UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Zaključna naloga

Ohranjevalci spektra na operatorjih

(Spectrum preservers on operators)

Ime in priimek: Nina Klobas
Študijski program: Matematika
Mentor: izr. prof. dr. Marko Orel

Koper, avgust 2018

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Nina KLOBAS

Naslov zaključne naloge: Ohranjevalci spektra na operatorjih

Kraj: Koper

Leto: 2018

Število listov: 38
Število referenc: 10

Mentor: izr. prof. dr. Marko Orel

Ključne besede: Ohranjevalci, spekter operatorja, spektralni radij operatorja.

Math. Subj. Class. (2010): 47B49, 47A10, 15A86.

Izvleček:
V diplomski nalogi se ukvarjamo z vprašanjem ohranjevalcev spektra. To so preslikave na prostoru vseh omejenih linearnih operatorjev nad Banachovim prostorom, ki ohranjajo spekter operatorjev. Glavni del naloge predstavljata dokaza izrekov 3.3 ter 3.10, kjer klasificiramo linearne surjektivne preslikave, ki ohranjajo spekter oziroma njegov spektralni radij.
Nalogo začnemo s kratko predstavitvijo področja. V naslednjem poglavju predstavimo nekatere temeljne pojme, ki jih potrebujemo za razumevanje snovi. Nato sledi najobsežnejše poglavje, kjer poiskusimo čim natančneje dokazati željene rezultate.

Key words documentation

Name and SURNAME: Nina KLOBAS

Title of final project paper: Spectrum preservers on operators

Place: Koper

Year: 2018

Number of pages: 38
Number of references: 10

Mentor: Assoc. Prof. Marko Orel, PhD

Keywords: Preservers, spetrum of an operator, spectral radius of an operator.

Math. Subj. Class. (2010): 47B49, 47A10, 15A86.

Abstract:
In this final project paper we are dealing with the question of spectrum preservers on operators. These are maps defined on the space of bounded linear operators on Banach space, which preserve the spectrum of an operator. The main focus of this paper is proving Theorems 3.3 and 3.10, where we characterize linear surjective transformations, which preserve spectrum of an operator or its spectral radius.
We start with a chapter where the area of research is presented. Next we introduce some main definitions and theorems, which help us understand the topic. The major part of the paper is the chapter where we try to explain and prove our desired results thoroughly.

Zahvala

Najprej bi se rada zahvalila mentorju izr. prof. dr. Marku Orlu, ki je bil vedno na voljo z razlago snovi in nasveti za pisanje zaključne naloge.
Velika zahvala gre tudi družini in prijateljem, ki so mi stali ob strani in me podpirali v vseh treh letih mojega študija.

Kazalo vsebine

Seznam kratic

tj.	to je
oz.	oziroma

1 Uvod

Teorija ohranjevalcev predstavlja aktivno raziskovalno področje, ki v večji meri spada v linearno algebro in funkcionalno analizo. Tipičen problem v linearnem delu te teorije zahteva karakterizacijo vseh linearnih preslikav ϕ na nekem danem linearnem prostoru matrik ali operatorjev, ki zadoščajo enemu izmed naslednjih (1-4) pogojev.
Naj bo S linearen prostor matrik ali operatorjev. Za linearno preslikavo $\phi : S \to S$ pravimo, da

1. ohranja lastnost P definirano na S, če ima $\phi(T)$ lastnost P vedno, ko ima lastnost P tudi T;

2. ohranja funkcijo f definirano na S, če drži enakost $f(\phi(T)) = f(T)$ za vsak T iz S;

3. ohranja podmnožico Ω prostora S, če velja $\phi(\Omega) \subseteq \Omega$;

4. ohranja relacijo $\approx$, definirano na prostoru S, če velja implikacijja $A \approx B \Rightarrow \phi(A) \approx \phi(B)$, za vse $A, B \in S$.

Prvi rezultati iz tega področja segajo v leto 1897, ko je Georg Frobenius [3] opisal stukturo bijektivnih linearnih preslikav na prostoru $n \times n$ kompleksnih matrik, ki ohranjajo determinanto. Rezultat je povzet v izreku 1.1.

V nalogi bomo z $M_n(\mathbb{C})$ označevali množico vseh $n \times n$ kompleksnih matrik, z $GL_n(\mathbb{C})$ pa množico vseh obrnljivih $n \times n$ kompleksnih matrik.

Izrek 1.1. *Bijektivna linearna preslikava $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ ohranja determinanto matrike, tj. $det(\phi(T)) = det(T)$ za vsako matriko $T \in M_n(\mathbb{C})$, natanko tedaj, ko obstajata matriki $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$ z lastnostjo $det(PQ) = 1$, tako da velja bodisi*

$$\phi(T) = PTQ$$

za vsako matriko T bodisi

$$\phi(T) = PT^tQ$$

za vsako matriko T, kjer je T^t transponiranka matrike T.

Na podlagi njegovega rezultata se je razvila obširna obravnava karakterizacije preslikav na matrikah, ki ohranjajo različne lastnosti, kot so obrnljivost matrik, lastne vrednosti in njihove večkratnosti, determinanto, ... Raziskava se ni omejila le na področje matrik. Obstajajo tudi vprašanja ohranjevalcev na prostoru operatorjev.

Osrednja tema te naloge bodo linearni ohranjevalci spektra na omejenih operatorjih. V prvem delu naloge definiramo nekatere osnovne pojme iz funkcionalne analize, ki nam v nadaljevanju pomagajo pri razumevanju problemov. V drugem delu, pa se osredotočimo na izreka 3.3 in 3.10 ter ju dokažemo.

2 Uvodne definicije

Za razumevanje željenih problemov potrebujemo najprej nekaj osnovnega znanja iz funkcionalne analize. V tem delu so predstavljene pomembnejše definicije, izreki in trditve.

2.1 Topološki prostor

Definicija 2.1. Naj bo X neprazna množica. Družini T podmnožic množice X pravimo *topologija*, če zadošča naslednjim trem pogojem.

- Velja $\emptyset, X \in T$.
- Če velja $V_\lambda \in T$, kjer je λ iz indeksne množice Λ, potem je $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \in T$.
- Če velja $V_1, V_2 \in T$, potem je $V_1 \cap V_2 \in T$.

Par (X, T) imenujemo *topološki prostor*.

2.2 Metrični prostor

Definicija 2.2. Naj bo M neprazna množica in $d : M \times M \to \mathbb{R}$ preslikava, ki zadošča naslednjim lastnostim.

- Za vse $x, y \in M$ velja $d(x, y) > 0$.
- Za vse $x, y \in M$ velja $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- Za vse $x, y \in M$ velja $d(x, y) = d(y, x)$.
- Za vse $x, y, z \in M$ velja $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Paru (M, d) pravimo *metrični prostor*, preslikavi d pa *metrika*.

Med dobro poznane metrične prostore spada Evklidski prostor. To je množica $\mathbb{R}^n$, ki je opremljena z metriko

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

kjer sta točki X in Y podani s koordinatami $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

2.3 Linearen topološki prostor

Definicija 2.3. Naj bo X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$ in tudi topološki prostor. Tedaj je X *linearni topološki prostor*, če sta seštevanje $X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto x + y$ in množenje s skalarjem $\mathbb{F} \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, zvezni preslikavi.

Definicija 2.4. Naj bosta X, Y vektorska prostora nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. Preslikava $L : X \to Y$ je *linearna*, če izpolnjuje naslednja pogoja.

- Velja $L(x + y) = L(x) + L(y)$ za vse $x, y \in X$.
- Velja $L(\alpha x) = \alpha L(x)$ za vsak skalar $\alpha \in \mathbb{F}$ ter vsak element $x \in X$.

Prvemu pogoju pravimo *aditivnost* preslikave L, drugemu pa *homogenost* preslikave L.

Definicija 2.5. Naj bosta X, Y linearna topološka prostora. Množico vseh linearnih preslikav iz X v Y bomo označili z $L(X, Y)$, množico vseh zveznih linearnih presilkav iz X v Y pa z $B(X, Y)$. Množico vseh zvezih linearnih preslikav iz X v X, $B(X, X)$ označimo kar z $B(X)$. Elemente iz množice $L(X, \mathbb{F})$ imenujemo *linearni funkcionali*, elemente iz množice $B(X, \mathbb{F})$ pa *zvezni linearni funcionali.* Z $X^* := B(X, \mathbb{F})$ označimo dualni prostor prostora X.

2.4 Normiran prostor

Definicija 2.6. Vektorski prostor X nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ je *normiran*, če za vsak $x \in X$ obstaja nenegativno realno število $\|x\|$, ki ga imenujemo *norma* elementa x, tako da so zadoščeni naslednji pogoji.

- Za poljubna vektorja x, y iz X velja $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- Za vsak vektor $x \in X$ in vsak skalar $\alpha \in \mathbb{F}$ velja $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.
- Če je $x \neq 0$, tedaj velja $\|x\| > 0$.

Na normiran prostor lahko gledamo kot na metrični prostor, kjer za razdaljo med x in y vzamemo $d(x, y) = \|x - y\|$.

Primer normiranega prostora je ponovno evklidski prostor $\mathbb{R}^n$ z Evklidsko normo $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.
Namesto Evklidske norme lahko izberemo tudi kakšno drugo normo, npr. $\|X\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$.

2.5 Banachov prostor

Definicija 2.7. Metrični prostor je poln, če vsako Cauchyjevo zaporedje konvergira. Če je normiran prostor poln, glede na metriko $d(x,y) = \| x - y \|$, potem ga imenujemo *Banachov prostor*.

Evklidski prostor opremljen z evklidsko normo je primer Banachovega prostora.

2.6 Linearni omejeni operatorji

Definicija 2.8. Naj bosta X in Y normirana prostora nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Linearni preslikavi $A : X \to Y$ pravimo tudi *linearen operator*.

Linearen operator je omejen, če obstaja tak $M < \infty$, da velja

$$\|Ax\| \leq M \cdot \|x\|$$

za vsak element $x \in X$. Najmanjši tak M predstavlja normo operatorja A, ki jo označimo kot $\|A\|$. *Normo operatorja* torej definiramo kot

$$\|A\| := \inf\{M \in \mathbb{R} : \|Ax\| \leq M \cdot \|x\| \text{ za vse } x \in X\}.$$

Pri karakterizaciji omejenih lineranih operatorjev si lahko pomagamo z izrekom 2.9, ki ga najdemo v knjigi [8] na strani 24.

Izrek 2.9. *Naj bosta M in N normirana prostora. Linearen operator $T : M \to N$ je omejenen natanko tedaj, ko je zvezen.*

Definicija 2.10. Naj bo X Banachov prostor, ter $v \in X$ in $g \in X^*$. Linearen operator $v \otimes g : X \to X$ je definiran s predpisom $(v \otimes g)(x) = g(x)v$, kjer je $x \in X$ poljuben vektor. V primeru, da sta v in g neničelna, pravimo, da gre za *operator ranga 1*, saj je njegova slika enorazsežen vektorski prostor.

2.7 Spekter operatorja

Definicija 2.11. Naj bo $X \neq 0$ kompleksen Banachov prostor in $A \in B(X)$. Število $\lambda \in \mathbb{C}$ pripada *resolventni množici* $\rho(A)$ operatorja A, če obstaja operator $(A - \lambda I)^{-1} \in B(X)$. Komplementu resolventne množice pravimo *spekter operatorja* A in ga označimo z $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$. Spekter operatorja ločimo na tri podmnožice.

- *Točkasti spekter* $\sigma_p(A)$ je množica sestavljena iz takih $\lambda \in \mathbb{C}$, za katere obstaja neničelen $x \in X$, da velja enačba $\lambda x = Ax$ (oz. $x \in \ker(\lambda I - A)$). V tem primeru operator $A - \lambda I$ ni injektiven in zato tudi ne obstaja inverz $(A - \lambda I)^{-1}$. Skalarjem $\lambda \in \sigma_p(A)$ pravimo *lastne vrednosti* operatorja A.

- *Zvezni spekter* $\sigma_c(A)$ je sestavljen iz takšnih $\lambda \in \mathbb{C}$, za katere je operator $A - \lambda I$ injektiven, vendar ni surjektiven. Velja tudi, da je njegova slika $im(A - \lambda I)$ gosta v X, vendar ni enaka celotnemu prostoru X, tj.
$$\overline{im(A - \lambda I)} = X.$$
- *Residualni spekter* $\sigma_r(A)$ je množica takih $\lambda \in \mathbb{C}$, za katere je operator $A - \lambda I$ injektiven in velja, da zaprtje slike ni enako celotnemu prostoru X, tj.
$$\overline{im(A - \lambda I)} \neq X.$$

Te tri množice so paroma disjunktne in tvorijo particijo celotnega spektra, torej velja

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

V nekaterih primerih so lahko določene množice tudi prazne. V končno razsežnem primeru ($dim(X) < \infty$) velja $\sigma_c(A) = \sigma_r(A) = \emptyset$ in zato $\sigma(A) = \sigma_p(A)$.

Za lažje računanje spektra operatorja si lahko pomagamo z izrekom 2.12, ki bo ostal brez dokaza, saj le ta ni tako zelo pomemben za razumevanje snovi te naloge. Dokaz si lahko pogledamo v knjigi [5] na strani 377.

Izrek 2.12. *Spekter omejenega linearnega operatorja $A \in B(X)$ na kompleksnem Banachovem prostoru X je kompaktna neprazna množica, ki je vsebovana v disku*

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \| A \|\}.$$

Iz izreka neposredno sledi, da je spekter omejenega linearnega operatorja na Banachovem prostoru omejen. Tako se nam poraja vprašanje, kateri je najmanjši disk okoli izhodišča, ki vsebuje celoten spekter. Iz tega razmišljanja sledi koncept spetralnega radija.

Naslednja trditev sledi iz izreka o Fredholmovi alternativi, ki ga najdemo v knjigi [5] na strani 452.

Trditev 2.13. *Naj bo X kompleksen Banachov prostor in T omejen linearen operator $T : X \to X$, ki ima končno razsežno sliko. Če velja, da je $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$, potem je λ lastna vrednost operatorja T.*

2.8 Spektralni radij

Definicija 2.14. *Spektralni radij* $r(A)$ omejenega linearnega operatorja $A : X \to X$ na kompleksnem Banachovem prostoru X je število

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

To je radij najmajšega zaprtega diska, ki ima središče v izhodišču kompleksne ravnine in vsebuje celotno množico $\sigma(A)$.

Iz izreka 2.12 sledi $r(A) \leq \|A\|$.

S pomočjo kompleksne analize je moč pokazati izrek 2.15. Dokaz lahko najdemo v knjigi [5] na strani 391.

Izrek 2.15. *Naj bo A omejen linearen operator na kompleksnem Banachovem prostoru. Potem za spektralni radij $r(A)$ operatorja A velja*

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Naslednji izrek nam pove, kaj se zgodi s spektrom, če operator preslikamo s polinomom. Dokaz izreka lahko najdemo v knjigi [5] na strani 381.

Izrek 2.16. *Naj bo X kompleksen Banachov prostor, $T \in B(X)$ omejen linearen operator in*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

polinom, kjer so $a_i \in \mathbb{C}$. Potem je

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)),$$

kjer je

$$p(T) = a_n T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0 I.$$

2.9 Izrek Kaplanskega

Za dokaz izreka 3.3 bomo potrebovali tudi izrek Kaplanskega, ki je zapisan v knjigi [1] na strani 84.

Izrek 2.17. *Naj bo X kompleksen vektorski prostor in naj bo T linearna preslikava na njem. Če obstaja tako naravno število n, da so vektorji v, Tv, $T^2v, \ldots, T^nv$ linearno odvisni za vsako izbiro vektorja $v \in X$, potem obstaja tak kompleksen polinom p stopnje največ n, da velja $p(T) = 0$.*

3 Ohranjevalci spektra

Leta 1959 sta Marcus in Moyls v članku [6] prišla do naslednjega rezultata.

Izrek 3.1. *Naj bo $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ linearna preslikava, kjer je polje $\mathbb{F}$ algebraično zaprto.*

1. *Tedaj ϕ ohranja obrnljivost (v eno smer), tj. zadošča implikaciji $T \in GL_n(\mathbb{F}) \Rightarrow \phi(T) \in GL_n(\mathbb{F})$ natanko tedaj, ko je oblike*

$$\phi(T) = PTQ$$

ali

$$\phi(T) = PT^tQ$$

za vsako matriko T , kjer sta $P, Q \in GL_n(\mathbb{F})$.

2. *Preslikava ϕ ohranja množico lastnih vrednosti in njihove večkratnosti natanko tedaj, ko ima eno izmed zgornjih oblik, kjer je $Q = P^{-1}$*

Ta rezultat sta Jafarian in Sourour leta 1986 razširila v članku [4], kjer sta klasificirala vse linearne surjekcije na prostoru vseh omejenih operatorjev na kompleksnem Banachovem prostoru, ki ohranjajo spekter.

3.1 Linearne preslikave, ki ohranjajo spekter

Izrek 3.3 je bil prvič dokazan v članku [4]. Preden se posvetimo izreku moramo podati še eno definicijo.

Definicija 3.2. Naj bosta X in Y Banachova prostora in naj bo $A : X \to Y$ linearen operator.Linearen operator $A^t : Y^* \to X^*$ je podan s predpisom $f \mapsto A^t f$, kjer je $(A^t f)(x) := f(Ax)$ za vsak $x \in X$.

Izrek 3.3. *Naj bosta X in Y kompleksna Banachova prostora in $\phi : B(X) \to B(Y)$ surjektivna linearna preslikava, ki ohranja spekter operatorja, t.j. $\sigma(\phi(T)) = \sigma(T)$ za vsak $T \in B(X)$. Potem velja ena izmed naslednjih dveh možnosti.*

1. *Obstaja tak obrnljiv omejen linearen operator $A : X \to Y$, da velja $\phi(T) = ATA^{-1}$ za vsak $T \in B(X)$.*

2. *Obstaja tak obrnljiv omejen linearen operator $B : X^* \to Y$, da velja $\phi(T) = BT^tB^{-1}$ za vsak $T \in B(X)$.*

3.1.1 Dokaz izreka 3.3

Za dokaz izreka 3.3 si bomo pomagali z naslednjimi lemami in manjšim izrekom.

Lema 3.4. *Naj bo X kompleksen Banachov prostor in $A \in B(X)$. Potem je $\sigma(T+A) \subseteq \sigma(T)$ za vsak $T \in B(X)$ natanko tedaj, ko je $A = 0$.*

Dokaz. Če je $A = 0$, potem je $\sigma(T + A) = \sigma(T + 0) = \sigma(T) \subseteq \sigma(T)$.

Predpostavimo sedaj, da velja $\sigma(T + A) \subseteq \sigma(T)$ za vsak $T \in B(X)$. Želimo pokazati, da je $A = 0$.

Dokazovali bomo s protislovjem. Recimo, da je $A \neq 0$. Naj bo $x \in X$ tak vektor, da velja $Ax = y \neq 0$.

Trdimo, da obstaja tak $f \in X^*$, da je $f(x) = 1$ in $f(y) \neq 0$. Ločimo dva primera.

- Recimo, da sta x in y linearno odvisna. Naj bo $\langle x\rangle$ eno-razsežen vektorski prostor, ki je napet na vektor x. Definiramo preslikavo $g : \langle x\rangle \to \mathbb{C}$, ki je podana s predpisom $g(\lambda x) = \lambda$. Tedaj je g linearen funkcional. Ker je prostor $\langle x\rangle$ končno-razsežen, je avtomatsko zvezen oz. omejen. Iz Hahn-Banachovega izreka sledi, da ga lahko razširimo do omejenega funkcionala $f \in X^*$. Očitno je $f(x) = g(x) = 1$ in $f(y) = g(y) \neq 0$.

- Recimo, da sta x in y linearno neodvisna. Naj bo $\langle x, y\rangle$ dvo-razsežen vektorski prostor, ki je napet na vektorja x in y. Definiramo preslikavo $g : \langle x, y\rangle \to \mathbb{C}$, ki je podana s predpisom $g(\lambda x + \mu y) = \lambda + \mu$. Tedaj je g linearen funkcional. Ker je prostor $\langle x, y\rangle$ končno-razsežen, je avtomatsko zvezen oz. omejen. Iz Hahn-Banachovega izreka sledi, da ga lahko razširimo do omejenega funkcionala $f \in X^*$. Očitno je $f(x) = g(x) = 1$ in $f(y) = g(y) = 1 \neq 0$.

Če je sedaj naš T oblike $(x - y) \otimes f$, potem je $(T + A)x = x$, saj velja

$$\begin{aligned}
(T + A)x &= Tx + Ax \\
&= ((x - y) \otimes f)x + Ax \\
&= f(x)(x - y) + y \\
&= 1(x - y) + y \\
&= x.
\end{aligned}$$

Od tod sledi, da je 1 lastna vrednost opretatorja $T + A$, torej velja $1 \in \sigma(T + A)$. Trdimo, da velja $\sigma(T) = \{0, f(x - y)\}$.

Očitno velja $0 \in \sigma(T)$, saj velja $\ker(f) \subseteq \ker(T)$. Ker je T operator končnega ranga mora imeti enačba $Tx = \lambda x$ neničelno rešitev za vsak neničelen $\lambda \in \sigma(T)$. Najprej nekoliko poenostavimo enačbo

$$\begin{aligned} &Tx = \lambda x \\ &\Leftrightarrow ((x-y) \otimes f)x = \lambda x \\ &\Leftrightarrow f(x)(x-y) = \lambda x \\ &\Leftrightarrow x - y = \lambda x. \end{aligned}$$

Iz slednje enačbe dobimo $f(x-y) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda$. Sledi $\sigma(T) = \{0, f(x-y)\}$. Opazimo, da velja $f(x-y) \neq 1$, saj je

$$f(x-y) = f(x) - f(y) = 1 - f(y),$$

kjer je $f(y) \neq 0$. Od tod sledi, da $\sigma(T+A) \nsubseteq \sigma(T)$.
Sedaj smo prišli do protislovja s predpostavko, torej je $A = 0$. $\square$

Lema 3.5. *Če je $\phi : B(X) \to B(Y)$ linearna preslikava, ki ohranja spekter, potem je ϕ injekcija.*

Dokaz. Linearna preslikava je injektivna, če ima trivialno jedro, tj. $\ker \phi = \{0\}$.

Predpostavimo, da je $\phi(A) = 0$, kjer je $A \in B(X)$. Želimo pokazati, da je $A = 0$. Ker ϕ ohranja speketer, velja $\sigma(T+A) = \sigma(\phi(T+A))$ za vsak T. Z upoštevanjem linearnosti ϕ lahko to zapišemo kot $\sigma(T+A) = \sigma(\phi(T) + \phi(A)) = \sigma(\phi(T) + 0) = \sigma(\phi(T))$. Če ponovno upoštevamo dejstvo, da ϕ ohranja spekter dobimo $\sigma(\phi(T)) = \sigma(T)$. Torej smo pokazali enakost $\sigma(T+A) = \sigma(T)$. Z uporabo leme 3.4 sledi $A = 0$. Torej je ϕ res injektivna preslikava. $\square$

Lema 3.6. *Naj bo ϕ preslikava, ki zadošča predpostavkam iz izreka 3.8. Tedaj je $\phi(I) = I$.*

Dokaz. Ker je ϕ surjektivna preslikava, vemo, da obstaja operator $S \in B(X)$, za katerega je $\phi(S) = I$.
Naj bo $T \in B(X)$ poljuben. Velja enačba

$$\begin{aligned} \sigma(T + S - I) &= \sigma(\phi(T + S - I)) \\ &= \sigma(\phi(T - I) + \phi(S) \\ &= \sigma(\phi(T - I) + I) \\ &= \sigma(\phi(T - I)) + 1 \\ &= \sigma(T - I) + 1 \\ &= \sigma(T) - 1 + 1 \\ &= \sigma(T). \end{aligned}$$

Z uporabo leme 3.4 dobimo enakost $S - I = 0$, Torej je $S = I$ oz. $\phi(S) = \phi(I) = I$, kar smo želeli pokazati. □

Lema 3.7. *Naj bo X kompleksen Banachov prostor, $T \in B(X)$, $x \in X$, $f^* \in X^*$ ter $\lambda \notin \sigma(T)$. Tedaj velja ekvivalenca*

$$\lambda \in \sigma(T + x \otimes f) \Leftrightarrow f((\lambda - T)^{-1}x) = 1.$$

Dokaz. Predpostavimo najprej, da velja $f((\lambda - T)^{-1}x) = 1$, in dokažimo, da je $\lambda \in \sigma(T + x \otimes f)$. Velja

$$\begin{aligned}(T + x \otimes f)(\lambda - T)^{-1}x &= T(\lambda - T)^{-1}x + (x \otimes f)(\lambda - T)^{-1}x \\ &= T(\lambda - T)^{-1}x + x \\ &= T(\lambda - T)^{-1}x + (\lambda - T)(\lambda - T)^{-1}x \\ &= (T + \lambda - T)(\lambda - T)^{-1}x \\ &= \lambda(\lambda - T)^{-1}x.\end{aligned}$$

Torej je λ res lastna vrednost operatorja $(T + x \otimes f)$.

Predpostavimo sedaj, da je $\lambda \in \sigma(T+x\otimes f)$ in dokažimo enakost $f((\lambda-T)^{-1}x) = 1$. Naj bo $\lambda \in \sigma(T+x\otimes f)$. Zaradi trditve (2.13) velja, da je λ lastna vrednost operatorja $T + x \otimes f$. Torej obstaja neničelen vektor $u \in X$, za katerega velja $(T + x \otimes f)u = \lambda u$. Velja ekvivalenca

$$\begin{aligned}&(T + x \otimes f)u = \lambda u \\ &\Leftrightarrow Tu + f(u)x = \lambda u \\ &\Leftrightarrow (T - \lambda I)u + f(u)x = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda I - T)u = f(u)x.\end{aligned}$$

Od tod sledi, da je $u = f(u)(\lambda - T)^{-1}x$ in zato

$$f(u) = f(f(u)(\lambda - T)^{-1}x) = f(u)f((\lambda - T)^{-1}x).$$

Ker je u neničelen, je tudi $f(u)$ neničelen in velja $f((\lambda - T)^{-1}x) = 1$, kar smo želeli dokazati. □

Izrek 3.8. *Naj bo $A \in B(X)$ poljuben neničelen operator. Naslednji trditvi sta ekvivalentni.*

1. *Operator A je ranga 1.*

2. *Za poljuben operator $T \in B(X)$ in poljuben skalar $c \neq 1$ velja*

$$\sigma(T + A) \cap \sigma(T + cA) \subseteq \sigma(T).$$

Dokaz. Najprej predpostavimo, da je A operator ranga 1 in dokazujemo inkluzijo $\sigma(T+A) \cap \sigma(T+cA) \subseteq \sigma(T)$ za poljuben $T \in B(X)$ in poljuben $c \neq 1$.
Ker je A operator ranga 1, ga lahko zapišemo kot $A = x \otimes f$ za nek $x \in X$ in $f^* \in X^*$. Izberimo sedaj poljuben operator $T \in B(X)$ in skalar $\lambda \notin \sigma(T)$. Iz leme (3.7) sledi $\lambda \in \sigma(T+cA) \Leftrightarrow cf((\lambda - T)^{-1}x) = 1$. Očitno λ ne more pripadati množoici $\sigma(T+cA)$ za različne vrednosti c.
$\sigma(T+A) \cap \sigma(T+cA) = \emptyset$ za vsak $c \neq 1$. Seveda velja $\emptyset \subseteq \sigma(T)$. S tem je implikacija dokazana.

Sedaj dokazujemo obratno. Predpostavimo, da velja $\sigma(T+A) \cap \sigma(T+cA) \subseteq \sigma(T)$, kjer sta $T \in B(X)$ in $c \neq 1$ poljubna. Želimo pokazati, da je operator A ranga 1. Dokazovali bomo s protislovjem. Predpostavimo, da je rang operatorja A vsaj 2. Pokazali bomo, da predpostavka ni zadoščena.

Začeli bomo s primerom, ko je A skalar, tj. $A = \alpha I$, $\alpha \neq 0$. Naj bo T operator, za katerega velja $\sigma(T) = \{0, \alpha\}$. Tedaj sledi

$$\sigma(T+A) \cap \sigma(T+2A) = \{2\alpha\} \nsubseteq \sigma(T).$$

Prišli smo do protislovja.

Sedaj poglejmo primer, ko je A ranga vsaj 2 in ni skalar.
Konstruirali bomo tak nilpotentni operator N, da bo $N^3 = 0$ in tak skalar $c \neq 1$, da bo presek $\sigma(N+A) \cap \sigma(N+cA)$ vseboval neničelno vrednost.
Najprej poglejmo primer, ko obstaja vektor $u \in X$, da so u, Au, A^2u linearno neodvisni vektorji. Naj bo $U = \langle u, Au, A^2u \rangle$ linearna ogrinjača teh vektorjev. Naj bo V komplementaren prostor prostora U, tj. $X = U \oplus V$. Sedaj definirajmo linearen operator N na prsotoru X za katerega veljajo lastnosti

$$\begin{aligned}
&Nu = u - Au, \\
&NAu = Au - 2A^2u, \\
&NA^2u = -\frac{1}{2}u + \frac{3}{2}Au - 2A^2u, \\
&Nv = 0 \quad \text{za vsak } v \in V.
\end{aligned}$$

Trdimo, da je $N \in B(X)$ in velja $N^3 = 0$. Ker je $A \in B(X)$,je tudi $A^2 \in B(X)$ in zato $N \in B(X)$. Prepričajmo se sedaj še, da je $N^3 = 0$ za $v \in V$ ter bazne elemente prostora $\langle u, Au, A^2u \rangle$. Velja

$$
\begin{aligned}
N^3v &= N^2(Nv) \\
&= N^2 0 \\
&= 0, \\
N^3u &= N^2(Nu) \\
&= N^2(u - Au) \\
&= N(Nu - NAu) \\
&= N(u - Au - Au + 2A^2u) \\
&= Nu - 2NAu + 2NA^2u \\
&= u - Au - 2Au + 4A^2u - u + 3Au - 4A^2u \\
&= 0, \\
N^3Au &= N^2(NAu) \\
&= N^2(Au - 2A^2u) \\
&= N(NAu - 2NA^2u) \\
&= N(Au - 2A^2u + u - 3Au + 4A^2u) \\
&= -2NAu + Nu + 2NA^2u \\
&= -2Au + 4A^2u + u - Au - u + 3Au - 4A^2u \\
&= 0, \\
N^3A^2u &= N^2(NA^2u) \\
&= N^2(-\frac{1}{2}u + \frac{3}{2}Au - 2A^2u) \\
&= N(-\frac{1}{2}Nu + \frac{3}{2}NAu - 2NA^2u) \\
&= N(-\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}Au + \frac{3}{2}Au - 3A^2u + u - 3Au + 4A^2u) \\
&= N(\frac{1}{2}u - Au + A^2u) \\
&= \frac{1}{2}u - \frac{2}{2}Au - Au + 2A^2u - \frac{1}{2}u + \frac{3}{2}Au - 2A^2u \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Torej je N res nilpotentni operator na prostoru $B(X)$, za katerega velja $N^3 = 0$. Poleg tega velja

$$
\begin{aligned}
(N + A)u &= Nu + Au = u - Au + Au = u, \\
(N + 2A)Au &= NAu + 2A^2u = Au - 2A^2u - 2A^2u = Au.
\end{aligned}
$$

Opazimo torej, da je 1 lastna vrednost operatorja $(N + A)$ ter operatorja $(N + 2A)$. Velja torej $1 \in \sigma(N + A) \cap \sigma(N + 2A)$. Prišli smo do protislovja, saj $1 \notin \sigma(N) = \{0\}$.

Poglejmo sedaj primer, ko so x, Ax, A^2x linearno odvisni, za vsak vektor $x \in X$. Iz izreka 2.17 sledi, da obstaja tak polinom p stopnje največ dva, da velja $p(A) = 0$. Ker operator A ni skalar p ne more biti stopnje ena. Zato je stopnja polinoma p enaka dva. Poleg tega obstaja tak vektor $u \in C$, da sta u in Au linearno neodvisna. Ker vodilni koeficient nima velikega pomena, saj ga lahko izopstavimo, predpostavimo, da je enak 1. Torej je lahko polinom p ene izmed oblik

$$\begin{aligned} p(t) &= (t-\alpha)(t-\beta), \\ p(t) &= (t-\alpha)^2, \\ p(t) &= t(t-\alpha), \\ p(t) &= t^2, \end{aligned}$$

kjer sta $\alpha \neq \beta$ neničelna skalarja.

1. Denimo, da je $p(t) = (t-\alpha)(t-\beta)$, kjer je $\alpha \neq \beta$ in $\alpha, \beta \neq 0$. Tukaj sta α in β lastni vrednosti preslikave $A_{|W}$, kjer je $W = \langle u, Au \rangle$, saj je p njen minimalni polinom. Iz lastnosti o Jordanski kanonični formi ugotovimo, da sta velikost največjih kletk za lastni vrednosti α in β enaki 1. Zato je Jordanska forma za preslikavo $A_{|W}$ enaka
$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

2. Denimo, da je $p(t) = (t-\alpha)^2$, kjer je $\alpha \neq 0$. Iz lastnosti 1 o Jordanski kanonični formi ugotovimo, da je velikost največje kletke za lastno vrednost α enaka 2. Zato je Jordanska forma za preslikavo $A_{|W}$ enaka
$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

3. Naj bo $p(t) = t^2$. Ker je $\operatorname{rang} A \geq 2$, obstaja tak $v \in X$, da sta vektorja Au in Av linearno neodvisna. Seveda so vektorji v, Av, A^2v linearno odvisni. Zato je tudi prostor $W_1 := \langle v, Av \rangle$ invarianten za A. Enako velja za $W_2 := W \oplus W_1 = \langle u, Au, v, Av \rangle$. Velja tudi, da je $p(A_{|W_2}) = 0$, kjer je p minimalen polinom preslikave $A_{|W_2} : W_2 \to W_2$. Zaradi Jordanske kanonične forme je velikost največje kletke za lastno vrednost 0 enaka 2. Ker je $0 = p(A) = A^2$, sledi $A(Au) = 0$ in $A(Av) = 0$, tj. $\dim \ker(A_{|W_2} - 0 \cdot I) \geq 2$. Opazimo tudi, da sta Jordanski kletki za lastno vrednost 0 (vsaj) 2. Ker je $\dim W_2 \leq 4$ in je $\operatorname{rang}(A_{|W_2}) \geq 2$, sta obe kletki velikosti 2. Torej je Jordanska forma za $A_{|W_2}$ enaka
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Denimo, da je $p(t) = t(t-\alpha)$, kjer je $\alpha \neq 0$. Naj bo W_2 enak kot pri točki 3. Zaradi Jordanske kanonične forme je velikost največje kletke za lastno vrednost α enaka 1. Enako velja za lastno vrednost 0. Ker je $0 = p(A) = A(A-\alpha I) = (A-\alpha I)A$, sledi $(A-\alpha I)Au = 0$ in $(A-\alpha I)Av = 0$. Torej je $\dim\ker(A_{|W_2} - \alpha \cdot I) \geq 2$ od tod sklepamo, da sta Jordanski kletki za lastno vrednost α vsaj 2. Če je prostor W_2 3-razsežen, potem je Jordanska forma za $A_{|W_2}$ enaka
$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$
Če je prostor W_2 4-razsežen, pa je Jordanska forma za $A_{|W_2}$ enaka
$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$
kjer je $\gamma \in \{0, \alpha\}$. V tem primeru prostor W_2 zamenjamo s primernim 3-razsežnim podprostorom, da bo Jordanska forma oblike (3.1).

Naj v nadaljevanju W označuje končno razsežen podprostor, glede na katerega imamo podano Jordansko formo. Naj bo Z komplementaren ptostor prostora W v X, tj. $X = W \oplus Z$. Naj bo N tak operator, da velja $N_{|Z} = 0$, zožitev $N_{|W}$ pa naj ima matrično reprezentacijo enako
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ali } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix} \text{ ali } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bigoplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ ali } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 2\alpha \\ 0 & -2\alpha & -2\alpha \end{pmatrix},$$
v odvisnosti od tega, katerega izmed štirih primerov obravnavamo. Torej je $N^2 = 0$. Naj bo $c = \alpha\beta^{-1}$ ali 4 ali 2 ali 2. V tem primeru vsebuje presek $\sigma(N+A) \cap \sigma(N+cA)$ neničelne skalarje α ali 2α ali 2α ali $\sqrt{2}$, kar nas pripelje do protislovja v vseh štirih primerih. $\square$

Lema 3.9. *Naj bo X kompleksen Banachov prostor in ϕ takšna preslikava, da zadošča predpostavkam izreka 3.3. Če je $R \in B(X)$ tak operator, da je njegov rang enak 1, potem je rang operatorja $\phi(R)$ tudi dimenzije 1.*

Dokaz. Naj bo $R \in B(X)$ ranga 1. Po izreku 3.8 velja
$$\sigma(T+R) \cap \sigma(T+cR) \subseteq \sigma(T) \text{ za vsak } T \in B(X) \text{ in vsak skalar } c \neq 1.$$

Ker je ϕ linearna preslikava, ki ohranja spekter veljajo enakosti

$$\begin{aligned}\sigma(T+R) &= \sigma(\phi(T+R)) = \sigma(\phi(T)+\phi(R)),\\ \sigma(T+cR) &= \sigma(\phi(T+cR)) = \sigma(\phi(T)+c\phi(R)),\\ \sigma(T) &= \sigma(\phi(T)).\end{aligned}$$

Torej velja

$$\sigma(\phi(T)+\phi(R)) \cap \sigma(\phi(T)+c\phi(R)) \subseteq \sigma(\phi(T))$$

za vsak $T \in B(X)$ in vsak $c \neq 1$. Ker je ϕ bijekcija sledi

$$\sigma(S+\phi(R)) \cap \sigma(S+c\phi(R)) \subseteq \sigma(S)$$

za vsak $S \in B(X)$ in vsak $c \neq 1$. Iz izreka 3.8 sledi, da je rang od $\phi(R)$ enak 1. □

Sedaj lahko dokažemo izrek 3.3.

Dokaz. Za vsak neničelen $x \in X$ ter vsak neničelen $f \in X^*$ definirajmo množici $L_x = \{x \otimes h : h \in X^*\}$ in $R_f = \{u \otimes f; u \in X\}$.
Trdimo, da sta množici L_x in R_f maksimalna linearna podprostora prostora $B(X)$, sestavljena iz operatorjev ranga 1.
Da sta L_x in R_f sestavljeni iz operatorjev ranga 1 je očitno že iz same definicije obeh množic. Najprej bomo pokazali, da sta L_x in R_f res podprostora $B(X)$. Dokazati moramo dva pogoja.

- Za poljubne elemente $h, f \in X^*$ in $u, v \in X$ želimo pokazati enakosti $x\otimes(h+f) = x \otimes h + x \otimes f$ in $(u+v) \otimes f = u \otimes f + v \otimes f$, kar bo pomenilo, da sta množici L_x in R_f zaprti za seštevanje. Naj bo $w \in X$ poljuben vektor. Tedaj velja $(x \otimes (h+f))w = (h+f)(w)x = h(v)x + f(v)x = (x \otimes h)w + (x \otimes f)w$ oz. $x \otimes (h+f) = x \otimes h + x \otimes f$. Podobno velja $((u+v) \otimes f)w = f(w)(u+v) = f(w)u + f(w)v = (u \otimes f)w + (v \otimes f)w$ oz. $(u+v) \otimes f = u \otimes f + v \otimes f$.

- Želimo pokazati, da za vsak $h \in L_x$, $u \in R_f$ ter skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ veljajo enakosti $\lambda(x \otimes h) = x \otimes (\lambda h)$ in $\lambda(u \otimes f) = (\lambda u) \otimes f$.
Naj bo $w \in X$ poljuben vektor. Tedaj velja $(x \otimes \lambda h)w = \lambda h(w)x = \lambda(x \otimes h)w$ in $(u \otimes (\lambda f))w = \lambda f(w)u = \lambda(u \otimes f)(w)$.

Torej sta L_x, R_f res podporstora v $B(X)$. Pokazati moramo še, da sta maksimalna. Naj bo $V \subseteq B(X)$ tak vektorski podprostor, ki vsebuje le operatorje ranga ≤ 1 in vsebuje L_x za nek x. Denimo, da obstaja element $S \in V \setminus L_x$. Ker je S operator ranga ena, je oblike $S = y \otimes g$ za nek neničelen $y \in X$ in nek neničelen $g \in X^*$. Ker $S \notin L_x$, sta vektorja linearno neodvisna. V nasprotnem, če bi veljalo $y = \lambda x$ za nek $\lambda \neq 0$, bi dobili $S = y \otimes g = (\lambda x) \otimes g = x \otimes (\lambda g) \in L_x$.

Izberimo tak $h \in X^*$, ki je linearno neodvisen od g. Tedaj velja $x \otimes h \in L_x \subseteq V$ in $y \otimes g \in V$. Ker je V vektorski prostor, sledi $x \otimes h + y \otimes g \in V$. Slika operatorja $x \otimes h + y \otimes g$ na poljubnem elementu $z \in X$ je enaka

$$(x \otimes h + y \otimes g)z = (x \otimes h)z + (y \otimes g)z = h(z)x + g(z)y,$$

iz česar razberemo, da je slika operatorja $(x \otimes h + y \otimes g)$ dvo-razsežna, saj je enaka prostoru $\langle x, y \rangle$. Operator $(x \otimes h + y \otimes g)$ je tako ranga dva, kar je protislovje. Zato velja $V = L_x$.

Maksimalnost prostora R_f se dokaže na podoben način.

Trdimo, da za vsak $x \in X$ velja, da je $\phi(L_x)$ enak L_y za nek $y \in Y$ ali R_g za nek $g \in Y^*$.

Da to res drži, si pomagamo z lemo 3.9. Vemo, da je L_x maksimalen podprostor prostora $B(X)$. Zaradi leme 3.9 morajo biti tudi operatorji v $\phi(L_x)$ ranga 1. Ker je ϕ bijekcija, ohranja tudi maksimalnost množice. Potemtakem je $\phi(L_x)$ lahko le oblike L_y za nek $y \in Y$ oz. R_g za nek $g \in Y^*$.

Trdimo, da za poljubna $u, v \in X$ ne more hrati veljati, da je $\phi(L_u) = L_y$ in $\phi(L_v) = R_g$, saj je $L_y \cap R_g$ prostor dimenzije 1, $L_u \cap L_v$ pa prostor dimenzije 0 ali $dim(X^*)$. Velja namreč

$$L_y \cap R_g = \{y \otimes f; f \in Y^*\} \cap \{v \otimes g : v \in Y\} = y \otimes g$$

in

$$L_u \cap L_v = \{u \otimes f : f \in X^*\} \cap \{v \otimes f : f \in X^*\} = \begin{cases} 0, & \text{če } u \neq v \\ L_u = L_v, & \text{če } u = v. \end{cases}$$

Ker je ϕ bijektivna linearna preslikava, ohranja tudi dimenzijo prostorov. Zato ločimo dva primera.

1. Za vsak $x \in X$ obstaja tak $y \in Y$, da velja $\phi(L_x) = L_y$ oz. $\phi(x \otimes f) = y \otimes g$. Ker je preslikava ϕ linearna, je linearna tudi preslikava $f \mapsto g$. Označimo sedaj $g = C_x f$, kjer je C_x linearna transformacija $C_x : X^* \to Y^*$. Pokazati želimo, da je prostor $\{C_x : x \in X\}$ dimenzije 1.
   Če to ne drži, potem obstajajo $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ ter dve linarno neodvisni transformaciji C_1, C_2, da velja

   $$\phi(x_1 \otimes f) = y_1 \otimes C_1 f$$

   in

   $$\phi(x_2 \otimes f) = y_2 \otimes C_2 f$$

   za vsak $f \in X^*$. Od tod sledijo enakosti

   $$y_1 \otimes C_1 f + y_2 \otimes C_2 f = \phi(x_1 \otimes f + x_2 \otimes f) = \phi((x_1 + x_2) \otimes f),$$

kar predstavlja operator ranga 1 za vsak $f \in X^*$.

Ker sta C_1 in C_2 linearno neodvisni transformaciji, potem sta y_1 in y_2 linearno odvisna in $L_{y_1} = L_{y_2}$. Od tod sledi, da sta L_{x_1} in L_{x_2} enaka in posledično tudi x_1 in x_2 linearno odvisna.

Vendar v tem primeru pridemo do rezultata, da sta C_1 in C_2 linearno odvisni transformaciji, kar je v protislovju s predpostavko. Od tod sledi, da je $dim(\{C_x : x \in X\}) = 1$. Posledično obstaja taka linearna transformacija $C : X^* \to Y^*$, da velja $\phi(x \otimes f) = y \otimes Cf$ za vsak f. Naj bo $A : X \to Y$ linearna transformacija, ki vektorju x priredi vektor y. Potem je $\phi(x \otimes f) = Ax \otimes Cf$. Opazimo, da sta A in C bijekciji, saj je preslikava ϕ bijekcija. Vzemimo poljuben operator T na prostoru X. Potem je $\phi(T + x \otimes f) = \phi(T) + Ax \otimes Cf$. Naj bo $\lambda \in \mathbb{C}$ takšen skalar, da velja $\lambda \notin \sigma(T)$. Iz leme 3.7 sledi, da je $f((\lambda - T)^{-1}x) = 1$ natanko tedaj, ko je $Cf((\lambda - \phi(T))^{-1}Ax) = 1$. Zaradi linearnosti velja

$$f((\lambda - T)^{-1}x) = Cf((\lambda - \phi(T))^{-1}Ax) \tag{3.2}$$

za vse $x \in X, f \in X^*$ in $\lambda \notin \sigma(T)$.

Če sedaj zamenjamo λ z ulomkom $\frac{1}{z}$ dobimo enakost

$$f((1 - zT)^{-1}A^{-1}y) = Cf((1 - z\phi(T))^{-1}y), \tag{3.3}$$

ki drži za vsako neničelno kompleksno število z v okolici $\{z : |z| < \delta\}$ točke 0. V limiti, ko gre $z \to 0$, dobimo

$$f(A^{-1}y) = Cf(y). \tag{3.4}$$

Ker sta $g_1(z) := f((1 - zT)^{-1}A^{-1}y)$ in $g_2(z) := Cf((1 - z\phi(T))^{-1}y)$ (iz enakosti (3.2)) holomorfni funkciji, lahko izračunamo njun odvod v točki $z = 0$. Velja

$$\begin{aligned}
g_1'(0) &= \lim_{z \to 0} \frac{g_1(z) - g_1(0)}{z - 0} \\
&= \lim_{z \to 0} \frac{1}{z} \left(f((I - zT)^{-1}A^{-1}y) - f(A^{-1}y) \right) \\
&= \lim_{z \to 0} \frac{1}{z} f \left((I - zT)^{-1}A^{-1}y - A^{-1}y \right) \\
&= \lim_{z \to 0} \frac{1}{z} f \left(((I - zT)^{-1} - (I - zT)^{-1}(1 - zT))A^{-1}y \right) \\
&= \lim_{z \to 0} \frac{1}{z} f \left((I - zT)^{-1}(I - (I - zT))A^{-1}y \right) \\
&= \lim_{z \to 0} \frac{1}{z} f \left((I - zT)^{-1}zA^{-1}y \right) \\
&= \lim_{z \to 0} \frac{1}{z} zf \left((I - zT)^{-1}A^{-1}y \right) \\
&= \lim_{z \to 0} f \left((I - zT)^{-1}A^{-1}y \right) \\
&= f(TA^{-1}y)
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
g_2'(0) &= \lim_{z\to 0} \frac{g_2(z)-g_2(0)}{z-0} \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{1}{z}\big(Cf((I-z\phi(T))^{-1}y) - Cf(yy)\big) \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{1}{z} Cf\left((I-z\phi(T))^{-1}y - y\right) \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{1}{z} Cf\left((((I-z\phi(T))^{-1} - I)y\right) \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{1}{z} Cf\left(((I-z\phi(T))^{-1} - (I-z\phi(T))^{-1}(I-z\phi(T)))y\right) \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{1}{z} Cf\left((I-z\phi(T))^{-1}(I-(I-z\phi(T)))y\right) \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{1}{z} Cf\left((I-z\phi(T))^{-1}z\phi(T)y\right) \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{1}{z} zCf\left((I-z\phi(T))^{-1}\phi(T)y\right) \\
&= \lim_{z\to 0} Cf\left((I-z\phi(T))^{-1}\phi(T)y\right) \\
&= Cf(\phi(T)y).
\end{aligned}$$

Z uporabo enakosti (3.4) opazimo, da je $Cf(\phi(T)y) = f(A^{-1}\phi(T)y)$. Od tod sledi

$$f(TA^{-1}y) = f(A^{-1}\phi(T)y).$$

Posledično je ϕ oblike

$$\phi(T) = ATA^{-1}$$

za vsak $T \in B(X)$.

2. V tem primeru privzemimo, da za vsak $x \in X$ obstaja tak $g \in Y^*$, da je $\phi(L_x) = R_g$. Tukaj je $R_g = \{y \otimes g : y \in Y\}$.
Definirajmo preslikavo $\psi : B(X) \to B(Y^*)$ s predpisom

$$\psi(T) = (\phi(T))^t.$$

Najprej bomo pokazali, da velja

$$(R_g)^t \subseteq L_g. \tag{3.5}$$

Izberimo poljuben $y \otimes g \in R_g$, kjer je y neničelen. Tedaj za $f \in Y^*$ in $z \in Y$ velja

$$((y \otimes g)^t f)z = f((y \otimes g)z) = f(g(z)y) = g(z)f(y).$$

Posledično je

$$(y \otimes g)^t f = f(y)g. \tag{3.6}$$

Definirajmo $F_y \in Y^{**}$ s predpisom $F_y(f) = f(y)$. Tedaj je

$$(g \otimes F_y)f = F_y(f)g = f(y)g.$$

Iz enačbe (3.6) razberemo, da velja $(y \otimes g)^t = g \otimes F_y \in L_g$, kar dokazuje inkluzijo (3.5). Za vsak $x \in X$ torej obstaja tak $g \in Y^*$, da velja

$$\psi(L_x) \subseteq L_g. \tag{3.7}$$

Znano je, da imata operator T in T^t enaka spektra. Zato ima preslikava ψ povsem enake lastnosti kot preslikava ϕ. To pomeni, da v enačbi (3.7) velja enakost

$$\psi(L_x) = L_g. \tag{3.8}$$

To tudi pomeni, da je prostor Y refleksiven, tj. $Y^{**} = Y$, preslikava ψ pa je tako kot ϕ surjektivna. Sedaj iz prvega primera (kjer je Y zamenjan z Y^*) sledi obstoj takega obrnljivega operatorja $A : X \to Y^*$, da velja

$$\psi(T) = ATA^{-1}$$

tj.

$$(\phi(T))^t = ATA^{-1}, \tag{3.9}$$

za vse $T \in B(X)$. Če označimo $B := (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, kar je obrnljiv operator $B : X^* \to Y^{**} = Y$, in uporabimo transponiranje na enačbi (3.9), dobimo

$$(\phi(T))^{tt} = BT^tB^{-1}.$$

Zaradi refleksivnosti velja $(\phi(T))^{tt} = \phi(T)$ oz.

$$\phi(T) = BT^tB^{-1}$$

za vse $T \in B(X)$.

S tem je dokaz izreka 3.3 končan. □

3.2 Linearne preslikave, ki ohranjajo spektralni radij

Brešar in Šemrl sta leta 1996 v članku [2] izrek 3.3 posplošila. Njun izrek 3.10 zreducira predpostavko o ohranjanju spektra na predpostavko o ohranjanju spektralnega radija.

Izrek 3.10. *Naj bo X kompleksen Banachov prostor in $\phi : B(X) \to B(X)$ surjektivna linearna preslikava, ki zadošča enačbi $r(\phi(A)) = r(A)$ za vsak $A \in B(X)$. Potem velja ena izmed naslednjih dveh možnosti.*

1. *Obstaja tak bijektiven omejen linearen operator $T : X \to X$ in takšno kompleksno število c, da velja $\phi(A) = cTAT^{-1}$ za vsak $A \in B(X)$ in $|c| = 1$.*

2. *Obstaja tak bijektiven omejen linearen operator $T : X^* \to X$ in tako kompleksno število c z lastnostjo $|c| = 1$, da velja $\phi(A) = cTA^tT^{-1}$ za vsak $A \in B(X)$. V tem primeru mora biti X refleksiven prostor.*

Za dokaz izreka 3.10 moramo najprej dokazati, da ϕ ohranja nilpotente v obeh smereh, tj. $N \in B(X)$ je nilpotent, če in samo če je $\phi(N)$ nilpotent. Nato pa uporabimo izrek 3.11, katerega dokaz najdemo v [9].

Izrek 3.11. *Naj bo X netrivialen kompleksen Banachov prostor in $B_0(X)$ linearna ogrinjača nilpotentnih operatorjev iz $B(X)$. Predpostavimo, da je $\phi : B_0(X) \to B_0(X)$ surjektivna linearna preslikava, ki ohranja nilpotente v obeh smereh. Potem obstaja tako neničelno število $d \in \mathbb{C}$, da velja ena izmed naslednjih dveh možnosti.*

1. *Obstaja tak omejen linearen operator $T : X \to X$, da je $\phi(A) = dTAT^{-1}$ za vsak $A \in B_0(X)$.*

2. *Obstaja tak omejen bijektiven linearen operator $T : X^* \to X$, da je $\phi(A) = dTA^tT^{-1}$ za vsak $A \in B_0(X)$. V tem primeru je X refleksiven.*

3.2.1 Dokaz izreka 3.10

Dokaz. Dokaz celotnega izreka je razdeljen na 7 korakov.

1. *Naj bo ϕ takšna preslikava, da zadošča pogojem iz izreka* (3.10)*. Potem je ϕ injekcija.*

   Predpostavimo, da je $\phi(A) = 0$ za nek operator $A \neq 0$. Izberimo tak $x \in X$, da velja $0 \neq Ax = y$. Velja $r(A) = 0$. Trdimo, da sta x, y linearno neodvisna.
   Recimo, da sta x in y linearno odvisna. Torej lahko zapišemo $y = \lambda x$ za nek skalar $\lambda \in \mathbb{C}$, oz. $Ax = \lambda x$. Ker je $r(A) = 0$, je λ lahko le 0. Vendar smo prišli do protislovja s predposavko, da je $Ax \neq 0$. Torej sta x in y res linearno neodvisna.
   Naj bo V komplementaren prostor prostora $\langle x, y\rangle$, tj. $X = \langle x, y\rangle \oplus V$. Definirajmo $N \in B(X)$ kot

   $$Nx = Ny = x - y$$

   ter

   $$Nv = 0$$

za vsak $v \in V$. Trdimo, da je $N^2 = 0$ in $r(\phi(N)) = 0$. Prva enakost sledi iz enačb

$$N^2v = N(Nv) = N(0) = 0,$$
$$N^2x = N(Nx) = N(x-y) = Nx - Ny = x - y - (x-y) = 0,$$
$$N^2y = N(Ny) = N(x-y) = Nx - Ny = 0.$$

Ker je $N^2 = 0$, sledi $r(N) = 0$ in posledično $r(\phi(N)) = 0$.
Ob upoštevanju predpostavke, da je ϕ linearna dobimo enakosti

$$\phi(A+N) = \phi(A) + \phi(N) = 0 + \phi(N).$$

Ker ϕ ohranja spektralni radij opazimo, da je $r(A+N) = r(\phi(A+N)) = r(\phi(N))$.
Sedaj računamo $(A+N)x = Ax + Nx = y + x - y = x$. Posledično je $r(\phi(N)) = r(A+N) \geq 1$. Prišli smo do protislovja.
Velja torej, da je $\phi(A) = 0$ natanko tedaj, ko je $A = 0$.
V jedru $\ker\phi$ preslikave je le ničelni operator. Od kod sledi, da je ϕ injektivna preslikava.

2. *Če ϕ zadošča predpostavkam iz izreka* (3.10) *potem je $\phi(I) = cI$, kjer je $c \in \mathbb{C}$ in $|c| = 1$.*

Dovolj je, da pokažemo, da sta x in $\phi(I)x$ linearno odvisna za vsak $x \in X$.
Recimo, da to ne drži za nek $x \in X$. Naj bo W komplementaren prostor prostora $\langle x, \phi(I)x\rangle$, tj. $X = \langle x, \phi(I)x\rangle \oplus W$. Definirajmo $M \in B(X)$ s predpisi

$$Mx = 2x - \phi(I)x,$$
$$M\phi(I)x = 4x - 2\phi(I)x \;\; Mw \;\; = 0.$$

za vse $w \in W$.

Trdimo, da je $M^2 = 0$, kar je razvidno iz enačb

$$\begin{aligned}
M^2w &= M(Mw)\\
&= M(0)\\
&= 0,\\
M^2x &= M(Mx)\\
&= M(2x - \phi(I)x)\\
&= 2Mx - M\phi(I)x\\
&= 2(2x - \phi(I)x) - 4x - 2\phi(I)x\\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M^2\phi(I)x &= M(M\phi(I)x) \\
&= M(4x - 2\phi(I)x) \\
&= 8x - 4\phi(I)x - 8x + 4\phi(I)x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ker je ϕ bijekcija, obstaja tak $R \in B(X)$, da je $M = \phi(R)$. Vemo, da je $r(M) = 0$. Torej je tudi $r(R) = 0$.
Izračunajmo sedaj $r(I + R) = r(I) + r(R) = 1 + 0 = 1$. Torej je $r(\phi(I) + M) = r(I + R) = 1$. Kar pa je v protislovju z enakostjo

$$(\phi(I) + M) = \phi(I)x + Mx = \phi(I)x + 2x - \phi(I)x = 2x,$$

ki pravi, da je $r(\phi(I) + M) \geq 2$.
Torej sta x in $\phi(I)x$ linearno odvisna za vsak x. Posledično je $\phi(I) = cI$ za nek tak $c \in \mathbb{C}$, da velja $c = 1$.
V nadaljevanju dokaza lahko brez izgube splošnosti privzamemo, da je $c = 1$ in $\phi(I) = I$.
V nasprotnem definiramo preslikavo ψ s predpisom $\psi(A) := c^{-1}\phi(A)$, za katero je $\psi(I) = c^{-1}\phi(I) = c^{-1}cI = I$.

Sedaj bomo s $\pi(A)$ označevali množico takih $\lambda \in \sigma(A)$ za katere velja $|\lambda| = r(A)$.

3. *Če ϕ zadošča predpostavkam izreka* (3.10) *je $\pi(\phi(A)) = \pi(A)$ za vsak $A \in B(X)$.*

   Izberimo $\lambda \in \pi(A)$. Ob upoštevanju linearnosti ϕ ugotovimo, da velja

   $$\phi(A + \lambda I) = \phi(A) + \lambda\phi(I) = \phi(A) + \lambda I.$$

   Ker ϕ ohranja radij sledi

   $$r(A + \lambda I) = |r(A) + \lambda r(I)| = |\lambda + \lambda I| = |2\lambda| = 2r(A).$$

   Torej obstaja tak $\alpha \in \sigma(\phi(A))$, da je $|\alpha + \lambda| = 2|\lambda|$, saj velja

   $$r(\phi(A + \lambda I)) = r(\phi(A) + \lambda I) = |\alpha + \lambda|.$$

   Ker velja $r(\phi(A)) = r(A)$, je $|\alpha| \leq |\lambda|$. Od tod sledi, da je $\alpha = \lambda$. Torej je $\lambda \in \sigma(\phi(A))$ in $\pi(A) \subseteq \pi(\sigma(A))$.
   Ker je ϕ bijektivna preslikava, ki ohranja spektralni radij, obstaja njen inverz ϕ^{-1}, ki prav tako ohranja spektralni radij. Torej je $\pi(\phi(A)) \subseteq \pi(A)$ in velja $\pi(A) = \pi(\sigma(A))$.

4. *Naj bo ϕ preslikava, ki zadošča pogojem iz izreka* (3.10), *naj bo $B \in B(X)$ tak operator, da velja $B^k = 0$, kjer je $k \in \mathbb{N}$, za katerega velja $k \geq 2$. Če za $A \in B(X)$ velja $AQ^iA = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$, kjer je $Q = \phi(B)$, potem je*

   $$r(\lambda Q^k + AQ^{k-1} + QAQ^{k-2} + Q^2AQ^{k-3} + \cdots + Q^{k-1}A) = 0$$

za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$.

Označimo $B_1(k) = AQ^{k-1} + QAQ^{k-2} + Q^2AQ^{k-3} + \cdots + Q^{k-1}A$ in $B_2(k) = Q^k$. Velja $r(A+\lambda Q)^k = r((A+\lambda Q)^k)$ in $A^2 = AQA = AQ^2A = \cdots = AQ^{k-2} = 0$. Trdimo, da je

$$r(A+\lambda Q)^k = |\lambda|^{k-1} r(B_1(k) + \lambda B_2(k)).$$

Za dokaz te enakosti bomo uporabili indukcijo.
Naj bo $k = 2$. Torej je $B_1(2) = AQ + QA$ in $B_2(2) = Q^2$, iz česar sledi

$$\begin{aligned}
r(A+\lambda Q)^2 &= r((A+\lambda Q)^2) \\
&= r(A^2 + \lambda AQ + \lambda QA + \lambda^2 Q^2) \\
&= r(0 + \lambda AQ + \lambda QA + \lambda^2 Q^2) \\
&= r(\lambda(AQ + QA + \lambda Q^2)) \\
&= |\lambda| r(B_1(2) + \lambda B_2(2)).
\end{aligned}$$

Dokažimo trditev sedaj za splošen k. Predpostavimo, da velja

$$r(A+\lambda Q)^{k-1} = |\lambda|^{k-2} r(AQ^{k-2} + QAQ^{k-3} + \cdots + Q^{k-2}A + \lambda Q^{k-1}).$$

Tedaj velja

$$\begin{aligned}
r(A+\lambda Q^k) &= r((A+\lambda Q)^{k-1})(A+\lambda Q)) \\
&\overset{\text{I.P.}}{=} |\lambda|^{k-2} r(AQ^{k-2} + QAQ^{k-3} + \cdots + Q^{k-3}AQ + Q^{k-2}A \\
&+ \lambda Q^{k-1})(A+\lambda Q)) \\
&= |\lambda|^{k-2} r(AQ^{k-2}A + QAQ^{k-3}A + \cdots + Q^{k-3}AQA \\
&+ Q^{k-2}A^2 + \lambda Q^{k-1}A + \lambda(AQ^{k-1} \\
&+ QAQ^{k-2} + \cdots + Q^{k-3}AQ^2 + Q^{k-2}AQ + \lambda Q^k) \\
&= |\lambda|^{k-2} r(\lambda(Q^{k-1}A + AQ^{k-1} + QAQ^{k-2} + \cdots + Q^{k-2}AQ + \lambda Q^k)) \\
&= |\lambda|^{k-1} r(B_1(k) + \lambda B_2(k)),
\end{aligned}$$

kar zaključi dokaz indukcije. Po drugi strani velja enakost

$$r(A+\lambda Q)^k = r(\phi^{-1}(A+\lambda Q))^k = r((\phi^{-1}(A) + \lambda B)^k),$$

saj je ϕ^{-1} bijektivna linearna preslikava, ki ohranja spektralni radij. Če upoštevamo še dejstvo, da je $B^k = 0$, potem trdimo, da dobimo enakost

$$r(A+\lambda Q)^k = r(A_0 + \lambda A_1 + \cdots + \lambda^{k-1}A_{k-1}), \tag{3.10}$$

kjer so operatorji $A_0, \ldots, A_{k-1}$ definirani kot

$$\begin{aligned}
&A_0 = \phi^{-1}(A)^k,\\
&A_1 = \phi^{-1}(A)^{k-1}B + \cdots + B\phi^{-1}(A)^{k-1},\\
&\vdots\\
&A_{k-1} = B^{k-1}\phi^{-1}(A) + \cdots + \phi^{-1}(A)B^{k-1}.
\end{aligned}$$

Za dokaz enakosti (3.10) bomo uporabili indukcijo. Naj bo $k = 2$. V tem primeru je $A_0 = \phi^{-1}(A)^2$, $A_1 = \phi^{-1}(A)B + B\phi^{-1}(A)$ in $B^2 = 0$, iz česar sledi

$$\begin{aligned}
r(a + \lambda Q)^2 &= r((\phi^{-1}(A) + \lambda B)^2)\\
&= r(\phi^{-1}(A)^2 + \lambda\phi^{-1}(A)B + \lambda B\phi^{-1}(A) + \lambda^2 B^2)\\
&= r(A_0 + \lambda A_1).
\end{aligned}$$

Naj bo sedaj k poljuben. Predpostavljamo

$$r(A + \lambda Q)^{k-1} = r(A_0 + \lambda A_1 + \cdots + \lambda^{k-2}A_{k-2}).$$

Upoštevajmo še dejstvo, da je $r(A + \lambda Q) = r(\phi^{-1}(A) + \lambda B)$, kar implicira

$$\begin{aligned}
r(A + \lambda Q)^k &= r((A + \lambda Q)^{k-1}(A + \lambda Q))\\
&\overset{\text{I.P.}}{=} r((A_0 + \lambda A_1 + \cdots + \lambda^{k-2}A_{k-2})(\phi^{-1}(A) + \lambda B))\\
&= r(((\phi^{-1}(A)^{k-1} + \lambda(\phi^{-1}(A)^{k-2}B + \cdots + B\phi^{-1}(A)^{k-2}) + \cdots\\
&+ \lambda^{k-2}(B^{k-2}\phi^{-1}(A) + \cdots + \phi^{-1}(A)B^{k-2}))(\phi^{-1}(A) + \lambda B))\\
&= r(\phi^{-1}(A)^k + \lambda(\phi^{-1}(A)^{k-2}B\phi^{-1}(A) + \cdots + B\phi^{-1}(A)^{k-1})\\
&+ \cdots + \lambda^{k-2}(B^{k-2}\phi^{-1}(A)^2 + \cdots + \phi^{-1}(A)B^{k-2}\phi^{-1}(A))\\
&+ \lambda\phi^{-1}(A)^{k-1}B + \lambda^2(\phi^{-1}(A)^{k-2}B^2 + \cdots + B\phi^{-1}(A)^{k-2}B)\\
&+ \cdots + \lambda^{k-1}(B^{k-2}\phi^{-1}(A)B + \cdots + \phi^{-1}(A)B^{k-1})\\
&= r(\phi^{-1}(A)^k + \lambda(\phi^{-1}(A)^{k-1}B + \phi^{-1}(A)^{k-2}B\phi^{-1}(A)^{-1} + \cdots\\
&+ B\phi^{-1}(A)^{k-1}) + \lambda^2(\phi^{-1}(A)^{k-2}B^2 + \cdots + B\phi^{-1}(A)^{k-2}B\\
&+ \phi^{-1}(A)^{k-3}B^2\phi^{-1}(A) + \cdots + B^2\phi^{-1}(A)^{k-2}) + \cdots\\
&+ \lambda^{k-1}(B^{k-2}\phi^{-1}(A)B + \cdots + \phi^{-1}(A)B^{k-1}))\\
&= r(A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \cdots + \lambda^{k-1}A_{k-1}).
\end{aligned}$$

S tem je indukcijski korak zaključen. Pokazali smo, da je

$$|\lambda|^{k-1}r(B_1 + \lambda B_2) = r(A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \cdots + \lambda^{k-1}A_{k-1}).$$

Vemo, da je $r(A) \leq \|A\|$.
Če je $|\lambda| \geq 1$, potem velja

$$\begin{aligned}
r(B_1 + \lambda B_2) &= |\lambda|^{-k+1} r(A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \cdots + \lambda^{k-1} A_{k-1}) \\
&\leq |\lambda|^{-k+1} (\|A_0\| + |\lambda| \|A_1\| + |\lambda|^2 \|A_2\| + \cdots \\
&+ |\lambda|^{k-1} \|A_{k-1}\|) \\
&\leq \|A_0\| + \|A_1\| + \|A_2\| + \cdots + \|A_{k-1}\|.
\end{aligned}$$

Če je $|\lambda| \leq 1$, velja

$$r(B_1 + \lambda B_2) \leq \|B_1 + \lambda B_2\| \leq \|B_1\| + \|B_2\|.$$

Dokazali smo torej, da je funkcija $U : \lambda \mapsto r(B_1 + \lambda B_2)$ omejena. S pomočjo članka [10] lahko pokažemo, da je funkcija $U(\lambda)$ subharmonična. Sedaj uporabimo Liouvillov izrek za subharmonične funkcije (pomagamo si s člankom [7]), od koder sledi, da je U konstantna funkcija, tj. $U(\lambda) = r(B_1)$. Oziroma

$$r(B_1 + \lambda B_2) = r(B_1), \text{ za vsak } \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3.11}$$

Opazimo, da je $B_1 A = 0$, saj je $AQ^i A = 0$ za vsak $i = 0, 1, \ldots, k-1$ oz.

$$\begin{aligned}
B_1 A &= (AQ^{k-1} + QAQ^{k-2} + \cdots + Q^{k-1} A) A \\
&= AQ^{k-1} A + QAQ^{k-2} A + \cdots + Q^{k-1} A^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Trdimo, da je $B_1^2 = X_{k-2} AQ^{k-2} + X_{k-3} AQ^{k-3} + \cdots + X_0 A$ za nek $X_1 \in B(X)$. Res velja

$$\begin{aligned}
B_1^2 &= (AQ^{k-1} + QAQ^{k-2} + \cdots + Q^{k-1} A)(AQ^{k-1} + QAQ^{k-2} + \cdots + Q^{k-1} A) \\
&= AQ^{k-1} AQ^{k-1} + QAQ^{k-2} AQ^{k-1} + \cdots + Q^{k-1} A^2 Q^{k-1} + \\
&+ AQ^k AQ^{k-2} + QAQ^{k-1} AQ^{k-2} + \cdots + Q^{k-1} AQAQ^{k-2} + \\
&+ Q^{k-1} A^2 Q^{k-1} + Q^{k-1} AQAQ^{k-2} + \cdots + Q^{k-1} AQ^{k-1} A = \\
&= AQ^{k-1} QAQ^{k-2} + QAQ^{k-2} Q^2 AQ^{k-3} + \\
&+ Q^2 AQ^{k-3} Q^3 AQ^{k-4} + \cdots + Q^{k-2} AQQ^{k-1} A = \\
&= AQ^k AQ^{k-2} + QAQ^k AQ^{k-3} + Q^2 AQ^k AQ^{k-4} + \cdots + Q^{k-2} AQ^k A = \\
&= X_{k-2} AQ^{k-2} + X_{k-3} AQ^{k-3} + \cdots + X_0 A,
\end{aligned}$$

kjer je $X_i \in B(X)$ oblike $Q^{k-2-i} AQ^k$. Opazimo, da je

$$\begin{aligned}
B_1^2 QA &= (X_{k-2} AQ^{k-2} + X_{k-3} AQ^{k-3} + \cdots + X_0 A)(QA) \\
&= X_{k-2} AQ^{k-2} QA + X_{k-3} AQ^{k-3} QA + \cdots + X_0 AQA \\
&= X_{k-2} AQ^{k-1} A + X_{k-3} AQ^{k-2} A + \cdots + X_0 AQA \\
&= 0
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}B_1^2A &= B_1(B_1A)\\ &= B_1 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

Na podoben način izpeljemo, da je $B_1^3 = Y_{k-3}AQ^{k-3} + \cdots + Y_0A$ za nek $Y_i \in B(X)$ in posledično $B_1^3Q^2A = B_1^3QA = B_1^3A = 0$.
Če postopek ponavljamo lahko pokažemo, da je $B_1^{k+1} = 0$. Od tod sklepamo, da je $r(B_1 + \lambda B_2) = 0$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$. To velja ob upoštevanju enakosti (3.11) in dejstva, da je B_1 nilpotent.

5. *Če za $B \in B(X)$ velja, da je $B^k = 0$ za nek $k \in \mathbb{N}$, kjer je $k \geq 2$, potem je $\phi(B)^{2k-1} = 0$. Pri tem je ϕ takšna preslikava, ki zadošča predpostavkam iz izreka (3.10).*

   Naj bo $Q = \phi(B)$. Ker je $B^k = 0$, iz izreka 2.16 o preslikavi spektra sledi $\{0\} = \sigma(0) = \sigma(B^k) = \sigma(B)^k$, kar pomeni, da je $\sigma(B) = \{0\}$ oz. $r(B) = 0$. Posledično je $r(Q) = 0$ oz. $\sigma(Q) = \{0\}$. Predpostavimo, da je $Q^{2k-1} \neq 0$. Naj bo p polinom stopnje $\leq 2k-1$. Zapišemo ga lahko kot $p(t) = at^m(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n)$, kjer je a neko neničelno kompleksno število, $m+n \in \{0, 1, \ldots, 2k-1\}$ in so števila $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ neničelna. Denimo, da velja $p(Q) = 0$, tj.

$$0 = p(Q) = aQ^m(Q-\lambda_1 I)(Q-\lambda_2 I)\cdots(Q-\lambda_n I). \tag{3.12}$$

   Ker je $\sigma(Q) = \{0\}$, so operatorji $Q - \lambda_i I$ obrnljivi. Enačbo (3.12) lahko pomnožimo z desne z operatorjem $a^{-1}(Q-\lambda_n I)^{-1}\cdots(Q-\lambda_1 I)^{-1}$. Na ta način dobimo enakost $Q^m = 0$. Ker je $m \leq 2k-1$, sledi $Q^{2k-1} = Q^mQ^{2k-1-m} = 0$, kar je protislovje. Zato velja $p(Q) \neq 0$.
   Iz izreka 2.17 sledi, da obstaja tak vektor $u \in X$, da so vektorji u, Qu, $Q^2u, \ldots,$ $Q^{2k-1}u$ linearno neodvisni.
   Definirajmo

$$Z := \langle u, Qu, \ldots, Q^{k-2}u, Q^ku, Q^{k+1}u, \ldots, Q^{2k-2}u, Q^{2k-1}u - Q^{k-1}u\rangle.$$

   Opazimo, da $Q^{k-1}u \notin Z$. Torej obstaja tak $f \in X^*$, da je $f(Q^{k-1}u) = 1$ in $f(z) = 0$ za vsak $z \in Z$.

Za naš f veljajo enakosti

$$\begin{aligned} f(u) &= 0, \\ f(Qu) &= 0, \\ &\vdots \\ f(Q^{k-2}u) &= 0, \\ f(Q^{k-1}u) &= 1, \\ f(Q^{k}u) &= 0, \\ &\vdots \\ f(Q^{2k-2}u) &= 0, \\ f(Q^{2k-1}u) &= 1. \end{aligned}$$

Naj bo $A = (u - Q^k u) \otimes f$. Opazimo, da za $i = 0, 1, \ldots, k-2$ velja

$$\begin{aligned} AQ^i u &= (u - Q^k u) \otimes f Q^i u \\ &= f(Q^i u)(u - Q^k u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} AQ^{k-1} u &= (u - Q^k u) \otimes f Q^{k-1} u \\ &= f(Q^{k-1} u)(u - Q^k u) \\ &= u - Q^k u. \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} &(Q^k + AQ^{k-1} + QAQ^{k-2} + \cdots + Q^{k-1}A)u \\ &= Q^k u + AQ^{k-1}u + QAQ^{k-2}u + \cdots + Q^{k-1}Au \\ &= Q^k u + u - Q^k u \\ &= u. \end{aligned}$$

Torej je $r(Q^k + AQ^{k-1} + QAQ^{k-2} + \cdots + Q^{k-1}A) \geq 1$.
Za $i = 0, 1, \ldots, k-1$ velja

$$\begin{aligned} AQ^i A &= ((u - Q^k u) \otimes f) Q^i ((u - Q^k u) \otimes f) \\ &= ((u - Q^k u) \otimes f)((Q^i u - Q^{k+i} u) \otimes f) \\ &= f(u - Q^k u) f(Q^i u - Q^{k+i} u \\ &= 0, \end{aligned}$$

kjer je $f(Q^i u - Q^{k+i} u) = 0$. Iz koraka 4 sledi $r(Q^k + AQ^{k-1} + QAQ^{k-2} + \cdots + Q^{k-1}A) = 0$. Prišli smo do protislovja. Torej je $Q^{2k-1} = \phi(B)^{2k-1} = 0$.

Ker je ϕ^{-1} bijektivna linearna preslikava, ki ohranja spektralni radij, lahko ponovimo zgornji postopek tudi za ϕ^{-1} in s tem dokažemo, da ϕ ohranja nilpotente v obe smeri. Sedaj lahko za dokaz izreka 3.10 uporabimo izrek 3.11.
Predpostavimo, da velja 1. možnost iz izreka 3.11. V tem primeru definiramo $\phi : B(X) \to B(X)$ kot

$$\phi(A) = T^{-1}\phi(A)T.$$

Če velja 2. možnost izreka 3.11, je X refleksiven prostor, t.j. $(X^*)^* = X$. Zaradi tega je naravna vložitev $K : X \to X^{**}$ bijektivna. V tem primeru je ϕ definirana kot

$$\phi(A) = K^{-1}T^t\phi(A)^t(T^{-1})^tK.$$

V obeh primerih je ϕ bijektivna linearna preslikava, ki ohranja spektralni radij in zadošča enakosti

$$\phi(I) = I,\ \phi(N) = dN \tag{3.13}$$

za vsak nilpotenten operator $N \in B(X)$. Pri tem je $d \in \mathbb{C}$ skalar.
Izrek bo dokazan, ko pokažemo, da $d = 1$ in $\phi(A) = A$ za vsak $A \in B(X)$.

6. *Velja $d = 1$ in $\phi(P) = P$ za vsak projektor P ranga 1.*

Projekcijo P ranga 1 lahko zapišemo, kot $x \otimes f$, kjer je $f(x) = 1$. To velja, saj je $P^2 = P$ in posledično

$$\begin{aligned}
Pv &= f(v)x, \\
P^2v &= P(P(v)) = P(f(v)x) = f(v)f(x)x,
\end{aligned}$$

iz česar sledi $f(x) = 1$. Ker je P projektor, velja tudi

$$X = imP \oplus \ker P. \tag{3.14}$$

Najprej pokažimo, da sta $y = \phi(x \otimes f)x$ in x linearno odvisna.
Predpostavimo, da to ne drži. Potem zaradi enakosti (3.14) velja, da je $\phi(x \otimes f)x = \alpha x + z$, kjer je $\alpha = f(y) \in \mathbb{C}$ in $z \neq 0$, $z \in \ker f$. Izberimo sedaj tak $g \in X^*$, da je $g(x) = 0$ in $g(z) = 1$. Naj bo $w = \phi(x \otimes f)z$. Velja $w = \beta x + \gamma z + u$, kjer je $\beta = f(w)$ in $\gamma = g(w)$. Torej je $u = w - f(w)x - g(w)z$. Opazimo, da je $u \in \ker f \cap \ker g$, saj velja

$$\begin{aligned}
f(u) &= f(w) - f(f(w)x) - f(g(w)z) \\
&= f(w) - f(w)f(x) - 0 \\
&= f(w) - f(w) \\
&= 0
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} g(u) &= g(w) - g(f(w)x) - g(g(w)z) \\ &= g(w) - 0 - g(w)g(z) \\ &= g(w) - g(w) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sedaj definirajmo

$$\begin{aligned} \delta &= (2-\alpha)(2-\gamma) - \beta, \\ N &= d^{-1}((\delta x - u) \otimes g), \\ A &= N + (x \otimes f). \end{aligned}$$

Najprej izračunajmo $g(\delta x - u)$. Spomnimo se, da je $g(x) = g(u) = 0$. Torej je

$$g(\delta x - u) = \delta g(x) - g(u) = 0.$$

Trdimo, da je $N^2 = 0$. Naj bo $t \in X$ poljuben vektor. Tedaj velja

$$\begin{aligned} N^2 t &= N(Nt) \\ &= N(d^{-1}((\delta x - u) \otimes g)(t)) \\ &= N(d^{-1} g(t)(\delta x - u)) \\ &= d^{-1} g(t) N(\delta x - u) \\ &= d^{-1} g(t) d^{-1}((\delta x - u) \otimes g)(\delta x - u) \\ &= d^{-1} g(t) d^{-1} g(\delta x - u)(\delta x - u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Zaradi enakosti (3.13) je $\phi(N) = dN$ in posledično $\phi(A) = \phi(x \otimes f) + dN$. Trdimo, da je $A^3 = A^2$. Naj bo t poljuben vektor. Tedaj velja

$$\begin{aligned} A^2(t) &= A((N + (x \otimes f))(t)) \\ &= A(Nt + f(t)x) \\ &= A(d^{-1}((\delta x - u) \otimes g)(t) + f(t)x) \\ &= A(d^{-1} g(t)(\delta x - u) + f(t)x) \\ &= d^{-1} g(t) A(\delta x - u) + f(t) A x \\ &= d^{-1} g(t)(N + (x \otimes f))(\delta x - u) + f(t)(N + (x \otimes f))x \\ &= d^{-1} g(t)(d^{-1} g(\delta x - u)(\delta x - u) + f(\delta x - u)x) \\ &+ f(t)(d^{-1} g(x)(\delta x - u) + f(x)x) = \\ &= d^{-1} g(t)(0 + \delta x) + f(t)(0 + x) \\ &= d^{-1} g(t) \delta x + d^{-1} f(t) x \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
A^3t &= A(A^2t)\\
&= A(d^{-1}g(t)\delta x + d^{-1}f(t)x)\\
&= (N + (x\otimes f))(d^{-1}g(t)\delta x + d^{-1}f(t)x)\\
&= d^{-1}g(t)\delta Nx + d^{-1}f(t)Nx + d^{-1}g(t)\delta(x\otimes f)x + d^{-1}f(t)(x\otimes f)x\\
&= (d^{-1}g(t)\delta + d^{-1}f(t))d^{-1}g(x)(\delta x - u) + (d^{-1}g(t)\delta + d^{-1}f(t))f(x)x\\
&= 0 + d^{-1}g(t)\delta x + d^{-1}f(t)x.
\end{aligned}$$

Ker je $A^3 = A^2$, oziroma $A^3 - A^2 = 0$, lahko sestavimo polinom p oblike $p(x) = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$, za katerega je $p(A) = 0$. Od tod sledi, da je $\sigma(p(A)) = \{0\}$. Ob upoštevanju izreka 2.16 opazimo, da je $\sigma(A) \subseteq \{0, 1\}$. Torej je $r(A) \leq 1$, kar pa je v protislovju z enakostjo

$$\phi(A)((2-\gamma)x + z) = 2((2-\gamma)x + z),$$

ki jo pridobimo iz izračuna

$$\begin{aligned}
\phi(A)((2-\gamma)x + z) &= (dN + \phi(x\otimes f))((2-\gamma)x + z)\\
&= dN((2-\gamma)X + z) + (2-\gamma)\phi(x\otimes f)x + \phi(x\otimes f)z\\
&= dd^{-1}(\delta x - u)(g(x)(2-\gamma) + g(z)) + (2-\gamma)(\alpha x + z) + w\\
&= (\delta x - u) + (2-\gamma)(\alpha x + z) + \beta x + \gamma z + u\\
&= ((2-\alpha)(2-\gamma) - \beta)x - u + 2\alpha x + 2z - \alpha\gamma x - \gamma z +\\
&+ \beta x + \gamma z + u\\
&= (4 - 2\gamma - 2\alpha + \alpha\gamma - \beta)x + x(2\alpha - \alpha\gamma + \beta) + 2z =\\
&= (4 - 2\gamma)x + 2z\\
&= 2((2-\gamma)x + z).
\end{aligned}$$

Dokazali smo, da za vsak $x \in X$ in $f \in X^*$, za katera velja $f(x) = 1$, obstaja skalar $\lambda(x, f) \in \mathbb{C}$, da velja

$$\phi(x\otimes f)x = \lambda(x, f)x. \tag{3.15}$$

Sedaj izberimo take $x, y \in X$ ter $f, g \in X^*$, da je $f(x) = g(y) = 1$ in $f(y) = g(x) = 0$. Trdimo, da so operatorji $y\otimes f$, $x\otimes g$ in $(x-y)\otimes(f+g)$ nilpotenti.

Naj bo u poljuben vektor. Tedaj veljajo enakosti

$$
\begin{aligned}
(y \otimes f)^2 u &= (y \otimes f)(f(u)y) \\
&= f(f(u)y)y \\
&= 0, \\
(x \otimes g)^2 u &= (x \otimes g)(g(u)x) \\
&= (g(g(u)x)x \\
&= 0, \\
((x-y) \otimes (f+g))^2 u &= ((x-y) \otimes (f+g))(f+g)(u)(x-y) \\
&= (f+g)(u)((f+g)(x-y))(x-y) \\
&= (f+g)(u)((f(x-y) + g(x-y))(x-y) \\
&= (f+g)(u)((f(x) - f(y) + g(x) - g(y))(x-y) \\
&= (f+g)(u)(1 - 0 + 0 - 1)(x-y) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

iz česar sledi, kar smo trdili. Pokažimo, da velja enakost

$$
x \otimes f - y \otimes g = y \otimes f - x \otimes g + (x-y) \otimes (f+g). \tag{3.16}
$$

Naj bo u poljuben vektor. Tedaj velja

$$
\begin{aligned}
(x \otimes f)u - (y \otimes g)u &= f(u)x - g(u)y \\
(y \otimes f)u - (x \otimes g) + (x-y) \otimes (f+g) &= f(u)y - g(u)x + (f(u) + g(u))(x-y) \\
&= x(-g(u) + f(u) + g(u)) \\
&\quad + y(f(u) - f(u) - g(u)) \\
&= f(u)x + g(u)y,
\end{aligned}
$$

kar dokazuje enakost (3.16). Od tod sledi

$$
\phi(x \otimes f) - \phi(y \otimes g) = d(x \otimes f - y \otimes g),
$$

saj velja

$$
\begin{aligned}
\phi(x \otimes f) - \phi(y \otimes g) &= \phi(x \otimes f - y \otimes g) \\
&= \phi(y \otimes f - x \otimes g + (x-y) \otimes (f+g)) \\
&= \phi(y \otimes f) - \phi(x \otimes g) + \phi((x-y) \otimes (f+g)) \\
&= d(y \otimes f) - d(x \otimes g) + d((x-y) \otimes (f+g)) \\
&= d\big(y \otimes f - x \otimes g + (x-y) \otimes (f+g)\big) \\
&= d(x \otimes f - y \otimes g).
\end{aligned}
$$

Opazimo, da smo sedaj dokazali, da velja

$$\phi(P) - \phi(Q) = d(P - Q), \tag{3.17}$$

če je $PQ = QP = 0$, kjer sta P in Q projekciji ranga 1. Iz zgornjega sledi

$$\begin{aligned}
\phi(x \otimes f)y &= \phi(y \otimes g)y + d(x \otimes f - y \otimes g)y \\
&= \lambda(y, g)y + d(x \otimes f)y - d(y \otimes g)y \\
&= \lambda(y, g)y + df(y)x - dg(y)y \\
&= \lambda(y, g)y + 0 - dy \\
&= \lambda(y, g)y - dy.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Pokazali smo, da vektor $\phi(x \otimes f)y$ leži v linearni ogrinjači vektorja y, kjer je $x \otimes f$ projekcija ranga 1 in y vektor iz jedra preslikave f. Posledično je restrikcija preslikave $\phi(x \otimes f)$ na $\ker f$ večkratnik identitete.
Trdimo, da za katerokoli projekcijo P ranga 1 obstajata kompleksna skalarja $\lambda_P \neq \mu_P$, da velja

$$\phi(P) = \lambda_P(P) + \mu_P(I - P).$$

Vsaka projekcija P ranga 1 je oblike $P = x \otimes f$, za nek $x \in X$ ter $f \in X^*$. Zaradi enakosti (3.15) in (3.18) veljata enačbi $\phi(P)x = \lambda_P x$ ter $\phi(P)y = \mu_P y$ za vsak vektor $y \in \ker f = kerP = im(I - P)$, kjer sta $\lambda_P, \mu_P \in \mathbb{C}$ skalarja. Če je $z \in X$ poljuben vektor, ga lahko zapišemo kot $z = Pz + (I - P)z$, kjer je $Pz \in \langle z \rangle$, $(I - P)z \in \ker P$. Zato velja $\phi(P)z = \phi(P)Pz + \phi(P)(I - P)z = \lambda_P z + \mu_P(I - P)z$, oziroma $\phi(P) = \lambda_P P + \mu_P(I - P)$.
Za vsak neničelen projektor P velja, da je $\sigma(P) = \{0, 1\}$. To sledi iz izreka 2.16 in enačbe $P^2 = P$, oz. $p(P) = 0$, kjer je $p(x) = x^2 - x$.
Operator $\phi(P) = \lambda_P P + \mu_P(I - P)$ lahko zapišemo kot $\phi(P) = p(x)$, za $p(x) = (\lambda_P - \mu_P)x + \mu_P$. Po izreku 2.16 sledi

$$\sigma(\phi(P)) = \sigma(p(P)) = p(\sigma(P)) = P(\{0, 1\}) = \{\lambda_P, \mu_P\}.$$

Torej je $\sigma(\phi(P)) = \{\lambda_P, \mu_P\}$. Ker je $\pi(\phi(P)) = \pi(P) = \{1\}$ velja ena izmed dveh možnosti in sicer, da je $\lambda_P = 1$ in $|\mu_P| < 1$ ali $\mu_P = 1$ in $|\lambda_P| < 1$. Velja tudi

$$\{-1, 1\} = \pi(I - 2P) = \pi(I - 2\phi(P)) \subseteq \sigma(I - 2\phi(P)) = \{1 - 2\lambda_P, 1 - 2\mu_P\}.$$

Torej je $\{-1, 1\} = \{1 - 2\lambda_P, 1 - 2\mu_P\}$. Od tod sklepamo, da je $\lambda_P = 0$ ali $\mu_P = 0$ oziroma $\phi(P) = P$ ali $\phi(P) = I - P$.
Naj bosta sedaj P in Q projekciji ranga 1, za kateri velja $PQ = QP = 0$. S pomočjo enakosti (3.17) dobimo dve rešitvi.

(a) Velja $\phi(P) = P$, $\phi(Q) = Q$ in $d = 1$.

(b) Velja $\phi(P) = I - P$, $\phi(Q) = I - Q$ in $d = -1$.

Če velja drugi primer, je $\phi(P+Q) = 2I-(P+Q)$. Opazimo, da je $r(\phi(P+Q)) = 2$ in $r(P+Q) = 1-a$, kar nas je pripeljalo do protislovja. Torej drži prva možnost.

7. *Naj bo ϕ preslikava, ki zadošča pogojem izreka* (3.10). *Velja, da je $\phi(A) = A$ za vsak $A \in B(X)$.*

Naj bo $Ax = x$, za nek $A \in B(X)$ in neničelen vektor $x \in X$. Če je $\lambda \in \mathbb{C}$ takšen skalar, da velja $|\lambda| > \|A\|$, potem je

$$(\lambda I - A)^{-1}x = \frac{1}{\lambda - 1}x,$$

saj velja

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)(\frac{1}{\lambda - 1}x) &= \frac{1}{\lambda - 1}(\lambda I - A)x \\ &= \frac{1}{\lambda - 1}(\lambda Ix - Ax) \\ &= \frac{1}{\lambda - 1}(\lambda x - x) \\ &= \frac{1}{\lambda - 1}(\lambda - 1)x \\ &= x.\end{aligned}$$

Izberimo $f \in X^*$, da velja $f(x) = 1$. Sedaj uporabimo lemo 3.7 in opazimo, da je $\lambda \in \sigma(A + \mu(x \otimes f))$ natanko tedaj, ko je $\mu f((\lambda I - A)^{-1}x) = 1$. Trdimo, da je $\lambda = 1 + \mu$, kar sledi iz ekvivalence

$$\begin{aligned}&\mu f((\lambda I - A)^{-1}x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \mu f(\frac{1}{\lambda - 1}x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \mu\frac{1}{\lambda - 1}f(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \mu\frac{1}{\lambda - 1} = 1.\end{aligned}$$

Dokazali smo, da velja

$$\sigma(A + \mu(x \otimes f)) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq \|A\|\} \cup \{1 + \mu\}.$$

Torej, če je $|\mu| > \|A\|+1$ potem velja $1+\mu \in \pi(A+\mu(x\otimes f)) = \pi(\phi(A)+\mu(x\otimes f))$, oziroma $1 + \mu \in \sigma(\phi(A) + \mu(x \otimes f))$. Če sedaj ponovno uporabimo lemo Lema 4, sledi

$$\mu f((I + \mu I - \phi(A))^{-1}x) = 1. \tag{3.19}$$

Enačbo lahko še preuredimo

$$\begin{aligned}\mu f((I+\mu I-\phi(A))^{-1}x) &= \mu f\left(\mu^{-1}\left(I-\frac{\phi(A)-I}{\mu}\right)^{-1}x\right)\\ &= \mu\mu^{-1} f\left(\left(I-\frac{\phi(A)-I}{\mu}\right)^{-1}x\right).\end{aligned}$$

Označimo sedaj z $B := \frac{\phi(A)-I}{\mu}$. Na operatorju $(I-B)^{-1}$ lahko uporabimo Neumannovo vrsto in dobimo

$$\begin{aligned}f((I-B)^{-1}x) &= f\left(\sum_{k=0}^{\infty} B^k x\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(B^k x)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f((\frac{\phi(A)-I}{\mu})^k x)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-1} f((\phi(A)-I)^k x).\end{aligned}$$

Ta rezultat uporabimo na enakosti (3.19) in dobimo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k} f((\phi(A)-I)^k x) = 1.$$

Oziroma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f((\phi(A)-I)^k x)}{\mu^k} = 0.$$

Naj bo $c_k := f((\phi(A)-I)^k x)$. Ker je $|\mu| > \|A\|+1$ poljuben, sledi, da je holomorfna preslikava $z \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ enaka 0 na disku

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{\|A\|+1}\}.$$

V posebnem je $c_1 = f((\phi(A)-I)x) = 0$. Od tod sledi, da je $f(\phi(A)x) = 1$, saj je

$$0 = f((\phi(A)-I)x) = f(\phi(A)x) - f(x) = f(\phi(A)x) - 1. \tag{3.20}$$

Sedaj vzemimo tak $g \in X^*$, za katerega je $g(x) = 0$. Opazimo, da je $(f+g)(x) = 1$, saj velja

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 1.$$

Zaradi enačbe (3.20) je $(f+g)(\phi(A)x) = 1$ in $g(\phi(A)x) = 0$. Torej sta x in $\phi(A)x$ linearno odvisna in velja, da je $\phi(A)x = x$, kjer je $f(x) = 1$ in $f(\phi(A)x) = 1$. Pokazali smo, da enakost $Ax = x$ implicira enakost $\phi(A)x = x$.

Naj bosta sedaj $y \in X$ in $A \in B(X)$ poljubna. Označimo $z = Ay$ in izberimo tak operator F ranga ena, za katerega je $Fy = y - z$. Sledi, da je $\phi(F) = F$. Torej je $(A + F)y = y$ in $(\phi(A) + F)y = y$, kar pomeni, da je $\phi(A)y = z$. Od tod sledi, da je $\phi(A) = A$, kar smo želeli dokazati.

S tem je izrek 3.10 dokazan. $\square$

4 Zaključek

V diplomski nalogi smo se seznanili z ohranjevalci spektra omejenih operatorjev na Banachovem prostoru. Spoznali smo karakterizacijo linearnih surjektivnih preslikav, ki ohranjajo celo množico spektra operatorja. Le te imajo lahko eno izmed dveh predpisanih oblik, tj.

$$\phi(T) = ATA^{-1}$$

ali pa

$$\phi(T) = BT^tB^{-1},$$

kjer je $T \in B(X)$ poljuben in sta $A : X \to Y$, $B : X^* \to Y$ obrnljiva omejena operatorja.
Pogledali smo si tudi posplošitev tega rezultata, kjer smo se omejili na preslikave, ki ohranja le del operatorjevega spektra, in sicer njegov spektralni radij. V tem primeru je preslikava oblike

$$\phi(T) = cATA^{-1}$$

ali

$$\phi(T) = cAT^tA^{-1},$$

kjer je $|c| = 1$, $T \in B(X)$ poljuben operator. Pri tem je $A : X \to X$ oz. $A : X^* \to X$ omejen bijektiven operator.

5 Literatura

[1] B. Aupetit, *A Primer on Spectral Theory*, Springer-Verlag, 1991. *(Citirano na strani 7.)*

[2] M. Brešar in P. Šemrl, Linear maps preserving the spectral radius. *J. Funct. Anal.* 142 (1996) 360–368. *(Citirano na strani 20.)*

[3] G. Frobenius, Uber die darstellung der endlichen gruppen durch lineare substitutionen. *Deutsch. Akad. Wiss.* (1897) 994–1015. *(Citirano na strani 1.)*

[4] A. A. Jafarian in A. R. Sourour, Spectrum-Preserving Linear Maps. *J. Funct. Anal.* 66 (1986) 255–261. *(Citirano na strani 8.)*

[5] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons. Inc., 1978. *(Citirano na straneh 6 in 7.)*

[6] M. Marcus in B. N. Moyls, Linear transformations on algebras of matrices. *Canad. J. Math.* 11 (1959) 61–66. *(Citirano na strani 8.)*

[7] P. Ramankutty, Extensions of Liouville Theorems. *J. Math. Anal. Appl.* 90 (1982) 58–63. *(Citirano na strani 26.)*

[8] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, Inc., Second edition, 1991. *(Citirano na strani 5.)*

[9] P. Šemrl, Linear maps that preserve the nilpotent operators. *Acta Sci. Math. (Szeged)* 61 (1995) 523-534. *(Citirano na strani 21.)*

[10] E. Vesentini, On the subharmonicity of the spetral radius. *Boll. Unione Mat. Ital.* 4 (1968) 427–429. *(Citirano na strani 26.)*