

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Zaključna naloga

Bernsteinovi polinomi in njihova uporaba

(Bernstein polynomials with applications)

Ime in priimek: Urška Koren

Študijski program: Matematika v ekonomiji in financah

Mentor: izr. prof. dr. Vito Vitrih

Koper, julij 2018

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Urška KOREN

Naslov zaključne naloge: Bernsteinovi polinomi in njihova uporaba

Kraj: Koper

Leto: 2018

Število listov: 46

Število slik: 4

Število tabel: 1

Število referenc: 8

Mentor: izr. prof. dr. Vito Vitrih

Ključne besede: Bernsteinovi polinomi, Bézierove krivulje, CAD aplikacije

Math. Subj. Class. (2010): 65D17, 41A10

Izvleček:

V zaključnem delu so predstavljeni Bernsteinovi bazni polinomi in nekaj njihovih ključnih lastnosti kot so simetričnost, rekurzivnost, nenegativnost, unimodalnost ter particija enote. Ogledamo si tudi njihove vrednosti v krajiščih, odvode in integrale, višanje stopnje ter njihovo razmerje z bazo monomov. V naslednjem poglavju predstavimo Bézierove krivulje, ki jih definiramo z Bernsteinovimi baznimi polinomi ter s pomočjo de Casteljauovega algoritma. Krivulje so zelo priljubljene v računalniškem modeliranju (CAD aplikacijah) zaradi številnih matematičnih lastnosti, ki nam omogočajo njihovo enostavno kontrolo ter oblikovanje, ne da bi pri tem izgubili gladek videz krivulje. Iz lastnosti Bernsteinovih baznih polinomov izhajajo tudi pomembne lastnosti Bézierovih krivulj kot so psevdo-lokalna kontrola, simetrija, lastnost konveksne ovojnice, preprosto računanje odvodov in integralov ter višanje in nižanje stopnje krivulj. Podobno lahko lastnosti prenesemo na racionalne Bézierove krivulje in ploskve. S pomočjo Bernsteinovih baznih polinomov dokažemo tudi Weierstrassov izrek, ki pravi da za vsako zvezno funkcijo ostaja neko zaporedje polinomov, ki konvergira k funkciji $f(x)$ na $[a, b]$. V poglavju Numerična stabilnost pa s pogojenostnimi števili pokažemo, da je Bernsteinova baza stabilnejša od monomske baze. Večina vsebine je povzeta po [G. Farin, Curves and Surfaces for CAGD, A Practical Guide, Morgan Kaufmann Publishers, Fifth Edition, 2002] in [R.T.Farouki, The Bernstein polynomial basis: a centennial retrospective, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of California, 2012].

Key words documentation

Name and SURNAME: Urška KOREN

Title of final project paper: Bernstein polynomials with applications

Place: Koper

Year: 2018

Number of pages: 46

Number of figures: 4

Number of tables: 1

Number of references: 8

Mentor: Assoc. Prof. Vito Vitrih, PhD

Keywords: Bernstein polynomials, Bézier curves, CAD applications

Math. Subj. Class. (2010): 65D17, 41A10

Abstract: In the final project paper Bernstein basis polynomials are presented and some of their key properties such as symmetry, recursion, non-negativity, unimodality and partition of unity are described. Also their end-point values, derivatives and integrals are considered as well as degree elevation and their relation to the power (monomial) basis. Further more we use Bernstein polynomials to define Bézier curves. The curves are very popular in computer modeling (CAD applications) due to their mathematical properties that make them easy to control and design without losing the smoothness of the curve. The properties of Bernstein basis polynomials lead to the important properties of the Bézier curves, such as pseudo-local control, symmetry, convex hull property, simple calculation of derivatives and integrals and elevating and reducing the degree. Most of the properties are valid also for rational Bézier curves and Bézier surfaces. Moreover, the Weierstrass approximation theorem is proved by using Bernstein basis polynomials. In the chapter Numerical stability it is shown that Bernstein basis is more stable than the power basis by considering their condition numbers. Most of the material is taken from [G. Farin, Curves and Surfaces for CAGD, A Practical Guide, Morgan Kaufmann Publishers, Fifth Edition, 2002] and [R.T.Farouki, The Bernstein polynomial basis: a centennial retrospective, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of California, 2012].

Zahvala

Najprej bi se rada zahvalila svojemu mentorju dr. Vitu Vitrihu, ki mi je skozi čas pisanja zaključne naloge pomagal s številnimi nasveti in predlogi, da sem lahko dosegla zastavljeni cilj. Hvala tudi za vse spodbudne besede in potrpežljivost.

Rada bi se zahvalila tudi svojim staršema za vso podporo in spodbudo skozi čas študija. Nenazadnje pa hvala mojemu *staremu očetu*, ki mi je dal ljubezen do števil in s tem matematike.

Kazalo vsebine

1	UVOD	1
2	ZGODOVINA BERNSTEINOVIH POLINOMOV	3
2.1	Sergei Natanovich Bernstein	3
2.2	Definicija Bernsteinovih polinomov	4
2.3	Prve uporabe	5
2.4	CAD - praktične aplikacije	5
2.4.1	De Casteljau in Bézier	6
3	LASTNOSTI BERNSTEINOVIH BAZNIH POLINOMOV	7
3.1	Simetričnost	7
3.2	Rekurzivnost	7
3.3	Nenegativnost	8
3.4	Particija enote	8
3.5	Unimodalnost	9
3.6	Vrednosti v krajiščih	9
3.7	Odvodi	10
3.8	Integracija	10
3.9	Višanje stopnje	11
3.10	Relacija z bazo monomov	12
4	BÉZIEROVE KRIVULJE	14
4.1	Definicija	14
4.2	Lastnosti Bézierovih krivulj	17
4.2.1	Psevdo-lokalna kontrola	17
4.2.2	Simetrija	17
4.2.3	Odvodi in integrali	18
4.2.4	Konveksna ovojnica	19
4.2.5	Višanje in nižanje stopnje	20
5	POSPLOŠITVE	22
5.1	Racionalne Bézierove krivulje	22

5.2	Bézierove ploskve kot tenzorski produkt	24
5.3	Trikotne Bézierove krpe	26
6	WEIERSTRASSOV IZREK	28
7	NUMERIČNA STABILNOST	31
7.1	Pogojenostna števila	31
7.2	Optimalna stabilnost	34
8	ZAKLJUČEK	36
9	Literatura	37

Kazalo tabel

1	De Casteljauev algoritem	15
---	------------------------------------	----

Kazalo slik

1	Bernsteinovi polinomi stopnje $n=4$	4
2	Primer kubične Bézierove krivulje.	14
3	Primer spremembe Bézierove krivulje pri premiku ene izmed kontrolnih točk.	17
4	Racionalne Bézierove krivulje pri različnih izbirah ene izmed uteži.	23

Seznam kratic

<i>tj.</i>	to je
<i>npr.</i>	na primer
<i>CAD</i>	Computer Aided Design
<i>CAGD</i>	Computer Aided Geometric Design
<i>CAM</i>	Computer Aided Manufacturing

1 UVOD

Leta 1912 je matematik Sergei Natanovich Bernstein prvič uporabil Bernsteinove bazne polinome v konstruktivnem dokazu Weierstrassovega izreka v časopisu *Communications of the Kharkov Mathematical Society*. Kasnejše uporabe Bernsteinovih polinomov pa so sledile šele v zgodnjih šestdesetih letih dvajsetega stoletja, ko sta jih francoska inženirja avtomobilske industrije de Casteljau in Bézier uporabila kot osnovo Bézierovih krivulj. Z njimi sta lahko oblikovala proste oblike krivulj ter jih enostavno nadzorovala s pomočjo kontrolnih točk. Krivulje so sicer dobile ime po Bézieru, ker je ideja de Casteljaua ostala zgolj v internem zapisu francoskega podjetja Citroën. Bézier je ustvaril tudi svoj CAD sistem imenovan UNISURF in tako utrl pot preostalim razvijalcem CAD aplikacij. [7]

Po definiciji Bernstenovih baznih polinomov bomo predstavili nekaj njihovih ključnih lastnosti kot so simetričnost, rekurzivnost, nenegativnost, unimodalnost ter pokazali, da vsota vseh Bernsteinovih baznih polinomov stopnje n tvori particijo enote. Ogleдали si bomo tudi njihove vrednosti v krajiščih, odvode in integrale, višanje stopnje ter njihovo razmerje z bazo monomov. Sledi poglavje o Bézierovih krivuljah, kjer bomo Bézierove krivulje definirali z Bernsteinovimi baznimi polinomi ter s pomočjo de Casteljauovega algoritma. Krivulje so postale zelo priljubljene v računalniškem modeliranju zaradi številnih matematičnih lastnosti, ki nam omogočajo njihovo enostavno kontrolo ter oblikovanje, ne da bi pri tem izgubili gladek videz krivulje. Iz lastnosti Bernsteinovih baznih polinomov izhajajo tudi pomembne lastnosti Bézierovih krivulj kot so psevdo-lokalna kontrola, simetrija, konveksna ovojnica, preprosto računanje odvodov in integralov ter višanje in nižanje stopnje krivulj (glej [1], [4] in [7]).

V poglavju Posplošitve bomo zaradi potrebe po več fleksibilnosti za proste oblike pri geometrijskem modeliranju uvedli racionalne Bézierove krivulje. Z njihovo pomočjo bomo lahko prilagodili krivuljo našim potrebam in obenem ohranili enak kontrolni poligon. Večino lastnosti Bézierovih krivulj bomo brez težav prenesli tudi na racionalne Bézierove krivulje, manjše omejitve se nam bodo pojavile pri utežeh. V podpoglavju si bomo ogledali še Bézierove ploskve kot tenzorski produkt in predstavili njihove lastnosti. Ker pri kompleksnejših ploskvah izredno težko izvedemo postavitev pravokotne strukture, si bomo pomagali tudi s trikotnimi Bézierovimi krpami, katere bomo opisali z baricentričnimi koordinatami.

V nadaljevanju bomo predstavili dokaz Weierstrassovega izreka, ki trdi, da za vsako zvezno funkcijo f obstaja neko zaporedje polinomov p_n , ki konvergira k funkciji f na $[a, b]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x).$$

Weierstrass je svoj izrek dokazal že leta 1885, vendar ga je leta 1912 Sergei Natanovich Bernstein poenostavil z uporabo Bernsteinovih polinomov (povzeto po [5] in [7]).

V naslednjem poglavju bomo predstavili še eno pomembno lastnost Bernsteinove baze, in sicer njeno numerično stabilnost v povezavi z nenatančnostjo začetnih podatkov ter napak zaokroževanja, ki se pojavijo pri izračunih s plavajočo vejico. S pomočjo pogojenostnih števil bomo preverili, kako občutljiva je funkcija za spremembe in napake pri vnosu vhodnih podatkov. Preverili bomo tudi, ali obstaja nenegativna baza polinomov, s katerimi bi lahko Bernsteinove polinome zapisali kot nenegativno linearno kombinacijo le-teh, in bi bili posledično stabilnejši kot Bernsteinovi polinomi (povzeto po [7]).

Zaključna naloga vsebuje tudi slike, s katerimi smo prikazali Bernsteinove polinome stopnje $n = 4$, primer kubične Bézierove krivulje, primer spremembe Bézierove krivulje pri premiku ene izmed kontrolnih točk ter spremembo racionalne Bézierove krivulje pri različnih izbirah ene izmed uteži. Slike so bile oblikovane v klasični GeoGebri, ki je prosto dostopna na <https://www.geogebra.org/download?lang=sl>.

2 ZGODOVINA

BERNSTEINOVIH POLINOMOV

Matematične ideje, ki nastanejo iz reševanja konkretnih praktičnih problemov, njihov razvoj in končni pomen je v samem začetku težko predvidljiv. Nekateri koncepti matematičnih idej po letih zapadejo v relativno pozabo, nekateri pa zaživijo kot pomemben gradnik uporabnih orodij, ki nam olajšajo različne izračune.

2.1 Sergei Natanovich Bernstein

Ruski in sovjetski matematik Sergei Natanovich Bernstein se je rodil 5. marca 1880 v Odesi v Ukrajini. Leta 1898 se je po uspešnem zaključku šolanja v srednji šoli preselil v Pariz in pričel s študijem matematike v Sorbonu. V akademskem letu 1902-1903 je delal v Göttingenu pod vodstvom Davida Hilberta. To obdobje je bilo pobuda, da je leta 1904 v svoji doktorski disertaciji predstavil analitično rešitev eliptičnih diferencialnih enačb, Hilbertejevega devetnajstega problema. Disertacija je bila z navdušenjem sprejeta tudi pred takratnim odborom francoske matematične skupnosti pod vodstvom predsednika Émila Picarda. Leta 1905 se je Bernstein vrnil v Rusijo in pričel s pisanjem nove disertacije, da bi izpolnil pogoje za zaposlitev na raziskovalnem področju v Rusiji, saj jim ni zadostovala njegova Sorbonska disertacija.

Leta 1912 je v kratkem zapisu v časopisu *Communications of the Kharkov Mathematical Society* predstavil konstruktivni dokaz Weierstrassovega izreka, ki temelji na verjetnostni teoriji. V zapisu je prvič uporabil *Bernsteinove bazne polinome*. Leto kasneje je predstavil novo doktorsko disertacijo v Harkovu, ki je temeljila na polinomski aproksimaciji funkcij.

Kasneje se je posvetil delovanju na področju verjetnosti in teorije aproksimacij. Bil je tudi direktor matematičnega inštituta v Harkovu. Leta 1930 je bil odstranjen s položaja, dve leti pozneje pa se je preselil v Leningrad. Tam je deloval kot vodja oddelka verjetnosti in matematične statistike na Akademiji znanosti ZSSR ter kot predavatelj na Univerzi v Leningradu. Med drugo svetovno vojno mu je pred obleganjem mesta uspelo pobegniti v Kazahstan. Po vojni se ni želel vrniti v Leningrad, ampak se je raje preselil v Moskvo. Tam se je zaposlil na Univerzi v Moskvi ter med 1944 in 1951 urejal

dela Pafnutija Lvovicha Chebysheva. Leta 1947 je bil odpuščen s svojega položaja in je nato postal vodja oddelka teorije aproksimacij v Steklovem matematičnem inštitutu Ruske akademije znanosti, kjer je ostal vse do svoje upokojitve leta 1957. Sergei Natanovich Bernstein je umrl 26. oktobra 1968 v Moskvi. [7]

2.2 Definicija Bernsteinovih polinomov

Definicija 2.1. Naj bo $t \in [0, 1]$. Potem je i -ti Bernsteinov bazni polinom stopnje n (glej Slika 1) definiran kot

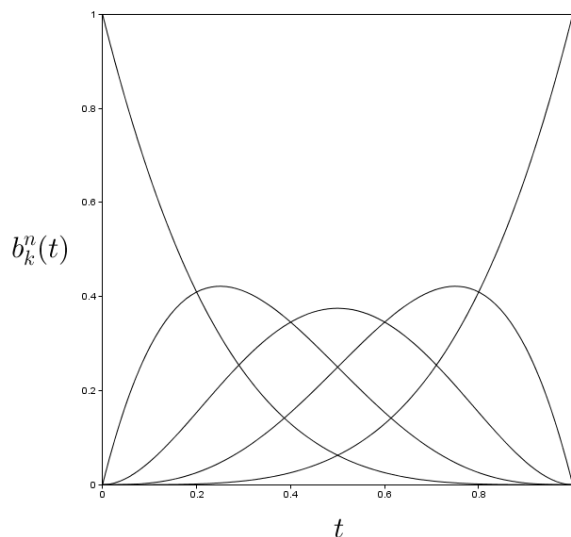
$$b_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

kjer je $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

Izrek 2.2. *Linearno kombinacijo Bernsteinovih baznih polinomov*

$$B_n(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i b_i^n(t)$$

imenujemo Bernsteinov polinom stopnje n , kjer so α_i Bernsteinovi koeficienti.



Slika 1: Bernsteinovi polinomi stopnje $n=4$.

2.3 Prve uporabe

Polinomi se pogosto uporabljajo v računskih modelih znanstvenih ali inženirskih problemov. Njihova uporaba je enostavna, saj lahko nad polinomi izvajamo računske operacije kot so seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje, potenciranje ter množenje s konstanto. Lastnosti naštetih operacij med oziroma nad polinomi so enake lastnostim operacij, ki jih izvajamo pri računanju s števili. Bernsteinovi bazni polinomi so bili prvič omenjeni leta 1912 v kratkem zapisu, kjer je Sergei Natanovich Bernstein predstavil konstruktivni dokaz Weierstrassovega izreka.

V zgodnjih šestdesetih letih dvajsetega stoletja sta inženirja francoske avtomobilske industrije Paul de Faget de Casteljau in Pierre Étienne Bézier začela z razvojem novih računalniških matematičnih orodij, ki bi oblikovalcem omogočila gradnjo in oblikovanje kompleksnih oblik kot je npr. avtomobilska karoserija. Težavo so jima predstavljale predvsem proste oblike, zato sta želela razviti način kako s spreminjanjem geometrijskih parametrov enostavno oblikovati krivulje in tako dobiti čim lepše oblike. Da bi to dosegla, morajo biti krivulje vsaj dvakrat zvezno odvedljive in nad njimi mora biti mogoče izvajanje kontrole. Ker Bernsteinovi polinomi ustrezajo tem pogojem sta jih de Casteljau in Bézier sprejela kot osnovo Bézierovih krivulj.

2.4 CAD - praktične aplikacije

Računalniško podprto načrtovanje ali računalniško podprto konstruiranje (angl. *Computer Aided Design*, CAD) je geometrijsko orodje, ki z uporabo strojne in programske računalniške opreme olajša inženirjem načrtovanje in oblikovanje objektov. Uporablja se predvsem v strojništvu, gradbeništvu, arhitekturi, elektrotehniki in lesarstvu. Najbolj znani programski paketi za CAD so AutoCAD, Pro/ENGINEER, SolidWorks, Unigraphics in drugi.

S CAD aplikacijami je konstruiranje veliko hitrejše in natančnejše. Zelo preprosto je prek aplikacij popravljati objekte, saj le-te temeljijo na parametričnih operacijah, kar pomeni, da se s spremembo enega parametra spremenijo tudi ostale mere, ki so vezane na ta parameter. Največji doprinos pri uporabi CAD aplikacij sta dober nadzor nad elementom objekta in celoto ter enostavno komuniciranje z drugimi programi; dokumentacijo lahko prenesemo v druge programe ali vzpostavimo podatkovno bazo za proizvodnjo - povezava med CAD in CAM (angl. *Computer Aided Manufacturing*, tj. računalniško podprta proizvodnja).

2.4.1 De Casteljau in Bézier

Leta 1960 je francoski inženir Pierre Étienne Bézier, ki je delal v razvojnem oddelku inštituta Renaulta, začel razmišljati o računalniški reprezentaciji mehanskih delov. Njegova začetna ideja je bila, da predstavi “osnovno krivuljo” kot stičišče dveh eliptičnih valjev, ki sta definirana znotraj paralelepipeda. Afina preslikava paralelepipeda bi nam vrnila afino preslikavo krivulje. Kasneje se je Bézier vrnil k prvotni polinomski formulaciji in jo razširil še za višje stopnje. Razvijal je tudi svoj CAD sistem UNISURF. Želel je ustvariti sistem, ki bi kvantitativno opisal geometrijo avtomobilske karoserije in jo natančno matematično definiral. To bi olajšalo oblikovanje delov in orodij pri avtomobilski industriji. Sistem je bil uveden leta 1968 in je v celoti v uporabi od leta 1975. Bézier je s svojim programom utrl pot preostalim razvijalcem CAD aplikacij.

Pred Bézierom pa je leta 1959 Bézierovo krivuljo neodvisno razvil tudi francoski inženir Paul de Faget de Casteljau, ki je takrat delal v konkurenčni avtomobilski industriji Citroën. Njegova ideja pa je takrat ostala samo v internem zapisu podjetja in so jo objavili šele kasneje, zato je krivulja dobila ime po Bézieru. V zgodnjih šestdesetih je bil razvoj digitalnih računalnikov še v samem začetku in si preostali inženirji niso znali predstavljati, da je mogoče ustvariti program, ki bi lahko oblikoval karoserijo. Zato je bila reakcija inženirjev na de Casteljaujevo idejo zelo burna.

... the designers were astonished and scandalized. Was it some kind of joke? It was considered nonsense to represent a car body mathematically. It was enough to please the eye, the word accuracy had no meaning ... [7]

V sedemdesetih letih je bilo posredovanje profesorja Wolfganga Böhma ključnega pomena pri razpoznavnosti dela Paula de Casteljauja. De Casteljau je razvil hitrejšo in numerično stabilnejšo metodo za računanje točk na Bézierovi krivulji, ki je postala temelj modeliranja in oblikovanja. Metodo imenujemo de Casteljauov algoritem. Predstavil je novo tehniko nadzora krivulje in sicer s pomočjo kontrolnega poligona. Namesto neposrednega spreminjanja krivulje, jo lahko spremenimo s pomočjo spremembe kontrolnega poligona.

3 LASTNOSTI BERNSTEINOVIH BAZNIH POLINOMOV

Navedli bomo nekaj ključnih lastnosti Bernsteinovih polinomov, glej [1] in [4].

3.1 Simetričnost

Za Bernsteinove bazne polinome, ki so na intervalu $t \in [0, 1]$, velja simetrija

$$b_{n-i}^n(1-t) = b_i^n(t)$$

Dokaz. Izhajamo iz osnovne definicije Bernsteinovih polinomov $b_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$, kjer je $i = 0, 1, \dots, n$. Potem velja

$$\begin{aligned} b_{n-i}^n(1-t) &= \binom{n}{n-i} (1-t)^{n-i} (1-(1-t))^{n-(n-i)} \\ &= \frac{n!}{(n-i)! (n-(n-i))!} (1-t)^{n-i} t^i = \frac{n!}{i! (n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = b_i^n(t). \end{aligned}$$

□

3.2 Rekurzivnost

Bazni polinom stopnje $n + 1$ lahko zapišemo v rekurzivni obliki z uporabo baznih polinomov stopnje n kot

$$b_i^{n+1}(t) = t b_{i-1}^n(t) + (1-t) b_i^n(t)$$

za $i = 0, 1, \dots, n + 1$, kjer je $b_i^n(t) \equiv 0$ za $i < 0$ oziroma $i > n$ ter $b_0^0 \equiv 1$.

Dokaz. Velja

$$\begin{aligned}
 b_i^{n+1}(t) &= \binom{n+1}{i} t^i (1-t)^{n+1-i} = \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) t^i (1-t)^{n+1-i} \\
 &= \binom{n}{i-1} t^i (1-t)^{n+1-i} + \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n+1-i} \\
 &= t \binom{n}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{n+1-i} + (1-t) \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-1} \\
 &= t b_{i-1}^n(t) + (1-t) b_i^n(t).
 \end{aligned}$$

□

3.3 Nenegativnost

Za $i = 0, 1, \dots, n$ in $t \in [0, 1]$ velja $b_i^n(t) \geq 0$.

Dokaz. Ker je $t \in [0, 1]$, sta $t^i \geq 0$ in $(1-t)^{n-i} \geq 0$. Torej je tudi $b_i^n(t) \geq 0$.

□

3.4 Particija enote

Vsota vseh Bernsteinovih baznih polinomov stopnje n je enaka konstanti 1.

$$\Sigma_n(t) = \sum_{i=0}^n b_i^n(t) = b_0^n(t) + b_1^n(t) + \dots + b_n^n(t) = 1, \quad t \in [0, 1].$$

Dokaz. Pokazali bomo, da velja

$$\Sigma_n(t) = \Sigma_{n-1}(t)$$

za $n \geq 1$. Uporabimo definicijo rekurzivnosti in sicer,

$$\begin{aligned}
 \Sigma_n(t) &= \sum_{i=0}^n ((1-t)b_i^{n-1}(t) + t b_{i-1}^{n-1}(t)) \\
 &= (1-t) \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i^{n-1}(t) + b_n^{n-1}(t) \right) + t \left(\sum_{i=1}^n b_{i-1}^{n-1}(t) + b_{-1}^{n-1}(t) \right) \\
 &= (1-t) \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{n-1}(t) + t \sum_{i=1}^n b_{i-1}^{n-1}(t) = (1-t) \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{n-1}(t) + t \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{n-1}(t) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{n-1}(t) = \Sigma_{n-1}(t).
 \end{aligned}$$

Posledično je $\Sigma_n(t) = \Sigma_{n-1}(t) = \dots = \Sigma_0(t) = b_0^0(0) = 1$. Torej je $\Sigma_n(t) = 1$ za $\forall n \geq 0$, kjer je $t \in [0, 1]$.

□

3.5 Unimodalnost

Polinom $b_i^n(t)$ ima en sam ekstrem, in sicer, kjer je $t = \frac{i}{n}$ za $t \in [0, 1]$.

Dokaz. Poiščimo naprej lokalne ekstreme. Odvajamo polinom $b_i^n(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} b_i^n(t) &= \binom{n}{i} i t^{i-1} (1-t)^{n-i} + \binom{n}{i} t^i (-1)(n-i)(1-t)^{n-i-1} \\ &= \binom{n}{i} (i t^{i-1} (1-t)^{n-i} - t^i (n-i)(1-t)^{n-i-1}) \\ &= \binom{n}{i} t^{i-1} (i(1-t)^{n-i} - t(n-i)(1-t)^{n-i-1}) \\ &= \binom{n}{i} t^{i-1} (1-t)^{n-i-1} (i(1-t) - t(n-i)) \end{aligned}$$

Izraz $\binom{n}{i} t^{i-1} (1-t)^{n-i-1}$ je enak 0, kadar je $t = 0$ in $i \notin \{0, 1\}$ ali pa $t = 1$ za $i \notin \{n-1, n\}$. Toda v tem primeru ima polinom $b_i^n(t)$ vrednost 0.

Preostane še drugi del, da ga enačimo z 0 in sicer $(i(1-t) - t(n-i))$.

$$\begin{aligned} i(1-t) - t(n-i) = 0 &\Leftrightarrow i(1-t) = t(n-i) \Leftrightarrow i - it = tn - it \\ &\Leftrightarrow i = nt \Leftrightarrow t = \frac{i}{n}. \end{aligned}$$

S tem smo dokazali, da je maksimum Bernsteinovih polinomov dosežen v $t = \frac{i}{n}$. □

3.6 Vrednosti v krajiščih

Za Bernsteinove bazne polinome velja

$$b_i^n(0) = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 0 & i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad \text{ter} \quad b_i^n(1) = \begin{cases} 0 & i = 0, 1, \dots, n-1 \\ 1 & i = n \end{cases}.$$

Dokaz. Za $t = 0$ preverimo dva primera in sicer:

1. $i = 0$: Vstavimo poznane vrednosti v splošno formulo Bernsteinovih polinomov, ter upoštevamo, da je $\binom{n}{0} = 1$ ter $0^0 = 1$ ter dobimo

$$b_0^n = \binom{n}{0} 0^0 (1-0)^{n-0} = 1$$

2. $i = 1, 2, \dots, n$: Vemo, da je $0^i = 0$ za vsak $i > 0$. Sledi, da je

$$b_i^n = \binom{n}{i} 0^i (1-0)^{n-i} = 0$$

Podobno preverimo še za $t = 1$. □

3.7 Odvodi

Odvod Bernsteinovega polinoma stopnje n so Bernsteinovi polinomi stopnje $n - 1$. Z odvodom izraza $b_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i}$ dobimo

$$\frac{d}{dt} b_i^n(t) = n (b_{i-1}^{n-1}(t) - b_i^{n-1}(t)),$$

kjer je $b_{-1}^{n-1}(t) \equiv 0$ in $b_n^{n-1}(t) \equiv 0$.

Dokaz. Velja

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} b_i^n(t) &= \frac{d}{dt} \left(\binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i} \right) \\ &= \frac{in!}{i!(n-i)!} t^{i-1} (1 - t)^{n-i} + \frac{(n-i)n!}{i!(n-i)!} t^i (1 - t)^{n-i-1} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1 - t)^{n-i} + \frac{n(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^i (1 - t)^{n-i-1} \\ &= n \left(\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1 - t)^{n-i} + \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^i (1 - t)^{n-i-1} \right) \\ &= n (b_{i-1}^{n-1}(t) - b_i^{n-1}(t)). \end{aligned}$$

□

3.8 Integracija

Nedoločeni integral Bernsteinovega polinoma lahko zapišemo kot

$$\int b_i^n(t) dt = \frac{1}{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} b_j^{n+1}(t) + \text{konstanta}.$$

Dokaz. Sledi dokaz s pomočjo odvodov.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} b_j^{n+1}(t) \right) &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} \frac{d}{dt} b_j^{n+1}(t) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} (n+1) (b_{j-1}^n(t) - b_j^n(t)) \\ &= \sum_{j=i+1}^{n+1} (b_{j-1}^n(t) - b_j^n(t)) \\ &= b_i^n(t). \end{aligned}$$

□

Določeni integral na intervalu $[0, 1]$ pa je enak

$$\int_0^1 b_i^n(t) dt = \frac{1}{n+1}.$$

Dokaz. Vsi Bernsteinovi polinomi enake stopnje imajo enak integral na intervalu $t \in [0, 1]$. To lahko vidimo, ker za vsak $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ velja

$$0 = \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} b_i^{n+1}(t) \right) dt = (n+1) \left(\int_0^1 b_{i-1}^n(t) dt - \int_0^1 b_i^n(t) dt \right).$$

Sledi,

$$\int_0^1 b_{i-1}^n(t) dt = \int_0^1 b_i^n(t) dt, i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Vemo, da je število Bernsteinovih polinomov stopnje n enako $n+1$. Ker velja

$$\sum_{i=0}^n \int_0^1 b_i^n(t) dt = \int_0^1 \sum_{i=0}^n b_i^n(t) dt = \int_0^1 1 dt = 1.$$

Sledi,

$$\int_0^1 b_i^n(t) dt = \frac{1}{n+1}.$$

□

3.9 Višanje stopnje

Bernsteinov polinom stopnje $n-1$ lahko zapišemo kot linearno kombinacijo Bernsteinovih polinomov stopnje n . Torej lahko Bernsteinov polinom stopnje r ($r < n$) zapišemo kot linearno kombinacijo Bernsteinovih polinomov stopnje n . Naprimer, Bernsteinov polinom stopnje $n-3$ lahko zapišemo kot linearno kombinacijo Bernsteinovih polinomov stopnje $n-2$, vsakega izmed njih pa lahko zapišemo kot linearno kombinacijo Bernsteinovih polinomov stopnje $n-1$ in tako dalje. Povišanje stopnje Bernsteinovih polinomov za r splošno zapišemo kot

$$b_i^n(t) = \sum_{j=i}^{i+r} \frac{\binom{n}{i} \binom{r}{j-i}}{\binom{n+r}{j}} b_j^{n+r}(t), \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Dokaz. Dokazali bomo, da lahko vsak Bernsteinov polinom stopnje n , zapišemo kot linearno kombinacijo Bernsteinovih polinomov stopnje $n+1$. Najprej $b_i^n(t)$ pomnožimo s t :

$$\begin{aligned} t b_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^{i+1} (1-t)^{n-i} = \binom{n}{i} t^{i+1} (1-t)^{(n+1)-(i+1)} \\ &= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i+1}} b_{i+1}^{n+1}(t) = \frac{i+1}{n+1} b_{i+1}^{n+1}(t), \end{aligned}$$

in nato še z $(1 - t)$:

$$\begin{aligned}(1 - t)b_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n+1-i} = \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i}} b_i^{n+1}(t) \\ &= \frac{n - i + 1}{n + 1} b_i^{n+1}(t).\end{aligned}$$

Torej Bernsteinov polinom stopnje n lahko zapišemo kot

$$b_i^n(t) = \frac{i + 1}{n + 1} b_{i+1}^{n+1}(t) + \frac{n - i + 1}{n + 1} b_i^{n+1}(t).$$

□

3.10 Relacija z bazo monomov

Množica Bernsteinovih baznih polinomov $b_0^n(t), b_1^n(t), \dots, b_n^n(t)$ tvori bazo vektorskega prostora polinomov z realnimi koeficienti in so kvečjemu stopnje n . Vsako funkcijo $t^i \in \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ lahko izrazimo z linearno kombinacijo $n + 1$ Bernsteinovih baznih polinomov. Med baznimi funkcijami veljajo razmerja

$$b_i^n(t) = \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} \binom{n}{j} \binom{j}{i} t^j \quad \text{in} \quad t^i = \sum_{j=i}^n \frac{\binom{j}{i}}{\binom{n}{i}} b_j^n(t) \quad \text{za } i = 0, \dots, n.$$

Dokaz. Velja

$$\begin{aligned}b_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i} = \binom{n}{i} t^i \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} t^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} t^{j+i} = \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j-i} t^j \\ &= \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} \binom{n}{j} \binom{j}{i} t^j,\end{aligned}$$

kjer smo v drugi vrstici uporabili binomsko razširitev $(1 - t)^{n-i}$. Da dokažemo, da lahko katerikoli element $t^i \in \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ zapišemo kot linearno kombinacijo Bernsteinovih polinomov, uporabimo še formulo za višanje stopnje ter indukcijo po n .

Za $i = 0$:

$$t^0 = \sum_{j=0}^n \frac{\binom{j}{0}}{\binom{n}{0}} b_j^n(t) = \sum_{j=0}^n b_j^n(t) = 1.$$

Za $i = 1, 2, \dots, n$, pa uporabimo indukcijo po n .

Za bazo indukcije vzamemo $n = 0$:

$$t^0 = \sum_{j=0}^0 \frac{\binom{j}{0}}{\binom{0}{0}} b_j^0(t) = 1.$$

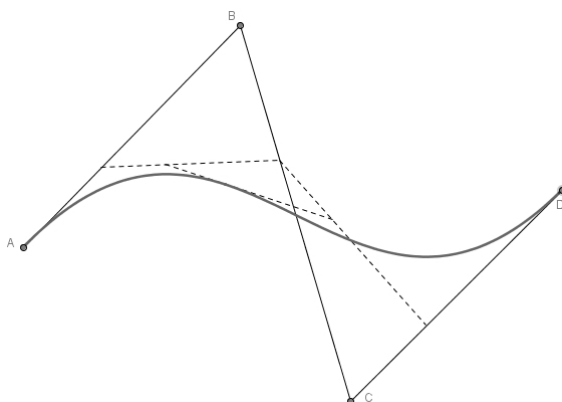
Indukcijski korak, $n - 1 \rightarrow n$:

$$\begin{aligned} t^i &= t t^{i-1} = t \sum_{j=i-1}^{n-1} \frac{\binom{j}{i-1}}{\binom{n-1}{i-1}} b_j^{n-1}(t) = \sum_{j=i-1}^{n-1} \frac{\binom{j}{i-1}}{\binom{n-1}{i-1}} t b_j^{n-1}(t) \\ &= \sum_{j=i-1}^{n-1} \frac{\binom{j}{i-1}}{\binom{n-1}{i-1}} \frac{j+1}{n} b_{j+1}^n(t) = \sum_{j=i}^n \frac{\binom{j-1}{i-1}}{\binom{n-1}{i-1}} \frac{j}{n} b_j^n(t) = \sum_{j=i}^n \frac{\binom{j}{i}}{\binom{n}{i}} b_j^n(t) \end{aligned}$$

□

4 BÉZIEROVE KRIVULJE

Bézierove krivulje (Slika 2) so polinomske parametrične krivulje, ki so priljubljene predvsem zaradi njihovih številnih matematičnih lastnosti, ki omogočajo njihovo enostavno kontrolo in analizo. Kot smo že v prejšnjih poglavjih omenili se uporabljajo predvsem v računalniškem modeliranju, tj. CAGD aplikacijah. So pomemben gradnik pri vektorski grafiki, kjer jih uporabljamo za modeliranje gladkih krivulj. Ker jih definirajo kontrolne točke, se Bézierove krivulje lahko spremenijo, ne da bi pri tem izgubili gladek videz krivulje. Uporabljamo jih tudi pri animacijah kot je *Adobe Flash*, robotiki, računalniški pisavi (*TrueType*), ekonomskih aplikacijah itd. [3]



Slika 2: Primer kubične Bézierove krivulje.

4.1 Definicija

Bézierove krivulje so sestavljene iz dveh ali več točk, ki določajo velikost in obliko krivulje. Prva in zadnja točka označujeta začetek in konec krivulje, preostale točke pa določajo njeno ukrivljenost. Poznamo linearne, kvadratne, kubične ter Bézierove krivulje višjega reda. Najpogosteje uporabljamo kvadratne in kubične krivulje. Tudi pri zapletenejši obliki raje uporabimo zlepke krivulj nižjih stopenj, zaradi enostavnejšega izračuna, lažje kontrole posameznih delov krivulje ter boljših aproksimacijskih lastnosti.

Bézierove krivulje bomo definirali z Bernsteinovimi baznimi polinomi ter s pomočjo de Casteljauovega algoritma. Najprej jih predstavimo z de Casteljauovem algoritmom, ki velja za osnovni algoritem pri njihovi konstrukciji. Algoritem za definiranje Bézierove krivulje katerekoli stopnje n je linearna interpolacija med dvema krivuljama stopnje $n - 1$.

Tabela 1: De Casteljauev algoritem

De Casteljauev algoritem:

Dane imamo točke $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n \in \mathbb{R}^2$ in $t \in [0, 1]$.

1. Definiramo $\mathbf{c}_i^0(t) = \mathbf{c}_i$, kjer je $i = 0, 1, \dots, n$.
2. Ponavljamo izračun $\mathbf{c}_i^k(t) = (1 - t)\mathbf{c}_i^{k-1}(t) + t\mathbf{c}_{i+1}^{k-1}(t)$, kjer je $k = 1, 2, \dots, n$ in $i = 0, 1, \dots, n - k$.
3. Točka $\mathbf{c}_0^n(t)$ je točka na Bézierovi krivulji $\mathbf{b}(t)$ pri parametru t .

Običajno vmesne točke de Casteljauevega algoritma zapišemo v trikotno shemo, ki jo imenujemo tudi *de Casteljaueva shema*,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \mathbf{c}_0^0 \\
 & & & & & & \mathbf{c}_1^0 & \mathbf{c}_0^1(t) \\
 & & & & & & \mathbf{c}_2^0 & \mathbf{c}_1^1(t) & \cdots \\
 & & & & & & \vdots & \vdots & \cdots & \mathbf{c}_0^{n-1}(t) \\
 & & & & & & \mathbf{c}_n^0 & \mathbf{c}_{n-1}^1(t) & \cdots & \mathbf{c}_1^{n-1}(t) & \mathbf{c}_0^n(t).
 \end{array}$$

Bézierovo krivuljo lahko zapišemo tudi kot posebno kombinacijo Bernsteinovih polinomov in kontrolnih točk.

Definicija 4.1. Naj bo podanih $n + 1$ kontrolnih točk $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n \in \mathbb{R}^3$, potem je Bézierova krivulja stopnje n enaka

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i b_i^n(t), \quad t \in [0, 1],$$

kjer so $b_i^n(t)$ Bernsteinovi bazni polinomi. Točke \mathbf{c}_i pa imenujemo *kontrolne točke* Bézierove krivulje.

Dokaz. Pokazati moramo, da se elementi k -tega stolpca de Casteljauevega algoritma izražajo kot

$$\mathbf{c}_i^k(t) = \sum_{\ell=i}^{i+k} \mathbf{c}_\ell^0(t) b_{\ell-i}^k(t) = \sum_{\ell=i}^{i+k} \mathbf{c}_\ell(t) b_{\ell-i}^k(t) \quad \text{za vsak } i = 0, 1, \dots, n - k.$$

Dokazali bomo z indukcijo po k . Privzemimo, da je $k = 0$ ter ga vstavimo v de Casteljau algoritem $\mathbf{c}_i^k(t) = (1-t)\mathbf{c}_i^{k-1}(t) + t\mathbf{c}_{i+1}^{k-1}(t)$, ter upoštevamo definicijo Bernsteinovih polinomov. Iz tega sledi, da je

$$\mathbf{c}_i^0 = \mathbf{c}_i = \mathbf{c}_i b_0^0(t) = \sum_{\ell=i}^i \mathbf{c}_\ell b_{\ell-i}^0(t).$$

Predpostavimo, da za nek $k < n$ velja

$$\mathbf{c}_i^k(t) = \sum_{\ell=i}^{i+k} \mathbf{c}_\ell b_{\ell-i}^k(t), i = 0, 1, \dots, n-k.$$

Vemo, da se elemente novega stolpca v de Casteljauovem algoritmu izračuna po formuli $\mathbf{c}_i^{k+1}(t) = (1-t)\mathbf{c}_i^k(t) + t\mathbf{c}_{i+1}^k(t)$, za $i = 0, 1, \dots, n-k-1$. Uporabimo še indukcijsko predpostavko ter upoštevamo rekurzivnost Bernsteinovih polinomov. Sledi,

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_i^{k+1}(t) &= (1-t) \sum_{\ell=i}^{i+k} \mathbf{c}_\ell b_{\ell-i}^k(t) + t \sum_{\ell=i+1}^{i+1+k} \mathbf{c}_\ell b_{\ell-i-1}^k(t) \\ &= \mathbf{c}_j (1-t) b_0^k(t) + \sum_{\ell=i+1}^{i+k} \mathbf{c}_\ell ((1-t)b_{\ell-i}^k(t) + t b_{\ell-i-1}^k(t)) + \mathbf{c}_{i+1+k} t b_k^k(t) \\ &= \mathbf{c}_j b_0^{k+1}(t) + \sum_{\ell=i+1}^{i+k} \mathbf{c}_\ell b_{\ell-i}^{k+1}(t) + \mathbf{c}_{i+1+k} b_{k+1}^{k+1}(t) = \sum_{\ell=i}^{i+1+k} \mathbf{c}_\ell b_{\ell-i}^{k+1}(t). \end{aligned}$$

□

S povezavo kontrolnih točk lahko določimo večkotnik z začetkom v \mathbf{c}_0 , nato zaporedoma povežemo vse kontrolne točke do točke \mathbf{c}_n . Ta večkotnik imenujemo *Bézierov kontrolni poligon*. Začetek in konec krivulje sta tako fiksno določena, medtem ko s spreminjanjem položaja preostalih kontrolnih točk spreminjamo obliko krivulje. Kot primer izgleda zapisa Bézierove krivulje lahko napišemo enačbo kubične Bézierove krivulje kot

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{c}_0 b_0^3(t) + \mathbf{c}_1 b_1^3(t) + \mathbf{c}_2 b_2^3(t) + \mathbf{c}_3 b_3^3(t),$$

kjer so $b_i^3(t)$ kubični Bernsteinovi bazni polinomi in \mathbf{c}_i koeficienti polinomske krivulje $\mathbf{b}(t)$. Zapis lahko preoblikujemo v

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{c}_0(1-t)^3 + \mathbf{c}_1(1-t)^2t + \mathbf{c}_2(1-t)t^2 + \mathbf{c}_3t^3.$$

Če primerjamo de Casteljauov algoritem s prejšnjo definicijo Bézierovih krivulj, ugotovimo da počnemo isto stvar samo njen zapis je drugačen. De Casteljauov algoritem je numerično stabilnejši, vendar počasnejši. Katera definicija je primernejša oziroma uporabnejša, pa je odvisna od našega namena uporabe.

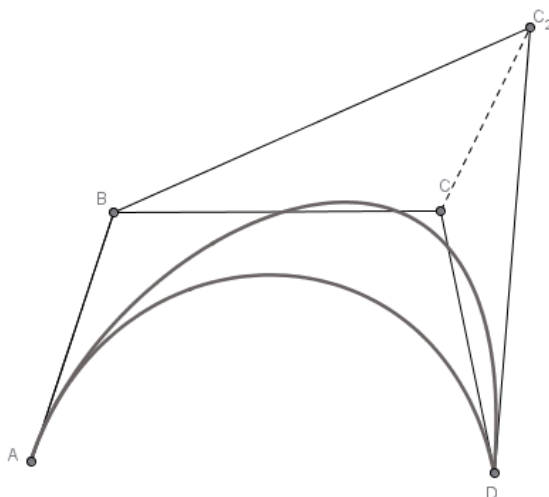
4.2 Lastnosti Bézierovih krivulj

Iz lastnosti Bernsteinovih polinomov izhajajo pomembne lastnosti Bézierovih krivulj. [1]

4.2.1 Psevdo-lokalna kontrola

Psevdo lokalna kontrola ima praktičen pomen pri oblikovanju Bézierovih krivulj. Ob spremembi katerekoli izmed kontrolnih točk c_i , je sprememba Bézierove krivulje največja v okolici točke z vrednostjo parametra $\frac{i}{n}$, čeprav sprememba vpliva na celotno krivuljo (glej Slika 3).

Dokaz. Lastnost izhaja iz unimodalnosti Bernsteinovih baznih polinomov, polinom $b_i^n(t)$ doseže maksimum na intervalu $[0, 1]$ pri $t = \frac{i}{n}$. \square



Slika 3: Primer spremembe Bézierove krivulje pri premiku ene izmed kontrolnih točk.

4.2.2 Simetrija

Iz simetričnosti Bernsteinovih baznih polinomov velja, da sta Bézierovi krivulji glede na zaporedji kontrolnih točk $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$ in $\mathbf{c}_n, \mathbf{c}_{n-1}, \dots, \mathbf{c}_0$ enaki. Razlikujeta se samo v smeri parametrizacije

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i b_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_{n-i} b_i^n(1-t).$$

Dokaz. Simetričnost Bézierove krivulje izhaja iz lastnosti simetričnosti Bernsteinovih baznih polinomov

$$b_i^n(t) = b_{n-i}^n(1-t).$$

□

4.2.3 Odvodi in integrali

S pomočjo odvodov (integralov) Bernsteinovih polinomov, lahko izračunamo odvod (integral) Bézierove krivulje.

Trditev 4.2. *Odvod Bézierove krivulje $\mathbf{b}^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i b_i^n(t)$, kjer je $t \in [0, 1]$, lahko izrazimo kot*

$$\frac{d}{dt} \mathbf{b}^n(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \mathbf{c}_i b_i^{n-1}(t),$$

kjer je $\Delta \mathbf{c}_i = \mathbf{c}_{i+1} - \mathbf{c}_i$.

Dokaz. Najprej potrebujemo odvod Bernsteinovega baznega polinoma $b_i^n(t)$. Uporabimo lastnost Bernsteinovih polinomov in sicer

$$\frac{d}{dt} b_i^n(t) = n (b_{i-1}^{n-1}(t) - b_i^{n-1}(t)).$$

Odvod Bézierove krivulje \mathbf{b}^n je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{b}^n(t) &= n \sum_{i=0}^n (b_{i-1}^{n-1}(t) - b_i^{n-1}(t)) \mathbf{c}_i = n \sum_{i=1}^n b_{i-1}^{n-1}(t) \mathbf{c}_i - n \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{n-1}(t) \mathbf{c}_i \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{n-1}(t) \mathbf{c}_{i+1} - n \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{n-1}(t) \mathbf{c}_i = n \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbf{c}_{i+1} - \mathbf{c}_i) b_i^{n-1}(t) \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \mathbf{c}_i b_i^{n-1}(t). \end{aligned}$$

□

Višje odvode Bézierove krivulje lahko zapišemo kot

$$\frac{d^r}{dt^r} \mathbf{b}^n(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r \mathbf{c}_i b_i^{n-r}(t).$$

Tu je Δ^r prema končna diferenca,

$$\Delta^r \mathbf{c}_i = \Delta^{r-1} \mathbf{c}_{i+1} - \Delta^{r-1} \mathbf{c}_i = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} \mathbf{c}_{i+j}.$$

Trditev 4.3. *Nedoločeni integral Bézierove krivulje $\mathbf{b}(t)$ zapišemo kot*

$$\int \mathbf{b}(t) dt = \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{c}_i^* b_i^{n+1}(t),$$

kjer so \mathbf{c}_i^* kontrolne točke nove Bézierove krivulje, $\mathbf{c}_i^* = \mathbf{c}_{i-1}^* + \frac{1}{n+1} \mathbf{c}_{i-1}$. Če privzamemo, da je konstanta $\mathbf{c}_0^* = 0$, lahko enačbo preoblikujemo v

$$\mathbf{c}_i^* = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{c}_i, \quad \text{za } i = 1, \dots, n, n+1.$$

Določeni integral na intervalu $[0, 1]$ definiramo kot

$$\int_0^1 \mathbf{b}(t) dt = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i.$$

Dokaz. Najprej Bézierovo krivuljo $\mathbf{b}(t)$ zapišemo s pomočjo Bernsteinovih polinomov. Sledi integracija,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathbf{b}(t) dt &= \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i b_i^n(t) \right) dt = \int_0^1 (\mathbf{c}_0 b_0^n(t) + \mathbf{c}_1 b_1^n(t) + \dots + \mathbf{c}_n b_n^n(t)) dt \\ &= \int_0^1 \mathbf{c}_0 b_0^n(t) dt + \int_0^1 \mathbf{c}_1 b_1^n(t) dt + \dots + \int_0^1 \mathbf{c}_n b_n^n(t) dt. \end{aligned}$$

Vemo, da je integral Bernsteinovega polinoma $b_i^n(t)$ na intervalu $[0, 1]$ enak $\frac{1}{n+1}$. Iz tega sledi,

$$\frac{1}{n+1} \mathbf{c}_0 + \frac{1}{n+1} \mathbf{c}_1 + \dots + \frac{1}{n+1} \mathbf{c}_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i.$$

□

V splošnem lahko zapišemo določen integral Bézierove krivulje na intervalu $[a, b]$ kot

$$\int_a^b \mathbf{b}(t) dt = \frac{b-a}{n+1} \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i.$$

4.2.4 Konveksna ovojnica

Konveksna ovojnica kontrolnih točk je najmanjša konveksna množica, ki vsebuje vse konveksne kombinacije kontrolnih točk.

Trditev 4.4. *Bézierova krivulja $\mathbf{b}(t)$ leži v konveksni ovojnici svojih kontrolnih točk.*

Dokaz. Bernsteinovi bazni polinomi so za $t \in [0, 1]$ nenegativni ter tvorijo particijo enote. Torej je $\sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i b_i^n(t)$ konveksna kombinacija kontrolnih točk za vsak $t \in [0, 1]$.

□

Opomba 4.5. Če $t \notin [0, 1]$, lastnost konveksne ovojnice ne velja.

4.2.5 Višanje in nižanje stopnje

Včasih geometrija kontrolnega poligona ni dovolj fleksibilna in si zato pomagamo z zvišanjem stopnje krivulje. Kontrolni poligon s tem konvergira k Bézierovi krivulji in lahko tako še natančneje oblikujemo krivulje (CAD). Ko govorimo o višanju stopnje Bézierove krivulje, to pomeni da dodamo novo kontrolno točko tako, da krivulja ohrani obliko in parametrizacijo. Večje kot je število kontrolnih točk, lažje spremenjamo Bézierovo krivuljo. Postopek višanja stopnje lahko ponavljamo in tako dodamo krivulji poljubno število kontrolnih točk.

Trditev 4.6. *Bézierovo krivuljo lahko povečamo iz stopnje n na stopnjo $n + r$, za vse $r > 0$, pri čemer le-ta ostane nespremenjena,*

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^{n+r} \mathbf{c}_i^{n+r} b_i^{n+r}(t).$$

Dokaz. Zvišanje stopnje Bernsteinovih polinomov za r smo dokazali že v prejšnjem poglavju. Zanima nas še, kaj se bo dogajalo s kontrolnimi točkami. Veljati mora

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i b_i(t) = \sum_{i=0}^{n+r} \mathbf{c}_i^{n+r} b_i^{n+r}(t),$$

oziroma, če Bézierovo krivuljo stopnje n zvišamo za eno stopnjo velja

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{c}_i^* \binom{n+1}{i} t^i (1-t)^{n+1-i},$$

kjer smo nove kontrolne točke označili z \mathbf{c}_i^* . Levo stran nato pomnožimo z 1 in sicer z izrazom $(1-t) + t$,

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i \binom{n}{i} (t^i (1-t)^{n-i+1} + t^{i+1} (1-t)^{n-i}) = \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{c}_i^* \binom{n+1}{i} t^i (1-t)^{n+1-i}.$$

Nato primerjamo koeficiente pri izrazu $t^i (1-t)^{n-i+1}$,

$$\mathbf{c}_i^* \binom{n+1}{i} = \mathbf{c}_i \binom{n}{i} + \mathbf{c}_{i-1} \binom{n}{i-1}.$$

Izraz poenostavimo in dobimo

$$\mathbf{c}_i^* = \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \mathbf{c}_i + \frac{i}{n+1} \mathbf{c}_{i-1}, \quad i = 0, 1, \dots, n+1.$$

Torej je

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \left(\left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \mathbf{c}_i + \frac{i}{n+1} \mathbf{c}_{i-1} \right) b_i^{n+1}(t).$$

□

Če želimo znižati stopnjo krivulje n za r ($n - r$, kjer je $r \geq 1$), lahko koeficiente stopnje $n - r$ glede na stopnjo n izrazimo kot

$$\mathbf{c}_k^{n-r} = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \frac{\binom{k-j+r-1}{r-1} \binom{n}{j}}{\binom{n-r}{k}} \mathbf{c}_j^n,$$

kjer je $k = 0, \dots, n - r$. Nižanje stopnje le malokrat ohrani originalno krivuljo, saj bi leta morala nastati z zvišanjem stopnje. Izraz *nižanje stopnje* se običajno v ohlapnejšem pomenu uveljavlja kot najboljšo aproksimacijo polinoma stopnje n na intervalu $[0, 1]$ s polinomi nižjih stopenj z neko določeno mersko napako.

5 POSPLOŠITVE

V prejšnjem poglavju smo spoznali, da se lahko z večanjem števila kontrolnih točk bolj približamo željeni obliki krivulje, vendar s tem spremenimo kontrolni poligon krivulje. S pomočjo *racionalnih Bézierovih krivulj* pa lahko ohranimo enak kontrolni poligon in prilagodimo krivuljo našim potrebam.

5.1 Racionalne Bézierove krivulje

S kvadratnimi polinomskimi Bézierovimi krivuljami lahko predstavimo le parabole. Pri geometrijskem modeliranju pa potrebujemo več vsestranskosti za proste oblike kot so krožni loki in stožnični odseki, zato uvedemo racionalne Bézierove krivulje. Le-te tudi zagotavljajo večji nadzor nad obliko krivulje.

Definicija 5.1. Racionalna Bézierova krivulja v \mathbb{R}^d je krivulja, ki jo dobimo s projekcijo $P : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $(x_1, x_2, \dots, x_{d+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_{d+1}}, \frac{x_2}{x_{d+1}}, \dots, \frac{x_d}{x_{d+1}}, 1 \right)$, prave polinomske Bézierove krivulje v \mathbb{R}^{d+1} .

Izrek 5.2. *Racionalna Bézierova krivulja stopnje n je oblike*

$$\frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{c}_i b_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i b_i^n(t)}, \quad t \in [0, 1],$$

kjer so $b_i^n(t)$ Bernsteinovi polinomi, \mathbf{c}_i kontrolne točke in $w_i > 0$ njihove skalarne uteži.

Dokaz. Po definiciji lahko točko na racionalni Bézierovi krivulji $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^d$ gledamo kot $(\mathbf{x}(t), 1)^T \in \mathbb{R}^{d+1}$. To je projekcija točke $[w(t)\mathbf{x}(t), w(t)]^T$, ki leži na polinomski Bézierovi krivulji v \mathbb{R}^{d+1} . Vrednost $w(t)$ lahko izrazimo tudi kot $w(t) = \sum_{i=0}^n w_i b_i^n(t)$. Sledi, da točko na polinomski Bézierovi krivulji stopnje n v \mathbb{R}^{d+1} lahko predstavimo kot

$$w(t) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \sum_{i=0}^n w_i b_i^n(t) \\ \sum_{i=0}^n w_i b_i^n(t) \end{bmatrix}.$$

Naj bodo $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d$. Polinomsko Bézierovo krivuljo v \mathbb{R}^{d+1} lahko potem zapišemo kot

$$\sum_{i=0}^n \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i \\ w_i \end{bmatrix} b_i^n(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \sum_{i=0}^n w_i b_i^n(t) \\ \sum_{i=0}^n w_i b_i^n(t) \end{bmatrix}$$

Iz tega izraza dobimo enačbo

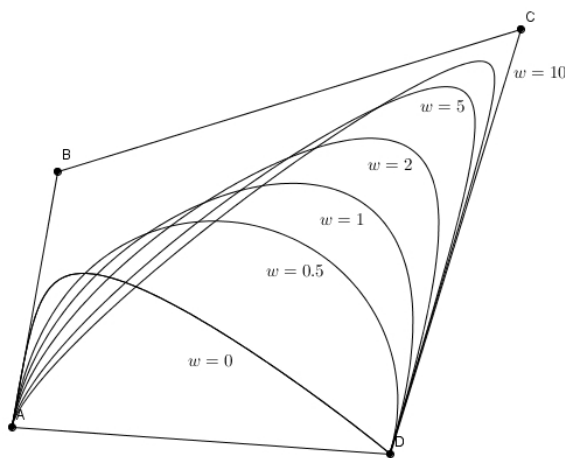
$$\sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i b_i^n(t) = \mathbf{x}(t) \sum_{i=0}^n w_i b_i^n(t).$$

Torej lahko $\mathbf{x}(t)$ izrazimo kot

$$\mathbf{x}(t) = \frac{\mathbf{p}_0 b_0^n(t) + \mathbf{p}_1 b_1^n(t) + \mathbf{p}_2 b_2^n(t) + \dots + \mathbf{p}_n b_n^n(t)}{w_0 b_0^n(t) + w_1 b_1^n(t) + w_2 b_2^n(t) + \dots + w_n b_n^n(t)},$$

kjer privzamemo, da so vrednosti $\mathbf{p}_i = w_i \mathbf{c}_i$. \square

Uteži w_i se navadno uporabljajo kot parametri oblikovanja krivulje. Če povečamo eno izmed uteži, krivuljo približamo k pripadajoči kontrolni točki \mathbf{c}_i , glej Slika 4. Če so vse uteži enake, se racionalna Bézierova krivulja reducira na polinomsko Bézierovo krivuljo v \mathbb{R}^d . Če so vse uteži w_i nenegativne, potem ima krivulja lastnost konveksne ovojnice. Večino lastnosti polinomskih Bézierovih krivulj brez težav prenesemo tudi na racionalne Bézierove krivulje, čeprav moramo biti pozorni, ker imamo manjše omejitve pri utežeh.



Slika 4: Racionalne Bézierove krivulje pri različnih izbirah ene izmed uteži.

Racionalno Bézierovo krivuljo lahko predstavimo tudi z uporabo de Casteljaujevega algoritma. Čeprav je algoritem preprost in običajno učinkovit, ta metoda ni numerično stabilna za uteži, ki se znatno razlikujejo po velikosti. Če so nekatere w_i zelo velike, potem nekatere vmesne točke $w_i \mathbf{c}_i$ niso več v konveksni ovojnici prvotnega kontrolnega poligona in tako izgubimo natančnost. Racionalno Bézierovo krivuljo lahko torej s pomočjo de Casteljaujevega algoritma definiramo kot

$$\mathbf{c}_i^n(t) = (1-t) \frac{w_i^{n-1}}{w_i^n} \mathbf{c}_i^{n-1} + t \frac{w_{i+1}^{n-1}}{w_i^n} \mathbf{c}_{i+1}^{n-1},$$

kjer je $w_i^n(t) = (1-t)w_i^{n-1}(t) + tw_{i+1}^{n-1}(t)$. Eksplicitna oblika enačbe za vmesne točke $\mathbf{c}_i^n(t)$ je podana kot

$$\mathbf{c}_i^n(t) = \frac{\sum_{j=0}^n w_{i+j} \mathbf{c}_{i+j} b_j^n(t)}{\sum_{j=0}^n w_{i+j} b_j^n(t)}.$$

Če upoštevamo, da imamo samo pozitivne uteži potem vemo, da so vse točke v konveksni ovojnici, kar nam zagotavlja numerično stabilnost.

5.2 Bézierove ploskve kot tenzorski produkt

Osrednji pojem pri definiciji Bézierovih ploskev s pomočjo Bernsteinovih polinomov je *tenzorski produkt*. Spomnimo se, da je tenzorski produkt dveh množic $\{a, b, c\}$ in $\{d, e, f\}$ množica vseh parov elementov

$$\{\{a, d\}, \{a, e\}, \{a, f\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{c, f\}\}.$$

Idejo lahko uporabimo pri definiranju Bézierove ploskve kot tenzorski produkt dveh krivulj.

Definicija 5.3. Bézierovo ploskev stopnje (m, n) definiramo kot tenzorski produkt

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{c}_{i,j} b_i^m(u) b_j^n(v), \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1],$$

kjer so $\mathbf{c}_{i,j}$ kontrolne točke Bézierove ploskve, $b_i^m(u)$ in $b_j^n(v)$ pa Bernsteinovi bazni polinomi.

Mrežo, ki jo gradijo kontrolne točke, imenujemo *kontrolna mreža* ali *Bézierova mreža*.

Lastnosti Bézierovih ploskev

Bézierove ploskve imajo veliko lastnosti, ki so analogne Bézierovim krivuljam.

Particija enote Vsota vseh produktov Bernsteinovih polinomov $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_i^m(u) b_j^n(v)$ je enaka konstanti 1.

Dokaz.

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_i^m(u) b_j^n(v) = \sum_{i=0}^m b_i^m(u) \sum_{j=0}^n b_j^n(v) = \sum_{i=0}^m b_i^m(u) \cdot 1 = \sum_{i=0}^m b_i^m(u) = 1.$$

□

Konveksna ovojnica Bézierova ploskev $S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{c}_{i,j} b_i^m(u) b_j^n(v)$ leži v konveksni ovojnici svojih kontrolnih točk $\mathbf{c}_{i,j}$.

Dokaz. Dokazati moramo, da so $b_i^m(u) b_j^n(v) \geq 0$ in $\sum b_i^m(u) b_j^n(v) = 1$. Slednjo lastnost smo dokazali pri prejšnji točki. Pri dokazu $b_i^m(u) b_j^n(v) \geq 0$ pa uporabimo lastnost nenegativnosti Bernsteinovih baznih polinomov. Vemo, da so $b_i^m(u) \geq 0$ in $b_j^n(v) \geq 0$. Vemo, da je produkt dveh nenegativnih polinomov lahko le nenegativen. \square

Višanje stopnje Predpostavimo, da želimo Bézierovo ploskev stopnje (m, n) spremeniti v ploskev stopnje $(m+1, n)$. To pomeni, da iščemo kontrolne točke $\mathbf{c}_{i,j}^{(1,0)}$ kot

$$S(u, v) = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^{m+1} \mathbf{c}_{i,j}^{(0,1)} b_i^{m+1}(u) \right) b_j^n(v).$$

Izraz v oklepaju predstavlja $n+1$ primerov višanja stopnje Bézierove krivulje. Pomagamo si z enačbo, ki smo jo uporabili za izračun novih kontrolnih točk pri višanju stopnje krivulje - c_i^* ,

$$\mathbf{c}_{i,j}^{(1,0)} = \left(1 - \frac{i}{m+1} \right) \mathbf{c}_{i,j} + \frac{i}{m+1} \mathbf{c}_{i-1,j}, \quad \text{za } i = 0, 1, \dots, m+1 \quad \text{in } j = 0, 1, \dots, n.$$

Stopnjo Bézierove ploskve zvišamo v smeri spremenljivke u z obravnavanjem vsakega stolpca kontrolne mreže kot Bézierove krivulje in višanjem stopnje le-te. Podobno velja za višanje v smeri spremenljivke v . Višanje v eno ali drugo smer izvajamo postopoma, lahko najprej v smeri u in nato v smeri v ali obratno. Novo kontrolno mrežo lahko iz stare mreže dobimo v enem koraku z odsekoma bilinearno interpolacijo,

$$\mathbf{c}_{i,j}^{(1,1)} = \begin{bmatrix} \frac{i}{m+1} & 1 - \frac{i}{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{i-1,j-1} & \mathbf{c}_{i-1,j} \\ \mathbf{c}_{i,j-1} & \mathbf{c}_{i,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{j}{n+1} \\ 1 - \frac{j}{n+1} \end{bmatrix}.$$

Odводи Pri odvajanju Bézierovih ploskev bomo uporabili parcialne odvode na u in v . Parcialni odvod na u zapišemo kot

$$\frac{d}{du} S(u, v) = \sum_{j=0}^n \frac{d}{du} \left(\sum_{i=0}^m \mathbf{c}_{i,j} b_i^m(u) \right) b_j^n(v).$$

Ker je izraz v oklepaju odvisen samo od u , lahko uporabimo enačbo za odvod Bézierove krivulje, $\frac{d}{dt} \mathbf{b}^n(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \mathbf{c}_i b_i^{n-1}(t)$. Sledi,

$$\frac{d}{du} S(u, v) = m \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-1} \Delta^{1,0} \mathbf{c}_{i,j} b_i^{m-1}(u) b_j^n(v).$$

Oznaka $\Delta^{1,0}\mathbf{c}_{i,j} = \mathbf{c}_{i+1,j} - \mathbf{c}_{i,j}$ pomeni, da imamo diferenco v smeri spremenljivke u . Podobno lahko zapišemo tudi parcialni odvod Bézierove ploskve na v ,

$$\frac{d}{dv}S(u, v) = n \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^m \Delta^{0,1}\mathbf{c}_{i,j} b_i^m(u) b_j^{n-1}(v),$$

kjer sedaj velja $\Delta^{0,1}\mathbf{c}_{i,j} = \mathbf{c}_{i,j+1} - \mathbf{c}_{i,j}$. Problem odvajanja Bézierove ploskve smo prevedli na več podproblemov odvajanja Bézierovih krivulj. Za izračun parcialnega odvoda na u vzamemo vse stolpce kontrolne mreže ter izračunamo njihove odvode pri parametru u . Izračunane vrednosti interpretiramo kot koeficiente druge Bézierove krivulje stopnje n in nato izračunamo njeno vrednost pri parametru v .

5.3 Trikotne Bézierove krpe

Po letu 1959, ko je de Casteljau samostojno razvil Bézierovo krivuljo, je idejo razširil še na ploskve. Ugotovil je, da imajo Bernsteinovi polinomi simetrično formulacijo ter da jih najlažje opiše z baricentričnimi koordinatami. Ta koncept je posplošil na ploskve in tako so nastale prve trikotne Bézierove krpe. Glavna prednost Bernstein-Bézierovih krp je, da so zelo enostavne za geometrijsko razumevanje matematičnih konceptov. Vemo, da je njegova ideja takrat ostala samo v internem zapisu podjetja Citroën in so jo objavili šele kasneje, zato so dobile ime po Bézieru. [2]

Definicija 5.4. Bernsteinov bazni polinom stopnje n dveh spremenljivk je definiran kot

$$b_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) := b_{(i,j,k)}^n(\mathbf{u}) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k, \quad |\mathbf{i}| := i + j + k = n,$$

kjer je $\mathbf{u} = (u, v, w)$ ter $u + v + w = 1$ so baricentrične koordinate.

Polinom $b_{\mathbf{i}}^n := 0$, če je katerikoli indeks i, j ali k enak 0.

Izrek 5.5. Bernsteinovi polinomi zadoščajo enačbi

$$b_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = u \cdot b_{\mathbf{i}-\mathbf{e}_1}^{n-1}(\mathbf{u}) + v \cdot b_{\mathbf{i}-\mathbf{e}_2}^{n-1}(\mathbf{u}) + w \cdot b_{\mathbf{i}-\mathbf{e}_3}^{n-1}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dokaz. Izračunajmo enega od členov,

$$u \cdot b_{\mathbf{i}-\mathbf{e}_1}^{n-1}(\mathbf{u}) = \frac{(n-1)!}{(i-1)!j!k!} u^i v^j w^k.$$

Vsi členi so enakih stopenj v u, v in w , torej je dovolj, da vidimo da je

$$\frac{(n-1)!}{(i-1)!j!k!} + \frac{(n-1)!}{i!(j-1)!k!} + \frac{(n-1)!}{i!j!(k-1)!} = \frac{n!}{i!j!k!}.$$

Pomnožimo enačbo z $i \cdot j \cdot k$ ter upoštevamo, da je vsota i, j in k enaka n . Izrek je s tem dokazan. \square

Definicija 5.6. Trikotno Bézierovo krpo stopnje n definiramo z baricentričnimi koordinatami kot

$$S(\mathbf{u}) = \sum_{i+j+k=n} \mathbf{c}_i b_i^n(\mathbf{u}), \quad \mathbf{i} = (i, j, k),$$

kjer so \mathbf{c}_i kontrolne točke.

Trikotne Bézierove krpe imajo podobne lastnosti kot tenzorske Bézierove ploskve. Lahko jih predstavimo z modificiranim de Casteljauovem algoritmom, ležijo v konveksni ovojnici svojih kontrolnih točk, njihove robne krivulje so Bézierove krivulje določene z robnimi kontrolnimi točkami, lahko jim zvišamo stopnjo, da dobimo fleksibilnejše ploskve, izračunamo odvod in druge lastnosti. [6]

Mnoge ploskve lahko oblikujemo s pomočjo pravokotnih krp, vendar te zahtevajo podatke za pravokotno geometrijo in podobnost parametrizacije nasprotne robne krivulje. To lahko dosežemo le pri nekaterih ploskvah, kot je na primer pokrov prtljažnika avtomobila, ne pa na primer pri notranjih ploščah karoserij. Pri kompleksnejših ploskvah postavitve pravokotne strukture zahteva precej časa in truda, zato je primernejša uporaba trikotnih Bézierovih krp. Razlog je preprost, saj lahko vsako ploskev prekrijemo s trikotnimi krpami. Obstajajo tudi sistemi, ki zahtevajo uporabo le pravokotnih krp. V takem primeru, ko ploskev zahteva trikotno krpo, degeneriramo pravokotno krpo, da izgleda kot trikotna krpa.

6 WEIERSTRASSOV IZREK

Naj bo $C([a, b])$ množica zveznih funkcij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ki seveda vsebuje vse polinomske funkcije. Te imajo obliko $p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$, kjer so vrednosti $c_i \in \mathbb{R}$. Neformalno Weierstrassov izrek trdi, da za vsako zvezno funkcijo obstaja neko zaporedje polinomov, ki konvergira k funkciji $f(x)$ na $[a, b]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x).$$

Teoretično moramo izbrati samo dovolj veliko stopnjo n , da se dovolj približamo željeni funkciji. V praksi je to stopnjo težko doseči, saj bi morali izbrati velikost v tisočih ali celo milijonih. To je eden izmed najpomembnejših rezultatov v analizi, da se lahko vsaki zvezni funkciji poljubno približamo s polinomsko funkcijo. [5]

Weierstrass je dokazal svoj izrek leta 1885. Leta 1912 je Sergei Natanovich Bernstein močno poenostavil njegov dokaz z uporabo Bernsteinovih polinomov.

Izrek 6.1. *Naj bo f zvezna realna funkcija na intervalu $[a, b]$ in $\epsilon > 0$. Potem obstaja polinom p , za katerega velja*

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon,$$

za vse $x \in [a, b]$.

Dokaz. Ker linearna bijekcija $[a, b] \rightarrow [0, 1]$, $x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$, ohranja stopnjo polinoma, se lahko omejimo na interval $[0, 1]$.

Za vsako funkcijo $f \in C([0, 1])$ definiramo Bernsteinov polinom p_n kot

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) b_k^n(x).$$

Koeficient pred polinomom $b_k^n(x)$ je vrednost funkcije f v točki $\frac{k}{n}$, kjer ima polinom $b_k^n(x)$ ravno svoj maksimum. Pokazali bomo, da velja $p_n \rightarrow f$, ko gre $n \rightarrow \infty$. Tako bomo dokazali, da se lahko poljubni zvezni funkciji f poljubno dobro približamo z Bernsteinovimi polinomi glede na neskončno normo.

Funkcijo f lahko zapišemo upoštevajoč lastnost particije enote Bernsteinovih baznih polinomov kot

$$f(x) = f(x) \cdot 1 = f(x) \cdot \sum_{k=0}^n b_k^n(x) = \sum_{k=0}^n f(x) b_k^n(x).$$

Torej je

$$f(x) - f_n(x) = \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) b_k^n(x).$$

S trikotniško neenakostjo lahko nadalje zapišemo

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n |f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)| b_k^n(x).$$

Predpostavimo, da imamo podan $\epsilon > 0$. Naj bo funkcija f zvezna na intervalu $[0, 1]$, torej obstaja δ za vsak $t, x \in [0, 1]$, če je $|t - x| < \delta$ sledi, da je $|f(t) - f(x)| < \epsilon/2$. V trikotniški neenakosti bo točka x samo pri nekaterih indeksih k znotraj δ -okolice točke $\frac{k}{n}$, zato bomo nastavili množici

$$K_1 = \{k \in \{0, 1, \dots, n\} : |x - \frac{k}{n}| < \delta\},$$

$$K_2 = \{k \in \{0, 1, \dots, n\} : |x - \frac{k}{n}| \geq \delta\} = \{0, 1, \dots, n\} \setminus K_1.$$

Če upoštevamo, da so vsi $b_k^n(x)$ nenegativni, velja

$$\sum_{k \in K_1} |f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)| b_k^n(x) < \frac{\epsilon}{2} \sum_{k \in K_1} b_k^n(x) \leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=0}^n b_k^n(x) = \frac{\epsilon}{2}.$$

Za vsoto znotraj K_2 ne vemo, ali je vrednost $|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)|$ majhna, vemo pa, da je omejena. Namreč, ker je f zvezna funkcija na kompaktnem območju, obstaja konstanta M , tako da je $|f| \leq M$ na intervalu $[0, 1]$, torej je

$$|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)| \leq 2M.$$

Če je $k \in K_2$ potem je $|nx - k| \geq n\delta$ oziroma $(nx - k)^2 \geq (n\delta)^2$. Sledi

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K_2} |f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)| b_k^n(x) &\leq 2M \sum_{k \in K_2} b_k^n(x) \leq \frac{2M}{(n\delta)^2} \sum_{k \in K_2} (nx - k)^2 b_k^n(x) \\ &\leq \frac{2M}{(n\delta)^2} \sum_{k=0}^n (nx - k)^2 b_k^n(x) \\ &= \frac{2M}{(n\delta)^2} \sum_{k=0}^n (n^2 x^2 - 2n x k + k^2) b_k^n(x) \\ &= \frac{2M}{(n\delta)^2} [n^2 x^2 - 2n x (nx) + n x (nx - x + 1)] \\ &= \frac{2M}{n\delta^2} \cdot x(1 - x). \end{aligned}$$

Pri poenostavljanju izraza smo upoštevali naslednje enakosti

$$\sum_{k=0}^n b_k^n(x) = 1, \quad \sum_{k=0}^n k b_k^n(x) = nx \quad \text{ter} \quad \sum_{k=0}^n k^2 b_k^n(x) = nx(nx - x + 1).$$

Da velja prva enakost, smo to dokazali že v poglavju Lastnosti Bernsteinovih baznih polinomov. Vemo, da Bernsteinovi bazni polinomi stopnje n tvorijo particijo enote. Sledi dokaz druge enakosti, in sicer:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k b_k^n(x) &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^{j+1} (1-x)^{(n-1)-j} = nx \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{(n-1)-j} \\ &= nx \sum_{j=0}^{n-1} b_j^{n-1}(x) = nx \cdot 1 = nx, \end{aligned}$$

ter tretje enakosti:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^2 b_k^n(x) &= \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n kn \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= nx \sum_{k=1}^n k \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= nx \sum_{i=0}^{n-1} (1+i) \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i} \\ &= nx \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i} + nx \sum_{i=0}^{n-1} i \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i} \\ &= nx + nx \sum_{i=1}^n (n-1) \binom{n-2}{i-1} x^i (1-x)^{n-1-i} \\ &= nx + n(n-1)x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{n-2-k} \\ &= nx + n(n-1)x^2 = nx + n^2x^2 - nx^2 \\ &= nx(nx - x + 1). \end{aligned}$$

Vemo, da je $x(1-x) \leq 1/4$ na $[0, 1]$, torej smo pokazali, da velja

$$\sum_{k \in K_2} |f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)| b_k^n(x) < \frac{M}{2n\delta^2}.$$

Zadnji izraz bo manjši od $\frac{\epsilon}{2}$, dokler bo vrednost n večja ali enaka $\frac{M}{\epsilon\delta^2}$. Če združimo skupaj vsote nad K_1 in K_2 , smo za vse $x \in [0, 1]$ dokazali,

$$n \geq \frac{M}{\epsilon\delta^2} \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

Weierstrassov izrek je s tem dokazan. □

Opomba: Bernsteinovi polinomi res konvergirajo proti zvezni funkciji glede na neskončno normo, a konvergenca je počasna. V praksi je potrebno iskati druge rešitve z aproksimacijo zveznih funkcij s polinomi glede na neskončno normo.

7 NUMERIČNA STABILNOST

Že v šestdesetih in sedemdesetih letih so bile Bézierove krivulje in ploskve pogosto uporabljene v računalniško podprtem geometrijskem oblikovanju zaradi svojih elegantnih geometrijskih lastnosti, enostavnega konstruiranja in manipulacije preko kontrolnih točk ter enostavnih rekurzivnih algoritmov, ki so na voljo za njihovo obdelavo. Šele kasneje pa je prišla do izraza še ena pomembna lastnost Bernsteinove baze in sicer njena numerična stabilnost v povezavi z nenatančnostjo začetnih podatkov oziroma napak zaokroževanja, ki se pojavijo med izračuni s plavajočo vejico. Za razliko od večine drugih znanstvenih ali inženirskih izračunov geometrijskih modelov so CAD sistemi v večini izhodišče za nadaljnje aplikacije. Te pa potrebujejo natančnost in doslednost geometrijske predstavitve. [7]

V podpoglavju bomo pokazali, da je Bernsteinova baza ena izmed optimalno stabilnejših baz v smislu, da ne obstaja nobena druga nenegativna baza, ki daje manjša *pogojenostna števila*. Na področju numerične analize nam pogojenostno število pove, kako občutljiva je funkcija za spremembe in napake pri vnosu vhodnih podatkov in posledično, koliko napak dobimo za to v izhodni vrednosti funkcije.

7.1 Pogojenostna števila

Vsaka množica $n + 1$ linearno neodvisnih polinomov $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$ stopnje $\leq n$ tvori bazo polinomov stopnje n . Polinom p stopnje n lahko enolično izrazimo kot

$$p(t) = \sum_{k=0}^n c_k \phi_k(t),$$

kjer so c_0, c_1, \dots, c_n ustrezno izbrani koeficienti. Pri izbiri baze za numerične izračune je občutljivost polinoma $p(t)$ pri spremembah njegovih koeficientov bistvenega pomena. Numerična nestabilnost lahko izhaja iz začetne merilne napake ali zaokrožitvene napake. Predpostavimo, da ima vsak koeficient c_k neko naključno motnjo δc_k . Iz tega sledi, da je polinom p z napako enak $p + \delta p$. Velikost $\delta p(t)$ je odvisna od

- (a) vrednosti neodvisne spremenljivke t ,
- (b) statistične porazdelitve motenj $\delta c_0, \dots, \delta c_n$,

(c) ter izbrane baze $\phi_0(t), \dots, \phi_n(t)$.

Osredotočimo se na vpliv (c). Predpostavimo, da spremenljivka t leži na intervalu $[0, 1]$ ter, da imajo motnje $\delta c_0, \dots, \delta c_n$ enakomerno porazdelitev s fiksno maksimalno relativno vrednostjo ϵ , tako da velja

$$-\epsilon \leq \delta c_k / c_k \leq +\epsilon$$

za vsak $k = 0, 1, \dots, n$. Potem ima vrednost $p(t) = \sum_{k=0}^n c_k \phi_k(t)$ perturbacijo

$$p(t) + \delta p(t) := \sum_{k=0}^n c_k \phi_k(t) + \sum_{k=0}^n \delta c_k \phi_k(t),$$

kjer je motnja $\delta p(t)$ znotraj intervala

$$-\sum_{k=0}^n |\delta c_k \phi_k(t)| \leq \delta p(t) \leq +\sum_{k=0}^n |\delta c_k \phi_k(t)|.$$

Če bazo $\{\phi_0(t), \dots, \phi_n(t)\}$ označimo s Φ ter upoštevamo $-\epsilon \leq \delta c_k / c_k \leq +\epsilon$ lahko zapišemo

$$|\delta p(t)| \leq C_{\Phi}(p(t))\epsilon, \quad \text{kjer je } C_{\Phi}(p(t)) := \sum_{k=0}^n |c_k \phi_k(t)|.$$

$C_{\Phi}(p(t))$ je pogojenostno število za vsako vrednost polinoma $p(t)$ za katerikoli t v odvisnosti od relativnih motenj njegovih koeficientov v bazi $\Phi = \{\phi_0(t), \dots, \phi_n(t)\}$. Vemo, da je $C_{\Phi}(p(t))$ odvisna od izbire baze za $p(t)$. Baza polinomov $\Phi = \{\phi_0(t), \dots, \phi_n(t)\}$ je nenegativna na intervalu $t \in [a, b]$, če vsi njeni členi izpolnjujejo pogoj

$$\phi_k(t) \geq 0 \quad \text{za vsak } t \in [a, b], k = 0, \dots, n.$$

Bernsteinova baza ima to lastnost, kadar je $[a, b] = [0, 1]$.

Izrek 7.1. *Naj bosta $\Psi = \{\psi_0(t), \dots, \psi_n(t)\}$ in $\Phi = \{\phi_0(t), \dots, \phi_n(t)\}$ nenegativni bazi polinomov stopnje n ter $t \in [0, 1]$. Predpostavimo, da lahko polinome baze Ψ izrazimo z nenegativno kombinacijo polinomov baze Φ , in sicer kot*

$$\psi_j(t) = \sum_{k=0}^n M_{jk} \phi_k(t), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

kjer je $M_{jk} \geq 0$ za $0 \leq j, k \leq n$. Potem pogojenostna števila za katerokoli vrednost polinoma $p(t)$ stopnje n v katerikoli točki $t \in [a, b]$ v teh bazah izpolnjujejo

$$C_{\Phi}(p(t)) \leq C_{\Psi}(p(t)).$$

Dokaz. V danih nenegativnih bazah lahko polinom $p(t)$ izrazimo kot

$$p(t) = \sum_{j=0}^n a_j \psi_j(t) = \sum_{k=0}^n c_k \phi_k(t).$$

Iz enačbe v izreku, $\psi_j(t) = \sum_{k=0}^n M_{jk} \phi_k(t)$, sledi da so tudi koeficienti baz medseboj povezani,

$$c_k = \sum_{j=0}^n a_j M_{jk}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Ker sta bazi nenegativni na $t \in [a, b]$, lahko pogojenostna števila za vrednost polinoma $p(t)$ v teh bazah zapišemo kot

$$C_{\Phi}(p(t)) = \sum_{k=0}^n |c_k| \phi_k(t) \quad \text{in} \quad C_{\Psi}(p(t)) = \sum_{j=0}^n |a_j| \psi_j(t).$$

Če $c_k = \sum_{j=0}^n a_j M_{jk}$ uporabimo v $C_{\Phi}(p(t))$ in upoštevamo trikotniško neenakost

$$\left| \sum_{k=0}^n x_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |x_k|,$$

dobimo

$$C_{\Phi}(p(t)) = \sum_{k=0}^n \left| \sum_{j=0}^n a_j M_{jk} \right| \phi_k(t) \leq \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^n |a_j M_{jk}| \right) \phi_k(t).$$

Kjer je $M_{jk} \geq 0$ za vse j, k in lahko upoštevamo, da velja $|a_j M_{jk}| = |a_j| M_{jk}$. Preuredimo enačbo na desni strani in dobimo,

$$C_{\Phi}(p(t)) \leq \sum_{j=0}^n |a_j| \sum_{k=0}^n M_{jk} \phi_k(t) = \sum_{j=0}^n |a_j| \psi_j(t) = C_{\Psi}(p(t)).$$

□

Pomemben primer izreka je, ko za Φ vzamemo Bernsteinovo bazo na $[0, 1]$ ter za Ψ monomske bazo $\{1, t, \dots, t^n\}$.

Posledica 7.2. Pogojenostni števili $C_B(p(t))$ in $C_M(p(t))$ za vrednost polinoma $p(t)$ v Bernsteinovem ter monomskem zapisu, $p(t) = \sum_{k=0}^n c_k b_k^n(t)$ in $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$, zadoščata pogoju

$$C_B(p(t)) \leq C_M(p(t))$$

za vsak polinom $p(t)$ in $t \in [0, 1]$.

Dokaz. Bernsteinova in monomska baza sta nenegativni na intervalu $[0, 1]$ ter iz razmerja med njima (glej poglavje *Lastnosti Bernsteinovih baznih polinomov*) vemo, da lahko katerikoli element monomske baze zapišemo kot linearno kombinacijo Bernsteinovih baznih polinomov z nenegativnimi koeficienti kot $t^i = \sum_{j=i}^n \binom{j}{i} b_j^n(t)$. Torej so izpolnjeni pogoji izreka 7.1. □

Opomba: Obratno lahko tudi katerikoli element Bernsteinove baze izrazimo z linearno kombinacijo polinomov monomske baze kot $b_i^n(t) = \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} \binom{n}{j} \binom{j}{i} t^j$, vendar ta vsebuje tudi negativne koeficiente.

Bernsteinova baza je stabilnejša od monomske baze pri vrednotenju polinomov na $t \in [0, 1]$, katerih koeficienti so elementi naključne perturbacije enotne relativne magnitude. Pri primerjavi Bernsteinovih in monomskih polinomov na $[0, 1]$ smo lahko prepričani, da je za vsak polinom območje perturbacije pri prvem vedno ožji kot pri slednjem.

7.2 Optimalna stabilnost

Pri izreku 7.1 imamo podani nenegativni bazi polinomov stopnje n , $\Psi = \{\psi_0(t), \dots, \psi_n(t)\}$ in $\Phi = \{\phi_0(t), \dots, \phi_n(t)\}$, na nekem določenem intervalu in prva je nenegativna kombinacija druge,

$$\Psi^T = \mathbf{M}\Phi^T,$$

za neko matriko \mathbf{M} , katere elementi ustrezajo pogoju $M_{jk} \geq 0$ za $0 \leq j, k \leq n$. Iz prejšnjega podpoglavja vemo, da je Bernsteinova baza polinomov stabilnejša od monomske baze. Zanima nas, če obstaja nenegativna baza polinomov, s katerimi bi lahko Bernsteinove polinome zapisali kot nenegativno linearno kombinacijo le-teh ter bi posledično bili stabilnejši kot Bernsteinovi polinomi. Na to vprašanje sta nam odgovorila R. T. Farouki in V. T. Rajan v *Algorithms for polynomials in Bernstein form*, 1988, in sicer, da je Bernsteinova baza *optimalno stabilna*.

Naj bo \mathcal{P}_n množica vseh nenegativnih baz polinomov stopnje n na intervalu $[0, 1]$. Transformacije $\Psi^T = \mathbf{M}\Phi^T$ med bazami polinomov stopnje n s pomočjo elementov nenegativne matrike \mathbf{M} vzpostavljajo delno urejenost množice \mathcal{P}_n . Natančneje, ko $\Psi, \Phi \in \mathcal{P}_n$ in velja $\Psi^T = \mathbf{M}\Phi^T$ za neko nenegativno matriko \mathbf{M} , lahko pišemo $\Phi \lesssim \Psi$. Ker je produkt dveh nenegativnih matrik nenegativen, potem velja relacija tranzitivnosti $\Psi \lesssim \Phi$ in $\Phi \lesssim \Theta \implies \Psi \lesssim \Theta$. Ker očitno velja tudi refleksivnost in antisimetričnost, je množica \mathcal{P}_n delno urejena s to relacijo. Nenegativna baza Φ je *najmanjši element* množice \mathcal{P}_n , če ne obstaja baza $\Psi \in \mathcal{P}_n$, da velja $\Psi \lesssim \Phi$.

Izrek 7.3. *Poljubni nenegativni bazi $\Phi, \Psi \in \mathcal{P}_n$ ustrezata*

$$\Phi \lesssim \Psi \iff C_\Phi(p(t)) \leq C_\Psi(p(t))$$

za vsak polinom $p(t)$ in vsako vrednost t na intervalu $[0, 1]$.

Izrek 7.4. *Bernsteinova baza je najmanjši element množice \mathcal{P}_n in najmanjši element, katerega bazne funkcije nimajo ničel na $(0, 1)$.*

Dokaz. Dokažimo zgolj idejo dokaza. Pomagamo z izrekom iz članka *On the Optimal Stability of the Bernstein Basis*, njegov dokaz najdemo v [8]:

“Predpostavimo, da sta $\Psi = \{\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_n\}$ in $\tilde{\Psi} = \{\tilde{\Psi}_0, \tilde{\Psi}_1, \dots, \tilde{\Psi}_n\}$ bazi v \mathcal{P}_n ter velja

$$\begin{aligned}\Psi_j^{(i)}(0) &= 0, & \text{za } i = 0, 1, \dots, j-1 \text{ in } j = 1, 2, \dots, n, \\ \tilde{\Psi}_j^{(i)}(1) &= 0, & \text{za } i = 0, 1, \dots, n-j-1 \text{ in } j = 0, 1, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Označimo bazo Bernsteinovih polinomov z \mathcal{B} . Če $\Phi \in \mathcal{P}_n$ izpolnjuje pogoja $\Phi \preceq \Psi$ in $\Phi \preceq \tilde{\Psi}$, potem velja $\Phi \sim \mathcal{B}$. ”

Predpostavimo, da je $\Phi \in \mathcal{P}_n$ takšna baza, da velja $\Phi \preceq \mathcal{B}$. Ker lahko pokažemo, da Bernsteinova baza izpolnjuje zgornja pogoja na Ψ in $\tilde{\Psi}$, velja $\Phi \preceq \mathcal{B} \preceq \Psi$ in $\Phi \preceq \mathcal{B} \preceq \tilde{\Psi}$. Iz izreka potem sledi $\Phi \sim \mathcal{B}$. Torej ne obstaja baza Φ v \mathcal{P}_n za katero bi veljalo $\Phi \prec \mathcal{B}$. \square

Konstruiramo lahko tudi druge najmanjše baze \mathcal{P}_n , ampak ne bodo nujno tako uporabne v aplikacijah. Uporabna baza mora omogočiti učinkovite algoritme za interpolacijo, aproksimacijo, iskanje ničel, manipulacijo oblike ter druge zahteve. Zaenkrat je Bernsteinova baza edina znana baza, ki združuje optimalno stabilnost z njenimi vsestranskimi algoritmi.

8 ZAKLJUČEK

V zaključni nalogi smo definirali Bernsteinove bazne polinome in spoznali njihove lastnosti. Linearno kombinacijo Bernsteinovih baznih polinomov smo poimenovali Bernsteinov polinom. Vsi polinomi so neskončno-krat zvezno odvedljivi, nad Bernsteinovimi pa tudi zlahka izvajamo kontrolo. Zaradi teh lastnosti sta de Casteljau in Bézier Bernsteinove polinome sprejela kot osnovo Bézierovih krivulj, ki so postale pomemben gradnik pri vektorski grafiki in računalniškem modeliranju. Ogledali smo si, da jih lahko spreminjamo neposredno s pomočjo spremembe Bézierovega kontrolnega poligona, tj. spremenimo položaj ene ali več kontrolnih točk. Iz lastnosti Bernsteinovih polinomov izhajajo pomembne lastnosti Bézierovih krivulj. Krivuljam lahko zvišamo stopnjo s povečanjem števila kontrolnih točk in s tem ohranimo njeno obliko in parametrizacijo, vendar spremenimo njen kontrolni poligon. Sicer pri zapletenejših oblikah raje uporabimo zlepkre krivulj nižjih stopenj, zaradi enostavnejšega izračuna in lažje kontrole posameznih delov krivulje. Z uvedbo racionalnih Bézierovih krivulj smo lahko prilagodili krivuljo našim željam in ohranili enak kontrolni poligon. Z njimi lahko oblikujemo proste oblike kot so krožni loki in drugi odseki stožnic. Večino lastnosti polinomskih Bézierovih krivulj brez težav prenesemo tudi na racionalne Bézierove krivulje ter tenzorske Bézierove ploskve. V poglavju Numerična stabilnost smo s pomočjo pogojenostnih števil pokazali, da je Bernsteinova baza stabilnejša od monomske baze. Pri primerjavi Bernsteinovih in monomskih polinomov na $[0, 1]$ smo lahko prepričani, da je za vsak polinom območje perturbacije pri prvem vedno ožje kot pri slednjem.

Več informacij o Bernsteinovih polinomih in njihovi uporabi najdemo v knjigi G. Farina, *Curves and Surfaces for CAGD*, ter v članku *The Bernstein polynomial basis: a centennial retrospective*, katerega avtor je R.T. Farouki.

9 Literatura

- [1] G. FARIN, *Curves and Surfaces for CAGD, A Practical Guide*, Morgan Kaufmann Publishers, Fifth Edition, 2002. (*Citirano na straneh 1, 7 in 17.*)
- [2] G. FARIN, *Triangular Bernstein-Bézier patches*, Department of Mathematics, University of Utah, 1986. (*Citirano na strani 26.*)
- [3] G. JAKLIČ, *Krivulje in ploskve v računalniško podprtem geometrijskem oblikovanju, skripta*, Fakulteta za matematiko in fiziko, Ljubljana, 2011. (*Citirano na strani 14.*)
- [4] K.I. JOY, *Bernstein polynomials*, <http://www.idav.ucdavis.edu/education/CAGDNotes/CAGDNotes/Bernstein-Polynomials.pdf>. (Datum ogleda: 31. 01. 2018.) (*Citirano na straneh 1 in 7.*)
- [5] M. REEDER, *Analysis I: Weierstrass Approximation*, Boston College, <https://www2.bc.edu/mark-reeder/3321Weierstrass.pdf>. (Datum ogleda: 10. 03. 2018.) (*Citirano na straneh 2 in 28.*)
- [6] M. TUTA, *Bézierove krivulje in ploskve: od teoretičnega ozadja do računalniških aplikacij*, Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijsko tehnologijo, Koper, 2012. (*Citirano na strani 27.*)
- [7] R.T. FAROUKI, *The Bernstein polynomial basis: a centennial retrospective*, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of California, 2012. (*Citirano na straneh 1, 2, 4, 6 in 31.*)
- [8] R.T. FAROUKI in T.N.T. GOODMAN, On the Optimal Stability of the Bernstein Basis. *Mathematics of Computation* 65 (1996) 1553–1566. (*Citirano na strani 35.*)