eo_R = \frac{1}{2n}(2 + (n-1)E_p + nE_{p'}),$$

kjer so števila polov oglišč, povezav in lic na teh rotacijskih oseh v'_p, e'_p, f'_p in je $E(p)' = v'_p - e'_p + f'_p$.

Dokaz. Moč take grupe je $2n$. Identiteta I fiksira vseh v oglišč, vseh e povezav, vseh f lic. Nadalje, vsaka od $n-1$ rotacij R, R^2, \dots, R^{n-1} fiksira po v_p oglišč, e_p povezav, f_p lic. Ostali elementi grupe so $R', R^2R', \dots, R^{n-1}R'$. Najprej R' zamenja hemisferi, nato R^i rotira vsako od hemisfer. Fiksne točke so torej kvečjemu na ekvatorju. In dejansko vselej tudi so. Če je n lih, dejansko dobimo n rotacijskih osi teh rotacij, in pri vsaki od njih so števila polov oglišč, povezav in lic na teh rotacijskih oseh v'_p, e'_p, f'_p enaka. Tako dobimo po Burnsidovi lemi:

$$\begin{aligned} vo_R &= \frac{1}{2n}(v + (n-1)v_p + n \cdot v'_p), \\ eo_R &= \frac{1}{2n}(e + (n-1)e_p + n \cdot e'_p), \\ fo_R &= \frac{1}{2n}(f + (n-1)f_p + n \cdot f'_p), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Eo_R &= \frac{1}{2n}((v - e + f) + (n-1)(v_p - e_p + f_p + n(v'_p - e'_p + f'_p))) = \\ &= \frac{1}{2n}(E + (n-1)E_p + nE'_p) = \end{aligned}$$

in če gre za konveksen (sferičen) polieder, je $E = 2$ in

$$Eo_R = \frac{1}{2n}(2 + (n-1)E_p + nE'_p). \square$$

6 Sklep

Disertacija je sestavljena iz treh delov, ki jih povezuje rdeča nit uporabe simetrijskih grafov pri različnih geometrijskih objektih.

POVZETEK PRVEGA DELA DISERTACIJE: V prvem delu disertacije sem obravnaval simetrijske grafe uniformnih poliedrov in Johnsonovih teles.

Hipoteza: »*Uniformni poliedri z istim ogliščnim tipom imajo iste simetrijske grafe.*«, ki sem jo oblikoval na podlagi klasifikacije platonskih in arhimedskih teles glede na njihove simetrijske grafe [30], se je izkazala za resnično. Videli smo (Izrek 8), da sta simetrijska grafa $T(\mathcal{P})$ in $T_R(\mathcal{P})$ poljubnega uniformnega poliedra \mathcal{P} odvisna samo od njegovega ogliščnega tipa.

Pri delu sem se naslonil predvsem na COXETER-MOSER-jevo teorijo diskretnih grup. Pojme, kot je COXETER-jeva grupa $[m, n]$ in oznake za njene podgrupe sem potreboval pri klasifikaciji poliedrov (predvsem Johnsonovih teles) glede na grupo njihovih simetrij in glede na njihov simetrijski graf (ali vsaj glede na število njihovih orbit). Njun pojem fundamentalne domene ploskve mi je prišel prav pri določitvi simetrijskih grafov poliedrov (pa tudi geometrijskih molekul) – na njegovi podlagi sem definiral fundamentalno domeno poliedra, ki po eni strani omogoča hitrejšo določitev simetrijskega grafa, po drugi strani pa rekonstrukcijo poliedra iz njegovega simetrijskega zemljevida in simetrijske grupe (isto idejo sta 2001 med prvimi uporabila GRÜNBAUM in SHEPARD [16] v članku o izoedrih s skladnimi nekonveksnimi štirikotniškimi lici).

POVZETEK DRUGEGA DELA DISERTACIJE: V drugem delu disertacije sem predstavil uporabo simetrijskih grafov v matematični kemiji ter pojem simetrijskega grafa razširil na splošneje geometrijske molekule (torej tudi splošne policiklične kemijske molekule).

Pri klasifikaciji benzenoidov s pomočjo njihovih simetrijskih grafov sem pokazal, da lahko z uporabo praporov šestkotniške ravninske mreže poenotimo obravnavo treh različnih tipov točkovnih grup ravninskih molekul, zgrajenih iz šestkotniških gradnikov. Vpeljal sem tudi novi orodji za opisovanje simetrijskih lastnosti poljubnih molekul – binarno kodo in simetrijsko kodo. Opisal sem tudi splošno strukturo grafa praporov poljubne ploskovne molekule.

POVZETEK TRETJEGA DELA DISERTACIJE:

V tretjem delu disertacije sem razširil definicijo grafov praporov in simetrijskih grafov na hiperzemljevide in na konfiguracije in pokazal, da je sfernih poliedrov in molekul ob določenih preprostih pogojih le končno mnogo (Izrek 18).

Literatura

- [1] A. D. Alexandrov, *Convex Polyhedra*, Springer, Berlin etc., 2005.
- [2] A. T. Balaban in T. Pisanski, *Flag graphs and their applications in mathematical chemistry for benzenoids*, J. Math. Chem. **50**, 2012, 893–903.
- [3] M. Berger, P. Pansu, J. P. Berry, X. Saint-Raymond, *Problems in Geometry*, Springer, New York etc., 1984.
- [4] http://en.wikipedia.org/wiki/Conway_polyhedron_notation. Dostopno na spletu: 3. 9. 2012.
- [5] S. J. Cyvin, I. Gutman, *Kekulé structures in benzenoid hydrocarbons*, Springer, Berlin, 1988.
- [6] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, J. Wiley & Sons, New York, 1989.
- [7] H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, Methuen and Co., London, 1948.
- [8] H. S. M. Coxeter, W. O. J. Moser, *Generators and relations for discrete groups*, Springer, Berlin etc., 1957.
- [9] H. S. M. Coxeter, *Regular polyhedra – old and new*, Equat. Math. **16**, 1977, 1–20.
- [10] B. Džonova-Jerman-Blažič, N. Trinajstić, *Application of Reduced Graph Model to the Enumeration of Kekulé structures and Conjugated Circuits of Benzenoid Hydrocarbons*, Croat. Chem. Acta **55**, 1982, 347–369.
- [11] H. Freudenthal, B. L. van der Waerden, *Over een bewering van Euclides*, Simon Stevin **25**, 1947, 115–121.
- [12] W. Fulton, *Algebraic Topology*, Springer, New York etc., 1995.
- [13] I. Grossman, W. Magnus, *Les groupes et leurs graphs*, Dunod, Paris, 1971.
- [14] B. Grünbaum, G. C. Shephard, *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman & Co., New York, 1986.
- [15] B. Grünbaum, *Convex polytopes*, J. Wiley & Sons, London, 1967.
- [16] B. Grünbaum, G. C. Shephard, *Isohedra with dart-shaped faces*, Discr. Math. **241**, 2001, 313–332.

- [17] I. Gutman, S. J. Cyvin, *Introduction to the Theory of Benzenoid Hydrocarbons*, Springer, Berlin etc., 1989.
- [18] I. Gutman, N. Trinajstić, *Graph Spectral Theory and Conjugated Molecules*, Croat. Chem. Acta **47**, 1975, 507–533.
- [19] I. Gutman, *Some Topological Properties of Benzenoid Systems*, Croat. Chem. Acta **46**, 1974, 209–215.
- [20] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [21] J. F. C. Hessel, *Kristallometrie oder Krystallonomie und Kristallographie*, Engelmann, Leipzig, 1897.
- [22] P. E. John, *Counting perfect matchings in hexagonal chains*, Chem. Phys. Lett. **196**, 525–528.
- [23] D. L. Johnson, *Symmetries*, Springer, London, 2001.
- [24] N. W. Johnson, *Convex polyhedra with regular faces*, Canad. J. Math. **18**, 1966, 169–200.
- [25] N. W. Johnson, A. I. Weiss, *Quadratic Integers and Coxeter Groups*, Canad. J. Math. **51**, 1999, 1307–1336.
- [26] http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_uniform_polyhedra_by_vertex_figure. Dostopno na spletu: 17. 3. 2011.
- [27] S. F. A. Kettle, *Symmetry and Structure*, 2. izd., Wiley, Chichester, 1998.
- [28] R. B. King, *Chemical Applications of Topology and Group Theory*, J. Phys. Chem. **100**, 1996, 15096–15104.
- [29] E. C. Kirby, R. B. Mallion, P. Pollak, *Toroidal Polyhexes*, J. Chem. Soc. Faraday Trans. **89**, 1993, 1945–1953.
- [30] J. Kovič, *Symmetry-type graphs of Platonic and Archimedean solids*, Math. Commun. **16**, 2011, 491–507.
- [31] J. Kovič, *Characterization of convex polyhedra with regular polygonal faces by minimal number of parameters*, J. Comb. Math. Combin. Comp. (sprejet v objavo).
- [32] J. Kovič, *Classification of uniform polyhedra by their symmetry-type graphs*, Int. J. Open Problems Comp. Math. **5**, 2012, 73–92.

- [33] I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, New York, 1976.
- [34] C. Leytem, *Hidden Symmetries in the Snub Dodecahedron*, *Europ. J. Comb.* **17**, 1995, 451–460.
- [35] S. Lins, *Graph-encoded maps*, *J. Combin. Theo. Ser. B* **32**, 1982, 171–181.
- [36] G. E. Martin, *Transformation Geometry*, Springer, New York, 1982.
- [37] W. Massey, *Algebraic Topology*, Springer, New York, 1967.
- [38] A. Orbanić, *Edge-transitive maps*, Doktorska disertacija, Univerza v Ljubljani, 2006.
- [39] A. Orbanić, D. Pellicer, A.I. Weiss, *Map operations and k -orbit maps*, *J. Comb. Theo., Ser. A* **117**, 2010, 411–429.
- [40] T. Pisanski, *Orientabilne in neorientabilne vložitve grafov*, Doktorska disertacija, Univerza v Ljubljani, Ljubljana, 1981.
- [41] T. Pisanski, M. Boben in A. Žitnik, *Interactive Conjecturing with VEGA*, DIMACS Ser. Discr. Math. Theo. Comp. Sci. **69**, 2005, 351–364.
- [42] T. Pisanski, B. Servatius, *Configurations, Incidence Structures from a Graphical Viewpoint*, Birkhäuser, Basel, 2013.
- [43] T. Pisanski, A. Žitnik, *Representations of graphs and maps*, *Prepr. Ser.* **42**, 2004, 924.
- [44] M. Senechal, G. Fleck, *Shaping Space, A Polyhedral Approach*, Birkhäuser, Boston etc., 1988.
- [45] E. Schulte, A.I. Weiss, *Problems on polytopes, their groups, and realizations*, *Period. Math. Hung.* **53**, 2006, 231–255.
- [46] J. Simon, *Molecular Graphs as Topological Objects in Space*, *J. Comp. Chem.* **8**, 1987, 718–726.
- [47] J. Širán, T. W. Tucker, M. E. Watkins, *Realizing finite edge-transitive orientable maps*, *J. Graph Theo.* **37**, 2001, 1–34.
- [48] B. Stewart, *Adventures among the toroids*, [samozaložba], 1970.
- [49] D. Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

-
- [50] M. Wenninger, *Polyhedron models*, Cambridge University Press, Cambridge etc., 1974.
- [51] [http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical polyhedron](http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_polyhedron). Dostopno na spletu: 7. 8. 2012.
- [52] V. A. Zallgaler, *Pravil'nogrannye mnogogranniki*, Vestnik Leningrad, Univ. Ser. Mat. Meh. Astron. **18**, 1963, 5–8.

Stvarno kazalo

- ARGAND-ov diagram, 4
 ALEXANDROV, 53
 ARHIMED, 2, 97
 BALABAN, 1, 67, 75, 78
 BURNSIDE, 51, 103, 108
 CAYLEY-ev diagram, 6
 CHASLES, 3
 CONWAY-eva poliedrska notacija, 30
 COXETER-jev diagram, 4
 COXETER-jev simbol, 4,
 COXETER-jeva grupa, 4, 10
 CYVIN, 84
 DŽONOVA-JERMAN-BLAŽIČ, 84
 EULER-jeva formula, 2, 55
 EULER-jeva karakteristika
 - rotacijskih orbit poliedra, 103,
 - rotacijskih orbit zemljevida, 104,
 EULER-jeva polarna karakteristika rotacije, 107
 EULER-jevo število rotacijskih orbit, 51, 103
 EVKLID, 2
 FREUDENTHAL, 8
 GIRARD, 3
 GIRARD-ova formula, 3, 101
 GRÜNBAUM, 53, 113
 GUTMAN, 84
 HAFNER, 3
 HESSEL, 10
 HESS, 10
 JOHNSON, 1, 3, 30
 KEPLER, 2
 KIRBY, 84, 85
 KLEIN, 4
 KOVIČ, 26, 29, 53, 106
 LAKATOS, 2
 LEVI-jev graf konfiguracije, 91
 LEYTEM, 3
 MALKEVITCH, 2
 MALLION, 84
 MENDELJEJEV, 71
 MILLER, 9
 MOSER, 1, 3, 6, 10, 21, 66
 ORBANIĆ, 5
 PETRIE, 3
 PISANSKI, 1, 67, 75, 78
 POLLAK, 84
 RIEMANN-ova ploskev, 71
 SCHLÄFLI-jev simbol 7
 SCHLÄGEL-ov diagram, 17
 SENECHAL, 1, 2
 SERVATIUS, 1
 SHEPHARD, 113
 SIMON, 3
 SOMMERVILLE, 9
 STEWART-ovi toroidi, 95
 TRINAJSTIĆ, 84
 WENNINGER, 3
 ZALLGALER, 8
 ŠIRÁN, 5
 VAN DER WAERDEN, 8

 benzenoid, 67

 ekvivalenčni razred, 54
 - molekule
 – glede na simetrijsko grupo, 4
 - poliedra
 – glede na simetrijski graf, 5
 – glede na simetrijsko grupo, 4
 - zemljevida
 glede na simetrijski graf, 13
 enumeracija
 - nekonveksnih poliedrov, 6

- fundamentalna domena, 11
 - molekule, 74
 - točkovne grupe ravnine, 74
 - rotacijska, 21
- graf
 - molekularni, 67
 - praporov, 13
 - dvobarvni cikli, 15
 - ploskovne molekule, 72
 - razreda \mathbb{P} , 13
 - simetrijski, 13
 - poliedra, 14
 - tlakovanja, 14
 - JOHNSON-ovega telesa, 47
 - konfiguracije, 91
 - Levijev, 91
 - molekularni
 - kiralni, 3
- grupa
 - abstraktna definicija grupe, 10
 - generatorji in relacije grupe, 10
 - simetrijska
 - poliedra, 7
 - EVKLID-skega prostora E^3 , 10
 - molekule, 73
 - točkovna, 74
 - ravnine, 74
 - poliedra, 75
 - COXETER-jeva, 4, 10
- hiperzemljevid, 85
 - ireducibilen, 89
- involucije s_0, s_1, s_2 , 13
- izometrije E^2, E^3 , 3
- klasifikacija, 54
- koda
 - generična, 53
 - separirajoča, 53, 66
 - strukturna, 2
- koda molekule
 - binarna, 79
 - simetrijska, 79
- količnik
 - izolirajoči, 61
 - razredni, 61
- konfiguracija
 - geometrijska, 91
 - kombinatorična, 91
- lice, 7
 - enkratno, 22
 - liho, 24
 - neskončno, 2
 - prazno, 2, 7
 - ukrivljeno, 87
- mnogokotnik, 7, 72
- modul, 49
 - molekula
 - geometrijska, 72
 - šestkotniška, 67
 - kata-kondenzirana, 96
 - kemijska
 - benzenoidna, 67
 - peri-kondenzirana, 96
 - ploskovna, 72
 - rob molekule, 72
 - sferična, 95
 - sferna, 95
- oglišče, 7

- ogliščni tip, 9
- ogliščni vzorec
 - cikel lic, 9
 - ogliščna pot iz lic, 96
- orbita, 13
 - polarna
 - lica, 55
 - oglišča, 55
 - povezave, 55
 - lica, 55
- parameter, 54
 - sestavljeni, 66
- pentagramski kuploid, 97
- policiklični ogljikovodiki
 - benzenoidi, 67
- polieder, 7
 - izoeder, 113
 - konveksen, 8
 - pravih lic, 7
 - sferičen
 - regularen, 96
 - sferični, 95
 - sferni, 8, 95
 - sferoeder, 95
 - regularen, 8
 - uniformen, 7
 - unimorfen, 7
 - z neskončno lici
 - poliedrska mreža, 17
- položajni vektor, 24
- polpovezava, 13
 - razred $S(L, M, N)$, 99
 - rob, 7
- skrita simetrija
 - molekule, poliedra 3
 - simetrijska shema, 21
 - simetrijska shema poliedra, 66
 - sistem
 - koronoidni, 67
 - benzenoidni, 67
 - središčna inverzija, 11
 - strukturna matrika, 49, 52
 - telo
 - arhimedsko, 8, 26, 58
 - platonsko, 8, 26, 58
 - JOHNSON-ovo, 8
 - KEPLER-POINSOT-ovo, 8
 - MILLER-jevo, 48
 - vloženi poligon, 92
 - zemljevid
 - orbit
 - molekule, 75
 - rotacijskih orbit, 18
 - ulomljen, 90

Izjavljam, da je disertacija plod lastnega raziskovalnega dela.

Jurij Kovič

V Ljubljani, 12. 12. 2012