UNIVERZA NA PRIMORSKEM

FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE

IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

MAGISTRSKO DELO

SAŠA JACQALINE BENEDIK

UNIVERZA NA PRIMORSKEM

FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN INFORMACIJSKE

TEHNOLOGIJE

Matematične znanosti, 2. stopnja

Saša Jacqaline Benedik

Kanonične forme kompleksnih matrik

Magistrsko delo

Mentor: dr. Bojan Kuzma

Koper, 2012

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in priimek: Saša Jacqaline Benedik

Naslov magistrskega dela: Kanonične forme kompleksnih matrik

Kraj: Koper

Leto: 2012

Število listov: 78 Število slik: 0 Število tabel: 0

Število prilog: 0 Št. strani prilog: 0

Število referenc: 10

Mentor: dr. Bojan Kuzma

UDK: 512.64(043.2)

Ključne besede: simetrične matrike, antisimetrične matrike, ortogonalne matrike, polarna razčlenitev matrik, kanonična forma kompleksnih matrik.

Math. Subj. Class. (2000): 15A18, 15A21, 15A23, 15A57.

Izvleček:

V uvodnem poglavju ponovimo osnovne pojme iz linearne algebre, definiramo matriko ter opišemo algebraične operacije na matrikah ter definiramo determinanto in rang matrike.

V drugem poglavju se posvetimo kompleksnim matrikam. Najprej definiramo posebne vrste kvadratnih kompleksnih matrik, ter spoznamo Jordanovo kanonično formo, polinom v matrikah in eksponentno funkcijo matrike. Poglavje nadaljujemo s faktorizacijo kompleksnih matrik. V zadnjem delu drugega poglavja si ogledamo polarno razčlenitev obrnljive kompleksne matrike in pokažemo, da sta si dve podobni (simetrični, ali antisimetrični, ali ortogonalni) matriki ortogonalno podobni.

Zadnje poglavje je namenjeno kanoničnim formam kompleksnih simetričnih, antisimetričnih in ortogonalnih matrik.

Key words documentation

Author: Saša Jacqaline Benedik

English title: Canonical forms of complex matrices

Place of publication: Koper

Year: 2012

Number of pages: 78 Number of images : 0 Number of tables: 0

Number of attachments: 0 Number of pages of attachments: 0

Number of references: 10

Mentor: dr. Bojan Kuzma

UDK: 512.64(043.2)

Keywords: symmetric matrices, antisymmetric matrices, orthogonal matrices, polar decomposition of matrix, canonical forms for complex matrices.

Math. Subj. Class. (2000): 15A18, 15A21, 15A23, 15A57.

Abstract:

In first chapter we review some basic linear algebra concepts. Then we define matrix and operations between them. Finally determinant and rank of matrix are presented.

Next chapter deals with complex matrix. We define special types of complex matrices, Jordan canonical form, matrix polynomial and matrix exponential. Then we continue with factorization of complex orthogonal and complex unitary matrices. The end of second chapter is meant for polar decomposition of complex nonsingular matrix. We also show that two similar complex symmetric, or antisymmetric, or orthogonal matrices are orthogonally similar.

In last chapter we find canonical forms for complex symmetric, antisymmetric and orthogonal matrices.

Kazalo

ZAHVALA

Najprej bi se rada zahvalila svojemu mentorju dr. Bojanu Kuzmi za strokovno svetovanje pri nastajanju magistrske naloge in za vse uporabne nasvete.

Posebna zahvala gre tudi vsem mojim domačim, ki so mi pomagali na poti v svet matematike in mi nudili ogromno podpore in pomoči pri študiju.

1 UVOD

Naš glavni cilj je poiskati kanonične forme kompleksnih matrik. Toda preden to storimo, v prvem poglavju ponovimo nekaj osnovnih pojmov linearne algebre. Tako najprej definiramo realna in kompleksna števila, vektorski prostor, bazo vektorskega prostora in linearno preslikavo. Nato pa matriko in algebraične operacije na njih, ki jih povzamemo po [7]. V prvem poglavju definiramo tudi determinanto in rang matrike ter transponirano in konjugirano transponirano matriko.

Drugo poglavje posvetimo kompleksnim matrikam. Najprej definiramo posebne vrste kvadratnih kompleksnih matrik (simetrično, antisimetrično, hermitsko, poševno hermitsko, normalno, ortogonalno in unitarno). Nato navedemo nekaj zgledov posebnih vrst matrik ter nekaj trditev, v katerih dokažemo določene povezave med njimi.

V drugem delu drugega poglavja se posvetimo diagonalizaciji matrik. Definiramo spekter matrike, lastno vrednost in lastni vektor, karakteristični in minimalni polinom in pokažemo določene lastnosti spektrov posameznih matrik. Nato definiramo podobne matrike in pokažemo, da je vsaka matrika podobna zgornje trikotni matriki. V nadaljevanju dokažemo, da lahko dve komutativni matriki sočasno diagonaliziramo, kar podkrepimo z zgledom. Na koncu pa pokažemo še, da je realna antisimetrična matrika unitarno podobna posebni vrsti bločno diagonalne realne matrike.

Naslednje podpoglavje namenimo Jordanovi kanonični formi in polinomom v matrikah. Vpeljemo tudi racionalno funkcijo v matriki in dokažemo, da se Jordanove kletke dveh matrik (kjer lahko prvo dobimo kot racionalno funkcijo v matriki druge in obratno) ujemajo tako v številu kot v velikosti.

V nadaljevanju namenimo nekaj strani eksponentni funkciji matrike. Dokažemo nekaj lastnosti, ki veljajo zanjo in poiščemo Jordanovo formo eksponenta Jordanove kletke. Pri obravnavi nadaljnjih tem nam je v veliko pomoč [2]. Najprej namenimo dve trditvi faktorizaciji kompleksne ortogonalne oziroma unitarne matrike, ki ju faktoriziramo na podlagi dveh predhodno dokazanih lem.

V zadnjem delu drugega poglavja pa pokažemo, da lahko vsako obrnljivo kvadratno kompleksno matriko razčlenimo na produkt simetrične in ortogonalne matrike ter da sta si dve podobni (hkrati simetrični ali antisimetrični ali ortogonalni) matriki ortogonalno podobni.

Zadnje poglavje namenimo glavni temi magistrskega dela. Poiščemo namreč kanonične forme kompleksne simetrične, antisimetrične in ortogonalne matrike. Najprej pokažemo, da je vsaka kvadratna kompleksna matrika podobna simetrični matriki, nato zapišemo kanonično formo simetrične matrike in pokažemo, da ima matrika vedno enake Jordanove kletke kot njena transponirana matrika.

V drugem delu zadnjega poglavja pokažemo, da imajo antisimetrične matrike vedno sod rang. Nato pa poiščemo vse možne oblike njenih Jordanovih kletk in končno zapišemo kanonično formo za kompleksno antisimetrično matriko.

Podobno postopamo v zadnjem podpoglavju, v katerem obravnavamo kompleksne ortogonalne matrike. Najprej poiščemo vse možne oblike Jordanovih kletk kompleksne ortogonalne matrike, nato pa (s pomočjo eksponentne funkcije kanonične forme kompleksne antisimetrične matrike) vpeljemo kanonično formo kompleksne ortogonalne matrike.

TEORETIČNA IZHODIŠČA

Pri nastajanju magistrske naloge si bomo pomagali s študijem in primerjavo različnih virov. V glavno oporo pa nam bo F. R. Gantmacher, Applications of the theory of matrix, Interscience Publishers, New York, London, 1959.

2 OSNOVNI POJMI

Na samem začetku ponovimo nekaj že dobro poznanih pojmov iz linearne algebre.

2.1 Vektorski prostor in linearne preslikave

Definicija 2.1.1. *Množica* **realnih števil***, ki jo označimo z* $\mathbb{R}$*, je skupaj z operacijo* $+$ *in* $\cdot$ *komutativen obseg, v katerem imamo definirano relacijo stroge linearne urejenosti. To je relacija, za katero velja:*

- *stroga sovisnost: za različni realni števili* a *in* b *velja natanko ena od možnosti:* $a > b$ *ali* $a < b$*,*
- *asimetričnost: iz* $a < b$ *sledi, da ne velja* $b < a$*,*
- *tranzitivnost: za različna realna števila* a, b, c *iz* $a < b$ *in* $b < c$ *sledi* $a < c$

in ki je usklajena z operacijo $+$ *in* $\cdot$*:*

- *za poljubna realna števila* a, b, c *iz* $a > b$ *sledi* $a + c > b + c$*,*
- *za poljubni realni števili* $a > 0$ *in* $b > 0$ *velja* $ab > 0$*.*

Poleg tega ima vsaka neprazna navzgor omejena množica v $\mathbb{R}$ *natančno zgornjo mejo.*

Definicija 2.1.2. *Množico* **kompleksnih števil***, ki jo označimo z* $\mathbb{C}$*, sestavljajo vsa števila oblike* $a + ib$*, kjer sta* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $i = \sqrt{-1}$*. Kompleksna števila pa skupaj z operacijama* $+$ *in* $\cdot$ *komutativen obseg.*

Tako $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ kot tudi $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sta komutativna obsega, nad katerima lahko definiramo vektorski prostor. To je množica, ki je zaprta za operacijo seštevanja in odštevanja svojih elementov ter množenje s skalarji iz komutativnega obsega. Ponovimo definicijo vektorskega prostora bolj natančno:

Definicija 2.1.3. *Naj bo* $\mathbb{O}$ *komutativen obseg. Potem je množica* V*, na kateri sta dani operaciji* $+ : V \times V \to V$ *in* $\cdot : \mathbb{O} \times V \to V$, **vektorski prostor**, *če za vse* $\alpha, \beta \in \mathbb{O}$ *in vse* $u, v \in V$ *velja sledeče:*

- $(V, +)$ *je Abelova grupa,*

- $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$,

- $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,

-$\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$,

- $1 \cdot v = v$.

Pomemben pojem pri obravnavi vektorskega prostora je njegova baza. Preden ponovimo njeno definicijo, moramo povedati še, kdaj so vektorji linearno neodvisni in kaj je ogrodje vektorskega prostora.

Definicija 2.1.4. *Vektorji* $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ *so* **linearno neodvisni**, *ko iz* $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0, \alpha_i \in \mathbb{O}$ *sklepamo, da so vsi skalarji* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Definicija 2.1.5. *Neprazna množica* $B \subseteq V$ *je* **ogrodje vektorskega prostora** V*, če se vsak vektor* $v_i \in V$ *linearno izraža s končno mnogo vektorji iz množice* B*, kar pomeni, da lahko vsak* v_i *zapišemo kot* $v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k$*;* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{O}$ *in* $v_1, v_2, \ldots, v_k \in B$.

Sedaj lahko zapišemo definicijo baze vektorskega prostora.

Definicija 2.1.6. *Naj bodo* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *vektorji iz vektorskega prostora* V.
Množico vektorjev $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ *imenujemo* **baza vektorskega prostora** V*, če:*

- *so vektorji* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *linearno neodvisni in*

- *je* B *ogrodje prostora* V.

Med dvema vektorskima prostoroma nad istim komutativnim kolobarjem $\mathbb{O}$ lahko definiramo linearne preslikave:

Definicija 2.1.7. *Naj bosta U in V vektorska prostora, $\mathbb{O}$ pa pripadajoči obseg. Potem je* **preslikava** $\varphi : U \to V$ **linearna**, *če veljata naslednji lastnosti:*

- *aditivnost:* $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$, *za vse* $u_1, u_2 \in U$,
- *homogenost:* $\varphi(xu) = x(\varphi(u))$, *za vse* $x \in \mathbb{O}$ *in* $u \in U$.

Povejmo še, da lahko vsako linearno preslikavo vektorskega prostora predstavimo z matriko. Preden zapišemo, kako to naredimo, si poglejmo pojem matrike.

2.2 Matrike

Definicija 2.2.1. *Naj bo $\mathbb{F}$ komutativen obseg.* **Matrika** *velikosti $n_1 \times n_2$ z elementi iz $\mathbb{F}$ (v našem primeru bo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) je pravokotna tabela $n_1 \times n_2$ elementov iz $\mathbb{F}$. Tako matriko sestavlja n_1 vrstic in n_2 stolpcev.*

Množico vseh matrik velikosti $n_1 \times n_2$ z elementi iz komutativnega obsega $\mathbb{F}$ označimo z $\mathbb{F}^{n_1 \times n_2}$.

Posebno ime imajo matrike iz množice $\mathbb{F}^{n \times n}$ - rečemo jim **kvadratne matrike** *reda n. To so torej matrike, ki imajo število stolpcev enako številu vrstic.*

Matriki z elementi iz komutativnega obsega kompleksnih števil bomo rekli **kompleksna matrika** *in podobno matriki z elementi iz $\mathbb{R}$* **realna matrika**.

Zgled 2.2.2. *Matrika $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -2 & i \\ 4 & 2+i & 3i \end{smallmatrix}\right]$ ima dve vrstici $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 & i \end{smallmatrix}\right)$ in $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 2+i & 3i \end{smallmatrix}\right)$, ter tri stolpce $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 2+i \end{smallmatrix}\right)$ in $\left(\begin{smallmatrix} i \\ 3i \end{smallmatrix}\right)$, zato rečemo, da je velikosti 2×3.*

Definicija 2.2.3. *Elementu, ki leži v i-ti vrstici in j-tem stolpcu, rečemo* $(\mathbf{i},\mathbf{j})$**-ti element** *in ga v matriki A označimo $a_{i,j}$. Tako lahko matriko A zapišemo:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots a_{m,n} \end{bmatrix} = (a_{i,j})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}.$$

Končno poglejmo, kako predstavimo linearno preslikavo z matriko.

2.2.1 Matrika linearne preslikave

Imejmo linearno preslikavo $\varphi : U \to V$ in naj bosta $\Omega = (u_1, u_2, \dots u_m)$ in $\Pi = (v_1, v_2, \dots v_n)$ urejeni bazi vektorskih prostorov, med katerima slika φ. Ker je linearna preslikava vektorskega prostora enolično določena s podatki o njenem učinkovanju na bazi začetnega vektorskega prostora, je dovolj, da poiščemo slike vektorjev iz baze Ω in jih izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev iz baze Π. Elemente, ki jih pri tem dobimo pa po vrsti prepišemo v stolpce matrike. Če je:

$$\varphi(u_1) = a_{1,1}v_1 + a_{2,1}v_2 + \dots a_{m,1}v_n,$$

$$\varphi(u_2) = a_{1,2}v_1 + a_{2,2}v_2 + \dots a_{m,2}v_n,$$

$$\vdots$$

$$\varphi(u_n) = a_{1,n}v_1 + a_{2,n}v_2 + \dots a_{m,n}v_n,$$

je matrika preslikave φ enaka $M_{\Pi}^{\Omega}(\varphi) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots a_{m,n} \end{bmatrix}$.

Zgled 2.2.4. *Linearna preslikava* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *je določeno s predpisom* $\varphi(x, y, z) = (-x + 3y - z, y)$. *Naj bo začetna baza* $\Omega = \{(2, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$, *končna baza pa* $\Pi = \{(1, 1), (-1, 0)\}$. *Poiščimo matriko* $M_{\Pi}^{\Omega}(\varphi)$.

Poglejmo najprej, kam preslikava preslika vektorje iz baze Ω*:* $\varphi(2, 1, 0) = (1, 1), \varphi(1, 0, 0) = (-1, 0), \varphi(0, 1, 1) = (0, 1)$. *Sedaj razbijmo slike, ki smo jih dobili, po končni bazi* Π :

$$(1, 1) = 1(1, 1) + 0(-1, 0),$$

$$(-1, 0) = 0(1, 1) + 1(-1, 0),$$

$$(0, 1) = 1(1, 1) + 1(-1, 0)$$

in zapišemo matriko $M_{\Pi}^{\Omega}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2.2.2 Algebraične operacije na matrikah

Seštevanje matrik: Imejmo matriki $A, B \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}$. Potem je njuna vsota $A+B$ definirano kot:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \dots a_{1,n_2} + b_{1,n_2} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \dots a_{2,n_2} + b_{2,n_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n_1,1} + b_{n_1,1} & a_{n_1,2} + b_{n_1,2} & \dots a_{n_1,n_2} + b_{n_1,n_2} \end{bmatrix}.$$

<u>Lastnosti seštevanja matrik:</u>

- $(A + B) + C = A + (B + C)$, za vse $A, B, C \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}$.
- $A + B = B + A$, za vse $A, B \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}$.
- Matriko $\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}$, ki jo označimo 0, imenujemo nevtralni element za seštevanje. Za vse $A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}$ namreč velja: $A + 0 = 0 + A = A$.

Množenje matrik s skalarjem: Za poljuben skalar $\alpha \in \mathbb{F}$ in matriko $A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}$ definiramo produkt matrike s skalarjem:

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{1,1} & \alpha a_{1,2} & \ldots \alpha a_{1,n} \\ \alpha a_{2,1} & \alpha a_{2,2} & \ldots \alpha a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{m,1} & \alpha a_{m,2} & \ldots \alpha a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Lastnosti množenja matrik s skalarjem:

- $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$, za vse $A, B \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, za vse $A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$, za vse $A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.
- Matriko $-A = (-1) \cdot A$ imenujemo inverz za seštevanje matrik. Velja: $-A + A = 0$.
- Množenje s skalarjem $1 : 1 \cdot A = A$.

Množenje matrik: Naj bosta $A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}$ in $B \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_3}$ matriki, za kateri je število stolpcev v A enako številu vrstic v B. Potem je (i,j)-ti element produkta $A \cdot B$ enak $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \ldots + a_{i,n} b_{n,j}$. Produkt $A \cdot B$ je posledično element množice $\mathbb{F}^{n_1 \times n_3}$.

Na povsem analogen način seveda tudi potenciramo matrike. Definirajmo še matriko, katere potenca je od nekega števila naprej enaka 0.

Definicija 2.2.5. *Kvadratna matrika N, za katero obstaja tak $k \in \mathbb{N}$, da je $N^k = 0$, imenujemo* **nilpotent**. *Najmanjše naravno število k pa stopnja nilpotentnosti.*

Lastnosti množenja matrik:

- $(AB)C = A(BC)$, za vse $A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}, B \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_3}$ in $C \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_4}$.
- Matriko $I \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ imenujemo identična matrika (reda n_2) in je enota za množenje. Za vsak $A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}$ in $B \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_3}$ namreč velja $AI = A$ in $IB = B$.
- $(A + B)C = AC + BC$, za vse $A, B \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}$ in $C \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_3}$.
- $A(B + C) = AB + AC$, za vse $A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}$ in $B, C \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_3}$.
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, za vse $\alpha \in \mathbb{F}, A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}, B \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_3}$.

Transponiranje matrik Preden spoznamo transponiranje matrik, definirajmo posebno vrsto matrike.

Definicija 2.2.6. *Matriko, ki ima element $a_{i,j}$ enak 1, vse druge elemente pa enake 0, imenujemo* **matrična enota**. *Označimo jo $E_{i,j}$.*

Ni težko opaziti, da lahko poljubno matriko A zapišemo $A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} E_{i,j}$. Potem je transponirana matrika (označimo jo A^T) matrike A:

$$A^T = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} E_{j,i}.$$

Lastnosti transponiranja matrik:

- $(A^T)^T = A$, za vse $A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}$.
- $(\alpha A)^T = \alpha(A)^T$, za vse $A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}$ in $\alpha \in \mathbb{F}$.
- $(A + B)^T = A^T + B^T$, za vse $A, B \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}$.
- $(AB)^T = B^T A^T$, za vse $A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}$ in $B \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_3}$.

Determinanta matrike je predpis, ki kvadratni matriki A priredi enolično določeno število $det(A)$, definirano na naslednji način:

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{ind(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)},$$

kjer je S_n grupa vseh permutacij na n elementih in je $ind(\sigma)$ indeks permutacije σ (to je število parov $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, za katere velja $i > j$ in $\sigma(i) < \sigma(j)$).

Računanje determinant matrike $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$:

- Če je $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$, je $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$.
- Determinanto matrik višjih redov pa najpogosteje izračunamo s pomočjo razvoja na poddeterminante. Velja namreč:

  $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$, kjer z $A_{i,j}$ označimo matriko, ki jo dobimo iz A tako, da ji izbrišemo vrstico i in stolpec j.

Vpeljimo še definicijo ranga matrike.

Definicija 2.2.7. **Rang** *matrike A, ki ga označimo $rang(A)$, je število linearno neodvisnih vrstic v matriki A in je enako velikosti največjega neničelnega minorja matrike A. Minor velikosti $k \times k$ je determinanta podmatrike, ki jo dobimo tako, da v matriki izpustimo k vrstic in k stolpcev.*

Opomba 2.2.8. *Število linearno neodvisnih vrstic v poljubni matriki A je enako številu linearno neodvisnih stolpcev. Dokaz najdemo v knjigi [6], na strani 90.*

Inverz matrike Naj bo A neka matrika. Njen inverz je taka matrika X, da $AX = XA = I$. Inverzno matriko matrike A označimo A^{-1}.

Dodajmo, da imajo inverz natanko tiste kvadratne matrike, katerih determinanta je različna od nič.

Konjugirana matrika Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$. Njeno konjugirano matriko dobimo tako, da vse njene elemente spremenimo v konjugirano kompleksne. Označimo jo $\overline{A}$.

Zgled 2.2.9. *Konjugirana matrika matrike* $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 4i \\ -2i & 2+i \end{smallmatrix}\right]$ *je* $\overline{A} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -4i \\ 2i & 2-i \end{smallmatrix}\right]$.

Konjugirano transponirana matrika Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$. Njeno konjugirano transponirano matriko dobimo tako, da vse elemente matrike A^T (to je transponirana matrika matrike A) spremenimo v konjugirano kompleksne. Označimo jo A^*.

Zgled 2.2.10. *Imejmo matriko* $A = \left[\, 5i \,\right] \in \mathbb{C}^{1\times 1}$. *Potem je konjugirano transponirana matrika matrike* A *enaka* $A^* = \overline{A^T} = \left[\, -5i \,\right] \in \mathbb{C}^{1\times 1}$.

3 KOMPLEKSNE MATRIKE

Sedaj se podrobneje posvetimo matrikam nad komutativnim obsegom kompleksnih števil. Najprej si oglejmo nekaj posebnih tipov kvadratnih kompleksnih matrik.

3.1 Posebni tipi kvadratnih matrik

Imejmo matriko $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Njeno transponirano matriko označimo z X^T, matriki X konjugirano transponirano matriko torej $\overline{X^T}$ pa označimo z X^*. Matrika $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je

- **simetrična**, če $A^T = A$.
- **antisimetrična**, če $A^T = -A$.
- **hermitska**, če $A^* = A$.
- **poševna hermitska**, če $A^* = -A$.
- **normalna**, če $A^*A = AA^*$.
- **ortogonalna**, če $A^TA = AA^T = I$.
- **unitarna**, če $A^*A = AA^* = I$.

Opomba 3.1.1. *a) Normalna matrika komutira s svojo konjugirano transponirano matriko.*

b) Ortogonalna matrika A je obrnljiva, njen inverz je $A^{-1} = A^T$.

c) Realna unitarna matrika je vedno ortogonalna.

d) Pri zadnjih dveh tipih matrik je dovolj pokazati le eno od enakosti, saj iz enakosti $A^TA = I$ $(A^*A = I)$ sledi $AA^T = I$ $(AA^* = I)$ in obratno, kar je razvidno iz posledice naslednje trditve.

Trditev 3.1.2. *Imejmo kompleksno matriko A. Če obstaja taka matrika B, da je $BA = I$, potem je matrika A obrnljiva, njen inverz pa je enak B. Tako iz enakosti $BA = I$ sledi $AB = I$.*

Dokaz. Pokažimo najprej, da iz $BA = I$ sledi, da je matrika A obrnljiva. Ker je $det(BA) = det(I)$ in $det(BA) = det(B)det(A)$ (dokaz slednjega najdemo v [6] na strani 112) je $det(B)det(A) = 1$, iz česar sklepamo, da $det(B), det(A) \neq 0$ oziroma, da sta obe matriki (tako A kot B) obrnljivi.

Poiščimo sedaj obrat matrike A. Ker inverzna matrika matrike A obstaja, lahko enakost $BA = I$ z desne pomnožimo z A^{-1}. Dobimo $BAA^{-1} = IA^{-1}$, kar je enako $BI = IA^{-1}$ oziroma $B = A^{-1}$.

Pokažimo še zadnji del trditve. Ker vemo, da za vsako obrnljivo matriko X velja $XX^{-1} = I$ je tudi $AA^{-1} = I$ oziroma $AB = I$, saj $A^{-1} = B$. □

Posledica 3.1.3. *Iz enakosti $A^T A = I$ sledi $AA^T = I$ ter iz $A^* A = I$ sledi $AA^* = I$.*

Dokaz. Dokaz je povsem enak prejšnjemu. Vse kar moramo storiti, je da matriko B nadomestimo z A^T oziroma z A^*. □

Oglejmo si nekaj zgledov posebnih tipov matrik.

Zgled 3.1.4. *Ker za matriko $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 4 & 2+i & 3i \\ -6 & 3i & i \end{bmatrix}$ velja $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 4 & 2+i & 3i \\ -6 & 3i & i \end{bmatrix} = A$, sklepamo, da je A simetrična. Matrika A pa ni niti ortogonalna, saj $AA^T = A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 4 & 2+i & 3i \\ -6 & 3i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 4 & 2+i & 3i \\ -6 & 3i & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 & 12-14i & -6+6i \\ 12-14i & 8+4i & -30+6i \\ -6+6i & -30+6i & 26 \end{bmatrix} \neq I$, niti unitarna, saj $AA^* = A\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 4 & 2+i & 3i \\ -6 & 3i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 4 & 2-i & -3i \\ -6 & -3i & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 & 12+14i & -6-6i \\ 12-14i & 30 & -24+3-3i(2+i) \\ -6+6i & -18+6i & 46 \end{bmatrix} \neq I$.*

Zgled 3.1.5. *Za matriko $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -i\frac{1}{\sqrt{2}} & i\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$ iz [10] vidimo, da ni simetrična. Ker je $UU^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -i\frac{1}{\sqrt{2}} & i\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -i\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & i\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \neq I$, matrika U ni niti ortogonalna. Je pa unitarna, saj je $UU^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -i\frac{1}{\sqrt{2}} & i\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & i\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -i\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.*

Zgled 3.1.6. *Ker za matriko $V = \begin{bmatrix} i & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & i \end{bmatrix}$ velja $VV^T = \begin{bmatrix} i & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, je V ortogonalna, ni pa niti simetrična, niti unitarna, saj $VV^* = \begin{bmatrix} i & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2i\sqrt{2} \\ -2i\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix}$.*

Zgled 3.1.7. *Matrika* $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ *je simetrična, saj je* $B^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = B$.
Poleg tega je B *tudi ortogonalna, saj je* $B^TB = BB^T = B^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = I$.
Ker je matrika B *realna, je* $B^* = \overline{B^T} = B^T$, *za* B^T *pa smo že zgoraj ugotovili, da je enak* B, *torej je* $B^* = B$, *kar pomeni, da je matrika* B *tudi hermitska.*

Ni težko videti, da je vsaka realna simetrična matrika tudi hermitska in obratno, zaradi prikladnosti to pokažimo v naslednji trditvi.

Trditev 3.1.8. *Naj bo matrika* A *realna. Potem je* A *hermitska natanko tedaj, ko je simetrična.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Predpostavimo najprej, da je matrika A hermitska ($A = \overline{A^T}$) in dodajmo dejstvo, da je $A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, torej velja $\overline{A^T} = A^T$. Kar pomeni, da velja tudi $A = A^T$.
($\Leftarrow$) Sedaj predpostavimo, da je matrika A simetrična ($A = A^T$) in da je $A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kar pomeni, da je $\overline{A^T} = A^T$. Ko združimo enakosti, ugotovimo, da velja tudi $\overline{A^T} = A$. □

Nadaljujmo z zgledi posebnih tipov matrik.

Zgled 3.1.9. *Matrika* $C = \begin{bmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 1 \end{bmatrix}$ *že na prvi pogled ni niti simetrična, niti antisimetrična. Pokažimo, da je hermitska.*
Ker je $C^T = \begin{bmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 1 \end{bmatrix}$ *in* $\overline{C^T} = \begin{bmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 1 \end{bmatrix}$, *velja* $\overline{C^T} = C$, *kar pomeni, da je* C *hermitska.*

Zgled 3.1.10. *Poglejmo še matriko* $D = iC$, *kjer je matrika* C *iz zgornjega zgleda hermitska. Ker je matrika* $D = \begin{bmatrix} 3i & 2i-1 \\ 2i+1 & i \end{bmatrix}$, *je* $D^T = \begin{bmatrix} 3i & 2i+1 \\ 2i-1 & i \end{bmatrix}$ *in* $\overline{D^T} = \begin{bmatrix} -3i & -2i+1 \\ -2i-1 & -i \end{bmatrix} = -D$, *je matrika* D *očitno poševno hermitska.*

Da zgornji primer ni zgolj slučaj, dokažimo z naslednjo trditvijo.

Trditev 3.1.11. *Naj bo matrika* H *hermitska. Potem je matrika* $K = iH$ *poševno hermitska.*

Dokaz. Poljuben element matrike K je oblike $k_{n,m} = ih_{n,m}$, torej je $k^T_{n,m} = ih_{m,n}$ in $k^* = \overline{ih_{m,n}} = \bar{i} \cdot \overline{h_{m,n}}$. Ker je matrika H hermitska, velja $\overline{h_{m,n}} = h_{n,m}$. To pa pomeni, da $k^*_{n,m} = -ih_{n,m}$, torej je matrika K res poševno hermitska. □

Omenimo še razcep matrike na hermitski in poševno hermitski del.

Trditev 3.1.12. *Poljubno matriko A lahko zapišemo kot vsoto dveh matrik $A = B + iC$, kjer sta matriki $B = \frac{A+A^*}{2}$ in $C = \frac{A-A^*}{2i}$ hermitski.* □

Zgled 3.1.13. *Zapišimo matriko $A = \begin{bmatrix} 3 & 3+i \\ 2-i & 1 \end{bmatrix}$ kot vsoto hermitske in poševno hermitske matrike.*

Poiščimo $A^* = \begin{bmatrix} 3 & 2+i \\ 3-i & 1 \end{bmatrix}$ in za zapis uporabimo zgornjo trditev $A = \frac{A+A^*}{2} + i\frac{A-A^*}{2i}$.

$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3+3 & (3+i)+(2+i) \\ (2-i)+(3-i) & 1+1 \end{bmatrix} + \frac{i}{2i}\begin{bmatrix} 3-3 & (3+i)-(2+i) \\ (2-i)-(3-i) & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{5+2i}{2} \\ \frac{5-2i}{2} & 1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2i} \\ \frac{-1}{2i} & 0 \end{bmatrix}$. *Potem je prva matrika hermitska, druga pomnožena z i pa poševno hermitska.*

3.2 Diagonalizacija matrik

Preden spoznamo to pomembno temo iz poglavja matrik, osvežimo še nekaj pojmov.

Definicija 3.2.1. *Število* λ *je* **lastna vrednost** *matrike* A*, če obstaja tak neničeln vektor* v*, da je* $Av = \lambda v$*. Vektor* v *imenujemo* **lastni vektor** *matrike* A *pri lastni vrednosti* λ*. Množico vseh lastnih vrednosti matrike imenujemo* **spekter** *in označimo* $Sp(A)$*.*

Dodajmo, da je λ *lastna vrednost matrike* A *natanko tedaj, ko je* λ *ničla polinoma* $p_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$*, ki ga imenujemo* **karakteristični polinom** *matrike* A*.*

Definicija 3.2.2. *Polinom* $m_A(\lambda)$ *z vodilnim koeficientom* 1 *imenujemo* **minimalni polinom** *za matriko* A*, če velja:*

- $m_A(A) = 0$ *in*
- *če za polinom* $q(\lambda)$ *velja* $q(A) = 0$*, potem je stopnja polinoma* q *večja ali enaka stopnji polinoma* m_A*.*

Trditev 3.2.3. *Naj bo* $m_A(\lambda)$ *minimalni polinom matrike* A*. Če za nek polinom* $q(\lambda)$ *velja* $q(A) = 0$*, potem* $m_A(\lambda)$ *deli* $q(\lambda)$*.*

Dokaz. Naj bo stopnja minimalnega polinoma $m_A(\lambda)$ enaka n. Potem je stopnja polinoma $q(\lambda)$ večja ali enaka n. Poleg tega je $q(A) = m_A(A) = 0$, zato obstajata taka polinoma $p(\lambda)$ in $r(\lambda)$, stopnje manjše od n, da velja $q(\lambda) = p(\lambda)m_A(\lambda) + r(\lambda)$.

Toda ker je $q(A) = p(A)m_A(A) + r(A)$ in ker je $q(A) = m_A(A) = 0$, mora biti $0 = p(A)0 + r(A)$, iz česar sledi, da je $r(A) = 0$.

Če $r(\lambda) \neq 0$, lahko polinom $r(\lambda)$ normaliziramo in dobimo polinom z vodilnim koeficientom 1, katerega stopnja je še vedno manjša od n. Toda ker ta polinom uniči A, je to v protislovju z definicijo minimalnega polinoma. To pomeni, da res $r(\lambda) = 0$ oziroma, da minimalni polinom deli polinom $q(\lambda)$. $\square$

Posledica 3.2.4. *Minimalni polinom matrike je enolično določen.*

Dokaz. Denimo, da obstajata dva različna minimalna polinoma matrike A. Ker oba uničita matriko A, morata po gornji trditvi deliti drug drugega. Toda ker sta enake stopnje, mora biti prvi skalarni produkt drugega (in drugi skalarni produkt prvega). Po definiciji pa je njun vodilni koeficient enak 1 , kar pomeni, da sta identična. □

Lema 3.2.5. *Za poljubno matriko A velja $Sp(A) = -Sp(-A)$.*

Dokaz. Naj bo $\lambda \in Sp(A)$ in v njej pripadajoči lastni vektor. Potem iz definicije lastne vrednosti sledi, da je $Av = \lambda v$. Če obe strani enačbe pomnožimo z -1, mora veljati $(-A)v = (-\lambda)v$. To pa nam pove, da lastnemu vektorju v v matriki $-A$ pripada lastna vrednost $-\lambda$. Podobno velja za $\lambda' \in Sp(-A)$, da je $-Av' = \lambda' v'$ oziroma $Av' = -\lambda' v'$, kar pomeni, da je $-\lambda' \in Sp(A)$. □

Lema 3.2.6. *Naj bo A kvadratna matrika in A^T njena transponirana matrika. Potem velja $Sp(A) = Sp(A^T)$.*

Dokaz. Ker za poljubno matriko X velja $det(X) = det(X^T)$, velja tudi $det(A - \lambda I) = det(A - \lambda I)^T = det(A^T - \lambda I)$. Torej sta karakteristična polinoma $p_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$ in $p_{A^T}(\lambda) = det(A^T - \lambda I)$ enaka, kar pomeni, da so tudi njune ničle enake in posledično $Sp(A) = Sp(A^T)$. □

Posledica 3.2.7. *Naj bo K antisimetrična matrika in $\lambda \in Sp(K)$. Potem je tudi $-\lambda \in Sp(K)$.*

Dokaz. Naj bo λ lastna vrednost antisimetrične matrike K. Po Lemi 3.2.5 je $Sp(K) = -Sp(-K)$, kar pomeni, da je $-\lambda \in Sp(-K)$. Toda ker je $-K = K^T$ in ker smo v Lemi 3.2.6 dokazali, da velja $Sp(K^T) = Sp(K)$, lahko sklepamo, da je $-\lambda \in Sp(K)$. □

Trditev 3.2.8. *Lastne vrednosti realne simetrične matrike so vedno realne.*

Dokaz. Naj bo A realna simetrična matrika in naj velja $Av = \lambda v$. Upoštevajmo, da velja $(Av)^* = v^* A^*$ in $A^* = A$, kjer gledamo vektor v kot matriko velikosti $n \times 1$. Potem je

$$(Av)^* v = (\lambda v)^* v$$

$$v^* A^* v = v^* \overline{\lambda} v$$

$$v^* A v = v^* \overline{\lambda} v$$

$$v^* \lambda v = v^* \overline{\lambda} v$$

$$\lambda = \overline{\lambda}.$$

Iz česar sklepamo, da mora biti $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Trditev 3.2.9. *Lastna vrednost realne antisimetrične matrike je nič ali čisto imaginarno kompleksno število (oblike $0 + bi$). Slednja nastopajo v konjugiranih parih. Večkratnost dveh števil, ki sestavljata konjugiran par, pa je vedno enaka.*

Dokaz. Naj bo A realna antisimetrična matrika in naj velja $Av = \lambda v$. Potem je

$$(Av)^* v = (\lambda v)^* v$$

$$v^* A^T v = v^* \overline{\lambda} v$$

$$-v^* A v = v^* \overline{\lambda} v$$

$$-v^* \lambda v = v^* \overline{\lambda} v$$

$$-\lambda = \overline{\lambda}.$$

Naj bo $\lambda = a + bi$, potem je $-(a + bi) = \overline{a + bi}$ oziroma $-a - bi - a + bi = 0$, kar je res le v primeru, da $a = 0$. To pa pomeni, da je lastna vrednost lahko le 0 ali čisto imaginarno kompleksno število bi.

Dokažimo še, da kompleksne lastne vrednosti realne antisimetrične matrike nastopajo v konjugiranih parih. Predpostavimo, da je $\lambda \in \mathbb{C}$ lastna vrednost matrike A oziroma da je λ ničla karakterističnega polinoma $p_A = \det(A - \lambda I)$.

Naj bo $p_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n = 0$. Enakost mora seveda držati tudi, če obe strani konjugiramo: $\overline{p_A(\lambda)} = \overline{a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n} = \overline{0}$. Ker pa je matrika A realna, so vsi koeficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, zato je $a_0 + a_1\overline{\lambda} + a_2\overline{\lambda^2} + \ldots + a_{n-1}\overline{\lambda^{n-1}} + a_n\overline{\lambda^n} = 0$ oziroma $p_A(\overline{\lambda}) = 0$, kar pomeni, da je za vsako realno matriko, ki ima kompleksno lastno vrednost λ, tudi $\overline{\lambda}$ njena lastna vrednost.

Za polinom z realnimi koeficienti pa vemo (dokaz najdemo v [1], na strani 350), da je večkratnost dveh kompleksnih ničel, ki sestavljata konjugiran par vedno enaka. $\square$

Definicija 3.2.10. *Imejmo kvadratni matriki $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Matrika B je* **podobna** *matriki A, če obstaja taka obrnljiva matrika S, da velja*

$$B = S^{-1}AS. \tag{1}$$

V primeru, da je B podobna neki diagonalni matriki, rečemo, da je B **diagonalizabilna**.

Če je matrika S v (1) ortogonalna (unitarna), pa rečemo, da sta si matriki **ortogonalno (unitarno) podobni**.

Trditev 3.2.11. *Vsaka matrika je unitarno podobna zgornje trikotni matriki, ki ima po diagonali razporejene lastne vrednosti.*

Dokaz. Pri dokazovanju zgornje trditve si pomagamo s stranema 79 in 80 v knjigi [5].

Imejmo matriko $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in naj bo x_1 lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti λ_1. Potem tudi za normiran vektor $u_1 = \frac{x_1}{||x_1||}$ velja $Au_1 = \lambda_1 u_1$. Naj bo V_1 množica vseh vektorjev, ki so pravokotni na u_1. Dopolnimo u_1 z baznimi vektorji podprostora $V_1 = \{v_{1,2}, v_{1,3}, \ldots, v_{1,n}\}$

do ortonormirane baze $\mathbb{C}^{1\times n}$ in zapišimo unitarno matriko

$$U_1 = \begin{bmatrix} u_1 & v_{1,2} & v_{1,3} & \dots v_{1,n} \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

Potem je prvi stolpec produkta AU_1 enak $AU_1e_1 = Au_1 = \lambda_1 u_1$ in ker je $U^* = U^{-1}$, je $U^*AU_1e_1 = \lambda_1 e_1$, torej je

$$U_1^*AU_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \boxed{A_1} \end{bmatrix}.$$

Postopek ponovimo na matriki A_1 in zapišemo unitarno matriko U_2, da velja:

$$U_2^*AU_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & * \\ 0 & \boxed{A_2} \end{bmatrix}.$$

Postopek ponavljamo in označimo unitarne matrike:

$$W_1 = U_1, \quad W_2 = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{U_2} \end{bmatrix}, \quad W_3 = \begin{bmatrix} \boxed{I^{2\times 2}} & 0 \\ 0 & \boxed{U_3} \end{bmatrix}, \quad \dots \quad , W_{n-1} = \begin{bmatrix} \boxed{I^{(n-1)\times(n-1)}} & 0 \\ 0 & \boxed{U_n} \end{bmatrix}.$$

Potem je $(W_{n-1}^* W_{n-2}^* \dots W_1^*)A(W_1 \dots W_{n-2}W_{n-1}) = U^*AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ 0 & \lambda_2 & * & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$, kjer je matrika $U = W_1 \dots W_{n-2}W_{n-1}$ unitarna, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pa lastne vrednosti matrike A. □

Posledica 3.2.12. *Če so vse lastne vrednosti matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ realne, potem obstaja taka realna ortogonalna matrika O, da je O^TAO zgornje trikotna matrika, ki ima po diagonali razporejene lastne vrednosti matrike A.*

Dokaz. Ker so v realni matriki A vse lastne vrednosti realne, jim lahko pripišemo realne lastne vektorje, ki jih nato enako kot v pravkar dokazani trditvi zložimo v stolpce matrike O. □

Posledica 3.2.13. *Vsaka normalna matrika A je unitarno podobna diagonalni matriki.*

Dokaz. Zgoraj smo dokazali, da je vsaka kvadratna matrika A unitarno podobna zgornje trikotni matriki $T = U^*AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ 0 & \lambda_2 & * & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$. Torej moramo pokazati le še, da so koeficienti, ki ležijo nad zgornjo diagonalo matrike T, v primeru, da je A normalna, enaki 0.

Ker je A normalna, U pa unitarna matrika, je $TT^* = (U^*AU)(U^*AU)^* = U^*AUU^*A^*(U^*)^* = U^*AA^*U = U^*A^*AU$ in $T^*T = U^*A^*UU^*AU = U^*A^*AU = TT^*$, kar pomeni, da je tudi matrika T normalna.

Ker je matrika $T = \begin{bmatrix} t_{1,1} & & & \\ 0 & t_{2,2} & * & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & t_{n,n} \end{bmatrix}$ zgornje trikotna, matrika $T^* = \begin{bmatrix} \overline{t_{1,1}} & 0 & \dots & 0 \\ & \overline{t_{2,2}} & \ddots & \vdots \\ \overline{*} & & \ddots & 0 \\ & & & \overline{t_{n,n}} \end{bmatrix}$ pa spodnje trikotna in ker mora biti element matrike T^*T, ki leži na mestu (i,j) enak elementu matrike TT^*, ki leži na istem mestu (i,j), mora za elemente v matrikah T^*T in TT^* veljati:

- Elementa na mestu $(1,1)$ morata biti enaka oziroma $t_{1,1}\overline{t_{1,1}} = \overline{t_{1,1}}t_{1,1} + \sum_{j=2}^{n} t_{1,j}\overline{t_{1,j}} = \overline{t_{1,1}}t_{1,1} + \sum_{j=2}^{n} |t_{1,j}|^2$, torej za vse $j = 2, \dots, n$ velja $t_{1,j} = 0$.

- Za elementa na mestu $(2,2)$ mora prav tako veljati $t_{2,2}\overline{t_{2,2}} = \overline{t_{2,2}}t_{2,2} + \sum_{j=3}^{n} t_{2,j}\overline{t_{2,j}} = \overline{t_{2,2}}t_{2,2} + \sum_{j=3}^{n} |t_{2,j}|^2$, torej za vse $j = 3, \dots n$ velja $t_{2,j} = 0$.

$$\vdots$$

- $t_{i,i}\overline{t_{i,i}} = \overline{t_{i,i}}t_{i,i} + \sum_{j=i+1}^{n} t_{i,j}\overline{t_{i,j}} = \overline{t_{i,i}}t_{i,i} + \sum_{j=i+1}^{n} |t_{i,j}|^2$, torej za vse $j = i+1, \dots n$ velja $t_{i,j} = 0$.

Za vsak $i = 1, \dots, n$ in $j > i$ torej velja $t_{i,j} = 0$, kar pomeni, da je matrika T res diagonalna.

□

Posledica 3.2.14. *Če so vse lastne vrednosti realne normalne matrike A realne, potem obstaja taka realna ortogonalna matrika O, da je $O^T AO$ diagonalna matrika, ki ima po diagonali razporejene lastne vrednosti matrike A.*

Dokaz. Zgornja posledica sledi iz Posledic 3.2.13 in 3.2.14. □

Pokažimo še, da so lastni vektorji, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim normalne matrike vedno pravokotni drug na drugega. Pri tem si bomo pomagali s skalarnim produktom.

Definicija 3.2.15. *Naj bosta x in y vektorja, ki ju gledamo kot matriki velikosti $n \times 1$. Število y^*x imenujemo* **skalarni produkt** *vektorjev x in y. Označimo ga $\langle x, y\rangle$.*

Trditev 3.2.16. *Za vsako matriko $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in vektorja $x, y \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ velja*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle.$$

Dokaz. $\langle x, A^*y\rangle = (A^*y)^*x = y^*(A^*)^*x = \langle Ax, y\rangle$. □

Trditev 3.2.17. *Če je v lastni vektor normalne matrike A, ki pripada lastni vrednosti λ, potem je v tudi lastni vektor matrike A^*, ki pripada lastni vrednosti $\overline{\lambda}$.*

Dokaz. Pokažimo najprej, da za vsako normalno matriko velja $\langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*x, A^*x\rangle$. Po Trditvi 3.2.16 je $\langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^*Ax\rangle$, ker je matrika A normalna, pa je $\langle x, A^*Ax\rangle = \langle x, AA^*x\rangle$. Ponovno uporabimo Trditev 3.2.16 in ugotovimo, da je $\langle x, AA^*x\rangle = \langle A^*x, A^*x\rangle$. Ker je v lastni vektor matrike A pri lastni vrednosti λ, velja $Av = \lambda v$ oziroma $(A-\lambda I)v = 0$. Torej je tudi $\langle (A-\lambda I)v, (A-\lambda I)v\rangle = 0$. Ker pa je matrika $A-\lambda I$ je normalna, mora veljati $\langle (A-\lambda I)v, (A-\lambda I)\rangle v = \langle (A-\lambda I)^*v, (A-\lambda I)^*v\rangle = \langle (A^*-\overline{\lambda}I)v, (A^*-\overline{\lambda}I)v\rangle = 0$, iz česar sklepamo, da je res $A^*v = \overline{\lambda}v$. □

Posledica 3.2.18. *Lastni vektorji normalne matrike, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, so paroma ortogonalni.*

Dokaz. Naj bo A normalna matrika in naj bosta $\lambda_1 \neq \lambda_2$ njeni lastni vrednosti, katerima pripadata lastna vektorja v_1 oziroma v_2. Potem je $Av_1 = \lambda_1 v_1$ in $Av_2 = \lambda_2 v_2$. Torej je $\lambda_1\langle v_1, v_2\rangle = \langle Av_1, v_2\rangle$. Uporabimo ugotovitvi iz Trditve 3.2.16 $\langle Av_1, v_2\rangle = \langle v_1, A^*v_2\rangle$ in Trditve 3.2.17 $\langle v_1, A^*v_2\rangle = \langle v_1, \overline{\lambda_2}v_2\rangle$ in sklepamo $\lambda_1\langle v_1, v_2\rangle = \overline{\overline{\lambda_2}}\langle v_1, v_2\rangle = \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle$. Ker je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, mora biti $\langle v_1, v_2\rangle = 0$. □

Zgled 3.2.19. *Diagonalizirajmo normalno matriko* $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Ker je A *normalna, vemo, da jo lahko zapišemo kot* $A = U^{-1}DU$, *kjer je matrika* D *diagonalna, na njeni diagonali pa ležijo lastne vrednosti matrike* A. *Zato najprej poiščimo lastne vrednosti matrike* A. *Ker je* $det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)^2 + (\lambda - 4) = 0$, *za* $\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 4$, *je* $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Vemo tudi, da je matrika U *unitarna, in da lahko njene stolpce sestavimo iz normiranih lastnih vektorjev, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim matrike* A. *Vektorje poiščemo s pomočjo enačbe* $(A - \lambda I)v = 0$.

Najprej poiščimo lastna vektorja, ki pripadata lastni vrednosti -2. *Ker velja* $(A + 2I) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *sta lastna vektorja* $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *in* $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Toda ti dva vektorja nista ortogonalna. To lahko popravimo z Gram-Schmidtovim postopkom (podrobneje razloženim na straneh* $15 - 16$ *v [5]) in sicer tako, da uporabimo formulo:*

$u_1 = v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_2 = v_2 - \frac{v_2 u_1}{u_1 u_1} u_1 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Poiščimo še lastni vektor za $\lambda_3 = 4$. $(A - 4I) = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Torej je* $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ta vektor je po Posledici 3.2.18 že pravokoten na u_1 *in* u_2.

Vektorje moramo tako le še normirati $x_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2 = \frac{u_2}{|u_2|} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$, $x_3 = \frac{v_3}{|v_3|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ *in končno lahko zapišemo*

$$D = UAU^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Definicija 3.2.20. *Matriki* A *in* B *sta* **sočasno diagonalizabilni**, *če obstaja taka obrnljiva matrika* P, *da velja:*

$$A = P^{-1}D_1P \qquad in \qquad B = P^{-1}D_2P,$$

kjer sta matriki D_1 *in* D_2 *diagonalni.*

Trditev 3.2.21. *V pomoč pri dokazavanju nam bo [3]. Imejmo dve diagonalizabilni matriki*

A in B in naj velja $AB = BA$. Potem sta matriki A in B sočasno diagonalizabilni.

Dokaz. Naj bodo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ vse lastne vrednosti matrike A, z večkratnostmi $n_1, n_2, \ldots n_k$. Diagonalizirajmo matriko A tako, da bodo lastne vrednosti po diagonali razporejene na naslednji način $A = S^{-1}DS = S^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1 I^{n_1\times n_1} & & & \\ & \lambda_2 I^{n_2\times n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k I^{n_k\times n_k} \end{bmatrix}_{n\times n} S$.

Naj bo $B' = SBS^{-1} = \begin{bmatrix} b'_{1,1} & b'_{1,2} & \ldots & b'_{1,n} \\ b'_{2,1} & b'_{2,2} & \ldots & b'_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b'_{n,1} & b'_{n,2} & \ldots & b'_{n,n} \end{bmatrix}$. Ker matriki A in B komutirata, komutirata tudi matriki B' in D, saj je $B'D = SBS^{-1}SAS^{-1} = SABS^{-1} = DB'$. Torej je $\lambda_i b_{i,j} = \lambda_j b_{i,j}$. To pa pomeni, da $(\lambda_i - \lambda_j)b_{i,j} = 0$, kar nas pripelje do sklepa, da je v primeru, da $\lambda_i \neq \lambda_j$, $b_{i,j} = 0$. To pa pomeni, je matrika $B' = \begin{bmatrix} B'_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B'_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & B'_k \end{bmatrix}$ bločno diagonalna, kjer B'_i predstavlja blok matrike B glede na lastno vrednost λ_i. Vsak tak blok B'_i je velikosti $n_i \times n_i$, kjer je n_i večkratnost lastne vrednosti λ_i.

Ker je matrika B diagonalizabilna (denimo, da je $B = PMP^{-1}$, kjer M diagonalna), je $B' = SBS^{-1} = SPMP^{-1}S^{-1} = NMN^{-1}$, kjer $N = SP$. Torej je matrika B' diagonalizabilna, zato je diagonalizabilen tudi vsak blok B'_i. Naj bo sedaj T_i obrnljiva matrika, tako da je matrika $T_i^{-1}B'_iT_i$ diagonalna. Ker se vsak blok B'_i po velikosti ujema s skalarno identiteto $\lambda_i I^{n_i\times n_i}$, velja $T_i^{-1}\lambda_i I^{n_i\times n_i}T_i = \lambda_i I^{n_i\times n_i}$. Bloka $T_i^{-1}A_iT_i$ in $T_i^{-1}B_iT_i$ sta tako hkrati diagonalna.

Če označimo matriko $T = T_1 \oplus T_1 \oplus \ldots \oplus T_k$, je tako matrika $(ST)A(ST)^{-1}$, kot tudi matrika $(ST)B(ST)^{-1}$ diagonalna. □

Zgled 3.2.22. *Sočasno diagonalizirajmo komutirajoči realni simetrični matriki $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.*

V Zgledu 3.2.19 smo pokazali, da je za unitarno matriko $U = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ produkt UAU^{-1}

diagonalna matrika $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. *Torej je bločno diagonalna matrika*

$$B' = UBU^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{\sqrt{12}} & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Sedaj diagonalizirajmo vsak blok matrike B' posebej. Prvi blok je oblike $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{\sqrt{12}} \\ -\frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. *Njegovi lastni vrednosti sta $0, 2$, njima pripadajoča ortogonalna lastna vektorja pa* $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ *in* $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$. *Ker je drugi blok že diagonaliziran, bo matrika T oblike* $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *in*

$$TB'T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Matriki $(UT)A(UT)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ *in* $(UT)B(UT)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ *pa sta res diagonalni.*

V Trditvi 3.2.9 smo pokazali, da realna antisimetrična matrika A nima realnih lastnih vrednosti (razen števila 0). Pokažimo, da obstaja taka realne unitarne matrike U, da je UAU^T realna bločno diagonalna matrika.

Trditev 3.2.23. *Naj bo A realna antisimetrična matrika ter $\lambda_j = ib_j \in Sp(A)$. Potem obstaja taka realna unitarna matrika U, da velja* $UAU^T = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Ak \end{bmatrix}$, *kjer so bloki $A_1, A_2, \ldots, A_k$ oblike* $\begin{bmatrix} 0 & b_j \\ -b_j & 0 \end{bmatrix}$ *ali* $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ *in $b_j \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Za realno antisimetrično matriko smo v Trditvi 3.2.9 pokazali, da so njene lastne vrednosti bodisi število nič ali konjugirani pari čisto imaginarnih kompleksnih števil ter da sta večkratnosti lastnih števil, ki sestavljata konjugiran par, enaki.

Naj bo $x_1 = (\alpha_1 + \beta_1 i, \alpha_2 + \beta_2 i, \ldots, \alpha_n + \beta_n i)$ enotski lastni vektor matrike A, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, ter $\overline{\lambda_1}$ njena konjugirana vrednost. Potem velja $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, od koder s konjugacijo dobimo $\overline{A}\overline{x_1} = \overline{\lambda_1}\overline{x_1}$. Ker je matrika A realna je $A\overline{x_1} = \overline{\lambda_1}\overline{x_1}$, kar pomeni, da je $\overline{x_1}$ lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\overline{\lambda_1}$. Vektorja

$y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + \overline{x_1}) = \frac{1}{2}((\alpha_1 + \beta_1 i, \ldots, \alpha_n + \beta_n i) + (\alpha_1 - \beta_1 i, \ldots, \alpha_n - \beta_n i)) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ in

$\widehat{y_1} = \frac{1}{2i}(x_1 - \overline{x_1}) = \frac{1}{2i}((\alpha_1 + \beta_1 i, \ldots, \alpha_n + \beta_n i) + (-\alpha_1 + \beta_1 i, \ldots, -\alpha_n + \beta_n i)) = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$

pa sta realna.

Potem je skalarni produkt $\langle y_1, \widehat{y_1}\rangle = \langle \frac{1}{2}(x_1 + \overline{x_1}), \frac{1}{2i}(x_1 - \overline{x_1})\rangle = \frac{1}{4i}(\langle x_1, x_1\rangle - \langle x_1, \overline{x_1}\rangle + \langle \overline{x_1}, x_1\rangle - \langle \overline{x_1}, \overline{x_1}\rangle)$. Toda matrika A je normalna, zato so po Trditvi 3.2.17 njeni lastni vektorji, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim pravokotni, torej je $\langle x_1, \overline{x_1}\rangle = \langle \overline{x_1}, x_1\rangle = 0$, vektorja x_1 in $\overline{x_1}$ pa sta enotska ($\langle x_1, x_1\rangle = \langle \overline{x_1}, \overline{x_1}\rangle = 1$). Sklepamo lahko, da $\langle y_1, \widehat{y_1}\rangle = \frac{1}{4i}(1 - 0 + 0 - 1) = 0$, kar pomeni, da sta vektorja y_1 in $\widehat{y_1}$ pravokotna drug na drugega, oziroma da sta normirana vektorja $\frac{y_1}{||y_1||}, \frac{\widehat{y_1}}{||\widehat{y_1}||}$ ortogonalna.

Na povsem analogen način preoblikujemo še preostale lastne vektorje v realne, ter $(\frac{y_1}{||y_1||}, \frac{\widehat{y_1}}{||\widehat{y_1}||})$ dopolnimo do baze. Ker vsi vektorji x_i pripadajo različnim lastnim vrednostim normalne matrike A, so med seboj pravokotni. Posledično so vsi vektorji $\frac{y_i}{||y_i||}$ oziroma $\frac{\widehat{y_i}}{||\widehat{y_i}||}$ ortogonalni. Če zapišemo vse pare vektorjev $\frac{y_k}{||y_k||}, \frac{\widehat{y_k}}{||\widehat{y_k}||}$, ki pripadajo kompleksnim lastnim vrednostim v stolpce in jim dodamo še normalizirane lastne vektorje, ki pripadajo lastni vrednosti 0, dobimo realno unitarno oziroma ortogonalno matriko

$$U = \begin{bmatrix} \frac{y_1}{||y_1||} & \frac{\widehat{y_1}}{||\widehat{y_1}||} & \frac{y_2}{||y_2||} & \frac{\widehat{y_2}}{||\widehat{y_2}||} & \cdots & \frac{y_l}{||y_l||} & \frac{\widehat{y_l}}{||\widehat{y_l}||} & \frac{y_{l+1}}{||y_{l+1}||} & \frac{y_{l+2}}{||y_{l+2}||} & \cdots & \frac{y_m}{||y_m||} \end{bmatrix}.$$

Pokažimo, da je naša iskana matrika oblike $U^*AU = U^TAU$. Najprej ugotovimo, da je matrika U^TAU antisimetrična, saj je antisimetrična matrika A, torej velja $(U^TAU)^T = -U^TAU$. Sedaj poiščimo prvi stolpec produkta U^TAU, ki je enak U^TAUe_1, kjer je vektor je $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. Ker je $Ue_1 = \begin{bmatrix} \frac{y_1}{||y_1||} & \frac{\widehat{y_1}}{||\widehat{y_1}||} & \frac{y_2}{||y_2||} & \frac{\widehat{y_2}}{||\widehat{y_2}||} & \cdots & \frac{y_l}{||y_l||} & \frac{\widehat{y_l}}{||\widehat{y_l}||} & \frac{y_{l+1}}{||y_{l+1}||} & \frac{y_{l+2}}{||y_{l+2}||} & \cdots & \frac{y_m}{||y_m||} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{y_1}{||y_1||} = \frac{x_1 + \overline{x_1}}{2||y_1||}$, je $AUe_1 = A(\frac{1}{2||y_1||}(x_1 + \overline{x_1})) = \frac{1}{2||y_1||}(Ax_1 + A\overline{x_1}) = \frac{1}{2||y_1||}(\lambda_1 x_1 + \overline{\lambda_1}\overline{x_1})$, kjer $x_1 = y_1 + i\widehat{y_1}$ in $\overline{x_1} = y_1 - i\widehat{y_1}$, zato je $AUe_1 = \frac{\lambda_1}{2||y_1||}(y_1 + i\widehat{y_1}) + \frac{\overline{\lambda_1}}{2||y_1||}(y_1 - i\widehat{y_1}) = \frac{\lambda_1 + \overline{\lambda_1}}{2||y_1||} y_1 + \frac{\lambda_1 - \overline{\lambda_1}}{2||y_1||} i\widehat{y_1}$. Toda ker so lastne vrednosti antisimetrične matrike A lahko le čista imaginarna števila (oblike ib_j) ali 0, je $\lambda_1 + \overline{\lambda_1} = 0$ in $(\lambda_1 - \overline{\lambda_1})i = -2b_1$. Torej je $AUe_1 = -b_1 \frac{\widehat{y_1}}{||y_1||}$. Vemo pa, da je $||y_1|| = ||\frac{1}{2}(x_1 + \overline{x_1})|| = \frac{1}{4}(||x_1||^2 + ||\overline{x_1}||^2)$, saj sta vektorja x_1 in $\overline{x_1}$ pravokotna in lahko uporabimo Pitagorov izrek. Toda tudi $||\widehat{y_1}|| = ||\frac{1}{2i}(x_1 - \overline{x_1})|| = \frac{1}{4}(||x_1||^2 + || - \overline{x_1}||^2)$, zato je $||y_1|| = ||\widehat{y}_1||$ in $AUe_1 = -b_1\frac{\widehat{y}_1}{||\widehat{y}_1||}$. Ker je $Ue_2 = \frac{\widehat{y}_1}{||\widehat{y}_1||}$, je $U^{-1}\frac{\widehat{y}_1}{||\widehat{y}_1||} = e_2$ in zato $U^TAUe_1 = -b_1e_2$.

Na podoben način poiščemo drugi stolpec matrike U^TAU, ki je enak $U^TAUe_2 = U^TA(\frac{\widehat{y}_1}{||\widehat{y}_1||}) = U^TA(\frac{x_1-\overline{x_1}}{2i||\widehat{y}_1||}) = U^T(\frac{\lambda_1x_1-\overline{\lambda_1}\overline{x_1}}{2i||\widehat{y}_1||}) = U^T(\frac{\lambda_1(y_1+i\widehat{y}_1)-\overline{\lambda_1}(y_1-i\widehat{y}_1)}{2i||\widehat{y}_1||}) = U^T(\frac{(\lambda_1-\overline{\lambda_1})y_1+(\lambda_1+\overline{\lambda_1})i\widehat{y}_1)}{2i||\widehat{y}_1||}) = U^T(\frac{2ib_1y_1}{2i||y_1||}) = b_1e_1$.

Na povsem analogen način dobimo vse preostale bloke oblike $\begin{bmatrix} 0 & b_j \\ -b_j & 0 \end{bmatrix}$, ki pripadajo parom lastnih vrednosti oblike $\lambda_j = ib_j$ in $\overline{\lambda_j} = -ib_j$.

Poiščimo še (prvi) blok, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_{l+1} = 0$. $U^TAUe_{l+1} = U^TA(\frac{y_{l+1}}{||y_{l+1}||}) = U^T(\frac{Ay_{l+1}}{||y_{l+1}||}) = U^T(\frac{\lambda_{l+1}y_{l+1}}{||y_{l+1}||}) = \lambda_{l+1}U^T\frac{y_{l+1}}{||y_{l+1}||} = 0e_{l+1}$. Vsi bloki, ki pripadajo lastni vrednosti $\lambda = 0$ so torej oblike $[\,0\,]$. □

Zgled 3.2.24. *Zapišimo realno antisimetrično matriko* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *na način, opisan v zgornji trditvi.*

Najprej s pomočjo formul $A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda^2 + 2) = 0$ *ugotovimo, da so lastne vrednosti matrike* $i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}, 0$. *Omenjenim lastnim vrednostim pripadajoči lastni vektorji so* $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{i}{2}, \frac{i}{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{i}{2}, \frac{i}{2}), (0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Kompleksnim vektorjem priredimo realne in jih normiramo:

$y_1 = \frac{1}{2}((\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{i}{2}, \frac{i}{2}) + (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{i}{2}, \frac{i}{2})) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)$ *oz.* $\frac{y_1}{|y_1|} = (1, 0, 0)$,

$\hat{y_1} = \frac{1}{2i}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{i}{2}, \frac{i}{2}) - (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{i}{2}, \frac{i}{2}) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *oziroma* $\frac{\hat{y_1}}{|\hat{y_1}|} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ *in*

$y_2 = (0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Vektorje zložimo v stolpce in zapišemo unitarno realno matriko $U = \begin{bmatrix} \frac{y_1}{|y_1|} & \frac{\hat{y_1}}{|\hat{y_1}|} & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Produkt matrik $U^TAU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *je naša iskana matrika.*

3.3 Jordanova kanonična forma in polinomi v matrikah

Vseh matrik ne moremo diagonalizirati, obstaja pa za vsako kvadratno matriko A taka obrnljiva matrika P , da je matrika $J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J(\lambda_q) \end{bmatrix}$ bločno diagonalna. Pri tem imenujemo kvadratno matriko $J(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$, kjer λ_i ena od lastnih vrednosti matrike A, Jordanova kletka. Število kletk, ki pripadajo lastni vrednosti λ_i pa je enako velikosti lastnega podprostora za lastno vrednost λ_i oz. številu linearno neodvisnih vektorjev, ki pripadajo lastni vrednosti λ_i.

Poglejmo si še polinome v matrikah.

Definicija 3.3.1. *Imejmo polinom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$ in kvadratno matriko A. Potem je* **polinom p v matriki** A *definiran kot*

$$p(A) := a_0I + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_mA^m.$$

Naj bo Jordanova forma matrike A enaka $J = P^{-1}AP$. Opazimo, da iz $A^k = (PJP^{-1})^k = (PJP^{-1}) \cdot (PJP^{-1}) \cdot \ldots \cdot (PJP^{-1}) = PJ^kP^{-1}$ sledi, da je

$$p(A) = a_0PIP^{-1} + a_1PJP^{-1} + a_2PJ^2P^{-1} + \ldots + a_mPJ^mP^{-1} = Pp(J)P^{-1}.$$

Poleg tega vemo, da je matrika J bločno diagonalno sestavljena iz Jordanovih kletk $J = J(\lambda_1) \oplus J(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus J(\lambda_q)$, zato je $J^k = J(\lambda_1)^k \oplus J(\lambda_2)^k \oplus \ldots \oplus J(\lambda_q)^k$ in

$$p(J) = p(J(\lambda_1)) \oplus p(J(\lambda_2)) \oplus \ldots \oplus p(J(\lambda_q)).$$

Sedaj lahko definiramo še racionalne funkcije v matrikah.

Definicija 3.3.2. *Imejmo kvadratno matriko A ter polinoma*

$$q(A) = a_0 + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_mA^m \qquad in \qquad r(A) = b_0 + b_1A + b_2A^2 + \ldots + b_kA^k.$$

Potem je **racionalna funkcija** f **v matriki** A *definiran kot*

$$f(A) := \frac{q(A)}{r(A)} = q(A)(r(A))^{-1}.$$

Opomba 3.3.3. *Racionalna funkcija je definirana le za kvadratne matrike, za katere je* $r(A)$ *obrnljiva.*

Lema 3.3.4. *Racionalna funkcija* $f(A) = \frac{q(A)}{r(A)}$ *je definirana za tako kvadratno matriko* A*, za katero je* $r(\lambda) \neq 0$ *za vsako* $\lambda \in Sp(A)$*.*

Dokaz. Imejmo kvadratno matriko A velikosti $n \times n$ in naj bo njena Jordanova forma enaka $A = PJP^{-1}$, potem je

$$r(A) = P(r(J_1) \oplus r(J_2) \oplus \ldots \oplus r(J_k))P^{-1},$$

kjer so $J_1, J_2, \ldots, J_k$ Jordanove kletke matrike A. Toda po [?] (na strani 4) je za vsako Jordanovo kletko $J(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$ matrika $r(J(\lambda_i)) = \begin{bmatrix} r(\lambda_i) & \frac{r'(\lambda_i)}{1!} & \frac{r''(\lambda_i)}{2!} & \frac{r'''(\lambda_i)}{3!} & \cdots & \frac{r^{n_j-1}(\lambda_i)}{(n-1)!} \\ & r(\lambda_i) & \frac{r'(\lambda_i)}{1!} & \frac{r''(\lambda_i)}{2!} & \cdots & \frac{r^{n_j-2}(\lambda_i)}{(n-2)!} \\ & & r(\lambda_i) & \frac{r'(\lambda_i)}{1!} & \cdots & \frac{r^{n-3}(\lambda_i)}{(n-3)!} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & r(\lambda_i) & \frac{r'(\lambda_i)}{1!} \\ & & & & & r(\lambda_i) \end{bmatrix}$ zgornje trikotna.

Vemo, da je matrika obrnljiva natanko tedaj, ko je njena determinanta različna od nič. Ker je $det(r(J(\lambda_i)) = r(\lambda_i)^n$, ugotovimo, da je blok $r(J(\lambda_i))$ obrnljiv za vse $r(\lambda_i) \neq 0$. Bločna matrika $r(A)$ pa je obrnljiva natanko tedaj, ko so obrnljivi vsi njeni bloki. $\square$

Lema 3.3.5. *Če je* $f(A)$ *racionalna funkcija v matriki* A*, potem obstaja tak polinom, da je* $f(A) = p(A)$*.*

Dokaz. Imejmo racionalno funkcijo v matriki A

$$f(A) = \frac{q(A)}{r(A)} = q(A)(r(A))^{-1}.$$

Naj bo $B = r(A)$. Potem je za neke koeficiente $q_0, q_1, \ldots q_n$ in $r_0, r_1, \ldots r_n$:

$f(A) = (q_0 + q_1 A + q_2 A^2 + qA^3 + \ldots + q_n A^n)(r_0 + r_1 A + r_2 A^2 + rA^3 + \ldots + r_n A^n)^{-1} = q(A)B^{-1}$.

Pokažimo, da je za nek polinom $s(\lambda)$ matrika $B^{-1} = s(B)$.

Naj bo $m_B(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \ldots + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \lambda^m$ minimalni polinom matrike B. Potem je

$$0 = a_0 I + a_1 B + a_2 B^2 + a_3 B^3 + \ldots + a_{m-1} B^{m-1} + B^m. \tag{2}$$

Ker je matrika B obrnljiva, mora biti $a_0 \neq 0$, saj bi sicer po množenju enakosti (2) z matriko B^{-1} ugotovili, da je minimalni polinom matrike B enak $a_1 + a_2\lambda + a_3\lambda^2 + \ldots + a_{m-1}\lambda^{m-2} + \lambda^{m-1}$.

Tako dobimo po deljenju enakosti (2) z a_0:

$0 = I + \frac{a_1}{a_0}B + \frac{a_2}{a_0}B^2 + \frac{a_3}{a_0}B^3 + \ldots + \frac{a_{m-1}}{a_0}B^{m-1} + \frac{1}{a_0}B^m$, kar lahko preoblikujemo v

$I = B(-\frac{a_1}{a_0} - \frac{a_2}{a_0}B - \frac{a_3}{a_0}B^2 - \ldots - \frac{a_{m-1}}{a_0}B^{m-2} - \frac{1}{a_0}B^{m-1})$, oziroma

$BB^{-1} = B(-\frac{a_1}{a_0} - \frac{a_2}{a_0}B - \frac{a_3}{a_0}B^2 - \ldots - \frac{a_{m-1}}{a_0}B^{m-2} - \frac{1}{a_0}B^{m-1})$, iz česar je razvidno, da je $s(B) = B^{-1}$, kjer je polinom $s(\lambda) = -\frac{a_1}{a_0} - \frac{a_2}{a_0}\lambda - \frac{a_3}{a_0}\lambda^2 - \ldots - \frac{a_{m-1}}{a_0}\lambda^{m-2} - \frac{1}{a_0}\lambda^{m-1}$.

Ker obstaja tak polinom, da je $s(B) = B^{-1} = (r(A))^{-1}$ in ker je $B = r(A)$, sklepamo, da obstaja tak polinom $p_1(\lambda) = p(r(\lambda))$, da je $p_1(A) = B$.

Toda matrika $B = r(A)$, torej obstaja za matriko $(r(A))^{-1}$ tak polinom $p_1(\lambda)$, da je $p_1(A) = (r(A))^{-1}$. Posledično obstaja tudi tak polinom $p(\lambda)$, da je $p(A) = f(A) = q(A)(r(A))^{-1}$. □

Trditev 3.3.6. *Naj bosta $A = P_1 J P_1^{-1}$ in $B = P_2 \widehat{J} P_2^{-1}$ kvadratni kompleksni matriki. Če obstajata taka polinoma f in g, da je $f(A) = B$ in $g(B) = A$, potem se število in velikosti kletk v Jordanovi formi matrike A ujema s številom in velikostjo kletk v Jordanovi formi matrike B.*

Dokaz. Ker je $A = P_1 J P_1^{-1}$, kjer je matrika J bločno diagonalno sestavljena iz Jordanovih kletk $J(\lambda_1) \oplus J(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus J(\lambda_k)$, je $f(J) = f(J(\lambda_1)) \oplus f(J(\lambda_2)) \oplus \ldots \oplus f(J(\lambda_k))$. Oglejmo si torej delovanje polinoma f na eni od kletk Jordanove forme matrike A.

Naj bo $J(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$ ena od Jordanovih kletk matrike J, ki pripada lastni vrednosti λ_i in je dimenzije n_i. Potem ima tudi matrika $T = f\left(\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}\right) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & \alpha_1 & \ldots & \alpha_m \\ & f(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \alpha_1 \\ & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$ (za neka števila $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$) svojo Jordanovo formo $T = P_2 \bar{J} P_2^{-1} = P_2(\bar{J}(\mu_1) \oplus \bar{J}(\mu_2) \oplus \ldots \oplus \bar{J}(\mu_t) P_2^{-1}$, kjer so μ_i lastne vrednosti matrike T. Ker je velikost matrike T enaka $n_i \times n_i$, so velikosti kletk $\bar{J}(\mu_1), \ldots, \bar{J}(\mu_t)$ največ $n_i \times n_i$.

Po drugi strani pa za polinom g velja $g(B) = A$. Torej dobimo poljubno Jordanovo kletko $J(\lambda_i)$ tako, da preslikamo ustrezen blok matrike B (velikosti $n_i \times n_i$), ki ima seveda svojo Jordanovo formo $\widehat{J}(\mu_1) \oplus \widehat{J}(\mu_2) \oplus \widehat{J}(\mu_t)$. Sklepamo, da mora veljati: $J(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i} = P_2 g\left(\begin{bmatrix} \widehat{J}(\mu_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \widehat{J}(\mu_t) \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}\right) P_2^{-1} = P_2\left(\begin{bmatrix} g(\bar{J}(\mu_1)) & & \\ & \ddots & \\ & & g(\bar{J}(\mu_t)) \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}\right) P_2^{-1}$.

Ker nam da vsaka Jordanova kletka natanko en lastni vektor (do skalarne večkratnosti natančno), sklepamo, da ima matrika na desni strani enačaja natanko t lastnih vektorjev. Toda ta matrika mora imeti en sam lastni vektor, saj je matrika na levi strani enačaja sestavljena zgolj iz ene kletke. Torej je $t = 1$ in zato poljubni Jordanovi kletki matrike J torej pripada kletka enake velikosti v $\widehat{J}$. $\square$

Posledica 3.3.7. *Če obstajata za kvadratni matriki A in B taki racionalni funkciji $f_1(\lambda)$ in $f_2(\lambda)$, da je $f_1(A) = B$ in $f_2(B) = A$, potem se število in velikosti kletk v Jordanovi formi matrike A ujema s številom in velikostjo kletk v Jordanovi formi matrike B.*

Dokaz. Ker po Lemi 3.3.5 obstajata taka polinoma $p_1(\lambda)$ in $p_2(\lambda)$, da je $p_1(A) = B$ in $p_2(B) = A$, sledi dokaz posledice neposredno iz Trditve 3.3.6. $\square$

Lema 3.3.8. *Naj bo A obrnljiva kompleksna matrika. Potem obstaja tak polinom $p(x)$, da za matriko $B = p(A)$ velja $B^2 = A$.*

Dokaz. Če je $A = PJP^{-1}$ Jordanova forma obrnljive matrike A, je $p(A) = Pp(J)P^{-1}$. Pokažimo, da za obrnljivo matriko A obstaja tak polinom p, da je

$$p(A)p(A) = Pp(J)P^{-1}Pp(J)P^{-1} = Pp^2(J)P^{-1} = PJP^{-1}$$

oziroma $p^2(J) = J$. Dokaz razdelimo na tri dele in zgolj zaradi bolj preglednega zapisa v nadaljevanju uporabimo Jordanovo formo $T = P^{-1}AP$, kjer je matrika T bločno diagonalno sestavljena iz Jordanovih kletk, ki pripadajo matriki A.

1. Najprej si oglejmo matriko $T = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$, ki jo sestavlja le ena Jordanova kletka.

   Pokažimo, da potem zgornjetrikotna matrika $\sqrt{T} = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \frac{f'''(\lambda)}{3!} & \cdots & \frac{f^{n-1}(\lambda)}{(n-1)!} \\ & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{n-2}(\lambda)}{(n-2)!} \\ & & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \cdots & \frac{f^{n-3}(\lambda)}{(n-3)!} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ & & & & & f(\lambda) \end{bmatrix}$;

   kjer $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ (za vse $\lambda \neq 0$), zadošča enakosti $(\sqrt{T})^2 = T$.

   Ugotovimo, da pri kvadriranju zgornje matrike dobimo:

   - po diagonali vrednost $f(\lambda)f(\lambda) = \lambda$

   - na prvi superdiagonali $f(\lambda)f'(\lambda) + f'(\lambda)f(\lambda) = (f^2(\lambda))' = \lambda' = 1$

   - na drugi superdiagonali $f(\lambda)\frac{f''(\lambda)}{2!} + (f'(\lambda))^2 + \frac{f''(\lambda)}{2!}f(\lambda) = \frac{(f^2(\lambda))''}{2!} = \frac{(\lambda)''}{2!} = 0$

   - na k-ti superdiagonali tako dobimo $f(\lambda)\frac{f^{(k)}(\lambda)}{(k)!} + f'(\lambda)\frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} + \ldots + \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!}f'(\lambda) + \frac{f^{(k)}(\lambda)}{(k)!}f(\lambda) = \sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}\frac{1}{(k)!}f(\lambda)^{(n)}f(\lambda)^{(k-n)}$, kar je po Leibnizevi formuli enako $\frac{(2f(\lambda)f'(\lambda))^{(k-1)}}{(k)!} = \frac{(f^2(\lambda))^{(k)}}{(k)!}$ oziroma $\frac{\lambda^{(k)}}{(k)!} = \frac{1^{(k-1)}}{(k)!} = 0$.

   Poiščimo še polinom $p(T)$.

   - Naj bo $T = [\,\lambda\,] \in \mathbb{C}^{1\times1}$. Potem je $\sqrt{T} = [\,\sqrt{\lambda}\,]$. Ker velja $\sqrt{T} = \sqrt{\lambda}I$, bo iskani polinom $p(T)$ konstanten polinom $p(x) = \lambda^{\frac{1}{2}} = f(\lambda)$.

   - Naj bo $T = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{C}^{2\times2}$. Potem je $\sqrt{T} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda} & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{bmatrix}$.

     Če enačbi $\frac{(T-\lambda I)}{2\sqrt{\lambda}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ na obeh straneh prištejemo $I\sqrt{\lambda}$, dobimo $I\sqrt{\lambda} +$

$\frac{(T-\lambda I)}{2\sqrt{\lambda}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda} & \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{bmatrix} = \sqrt{T}$. Torej je $p(x) = \lambda^{\frac{1}{2}} + \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{2}(x-\lambda) = f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!}(x-\lambda)$.

- V primeru, da je $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$, je tako ustrezen polinom oblike $p(x) = f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!}(x-\lambda) + \frac{f''(\lambda)}{2!}(x-\lambda)^2 + \ldots + \frac{f^{n-1}(\lambda)}{(n-1)!}(x-\lambda)^{n-1}$.

2. Sedaj dovolimo, da matriko sestavlja več Jordanovih kletk, predpostavimo pa, da ima matrika le eno lastno vrednost. Torej je $T = \begin{bmatrix} J(\lambda)^{n_1\times n_1} & & & \\ & J(\lambda)^{n_2\times n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda)^{n_k\times n_k} \end{bmatrix}_{n\times n}$, kjer vse Jordanove kletke pripadajo lastni vrednosti λ in so oblike $J(\lambda)^{n_i\times n_i} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$. Vzemimo polinom $p(T) = f(\lambda)I + \frac{f'(\lambda)}{1!}(T-\lambda I) + \frac{f''(\lambda)}{2!}(T-\lambda I)^2 + \ldots + \frac{f^{n-1}(\lambda)}{(n-1)!}(T-\lambda I)^{n-1}$ in poglejmo, koliko je $p(J(\lambda)^{n_i\times n_i})$. Prvih n_i členov polinoma nam da ravno kletko $\sqrt{T_i}$, preostali členi pa so enaki nič, saj je matrika $(T_i-\lambda)^{n_i} = [\,0\,]_{n_i\times n_i}$. Ker ugotovitev velja za vse kletke, ki sestavljajo matriko T, bo iskani polinom oblike $p(x) = f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!}(x-\lambda) + \frac{f''(\lambda)}{2!}(x-\lambda)^2 + \ldots + \frac{f^{n_m-1}(\lambda)}{(n_m-1)!}(x-\lambda)^{n_m-1}$, kjer je n_m velikost največje kletke v matriki.

3. Na koncu preučimo še matriko, ki je sestavljena iz Jordanovih kletk, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Matrika $T = \begin{bmatrix} B_1(\alpha_1) & & & \\ & B_2(\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_m(\alpha_m) \end{bmatrix}$ je torej sestavljena iz blokov $B_i = \begin{bmatrix} J_{i,1}(\alpha_i) & & & \\ & J_{i,2}(\alpha_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{i,k}(\alpha_i) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k_i\times k_i}$, kjer označimo z $J_{i,1}(\alpha_i), \ldots J_{i,k}(\alpha_i)$ vse kletke, ki pripadajo lastni vrednosti α_i.

- Najprej poiščimo tak polinom $p_1(x)$, da bo imela matrika $p_1(T)$ na mestu prvega bloka same ničle. V ta namen matriki odštejemo s prvo lastno vrednostjo pomnoženo identiteto $(T-\alpha_1 I)$, kar vpliva le na glavno diagonalo, kjer so v i-tem bloku elementi enaki $\alpha_i - \alpha_1$. Ker imamo sedaj na mestu bloka B_1 ničelno glavno diagonalo, ima $p_1(T) = (T-\alpha_1 I)^{k_1}$ na mestu prvega bloka same ničle, ostali bloki pa so zgornje trikotni in imajo na glavni diagonali elemente enake $(\alpha_i - \alpha_1)^{k_1}$.

Na podoben način poiščemo še preostalih $(m-1)$ polinomov, tako, da ima matrika $p_j(T) = (T - \alpha_j)^{k_j}$ na mestu j-tega bloka same ničle, na mestu bloka B_i, kjer $i \neq j$ pa dobimo zgornje trikotne matrike, ki imajo na glavni diagonali vrednosti $(\alpha_i - \alpha_j)^{k_j}$.

- Potem ima matrika $r_1(T) = (I + p_1(T))p_2(T)p_3(T)\dots p_m(T)$ na mestih blokov $B_j; j \in \{2, 3, \dots, m\}$ same ničle, na mestu bloka B_1 pa imamo zgornje trikotne bloke, ki imajo elemente na glavni diagonali enake $\tau_1 = (\alpha_1 - \alpha_2)^{k_2}(\alpha_1 - \alpha_3)^{k_3}\dots(\alpha_1 - \alpha_m)^{k_m}$.

  Ker za $i \neq j$ velja $\alpha_i \neq \alpha_j$, je $\tau_1 \neq 0$, torej je matrika $r_1(T)\frac{I}{\tau_1}$ na mestu prvega bloka enaka $\begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_r \\ & 1 & \gamma_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \gamma_2 \\ & & & 1 & \gamma_1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$, za neka števila γ_i. Posledično ima matrika $(r_1(T)\frac{I}{\tau_1} - I)^{2k_1}$ na mestu bloka B_1 same ničle, na mestih ostalih blokov pa imamo na diagonali elemente -1. Tako ima matrika $s_1 = ((r_1(T)\frac{I}{\tau_1} - I)^{2k_1} - I)^2 = \begin{bmatrix} \boxed{I^{k_1 \times k_1}} & & & \\ & \boxed{0} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{0} \end{bmatrix}$ na mestu bloka B_1 po diagonali same 1, na mestih ostalih blokov pa imamo same ničle.

- Posledično je $s_1(T) \cdot T = \begin{bmatrix} \boxed{I} & & & \\ & \boxed{0} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{B_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{B_{m-1}} & \\ & & & \boxed{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{B_1} & & & \\ & \boxed{0} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{0} \end{bmatrix}$.

  Vemo, pa da lahko zapišemo tak polinom $q_1(x)$, da bo $q_1(B_1) = \sqrt{B_1}$, zato je

  $q_1(T) = \begin{bmatrix} \boxed{\sqrt{B_1}} & & & \\ & \boxed{q_1(B_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{q_1(B_m)} \end{bmatrix}$ in končno $f_1(T) = q_1(T)s_1(T) =$

  $$\begin{bmatrix} \boxed{\sqrt{B_1}} & & & \\ & \boxed{q_1(B_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{q_1(B_m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{I} & & & \\ & \boxed{0} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\sqrt{B_1}} & & & \\ & \boxed{0} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{0} \end{bmatrix}.$$

  Na povsem analogen način ustvarimo matrike

$$f_2(T) = \begin{bmatrix} \boxed{0} & & & & \\ & \boxed{\sqrt{B_2}} & & & \\ & & \boxed{0} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{0} \end{bmatrix}, \ldots, f_m(T) = \begin{bmatrix} \boxed{0} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{0} & \\ & & & \boxed{\sqrt{B_m}} \end{bmatrix}.$$

Potem za $f(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} f_i(\lambda)$ velja, da je f polinom in $f(B) = \begin{bmatrix} \boxed{\sqrt{B_1}} & & & \\ & \boxed{\sqrt{B_2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\sqrt{B_m}} \end{bmatrix}$.

$\square$

3.4 Faktorizacija kompleksnih matrik posebnih tipov

Podpoglavje začnimo z definicijo eksponentne funkcije matrike ter pozitivno definitne matrike, nato pa si oglejmo faktorizaciji kompleksne ortogonalne in unitarne matrike.

Definicija 3.4.1. *Naj bo A kvadratna kompleksna matrika. Potem je* **eksponentna funkcija matrike** A *definirana kot*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

S pomočjo [4] pokažimo, da je eksponentna funkcija matrike dobro definiran oziroma, da vsota

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots$$

konvergira za vsako kvadratno matriko $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Vzemimo tako število m, da bo za vse $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ veljalo: $|a_{i,j}| \leq m$. Potem trdimo, da bo za (i, j)-te element matrike A^l, ki ga označimo $a_{i,j}^{(l)}$ veljalo:

$$|a_{i,j}^{(l)}| \leq n^{l-1} m^l.$$

Dokaz naredimo s popolno indukcijo:

- Preverimo za $l = 1$. Ker je število m definirano kot $|a_{i,j}| \leq m$, je očitno $|a_{i,j}^{(1)}| \leq n^0 m^1$.

- Sedaj predpostavimo, da $|a_{i,j}^{(t)}| \leq n^{t-1} m^t$ in pokažimo, da potem velja tudi $|a_{i,j}^{(t+1)}| \leq n^t m^{t+1}$. Ker je $|a_{i,j}^{(t+1)}| = |\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^{(t)} a_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}^{(t)}||a_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^{n} (n^{t-1} m^t) m = n(n^{t-1} m^{t+1}) = n^t m^{t+1}$.

Sedaj vzemimo matriko $S = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots$, katere (i, j)-ti element je enak $s_{i,j} = b + \frac{a_{i,j}^{(1)}}{1!} + \frac{a_{i,j}^{(2)}}{2!} + \frac{a_{i,j}^{(3)}}{3!} + \ldots$ kjer $b \in \{0, 1\}$ in pokažimo, da je vrsta $b + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_{i,j}^{(l)}}{l!}$ absolutno konvergentna.

$|s_{i,j}| \leq 1 + \frac{m}{1!} + \frac{nm^2}{2!} + \frac{n^2 m^3}{3!} + \ldots + \frac{n^{l-1} m^l}{l!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k n^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mn)^k}{k! n} = \frac{e^{mn}}{n} < \infty.$

Ker pa vsaka absolutno konvergentna vrsta konvergira, vidimo, da vsak element $s_{i,j} = b + \frac{a_{i,j}^{(1)}}{1!} + \frac{a_{i,j}^{(2)}}{2!} + \frac{a_{i,j}^{(3)}}{3!} + \ldots$ matrike S, res konvergira. S tem smo pokazali, da eksponentna funkcija matrike konvergira za vsako kvadratno matriko.

Oglejmo si še nekaj lastnosti, ki veljajo za eksponentno funkcijo matrike.

Lema 3.4.2. *Za eksponent e^A matrike $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ veljajo naslednje lastnosti.*

1. *Za komutirajoči matriki $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je $e^{A+B} = e^A e^B$.*
2. *Če je $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ obrnljiva matrike, je $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$.*
3. *Če je $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_r$, je $e^A = e^{A_1} \oplus \ldots \oplus e^{A_r}$*
4. $(e^A)^T = e^{A^T}$ *in* $(e^A)^* = e^{A^*}$
5. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

Dokaz.

1. Pri dokazu si pomagamo z [8]. Ker je $e^A e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k B^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = e^{A+B}$, saj je binomska formula za komutirajoči matriki A in B enaka $(A+B)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$.

2. Direktni izračun nam da $e^{P^{-1}AP} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(P^{-1}AP)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} P^{-1} \frac{A^k}{k!} P$, kar lahko preoblikujemo v $P^{-1}e^A P$, saj je množenje z matriko P zvezna preslikava.

3. Ker je $(A_1 \oplus \ldots \oplus A_r)^k = A_1^k \oplus \ldots \oplus A_r^k$, je tudi $e^A = e^{A_1} \oplus \ldots \oplus e^{A_r}$.

4. Ker velja $(e^A)^T = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!})^T = (A^0 + A^1 + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots)^T$ in ker je transponiranje zvezna funkcija, lahko zapišemo $(e^A)^T = (A^0)^T + (A^1)^T + (\frac{1}{2!}A^2)^T + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^T)^n}{n!} = e^{A^T}$. Podobno dokažemo enakost $(e^A)^* = e^{A^*}$. Velja namreč $e^{A^*} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^*)^n}{n!}$. Po drugi strani pa je $(e^A)^* = (A^0 + A^1 + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots)^* = (\overline{A^0} + \overline{A^1} + \frac{1}{2!}\overline{A^2} + \ldots)^T$, kar lahko

zaradi zveznosti konjugiranja in zgoraj dokazanega dejstva $(e^A)^T = e^{A^T}$ prevedemo v $(\overline{A^0} + \overline{A^1} + \frac{1}{2!}\overline{A^2} + \ldots)^T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^*)^n}{n!}$.

5. Ker je $A(-A) = -AA$, je $I = e^0 = e^{A-A} = e^A e^{-A}$, torej je e^{-A} res inverz matrike e^A.

$\square$

Zapišimo še eksponentno funkcijo Jordanove kletke.

Trditev 3.4.3. *Naj bo $J(\lambda)$ Jordanova kletka velikosti $n \times n$. Potem je*

$$e^{J(\lambda)} = e^{\lambda} H, \qquad kjerje \qquad H = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ & \frac{1}{0!} & \frac{1}{1!} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \frac{1}{1!} \\ & & & & \frac{1}{0!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Zapišimo matriko $J(\lambda) = \lambda I + J(0)$ in ugotovimo, da matriki λI in $J(0)$ komutirata. Torej je $e^A = e^{\lambda I} e^{J(0)}$. Vemo, da je $e^{\lambda I} = e^{\lambda} I$ in da je matrika $J(0)$ nilpotent s stopnjo nilpotentnosti n, saj je $J(0)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $J(0)^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.
Torej je $e^{J(0)} = I + J(0) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} J(0)^{n-1} = H$ in $e^A = e^{\lambda} H$. $\square$

Trditev 3.4.4. *Jordanova kanonična forma matrike $H^{n\times n}$ (iz Trditve 3.4.3) je enaka $J(1)^{n\times n}$.*

Dokaz. Ker je $p_H(x) = det(xI - H) = det\left(\begin{bmatrix} (x-1) & -\frac{1}{1!} & -\frac{1}{2!} & \cdots & -\frac{1}{(n-1)!} \\ & (x-1) & -\frac{1}{1!} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & -\frac{1}{1!} \\ & & & & (x-1) \end{bmatrix}\right) = (x-1)^n$, je 1 edina lastna vrednost matrike H. Potem je minimalni polinom $m_H(x) = (x-1)^k$, kjer je $k \leq n$ in $m_H(H) = (H-I)^k = 0$. Toda $(H-I)^n = 0$, iz česar sklepamo, da je $k = n$ in $m_H(x) = p_H(x) = (x-1)^n$. Kar dokazuje, da je Jordanova forma matrike H res enaka kletki $J(1)$. $\square$

Posledica 3.4.5. *Jordanova forma matrike $e^{\lambda}H$ (iz Trditve 3.4.3) je enaka* $\begin{bmatrix} e^{\lambda} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & e^{\lambda} & 1 \\ & & & e^{\lambda} \end{bmatrix}$.

Dokaz. Po Trditvi 3.4.4 je Jordanova forma matrike H enaka $H = PJ(1)P^{-1}$. Torej je $e^\lambda H = e^\lambda(PJ(1)P^{-1}) = P(e^\lambda J(1))P^{-1}$. Označimo matriko $M = e^\lambda J(1) = \begin{bmatrix} e^\lambda & e^\lambda & & & \\ & e^\lambda & e^\lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & e^\lambda \\ & & & & e^\lambda \end{bmatrix}$. Potem podobno kot v dokazu prejšnje trditve ugotovimo, da je $m_M(x) = p_M(x) = (x - e^\lambda)^n$. $\square$

Sedaj pa si oglejmo nekaj zgledov eksponentne funkcije matrike.

Zgled 3.4.6. *Poiščimo eksponentno funkcijo matrike* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. *Ker je* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$, *lahko po 2. točki Leme 3.4 zapišemo* $e^{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & e^2-e \\ 0 & e^2 \end{bmatrix}$.

Zgled 3.4.7. *Poiščimo še eksponentno funkcijo matrike* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Ker je $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$, *bo* $e^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Poleg tega je* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *vsota dveh komutirajočih matrik* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *zato uporabimo 1. točki Leme 3.4 in zapišemo* $\exp \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \exp \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \exp \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} (\frac{1}{0!} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{1!} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 + \ldots + 0) = \begin{bmatrix} e & e & \frac{e}{2} \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}$.
Sedaj lahko končno zapišemo $e^A = e \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & e & -\frac{e}{2} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}$.

Zgled 3.4.8. *Poiščimo* e^A *antisimetrične matrike* $A = i \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$.

$e^A = A^0 + A^1 + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots$

$e^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -9 & 0 \end{bmatrix} + \frac{i^2}{2!} \begin{bmatrix} -9^2 & 0 \\ 0 & -9^2 \end{bmatrix} + \frac{i^3}{3!} \begin{bmatrix} 0 & -9^3 \\ 9^3 & 0 \end{bmatrix} + \frac{i^4}{4!} \begin{bmatrix} 9^4 & 0 \\ 0 & 9^4 \end{bmatrix} + \frac{i^5}{5!} \begin{bmatrix} 0 & 9^5 \\ -9^5 & 0 \end{bmatrix} + \ldots$

Če matriko zapišemo kot $e^A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$, *ugotovimo, da velja:*

$a_{1,1} = a_{2,2} = 1 + \frac{9^2}{2!} + \frac{9^4}{4!} + + \frac{9^6}{6!} \ldots = ch(9)$

$a_{1,2} = -a_{2,1} = i(\frac{9}{1!} + \frac{9^3}{3!} + \frac{9^5}{5!} + \frac{9^7}{7!} + \ldots) = i \cdot sh(9)$, *torej je*

$e^A = \begin{bmatrix} ch(9) & i{\cdot}sh(9) \\ -i{\cdot}sh(9) & ch(9) \end{bmatrix}$.

Zgled 3.4.9. *Poiščimo še* e^B *simetrične matrike* $B = i \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

$e^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \frac{i^2}{2!} \begin{bmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix} + \frac{i^3}{3!} \begin{bmatrix} 0 & 3^3 \\ 3^3 & 0 \end{bmatrix} + \frac{i^4}{4!} \begin{bmatrix} 3^4 & 0 \\ 0 & 3^4 \end{bmatrix} + \frac{i^5}{5!} \begin{bmatrix} 0 & 3^5 \\ 3^5 & 0 \end{bmatrix} + \ldots = \begin{bmatrix} cos(3) & i{\cdot}sin(3) \\ i{\cdot}sin(3) & cos(3) \end{bmatrix}$.

Definicija 3.4.10. *Matrika* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *je* **pozitivno definitna**, *če je* $v^*Av > 0$ *za vsak neničeln* $v \in \mathbb{C}^{n\times 1}$.

Zgled 3.4.11. *Matrika* $A = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ *je pozitivno definitna, saj za vsak neničeln vektor* $v = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$ *velja* $x^*Ax = \left[\begin{smallmatrix} \overline{x} & \overline{y} \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] = 3x\overline{x} + \overline{y}y > 0$, *saj* $x\overline{x}, y\overline{y} \geq 0$ *in* $x\overline{x}, y\overline{y}$ *nista hkrati enaka* 0.

Trditev 3.4.12. *Če je A pozitivno definitna hermitska matrika, so vse njene lastne vrednosti pozitivne.*

Dokaz. Naj bo A pozitivno definitna hermitska matrika, v pa njen lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti λ. Potem je $0 < v^*Av = v^*\lambda v = \lambda(v^*v)$. Ker je produkt $(v^*v) > 0$, mora veljati tudi $\lambda > 0$. □

Poglejmo še definicijo hiperboličnega kosinusa in hiperboličnega sinusa.

Definicija 3.4.13. **Hiperbolični kosinus**, *ki ga označimo ch in* **hiperbolični sinus** *(sh) sta definirana kot:*

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Trditev 3.4.14. *Med hiperboličnim kosinusom in hiperboličnim sinusom velja naslednja zveze:*

$$ch^2(x) - sh^2(x) = 1.$$

Dokaz. $ch^2(x) - sh^2(x) = (\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2 - (\frac{e^x-e^{-x}}{2})^2 = \frac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$ □

Sedaj se lahko končno posvetimo faktorizaciji kompleksnih matrik posebnih tipov.

Lema 3.4.15. *1. Če je matrika G sočasno hermitska in ortogonalna, jo lahko zapišemo v obliki*

$$G = Ee^{iK},$$

kjer je E realna simetrična involucijska matrika ($E^2 = I$), K pa realna antisimetrična matrika.

2. *V primeru, da je poleg lastnosti iz prve točke G tudi pozitivno definitna hermitska matrika, jo lahko zapišemo v obliki*

$$G = e^{iK}.$$

Dokaz. 1. Naj bo matrika G sočasno hermitska in ortogonalna. Dokažimo, da jo lahko v tem primeru zapišemo v obliki $G = Ee^{iK}$. V ta namen zapišimo matriko G kot vsoto $G = S + iT$, kjer sta matriki S in T realni.

Ker je matrika G hermitska, velja $G = G^*$ oz. če konjugiramo obe strani $\overline{G} = G^T$. V zadnjo enačbo vstavimo izraza $\overline{G} = S - iT$ in $G^T = S^T + iT^T$ in dobimo $S - iT = S^T + iT^T$. Ko preoblikujemo enačbo, dobimo izraz $S - S^T - i(T + T^T) = 0$, ki pa je rešljiv le v primeru, da $S = S^T, T = -T^T$ oz. le v primeru, da je matrika S simetrična, T pa antisimetrična.

Vemo, da za poljubno obrnljivo matriko A velja $AA^{-1} = I$, torej je $GG^{-1} = I$. Ker je matrika G sočasno ortogonalna ($G^{-1} = G^T$) in hermitska ($G^T = \overline{G}$), lahko izraz preoblikujemo v $G\overline{G} = (S + iT)(S - iT) = S^2 + T^2 + i(TS - ST) = I$, kar je res natanko tedaj, ko $S^2 + T^2 = I$ in $ST = TS$.

Ker je S realna simetrična matrika, so po Trditvi 3.2.8 vse njene lastne vrednosti $s_1, s_2, \ldots, s_n$ realne. Poleg tega je matrika S tudi realna normalna, torej obstaja po Posledici 3.2.14 taka realna ortogonalna matrika U, da bo

$$\hat{S} = U^{-1}SU = \begin{bmatrix} s_1 I^{n_1\times n_1} & & & \\ & s_2 I^{n_2\times n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_k I^{n_k\times n_k} \end{bmatrix}.$$

Potem je matrika $\hat{T} = U^{-1}TU$ še vedno realna antisimetrična, saj za ortogonalno matriko U in antisimetrično T velja $\hat{T}^T = U^T T^T (U^T)^{-1} = -U^{-1}TU = -\hat{T}$.

Poleg tega je $\hat{T}\hat{S} = U^{-1}TUU^{-1}SU = U^{-1}TSU = U^{-1}SU^{-1}UTU = \hat{S}\hat{T}$, saj sta matriki S in T komutirajoči. Zato lahko podobno kot v dokazu Trditve 3.2.21 ugotovimo, da je matrika $\hat{T} = \begin{bmatrix} \hat{T}_1 & & & \\ & \hat{T}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \hat{T}_k \end{bmatrix}$ bločno diagonalna. Ker pa je matrika $\hat{T}$ realna antisimetrična, mora biti tudi vsak blok $\hat{T}_j$ realno antisimetričen. Torej obstaja po Trditvi 3.2.23 za vsak blok $\hat{T}_j$ taka realna unitarna matrika V_j, da je

$$\tilde{T}_j = V_j\hat{T}_jV_j^{-1} = \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} 0 & t_{j,1} \\ -t_{j,1} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & t_{j,2} \\ -t_{j,2} & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & t_{j,q} \\ -t_{j,q} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{j,2q+1}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{j,n_j}\right), \quad (3)$$

kjer pripadajo bloki $\begin{bmatrix} 0 & t_{j,l} \\ -t_{j,l} & 0 \end{bmatrix}$ parom lastnih vrednosti, ki sestavljajo konjugiran par čistih imaginarnih števil, število blokov $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{j,2q+1}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{j,j_n}$ pa se ujema z večkratnostjo lastne vrednosti 0 (v bloku $\hat{T}_j$). Pri tem so $t_{j,1}, t_{j,2}, \ldots, t_{j,q} \in \mathbb{R}$.

Podobno kot v dokazu Trditve 3.2.21 ugotovimo, da je $V_j\widehat{S}_jV_j^{-1} = \widehat{S}_j$. Za realno ortogonalno matriko $O = UV$, kjer je $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$ pa velja

$$\tilde{S} = O^{-1}SO = \begin{bmatrix} s_1I^{n_1\times n_1} & & & \\ & s_2I^{n_2\times n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_kI^{n_k\times n_k} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{T} = O^{-1}TO = \begin{bmatrix} \tilde{T}_1 & & & \\ & \tilde{T}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{T}_k \end{bmatrix},$$

kjer je $\tilde{T}_j$ definiran v (3). Tako za matriko $G = S + iT$ velja:

$$G = O(G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_k)O^{-1}, \text{kjer je matrika}$$

$$G_j = \operatorname{diag}(\begin{bmatrix} s_j & it_{j,1} \\ -it_{j,1} & s_j \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} s_j & it_{j,2} \\ -it_{j,2} & s_j \end{bmatrix} \oplus \ldots \oplus \begin{bmatrix} s_j & it_{j,q} \\ -it_{j,q} & s_j \end{bmatrix} \oplus s_j \oplus \ldots \oplus s_j)$$

bločno diagonalna. Iz $S^2 + T^2 = I$ sledi, da mora za vsak $j = \{1, 2, \ldots, k\}$ veljati $s_j^2 - t_{j,1}^2 = 1, s_j^2 - t_{j,2}^2 = 1, \ldots s_j^2 - t_{j,q}^2 = 1$. V primeru, da blok $\tilde{T}_j$ vsebuje ničelne bloke pa mora dodatno veljati $s_j = \pm 1$, iz česar sklepamo, da imamo ničelne bloke v $\tilde{T}_j$, zgolj na tistih mestih, ki ležijo na mestih blokov $s_jI^{n_j\times n_j}$, kjer $s_j \pm 1$. To pa lahko povežemo z zvezo med hiperboličnim kosinusom in sinusom. Funkcija sh je namreč bijektivna, torej obstaja za vsak $t_{j,m}$ tak $\varphi_{j,m}$, da je $t_{j,m} = sh(\varphi_{j,m})$. Poleg tega vemo, da je $ch(\varphi_{j,m}) \geq 1$, v Trditvi 3.4.14 pa smo pokazali tudi, da velja $ch^2(\varphi_{j,m}) - sh^2(\varphi_{j,m}) = 1$. Tako obstaja za vsak s_j in $t_{j,m}$ tak $\varphi_{j,m}$, da velja $|s_j| = ch(\varphi_{j,m}), t_{j,m} = \epsilon_{j,m} sh(\varphi_{j,m}), \epsilon_{j,m} = \pm 1$ (skladno s predznakom s_j).

Pomagamo si še z Zgledom 3.4.8 in ugotovimo, da lahko zapišemo

$$\begin{bmatrix} s_j & it_{j,m} \\ -it_{j,m} & s_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{j,m} ch\varphi_{j,m} & ish\varphi_{j,m} \\ -ish\varphi_{j,m} & \epsilon_{j,m} ch\varphi_{j,m} \end{bmatrix} = \epsilon_{j,m} exp(i \begin{bmatrix} 0, & \varphi_{j,m} \\ -\varphi_{j,m}, & 0 \end{bmatrix}).$$

Torej je

$$G = O(G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_k)O^{-1}, \text{ kjer je}$$

$$G_j = \text{ diag}(\epsilon_{j,1} \exp i \begin{bmatrix} 0, & \varphi_{j,1} \\ -\varphi_{j,1}, & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \epsilon_{j,q} \exp i \begin{bmatrix} 0, & \varphi_{j,q} \\ -\varphi_{j,q}, & 0 \end{bmatrix}, \epsilon_j, \ldots, \epsilon_j).$$

Če torej definiramo matriki:

$$E = O \text{ diag}((\epsilon_{1,1}, \epsilon_{1,2}, \ldots, \epsilon_{1,q}, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_1), \ldots, (\epsilon_{k,1}, \epsilon_{k,2}, \ldots, \epsilon_{k,q}, \epsilon_k, \ldots, \epsilon_k))O^{-1},$$

$K = O(K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_k)O^{-1}, \text{ kjer je}$

$K_j = \text{ diag}(\begin{bmatrix} 0, & \varphi_{j,1} \\ -\varphi_{j,1}, & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0, & \varphi_{j,2} \\ -\varphi_{j,2}, & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0, & \varphi_{j,q} \\ -\varphi_{j,q}, & 0 \end{bmatrix}, 0, \ldots, 0)$, je res $E^2 = I, K^* = -K$ in $G = Ee^{iK}$.

2. Dokaz začnemo povsem enako kot v prvi točki, saj veljajo povsem enake lastnosti in zapišemo matriko

$$G = O(G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_k)O^{-1}, \text{ kjer je}$$

$$G_j = \text{ diag}(\epsilon_{j,1} \exp i \begin{bmatrix} 0, & \varphi_{j,1} \\ -\varphi_{j,1}, & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \epsilon_{j,q} \exp i \begin{bmatrix} 0, & \varphi_{j,q} \\ -\varphi_{j,q}, & 0 \end{bmatrix}, \epsilon_j, \ldots, \epsilon_j).$$

Sedaj pa upoštevamo, da je matrika pozitivno definitna, torej so po Trditvi 4.1.3 vse lastne vrednosti matrike G pozitivne, torej so vsi $\epsilon_{j,l} = +1$, kar pomeni, da

$$G_j = \text{ diag}(\exp i \begin{bmatrix} 0, & \varphi_{j,1} \\ -\varphi_{j,1}, & 0 \end{bmatrix}, \exp i \begin{bmatrix} 0, & \varphi_{j,2} \\ -\varphi_{j,2}, & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \exp i \begin{bmatrix} 0, & \varphi_{j,q} \\ -\varphi_{j,q}, & 0 \end{bmatrix}, 1, \ldots, 1),$$

torej je:

$$K_j = \operatorname{diag}(\begin{bmatrix} 0, & \varphi_{j,1} \\ -\varphi_{j,1}, & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0, & \varphi_{j,2} \\ -\varphi_{j,2}, & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0, & \varphi_{j,q} \\ -\varphi_{j,q}, & 0 \end{bmatrix}, 0, \dots, 0) \text{ in } E = I.$$

□

S pomočjo pravkar dokazane leme dokažimo naslednjo trditev.

Trditev 3.4.16. *Kompleksno ortogonalno matriko O lahko vedno zapišemo kot*

$$O = Re^{iK},$$

kjer je R realna ortogonalna, K pa realna antisimetrična matrika.

Dokaz. Trditev bomo dokazali s pomočjo Leme 3.4.15, ki jo bomo uporabili na matriki $G = O^*O$. Dokažimo, da je matrika G hkrati ortogonalna in pozitivno definitna hermitska matrika.

Ker velja $G^TG = (O^*O)^T(O^*O) = O^T(O^*)^TO^*O = O^T(\overline{O}^T)^T(\overline{O})^TO = O^T(\overline{O})(\overline{O}^T)O = O^T\overline{OO^{-1}}O = O^TO = I$, je matrika G ortogonalna.

Da je matrika G hermitska, ni težko dokazati. Velja namreč $G^* = O^*O = G$. Poleg tega velja $v^*Gv = v^*O^*Ov = (Ov)^*(Ov)$. Ker je matrika O obrnljiva, je $(Ov)^*(Ov) > 0$; za vse $v \neq 0$, kar dokazuje, da je G res pozitivno definitna. Ker je G sočasno ortogonalna in pozitivno definitna hermitska matrika, jo lahko po 2. točki Leme 3.4.15 zapišemo kot $G = e^{2iK}$, kjer je matrika K realna antisimetrična.

Če definiramo matriko $R = Oe^{-iK}$, je $Re^{iK} = Oe^{-iK}e^{iK} = O$, saj matriki iK in $-iK$ komutirata. Dokazati moramo samo še, da je matrika R res realna ortogonalna. Velja namreč $R^TR = (Oe^{-iK})^TOe^{-iK} = e^{iK}O^TOe^{-iK} = e^{iK}Ie^{-iK} = I$ in $R^*R = (Oe^{-iK})^*Oe^{-iK} = e^{-iK}O^*Oe^{-iK} = e^{-iK}e^{2iK}e^{-iK} = I$, kar pomeni, da je R sočasno ortogonalna ($R^TR = I$) in unitarna ($\overline{R}^TR = I$), kar pomeni, da je $\overline{R} = R$, torej je R realna. □

Lema 3.4.17. *Naj bo matrika D sočasno simetrična in unitarna. Potem lahko matriko D zapišemo kot:*

$$D = e^{iS},$$

kjer je S realna simetrična matrika.

Dokaz. Dokaz začnemo podobno kot pri Lemi 3.4.15. Matriko D zapišemo v obliki $D = U+iV$, kjer sta U in V realni matriki. Nato poiščemo matriki $\overline{D} = U-iV$ in $D^T = U^T+iV^T$. Ker je D simetrična, velja $D = D^T$, torej mora veljati $U + iV = U^T + iV^T$, kar pa je res natanko tedaj, ko $U = U^T$ in $V = V^T$, kar pomeni, da sta matriki U in V simetrični.

Ker je matrika D unitarna, velja $DD^* = I$ oz. $D\overline{D} = I$, saj D simetrična. Torej mora veljati $(U + iV)(U - iV) = U^2 + V^2 + i(VU - UV) = I$ oziroma $U^2 + V^2 = I$ in $VU = UV$ torej sta matriki U in V komutirajoči.

Realni matriki U in V sta simetrični, zato so po Trditvi 3.2.8 njune lastne vrednosti realne. Naj bodo $s_1, s_2, \ldots, s_n$ lastne vrednosti, ki pripadajo matriki U in $t_1, t_2, \ldots, t_n$ lastne vrednosti matrike V. Ker je matrika U realna normalna, obstaja po Posledici 3.2.14 taka realna ortogonalna matrika P, da je

$$\widetilde{U} = P^{-1}UP = \begin{bmatrix} s_1 I^{n_1\times n_1} & & & \\ & s_2 I^{n_2\times n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_k I^{n_k\times n_k} \end{bmatrix},$$

(kjer je k enak številu različnih lastnih vrednosti matrike U). Toda matriki U in V komutirata, zato je po Trditvi 3.2.21 matrika $\widehat{V} = P^{-1}VP$ bločno diagonalno sestavljena iz diagonalizabilnih blokov $\widehat{V_1} \oplus \widehat{V_2} \oplus \ldots \oplus \widehat{V_k}$. Tako obstaja za vsak blok $\widehat{V_j}$ taka realna ortogonalna matrika R_j, da je

$$\widetilde{V_j} = R_j^{-1}\hat{V}_j R_j = \begin{bmatrix} t_{j,1} & & & \\ & t_{j,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_{j,n_j} \end{bmatrix}.$$

Poleg tega je $R_j^{-1}(s_j I^{n_j\times n_j})R_j = s_j I^{n_j\times n_j}$. Naj bo sedaj $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_k$ in naj bo realna ortogonalna matrika $O = PR$. Potem je

$$U = O \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n \end{bmatrix} O^{-1} \quad \text{in} \quad V = O \begin{bmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_n \end{bmatrix} O^{-1}.$$

Iz $U^2 + V^2 = I$ pa sklepamo, da mora veljati tudi $s_j^2 + t_j^2 = 1$, kar lahko povežemo z zvezo $cos^2\varphi + sin^2\varphi = 1$. Ker sta funkciji cos in sin bijektivni na $\mathbb{R}$, obstaja za vsak $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tako realno število φ_j, da $s_j = cos\varphi_j, t_j = sin\varphi_j$.

Torej lahko matriko $D = U + iV = O \text{ diag}(s_1 + it_1, s_2 + it_2 \ldots, s_n + it_n)O^{-1}$ preoblikujemo v

$$D = O \text{ diag}(cos\varphi_1 + isin\varphi_1, cos\varphi_2 + isin\varphi_2 \ldots, cos\varphi_n + isin\varphi_n)O^{-1}$$

$$D = O \text{ diag}(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2} \ldots, e^{i\varphi_n})O^{-1}.$$

Če označimo $S = O \text{ diag}(\varphi_1, \varphi_2 \ldots, \varphi_n)O^{-1}$, je matrika S očitno realna simetrična in lahko matriko D končno zapišemo kot $D = e^{iS}$. □

Trditev 3.4.18. *Unitarno matriko U lahko zapišemo*

$$U = Re^{iS},$$

kjer je R realna ortogonalna, S pa realna simetrična matrika.

Dokaz. Definirajmo matriko $D = U^T U$. Pokažimo, da je matrika D sočasno simetrična in unitarna.

Simetričnost matrike D je očitna, saj $D^T = (UU^T)^T = UU^T = D$. Ker je matrika U unitarna, velja $U^*U = I$ iz česar sledi, da je $U^T(U^T)^* = I$, kar pomeni, da je unitarna tudi matrika U^T. Torej je $D^*D = (U^TU)^*U^TU = U^*(U^T)^*U^TU = U^*U = I$ in $DD^* = U^TU(U^TU)^* = U^TUU^*(U^T)^* = U^T(U^T)^* = I$, kar dokazuje, da je matrika D unitarna. Ker je matrika D sočasno simetrična in unitarna, obstaja po Lemi 3.4.17 taka realna simetrična matrika S, da velja $D = e^{2iS}$.

Definirajmo še matriko $R = Ue^{-iS}$. Tedaj je $Re^{iS} = Ue^{-iS}e^{iS} = U$, saj matriki $(-iS)$ in (iS)

komutirata. Pokazati moramo le še, da je R realna ortogonalna matrika. Najprej ponovimo, da po 4. točki Leme 3.4.2 velja $(e^{iS})^T = e^{iS^T} = e^{iS}$. Nato pa iz $R^T R = (Ue^{-iS})^T Ue^{-iS} = e^{-iS}U^T Ue^{-iS} = e^{-iS}De^{-iS} = e^{-iS}e^{2iS}e^{-iS} = I$ sklepamo, da je R ortogonalna, iz $R^*R = e^{iS}U^*Ue^{-iS} = e^{iS}e^{-iS} = I$ pa da je unitarna. Torej je $R^{-1} = R^*$ in hkrati $R^{-1} = R^T$ iz česar sklepamo, da je $\overline{R} = R$, torej je R res realna ortogonalna. $\square$

3.5 Polarna razčlenitev kompleksne matrike

V tem podpoglavju bomo najprej dokazali, da lahko vsako kvadratno kompleksno obrnljivo matriko razčlenimo na produkt simetrične in ortogonalne matrike. Nato pa s pomočjo tega pokazali, da sta si dve podobni (hkrati simetrični, ali antisimetrični, ali ortogonalni) matriki ortogonalno podobni.

Trditev 3.5.1. *Vsako obrnljivo matriko $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ lahko razčlenimo na:*

$$A = SO \qquad in \qquad A = O_1S_1,$$

kjer je $S = \sqrt{(AA^T)} = p(AA^T)$ in $S_1 = \sqrt{(A^TA)} = p(A^TA)$ za nek polinom $p(x)$. Pri tem sta matriki S in S_1 kompleksni simetrični, O in O_1 pa kompleksni ortogonalni. Matriki S in O (oziroma S_1, O_1) pa sta komutirajoči natanko tedaj, ko sta komutirajoči matriki A in A^T.

Dokaz. Ker je matrika A obrnljiva, je $det(A) = det(A^T) \neq 0$, iz česar sledi, da je $det(AA^T) = det(A)det(A^T) \neq 0$, kar pomeni, da je obrnljiva tudi simetrična matrika AA^T. Torej po Lemi 3.3.8 obstaja tak polinom $p(x)$, da je $S = p(AA^T)$ in $S^2 = AA^T$. Matrika $S = \lambda_0 + \lambda_1(AA^T) + \lambda_2(AA^T)^2 + \ldots$ je torej vsota simetričnih matrik in je zato tudi sama simetrična.

Ker je $det(S)^2 = det(S^2) = det(AA^T) = det(A)det(A^T) \neq 0$, sklepamo, da je matrika S obrnljiva. Torej lahko definiramo matriko $O = S^{-1}A$, za katero trdimo, da je ortogonalna. Velja namreč:

$$O^{-1}S = A^{-1}S^2$$

$$O^{-1}S = A^{-1}AA^T$$

$$O^{-1}S = A^T$$

$$O^{-1} = A^TS^{-1}$$

$$O^{-1} = A^T(S^{-1})^T$$

$$O^{-1} = O^T.$$

S tem smo dokazali, da obstaja za vsako obrnljivo matriko A razcep $A = SO$, kjer je S simetrična, O pa ortogonalna matrika. Toda v primeru, da je matrika A obrnljiva, je obrnljiva tudi A^T, torej lahko zapišemo $A^T = \hat{S}\hat{O}$, kjer $\hat{S}$ simetrična, $\hat{O}$ ortogonalna matrika. Zadnjo enačbo transponiramo in dobimo $A = \hat{O}^T\hat{S}^T$. Matrika $O_1 = \hat{O}^T$ je seveda ortogonalna, matrika $S_1 = \hat{S}^T$ pa simetrična. S tem smo pokazali, da za vsako obrnljivo matriko A obstaja tudi razcep $A = O_1S_1$.

Dokažimo še, da je $SO = OS$ natanko tedaj, ko $AA^T = A^TA$. Predpostavimo najprej, da $SO = OS$. Ker je $A = SO$ in $A^T = O^{-1}S$, je $AA^T = S^2$ in $A^TA = O^{-1}S^2O$. Toda matriki S in O komutirata, zato lahko zadnjo enakost preoblikujemo in ugotovimo, da velja $AA^T = A^TA = S^2$.

Sedaj naj bo $AA^T = A^TA$ oziroma $S^2 = O^{-1}S^2O$. V tem primeru mora matrika O komutirati z matriko $S^2 = AA^T$. Ker je $S = f(AA^T)$, sklepamo da O komutira tudi z matriko S. □

S pomočjo trditve o polarni razčlembi dokažimo naslednjo trditev.

Trditev 3.5.2. *Če sta podobni kompleksni matriki A in B hkrati simetrični, ali antisimetrični, ali ortogonalni, potem sta si tudi ortogonalno podobni. Torej iz $B = P^{-1}AP$ sledi, da obstaja taka ortogonalna matrika O, da velja $B = O^{-1}AO$.*

Dokaz. Naj velja $B = P^{-1}AP$. Pokažimo najprej, da v primeru simetričnih, antisimetričnih oziroma ortogonalnih matrik velja tudi $B^T = P^{-1}A^TP$.

- Naj bosta A in B simetrični. Če v enačbi $B = P^{-1}AP$ namesto A pišemo A^T in namesto B pišemo B^T, ugotovimo, da res

$$B^T = P^{-1}A^TP. \tag{4}$$

- Do enakega zaključka pridemo tudi v primeru, da sta A in B antisimetrični, saj velja $A^T = -A, B^T = -B$, zato lahko enačbo $B = P^{-1}AP$ preoblikujemo v $-B^T = P^{-1}(-A^T)P$, kar pa je enako izrazu (4), če obe strani pomnožimo z -1.

- Denimo, da sta matriki A in B ortogonalni, torej velja $A^T = A^{-1}, B^T = B^{-1}$. Enačbo $B = P^{-1}AP$ najprej z leve pomnožimo s P in z desne z B^{-1} in dobimo enačbo $P = APB^{-1}$, katero z leve najprej pomnožimo z A^{-1}, nato pa še s P^{-1} in dobimo $P^{-1}A^{-1}P = B^{-1}$, kar pa seveda zopet lahko preoblikujemo v (4).

Za obravnavane matrike torej iz enačbe $B = P^{-1}AP$ vedno sledi $B^T = P^{-1}A^TP$. Transponirajmo sedaj zadnjo enačbo in izrazimo matriko $B = P^TA(P^{-1})^T$. Vemo, da mora po drugi strani veljati $B = P^{-1}AP$, torej je $P^TA(P^{-1})^T = P^{-1}AP$, kar lahko preoblikujemo v $PP^TA = APP^T$.

Sedaj si pomagamo s prejšnjo trditvijo. Ker je matrika P obrnljiva, jo lahko razčlenimo na $P = SO$, kjer velja $S = S^T = \sqrt{PP^T}$ in $O^T = O^{-1}$. Poleg tega iz enačbe $PP^TA = APP^T$ sklepamo, da matrika PP^T komutira z matriko A, kar pomeni, da tudi $S = \sqrt{PP^T}$ komutira z A, saj je $\sqrt{PP^T}$ polinom v matriki PP^T.

V izrazu $B = P^{-1}AP$ matriko P zamenjamo z produktom SO in tako dobimo $B = O^{-1}S^{-1}ASO$, kar lahko preoblikujemo v $B = O^{-1}AO$. Ker je matrika O ortogonalna, sta si matriki A in B res ortogonalno podobni. $\square$

4 KANONIČNE FORME KOMPLEKSNIH MATRIK

Cilj pravkar začetega poglavja je poiskati kanonične forme simetričnih, antisimetričnih in ortogonalnih kompleksnih matrik.

4.1 Kanonična forma kompleksne simetrične matrike

Najprej poiščimo inverz kompleksne unitarne matrike, ki nam bo v pomoč v nadaljevanju.

Zgled 4.1.1. *Naj bo* $B = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix}$ *antidiagonalna matrika in* $S = \frac{1}{\sqrt{2}}(I + iB) \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Ker je matrika* S *vsota dveh simetričnih matrik, je tudi sama simetrična. Zaradi* $B^2 = I$, *pa sklepamo, da je* $SS^* = (\frac{1}{\sqrt{2}}(I + iB))(\frac{1}{\sqrt{2}}(I - iB)) = \frac{1}{2}(I + B^2) = I$, *kar pomeni, da je matrika* S *unitarna in da je njen inverz* $S^{-1} = S^*$ *oziroma* $S^{-1} = \overline{S}$, *saj je* S *simetrična.*

Trditev 4.1.2. *Vsaka Jordanova kletka je podobna simetrični matriki.*

Dokaz. Naj bo $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Jordanova kletka z ničelno glavno diagonalo in $S = \frac{1}{\sqrt{2}}(I + iB)$ matrika iz prejšnjega zgleda.

Pokažimo, da je matrika SJS^{-1}, ki je unitarno podobna matriki J, simetrična. Velja $SJS^{-1} = SJ\overline{S} = \frac{1}{2}(I+iB)J(I-iB) = \frac{1}{2}(J-iJB+iBJ+BJB) = \frac{1}{2}(J+BJB)+\frac{i}{2}(BJ-JB)$, kjer je $BJ = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & \iddots & 1 \\ & \iddots & \iddots & \\ 0 & 1 & & \end{bmatrix}$, $JB = \begin{bmatrix} & & 1 & 0 \\ & \iddots & \iddots & \\ 1 & 0 & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$ in $BJB = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Končno zapišemo matriko $SJS^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{i}{2}\begin{bmatrix} & & & -1 & 0 \\ & & -1 & 0 & 1 \\ & \iddots & \iddots & \iddots & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & & & \end{bmatrix}$, ki je vsota dveh simetričnih matrik, torej tudi sama simetrična. S tem smo pokazali, da je Jordanova kletka z ničelno glavno diagonalo unitarno podobna simetrični matriki.

Pokazati želimo, da to velja za poljubno Jordanovo kletko oblike $J(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} = J + \lambda I$. Ker je matrika $SJ(\lambda)S^{-1} = S(J + \lambda I)S^{-1} = SJS^{-1} + S\lambda IS^{-1} = SJS^{-1} + \lambda I$ simetrična, je očitno vsaka Jordanova kletka podobna simetrični matriki. □

Posledica 4.1.3. *Poljubna kvadratna kompleksna matrika je podobna simetrični matriki.*

Dokaz. Vemo, da obstaja za vsako kvadratno matriko A taka obrnljiva matrika P, da je $A = PJP^{-1}$, kjer je matrika J direktna vsota Jordanovih kletk. Dovolj je torej, da pokažemo, da je direktna vsota Jordanovih kletk $J = J(\lambda_1) \oplus J(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus J(\lambda_q)$ podobna simetrični matriki.

Ker je po prejšnji trditvi vsaka Jordanova kletka $J(\lambda_j)$ podobna simetrični matriki

$$S_j J_j S_j^{-1} + \lambda_j I_j = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\lambda_j & 1 & & & \\ 1 & 2\lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2\lambda_j & 1 \\ & & & 1 & 2\lambda_j \end{bmatrix} + \frac{i}{2}\begin{bmatrix} & & & -1 & 0 \\ & & -1 & 0 & 1 \\ & ⋰ & ⋰ & ⋰ & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & & & \end{bmatrix},$$

je simetrična tudi direktna vsota simetričnih matrik

$$\widetilde{S} = \bigoplus_{j=1}^{q} (S_j J_j S_j^{-1} + \lambda_j I_j). \tag{5}$$

□

Posledica 4.1.4. *Vsaka kompleksna simetrična matrika je ortogonalno podobna simetrični matriki $\widetilde{S}$, definirana v (5).*

Dokaz. Po Posledici 4.1.3 je vsaka kvadratna kompleksna matrika podobna simetrični matriki, torej to velja tudi za kompleksno simetrično matriko. V prejšnjem poglavju pa smo v Trditvi 3.5.2 pokazali, da sta si dve simetrični matriki, ki sta si podobni, tudi ortogonalno podobni. □

Posledica 4.1.5. *Naj bo A neka kvadratna kompleksna matrika, $J = P^{-1}AP$ njena Jordanova kanonična forma in A^T transponirana matrika matrike A.*

Potem obstaja taka obrnljiva matrika T, da je $J = T^{-1}A^TT$ Jordanova forma matrike A^T.

Dokaz. Po Posledici 4.1.3 je matrika A podobna simetrični matriki. Torej za neko obrnljivo matriko R in simetrično matriko S velja

$$A = RSR^{-1}. \tag{6}$$

Enačbo transponiramo in dobimo $A^T = (R^T)^{-1}S^T R^T = (R^T)^{-1}SR^T$, iz česar sklepamo, da je $S = R^T A^T (R^T)^{-1}$. Izraz za matriko S nesemo v enačbo (6) in dobimo $A = RR^T A^T (R^T)^{-1} R^{-1}$ oziroma $A = QA^T Q^{-1}$, kjer je $Q = RR^T$.

Ker je $A = PJP^{-1}$, mora veljati $QA^T Q^{-1} = PJP^{-1}$ oziroma $A^T = Q^{-1}PJP^{-1}Q$. Označimo $T = Q^{-1}P$ in dobimo $A^T = TJT^{-1}$, kar pa je ravno Jordanova forma matrike A^T. $\square$

4.2 Kanonična forma kompleksne antisimetrične matrike

Podobno kot smo v prejšnjem podpoglavju izpeljali kanonično formo kompleksne simetrične matrike, bomo v tem podpoglavju poiskali kanonično formo kompleksne antisimetrične matrike.

Preden to storimo, pa si oglejmo nekaj trditev, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju,

Trditev 4.2.1. *Rang antisimetrične matrike je vedno sodo število.*

Dokaz. Naj bo rang antisimetrične matrike $K = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \dots & k_{1,n} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \dots & k_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ k_{n,1} & k_{n,2} & \dots & k_{n,n} \end{bmatrix}^{n\times n}$ enak r. To pomeni, da je število linearno neodvisnih vrstic v matriki K enako r. Označimo njihov položaj v matriki z $i_1, i_2, \dots, i_r$. Vse ostale vrstice pa lahko dobimo kot linearno kombinacijo vrstic $i_1, i_2, \dots, i_r$.

V matriki K si izberemo podmatriko $L = \begin{bmatrix} k_{i_1,1} & k_{i_1,2} & \dots & k_{i_1,n} \\ k_{i_2,1} & k_{i_2,2} & \dots & k_{i_2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ k_{i_r,1} & k_{i_r,2} & \dots & k_{i_r,n} \end{bmatrix}^{r\times n}$ tako, da za vrstice vzamemo le linearno neodvisne vrstice na mestih $i_1, i_2, \dots, i_r$. Ker je v antisimetrični matriki j-ti stolpec enak z -1 pomnoženi transponirani j-ti vrstici, so v matriki K stolpci na mestih $i_1, i_2, \dots, i_r$ linearno neodvisni, vsi ostali pa so njihova linearna kombinacija. Potem so tudi v podmatriki L (skrajšani) stolpci, ki ne ležijo na mestih $i_1, i_2, \dots, i_r$ linearna kombinacija stolpcev na metih $i_1, i_2, \dots, i_r$. Stolpci $i_1, i_2, \dots, i_r$ pa morajo biti še vedno linearno neodvisni, saj je rang matrike L enak številu linearno neodvisnih vrstic v podmatriki L (torej r), kar pomeni, da imamo v L natanko r linearno neodvisnih stolpcev.

Če v podmatriki L obdržimo zgolj stolpce na mestih $i_1, i_2, \dots, i_r$, nam ostane matrika $M = \begin{bmatrix} k_{i_1,i_1} & k_{i_1,i_2} & \dots & k_{i_1,i_r} \\ k_{i_2,i_1} & k_{i_2,i_2} & \dots & k_{i_2,i_r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ k_{i_r,i_1} & k_{i_r,i_2} & \dots & k_{i_r,i_r} \end{bmatrix}^{r\times r}$, ki je očitno antisimetrična, saj so koeficienti na njeni diagonali $k_{i_m,i_m} = 0$, za preostale koeficiente k_{i_j,i_l} pa velja $k_{i_j,i_l} = -k_{i_l,i_j}$.

Izračunajmo še determinanto matrike M. Ker za poljubno matriko velikosti $r \times r$ velja $det(M) = det(M^T)$ in $det(-M) = (-1)^r det(M)$, sklepamo, da za antisimetrično matriko M velja $det(M) = (-1)^r det(M)$. Za sodi r torej velja $det(M) = det(M)$, za lihi r pa je

$det(M) = -det(M)$, kar je res zgolj v primeru, da $det(M) = 0$. Toda ker je podmatrika M obrnljiva, je njena determinanta neničelna, zato sklepamo, da je r res sodo število. □

Trditev 4.2.2. *Vsaka Jordanova kletka $J(-\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je podobna matriki $-J(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}$.*

Dokaz. Pri dokazu si pomagajmo z [9] in dokažimo, da obstaja taka obrnljiva matrike D, da je $DJ(-\lambda)D^{-1} = -J(\lambda)$.

Vzemimo matriko $D = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (-1)^{n+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, za katero očitno velja $DD = I$, torej je $D^{-1} = D$. Sedaj izračunajmo produkt matrik $DJ(-\lambda)D^{-1}$.

Ker je $DJ(-\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (-1)^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda_0 & 1 & & \\ & -\lambda_0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ & & & -\lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & (-1)^n \\ & & & (-\lambda_0)^n \end{bmatrix}$, je produkt

$$DJ(-\lambda)D = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & (-1)^n \\ & & & (-\lambda_0)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (-1)^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & -1 & & \\ & -\lambda_0 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & -1 \\ & & & -\lambda_0 \end{bmatrix} = -J(\lambda).$$

□

Trditev 4.2.3. *Vsaka Jordanova kletka, ki pripada lastni vrednosti $\lambda = 0$ in je lihe velikosti $n \times n$, je podobna matriki, ki ima na prvi polovici superdiagonale razporejene 1, na drugi polovici pa -1.*

Dokaz. Oglejmo si matriko $M = (M_1 \oplus M_2) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, kjer n lih, $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}^{\frac{n-1}{2}\times\frac{n-1}{2}}$ in $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}^{\frac{n+1}{2}\times\frac{n+1}{2}}$. Ker je $MM = I$, je $M^{-1} = M$, Jordanova kletka $J(0) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pa je podobna matriki $MJ(0)M$.

Izračunajmo najprej produkt $MJ(0) = \begin{bmatrix} I^{\frac{n-1}{2}\times\frac{n-1}{2}} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$. Ta ima prvih $\frac{n-1}{2}$ vrstic enakih kot matrika $J(0)$, preostale $\frac{n+1}{2}$ vrstice pa se od $J(0)$ razlikujejo le v tem, da je vsaka liha pomnožena z -1. $MJ(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & -1 & \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & -1 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$.

Izračunajmo še produkt $(MJ(0))M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & 0 & -1 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & \ddots & -1 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^{\frac{n-1}{2}\times\frac{n-1}{2}} & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$. Prvih $\frac{n-1}{2}$ je seveda enakih kot v matriki $J(0)$, za preostale $\frac{n+1}{2}$ vrstice pa velja: v $i-$ti vrstici imamo od nič različen koeficient le na mestu $i+1$, kjer množimo med seboj 1 (oz. -1) z -1 (1). Koeficienti, ki ležijo na drugi polovici prve superdiagonale so torej enaki -1.

$$MJ(0)M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & -1 & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots & -1 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}.$$ □

Trditev 4.2.4. *Naj bo J Jordanova kletka z ničelno glavno diagonalo, velikosti $n \times n$. Za $m > n$ je $J^m = 0$ in tedaj Jordanova forma matrike J vsebuje n Jordanovih kletk (velikosti 1×1). Za $n \geq m$ pa imamo v Jordanovi formi matrike J^m natanko m Jordanovih kletk.*

Dokaz. Poglejmo, kaj se zgodi pri potenciranju kletke J. Ker je $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$, je

$J^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$, $J^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$, ... V matriki $J^m = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & & \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & & 0 \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$ se tako prva vrstica začne z m ničlami, zadnji stolpec pa se konča z m ničlami.

- Za $n \leq m$ je matrika $J^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ in prvi del trditve očitno drži.
- Za $n > m$ pa je $J^m = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & & \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & & 0 \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$. Ker pripadajo vse kletke lastni vrednosti 0, je dimenzija jedra Jordanove forme matrike J^m enaka dimenziji jedra matrike J^m. Slednja pa je enako m, saj lahko linearno neodvisne vektorje, ki jih matrika J^m uniči zapišemo: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, ... vse do vektorja, ki ima 1 na $m-$tem mestu, povsod drugod pa ničle.

□

Trditev 4.2.5. *Naj bo rang antisimetrične matrike $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ enak r.*

1. *Če je $\lambda_0 \neq 0$ lastna vrednost matrike K, je tudi $-\lambda_0$ lastna vrednost matrike K. Poleg tega je število Jordanovih kletk, ki pripadajo λ_0 enako številu Jordanovih kletk, ki pripadajo lastni vrednosti $-\lambda_0$. Še več: če pripadajo lastni vrednosti λ_0 kletke*

$$J(\lambda_0)^{n_1\times n_1} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_0 & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{bmatrix}_{n_1\times n_1}, \dots, J(\lambda_0)^{n_t\times n_t} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_0 & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{bmatrix}_{n_t\times n_t},$$

   potem pripadajo lastni vrednosti $-\lambda_0$ Jordanove kletke

$$J(-\lambda_0)^{n_1\times n_1} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda_0 & 1 \\ & & & -\lambda_0 \end{bmatrix}_{n_1\times n_1}, \dots, J(-\lambda_0)^{n_t\times n_t} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda_0 & 1 \\ & & & -\lambda_0 \end{bmatrix}_{n_t\times n_t}.$$

2. *Če je $\lambda = 0$ lastna vrednost matrike K, potem je število Jordanovih kletk sode velikosti, ki ustrezajo lastni vrednosti $\lambda = 0$, sodo.*

Dokaz. 1. V Posledici 3.2.7 smo pokazali, da v antisimetrični matriki K lastne vrednosti vedno nastopajo v parih oziroma da iz dejstva $\lambda_0 \in Sp(K)$ sledi, da tudi $-\lambda_0 \in Sp(K)$. Pokažimo še, da če je v Jordanovi formi matrike K kletka $J(\lambda_0)^{n_i\times n_i}$, ki pripada lastni vrednosti λ_0, potem ima Jordanova forma tudi kletko enakih velikosti $J_i(-\lambda_0)^{n_i\times n_i}$, ki pripada lastni vrednosti $-\lambda_0$.

Po Posledici 4.1.5 ima vsaka kompleksna matrika povsem enake Jordanove kletke kot njena transponirana matrika. Ker je v našem primeru $K^T = -K$, mora pripadati poljubni Jordanovi kletki $J(\lambda_0) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_0 & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$ matrike K v matriki $-K$ blok $\begin{bmatrix} -\lambda_0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda_0 & -1 \\ & & & -\lambda_0 \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$. Toda po Trditvi 4.2.2 je vsaka matrika $-J(\lambda_0)$ podobna Jordanovi kletki $J(-\lambda_0)$, ki pripada lastni vrednosti $-\lambda_0$. V Jordanovi formi antisimetrične matrike mora torej za vsako Jordanovo kletko, ki pripada lastni vrednosti λ_0, nastopati tudi Jordanova kletka enake velikosti, ki pripada lastni vrednosti $-\lambda_0$.

2. Označimo število Jordanovih kletk, ki pripadajo lastni vrednosti $\lambda = 0$ in so velikosti $n_i \times n_i$ z δ_{n_i} in pokažimo, da je za vsak sodi n_i število δ_{n_i} sodo.

   Defekt matrike $d = n - r$ (kjer $r = rang(K \in \mathbb{C}^{n \times n})$) je enak številu linearno neodvisnih lastnih vektorjev, ki pripadajo lastni vrednosti $\lambda = 0$. Ker je matrika K antisimetrična, je število r sodo, kar pomeni, da je število d sodo (liho) natanko tedaj, ko je število n sodo (liho).

   Iz $K = -K^T$ pa sledi, da je matrika $K^2 = (-K^T)(-K^T) = (K^2)^T$ simetrična, matrika $K^3 = -(K^3)^T$ antisimetrična, K^4 simetrična, ... torej so defekti $d_1 = n - rang(K), d_3 = n - rang(K^3), d_5 = n - rang(K^3), \ldots d_{2n+1} = n - rang(K^{2n+1})$ hkrati sodi (lihi).

   Po drugi strani je defekt matrike enak številu Jordanovih kletk, ki pripadajo lastni vrednosti $\lambda = 0$, saj nam da vsaka kletka $J(0)$ natanko en linearno neodvisen lastni vektor. Defekt matrike K je torej enak $d = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots$.

   Poiščimo še defekte oz. število kletk z lastno vrednostjo $\lambda = 0$ v matrikah $K^3, K^5, \ldots$.

   S pomočjo Trditve 4.2.4 in dejstva, da je vsaka Jordanova forma bločno diagonalno sestavljena iz Jordanovih kletk, ugotovimo, da lahko defekte lihih potenc matrike K določimo po formulah:

$$d_1 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots,$$

$$d_3 = \delta_1 + 2\delta_2 + 3(\delta_3 + \delta_4 + \ldots),$$

$$\vdots$$

$$d_m = \delta_1 + 2\delta_2 + \ldots + (m-1)\delta_{m-1} + m(\delta_m + \delta_{m+1} + \ldots),$$

$$\vdots$$

   Ker morajo biti vsi defekti lihih potenc matrike K hkrati sodi oz. lihi, mora to veljati tudi za d_1 in d_3. Vse $\delta_j; j \in \mathbb{N}$ (razen δ_2) pa so tako v izrazu za d_1 kot v izrazu za d_3 pomnožene z lihim številom, torej je njihova vsota v obeh izrazih hkrati soda (liha).

Na hkratno sodost oz. lihost d_1 in d_3 tako vpliva le δ_2, ki mora biti očitno soda, saj je v izrazu d_1 pomnožen z liho 1, v izrazu za d_3 pa s sodo 2. Na podoben način iz enačb za d_{m-1} in d_{m+1} ugotovimo, da mora biti tudi δ_m (kjer m soda) soda, saj edino to število vpliva na sodost obeh defektov in je v prvem primeru pomnoženo z lihim, v drugem primeru pa s sodim številom. Torej so res vsa števila $\delta_{2n}; n \in \mathbb{N}$ soda.

□

Zapišimo sedaj Jordanovo formo poljubne antisimetrične matrike. Ker vrstni red kletk v Jordanovi formi ni pomemben, lahko Jordanovo formo antisimetrične matrike sestavimo na sledeč način:

- Najprej zapišemo pare Jordanovih kletk (enakih velikosti), ki pripadajo lastni vrednosti $\pm\lambda_0$ ter pare (sodokrat ponovljenih) Jordanovih kletk sode velikosti, ki pripadajo lastni vrednosti $\lambda = 0$. Tako dobimo za vsak par lastnih vrednosti blok $\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & \\ & & & \lambda_i & 0 & & \\ & & & & -\lambda_i & 1 & \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & -\lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$, ki ga sestavljata dva bloka enake velikosti $\frac{n_i}{2} \times \frac{n_i}{2}$ in je po Trditvi 4.2.2 podoben matriki $J(\pm\lambda_i)^{n_i \times n_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & \\ & & & \lambda_i & 0 & & \\ & & & & -\lambda_i & -1 & \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & \ddots & -1 \\ & & & & & & & -\lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$.
- Nato zapišemo še Jordanove kletke, ki pripadajo lastni vrednosti $\lambda = 0$ in so lihih velikosti. Te kletke so po Trditvi 4.2.3 podobne matriki $J(0)^{\tilde{n}_j \times \tilde{n}_j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & -1 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \ddots & -1 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}_{\tilde{n}_j \times \tilde{n}_j}$.

Sklepamo torej lahko, da je vsaka antisimetrična matrika podobna matriki

$$J_K = diag(J(\pm\lambda_1)^{n_1 \times n_1}, \ldots, J(\pm\lambda_u)^{n_u \times n_u}, J(0)^{\tilde{n}_1 \times \tilde{n}_1}, \ldots, J(0)^{\tilde{n}_v \times \tilde{n}_v}),$$

kjer so števila $n_1, n_2, \ldots, n_u$ soda, števila $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \ldots, \tilde{n}_v$ pa liha.

Trditev 4.2.6. *Poljubna zgoraj zapisana matrika J_K je podobna antisimetrični matriki.*

Dokaz. Najprej si oglejmo matriko $T^{n\times n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(I - iB)$, kjer je I je identična matrika velikosti $n \times n$, matrika $B = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix}$ pa antidiagonalna matrika velikosti $n \times n$. Ker je $TT^* = \frac{1}{2}(I^2 + B^2)$ in ker je $B^2 = I$, je $TT^* = I$, torej je $T^{-1} = \overline{T^T} = \frac{1}{\sqrt{2}}(I + iB)$.

Sedaj pa pokažimo, da sta bloka $J(\pm\lambda_i)^{n_i\times n_i}$ in $J(0)^{\tilde{n}_j\times\tilde{n}_j}$ (v matriki J_K) podobna antisimetričnemu bloku.

Naj bo $K(\pm\lambda_0)^{n\times n} = T^{n\times n}J(\pm\lambda_0)^{n\times n}(T^{n\times n})^{-1}$, kjer $J(\pm\lambda_0)^{n\times n} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & \\ & & & \lambda_i & 0 & & \\ & & & & -\lambda_i & -1 & \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & \ddots & -1 \\ & & & & & & & -\lambda_i \end{bmatrix}_{n\times n}$.

Potem je:

$$2K(\pm\lambda_0) = (I - iB)J(\pm\lambda_0)(I + iB) = J(\pm\lambda_0) + BJ(\pm\lambda_0)B + i(J(\pm\lambda_0)B - BJ(\pm\lambda_0)).$$

Ko poiščemo produke:

$$J(\pm\lambda_0)B = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & 1 & & \\ & & & \lambda_i & 0 & \\ & & & & -\lambda_i & -1 \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & \ddots & -1 \\ & & & & & & & -\lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & \iddots & & & \\ & 1 & & & & \\ 1 & & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & 1 & \lambda_i \\ & & & & \iddots & \iddots & \\ & & & & 1 & \iddots & \\ & & & 0 & \lambda_i & & \\ & & -1 & -\lambda_i & & & \\ & \iddots & \iddots & & & & \\ -1 & \iddots & & & & & \\ -\lambda_i & & & & & & \end{bmatrix},$$

$$BJ(\pm\lambda_0)B = \begin{bmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & \iddots & & & \\ & 1 & & & & \\ 1 & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & & & 1 & \lambda_i \\ & & & & \iddots & \iddots & \\ & & & & 1 & \iddots & \\ & & & 0 & \lambda_i & & \\ & & -1 & -\lambda_i & & & \\ & \iddots & \iddots & & & & \\ -1 & \iddots & & & & & \\ -\lambda_i & & & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_i & & & & & & \\ -1 & -\lambda_i & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & -1 & -\lambda_i & & & \\ & & & 0 & \lambda_i & & \\ & & & & 1 & \lambda_i & \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & 1 & \lambda_i \end{bmatrix},$$

$$BJ(\pm\lambda_0) = \begin{bmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & \iddots & & & \\ & 1 & & & & \\ 1 & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & 1 & & \\ & & & \lambda_i & 0 & \\ & & & & -\lambda_i & -1 \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & \ddots & -1 \\ & & & & & & & -\lambda_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & & -\lambda_i \\ & & & & & \iddots & -1 \\ & & & & -\lambda_i & \iddots & \\ & & & -\lambda_i & -1 & & \\ & & \lambda_i & 0 & & & \\ & \iddots & 1 & & & & \\ \lambda_i & \iddots & & & & & \\ \lambda_i & 1 & & & & & \end{bmatrix}$$

in jih seštejemo

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & \\ & & & \lambda_i & 0 & & \\ & & & & -\lambda_i & -1 & \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & \ddots & -1 \\ & & & & & & & -\lambda_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_i & & & & & & \\ -1 & -\lambda_i & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & -1 & -\lambda_i & & & \\ & & & 0 & \lambda_i & & \\ & & & & 1 & \lambda_i & \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & 1 & \lambda_i \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} & & & & & & 1 & \lambda_i \\ & & & & & \iddots & \iddots & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \lambda_i & & \\ & & & -1 & -\lambda_i & & & \\ & & \iddots & \iddots & & & & \\ -1 & \iddots & & & & & & \\ -\lambda_i & & & & & & & \end{bmatrix} + i$$

$$\begin{bmatrix} & & & & & & & \lambda_i \\ & & & & & & \iddots & 1 \\ & & & & & \lambda_i & \iddots & \\ & & & & \lambda_i & 1 & & \\ & & & -\lambda_i & 0 & & & \\ & & \iddots & -1 & & & & \\ & -\lambda_i & \iddots & & & & & \\ -\lambda_i & -1 & & & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & & & \\ & & & -1 & 0 & 0 & & \\ & & & & 0 & 0 & -1 & \\ & & & & & 1 & 0 & \ddots \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & & & & & i & 2\lambda_i \\ & & & & & \iddots & \iddots & i \\ & & & & & \iddots & \iddots & \iddots \\ & & & & & i & \iddots & \\ & & & & 0 & 2\lambda_i & i & \\ & & & -i & -2\lambda_i & 0 & & \\ & & \iddots & \iddots & -i & & & \\ & \iddots & \iddots & \iddots & & & & \\ -i & \iddots & \iddots & & & & & \\ -2\lambda_i & -i & & & & & & \end{bmatrix},$$

ugotovimo, da je matrika $K(\pm\lambda_0)^{n\times n}$ vsota dveh antisimetričnih matrik in zato tudi sama antisimetrična.

Podobno je matrika $K^{\tilde{n}\times\tilde{n}} = T^{\tilde{n}\times\tilde{n}}J(0)^{\tilde{n}\times\tilde{n}}(T^{-1})^{\tilde{n}\times\tilde{n}}$, kjer $J(0)^{\tilde{n}\times\tilde{n}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & -1 \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots & -1 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$ za liha števila $\tilde{n}$ antisimetrična, saj je matrika $2K = J(0) + BJ(0)B + i(J(0)B - BJ(0)) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & -1 \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots & -1 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} & & & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & \\ & & & \iddots & \iddots & & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & -1 & 0 & & & & \\ \iddots & \iddots & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} & & & & & & 0 \\ & & & & & 0 & -1 \\ & & & & \iddots & \iddots & \\ & & & 0 & -1 & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & \iddots & \iddots & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & -1 & 0 & 1 & & \\ & & & 1 & 0 & -1 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & 1 & 0 & -1 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & \iddots & \iddots & \iddots & \\ & & & 1 & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & -1 & & & \\ & \iddots & \iddots & \iddots & & & & \\ -1 & 0 & -1 & & & & & \\ -1 & 0 & -1 & & & & & \end{bmatrix}$$ vsota dveh antisimetričnih matrik.

Ker je vsak blok $J(\pm\lambda)^{n\times n}$ je podoben bloku $K(\pm\lambda_0)^{n\times n}$ in vsak $J(0)^{\tilde{n}\times\tilde{n}}$ bloku $K^{\tilde{n}\times\tilde{n}}$, je matrika

$$J_K = diag(J(\pm\lambda_1)^{n_1\times n_1}, \ldots, J(\pm\lambda_u)^{n_u\times n_u}, J^{\tilde{n}_1\times\tilde{n}_1}, \ldots, J^{\tilde{n}_v\times\tilde{n}_v})$$

podobna antisimetrični matriki

$$\widetilde{K} = diag(K(\pm\lambda_1)^{n_1\times n_1}, \ldots, K(\pm\lambda_u)^{n_u\times n_u}, K^{\tilde{n}_1\times\tilde{n}_1}, \ldots, K^{\tilde{n}_v\times\tilde{n}_v}), \text{kjer je} \tag{7}$$

$$K(\pm\lambda_j)^{n_j\times n_j} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & & & \\ & & & -1 & 0 & 0 & & \\ & & & & 0 & 0 & -1 & \\ & & & & & 1 & 0 & \ddots \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} & & & & & & i & 2\lambda_i \\ & & & & & \iddots & \iddots & i \\ & & & & & \iddots & \iddots & \iddots \\ & & & & & i & \iddots & \\ & & & & 0 & 2\lambda_i & i & \\ & & & -i & -2\lambda_i & 0 & & \\ & & \iddots & \iddots & -i & & & \\ & \iddots & \iddots & \iddots & & & & \\ -i & \iddots & \iddots & & & & & \\ -2\lambda_i & -i & & & & & & \end{bmatrix}; j = \{1, 2, \ldots u\},$$

$$K^{\tilde{n}_m \times \tilde{n}_m} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & -1 & 0 & 1 & & & & \\ & & & 1 & 0 & -1 & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & 0 & -1 \\ & & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{i}{2}\begin{bmatrix} & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & \iddots & \iddots & \iddots & \\ & & & & 1 & 0 & 1 & & \\ & & & -1 & 0 & -1 & & & \\ & & \iddots & \iddots & \iddots & & & & \\ & -1 & 0 & -1 & & & & & \\ -1 & 0 & -1 & & & & & & \end{bmatrix}; m = \{1, 2, \ldots v\}. \qquad \square$$

Posledica 4.2.7. *Poljubna kompleksna antisimetrična matrika K je ortogonalno podobna antisimetrični matriki $\widetilde{K}$, definirani v (7).*

Dokaz. Ker je poljubna antisimetrična matrika K podobna bločno diagonalni matriki J_K, ki je podobna antisimetrični matriki $\widetilde{K}$, je tudi K podobna $\widetilde{K}$. Toda za dve podobni antisimetrični matriki smo v Trditvi 3.5.2 pokazali, da sta si ortogonalno podobni. $\square$

Opomba 4.2.8. *Naj bo sedaj antisimetrična matrika K realna. Tedaj je matrika K normalna, zato je podobna diagonalni matriki, ki ima po diagonali razporejene lastne vrednosti matrike K. To so lahko samo konjugirani pari čistih imaginarnih kompleksnih števil $\pm i\varphi_1$ ali pa število 0.*

Če uporabimo pravkar obravnavano podpoglavje, ugotovimo, da je matrika K podobna matriki J_K, ki jo bločno diagonalno sestavljajo kletke oblike $J(\pm\lambda_i)^{2\times 2} = \left[\begin{smallmatrix} -\varphi_i & \\ & i\varphi_i \end{smallmatrix}\right]$ in $J(0)^{1\times 1} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \end{smallmatrix}\right]$, ta pa je podobna matriki $TJ_KT^{-1} = \widetilde{K} = diag(\left[\begin{smallmatrix} 0 & \varphi_1 \\ -\varphi_1 & 0 \end{smallmatrix}\right], \ldots, \left[\begin{smallmatrix} 0 & \varphi_u \\ -\varphi_u & 0 \end{smallmatrix}\right], 0, \ldots, 0)$.

Omenimo, da smo ravno tako matriko dobili tudi v Trditvi 3.2.23.

4.3 Kanonična forma kompleksne ortogonalne matrike

Preden se posvetimo iskanju kanonične forme za kompleksno ortogonalno matriko, si oglejmo nekaj trditev, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju.

Trditev 4.3.1. *Naj bo K antisimetrična matrika. Potem je matrika $O = e^K$ ortogonalna.*

Dokaz. Ker je matrika K antisimetrična, je $O^T = (e^K)^T = e^{K^T} = e^{-K}$. Po drugi strani je $O^{-1} = (e^K)^{-1}$. Toda na strani 37 smo pokazali, da je $(e^K)^{-1} = e^{-K}$. Torej je res $O^T = O^{-1}$. $\square$

Trditev 4.3.2. *Naj bo lastna vrednost matrike $\lambda \neq 0$. Potem sta si $J(\frac{1}{\lambda}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in $(J(\lambda))^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ podobni.*

Dokaz. Pri dokazu si pomagajmo z [9]. Naj bo $B = J(\frac{1}{\lambda}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ker za $k \in \mathbb{N}$ velja $(B - \frac{1}{\lambda}I)^k = \begin{cases} \neq 0; & k < n; \\ 0; & k \geq n \end{cases}$, je karakteristični polinom matrike B enak njenemu minimalnemu polinomu $p_B(x) = m_B(x) = (x - \frac{1}{\lambda})^n$.

Ker 0 ni lastna vrednost matrike B, obstaja inverzna matrika B^{-1}. Za vsak $k < n-1$ velja tudi $B^k(B^{-1})^k = I$. Posledično je

$(\lambda I - B^{-1})^k = (\lambda B^{-1})^k(B - \frac{1}{\lambda}I)^k = \begin{cases} \neq 0; & k < n; \\ (\lambda B^{-1})^k \cdot 0 = 0; & k \geq n \end{cases}$, kar pomeni, da je minimalni polinom matrike B^{-1} enak $m_{B^{-1}}(x) = (x-\lambda)^n = p_{B^{-1}}(x)$. Ker je velikost matrike B^{-1} enaka $n \times n$, sklepamo, da je Jordanova forma matrike B^{-1} enaka $J(\lambda)$ oziroma, da obstaja taka matrika P, da velja $B^{-1} = PJ(\lambda)P^{-1}$, iz česar sledi, da je $(B^{-1})^{-1} = J(\frac{1}{\lambda}) = P(J(\lambda))^{-1}P^{-1}$. Matriki $J(\frac{1}{\lambda})$ in $(J(\lambda))^{-1}$ sta si torej res podobni. $\square$

Trditev 4.3.3. *Če je λ_0 ($\lambda_0^2 \neq 1$) lastna vrednost ortogonalne matrike O, je tudi $\frac{1}{\lambda_0}$ lastna vrednost matrike O.*

Poleg tega imamo v Jordanovi formi matrike O za vsako Jordanovo kletko $\begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_0 & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{bmatrix}_{n\times n}$, *ki pripada lastni vrednosti* λ_0*, kletko* $\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_0} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_0} & 1 \\ & & & \frac{1}{\lambda_0} \end{bmatrix}_{n\times n}$ *(enake velikosti), ki pripada lastni vrednosti* $\frac{1}{\lambda_0}$.

Dokaz. Naj bo λ_0 lastna vrednost matrike O in v njen lastni vektor, torej $Ov = \lambda_0 v$. Ker je O obrnljiva in $\lambda_0 \neq 0$, lahko enačbo na obeh straneh pomnožimo z O^{-1} in $\frac{1}{\lambda_0}$. Tako dobimo $\frac{1}{\lambda_0}v = O^{-1}v$, kar pomeni, da je $\frac{1}{\lambda_0}$ lastna vrednost matrike O^{-1}. Toda ker je $O^{-1} = O^T$ in ker po Lemi 3.2.6 $Sp(O^T) = Sp(O)$, je tudi $\frac{1}{\lambda_0}$ lastna vrednost matrike O. S tem smo dokazali prvi del trditve.

Pokažimo še, da v Jordanovi formi ortogonalne matrike O nastopa za vsako kletko $J(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, kjer $\lambda_0^2 \neq 1$, tudi kletka enakih velikosti, ki pripada lastni vrednosti $\frac{1}{\lambda_0}$.

Zapišimo Jordanovo formo matrike O kot direktno vsoto

$$P^{-1}OP = J(\lambda_0)^{n_i\times n_i} \oplus J(\frac{1}{\lambda_0})^{n_j\times n_j} \oplus A_2^{n_k\times n_k},$$

kjer kletka $J(\lambda_0)^{n_i\times n_i}$ pripada lastni vrednosti λ_0, kletka $J(\frac{1}{\lambda_0})^{n_j\times n_j}$ lastni vrednosti $\frac{1}{\lambda_0}$, blok $A_2^{n_k\times n_k}$ pa je direktna vsota preostalih Jordanovih kletk (te lahko pripadajo tudi lastnima vrednostma $\lambda_0, \frac{1}{\lambda_0}$).

Matrika O^{-1} je tako podobna matriki $P^{-1}O^{-1}P = (J(\lambda_0)^{n_i\times n_i} \oplus J(\frac{1}{\lambda_0})^{n_j\times n_j} \oplus A_2^{n_k\times n_k})^{-1} = (J(\lambda_0)^{n_i\times n_i})^{-1} \oplus (J(\frac{1}{\lambda_0})^{n_j\times n_j})^{-1} \oplus (A_2^{n_k\times n_k})^{-1}$, ki pa je po Trditvi 4.3.2 podobna matriki $J(\frac{1}{\lambda_0})^{n_i\times n_i} \oplus J(\lambda_0)^{n_j\times n_j} \oplus (A_2^{n_k\times n_k})^{-1}$.

Toda ker je $O^T = O^{-1}$ in ker ima po Posledici 4.1.5 vsaka matrika povsem enake Jordanove kletke kot njej transponirana matrika, mora veljati

$$P(J(\lambda_0)^{n_i\times n_i} \oplus J(\frac{1}{\lambda_0})^{n_j\times n_j} \oplus A_2^{n_k\times n_k})P^{-1} = P(J(\lambda_0)^{n_j\times n_j} \oplus J(\frac{1}{\lambda_0})^{n_i\times n_i} \oplus (A_2^{n_k\times n_k})^{-1})P^{-1},$$

iz česar sklepamo, da mora biti število in velikost kletk, ki pripadajo lastni vrednosti λ_0 vedno enako številu in velikosti kletk, ki pripadajo lastni vrednosti $\frac{1}{\lambda_0}$. □

Lema 4.3.4. *Za vsako ortogonalno kompleksno matriko* $O = SJS^{-1}$ *obstaja tak polinom* $g(\lambda)$, *da za matriko* $g(O) = P = S\bar{J}S^{-1}$ *velja* $P^T = P$ *in* $P^2 = P$, *za vse Jordanove kletke matrike* O, *pa velja*

$$g(J(\lambda)^{n_i \times n_i}) = \begin{cases} I^{n_i \times n_i}; & \lambda = 1 \\ 0^{n_i \times n_i}; & \lambda \neq 1 \end{cases} .$$

Dokaz. Vemo, da je vsaka matrika podobna svoji Jordanovi formi. Naj bo $O = SJS^{-1} = S(B_1 \oplus B_2)S^{-1}$, kjer blok $B_1 \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$ sestavljajo Jordanove kletke, ki pripadajo lastni vrednosti 1, blok $B_2 \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$ pa Jordanove kletke $J(\lambda_i)$, kjer je $\lambda_i \in Sp(O)$ in $\lambda_i \neq 1$.

Sedaj lahko podobno kot v dokaz Leme 3.3.8 poiščemo tak polinom $g(\lambda)$, da bo $g(B_1) = I \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$ in $g(B_2) = 0 \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$. Potem je

$$P = g(O) = Sg(J)S^{-1} = S(I^{n_1 \times n_1} \oplus 0^{n_2 \times n_2})S^{-1},$$

iz česar sledi $P^2 = P$.

Pokazati moramo le še, da je matrika P simetrična. To bo res natanko tedaj, ko bo $P^T = P$ oziroma ko bo za ortogonalno matriko O veljajo $g(O^T) = g(O^{-1}) = g(O)$.

Ker je $g(O^{-1}) = g(B_1^{-1} \oplus B_2^{-1}) = g(B_1^{-1}) \oplus g(B_2^{-1})$, lahko obravnavamo vsak blok posebej. Pokažimo najprej, da je $g(B_1^{-1}) = g(B_1) = I$. Ker je $B_1 = I + N$, kjer je N nilpotent, s stopnjo nilpotentnosti m in $m \times m$ velikost največje kletke v bloku B_1, mora za neke koeficiente a_i veljati:

$I = g(B_1) = g(I+N) = a_0 I + a_1(I+N) + a_2(I+N)^2 + \ldots + a_{m-1}(I+N)^{m-1} = a_0 I + a_1(I + N) + a_2(I + 2N + N^2) + \ldots + a_{m-1}(I + \binom{m-1}{1}N + \binom{m-1}{2}N^2 + \ldots + \binom{m-1}{m-1}N^{m-1}) = (a_0 + a_1 + \ldots + a_{m-1})I + (a_1 + 2a_2 + \ldots + (m-1)a_{m-1})N + \ldots + (a_{m-2} + (m-1)a_{m-1})N^{m-2} + a_{m-1}N^{m-1}$

oziroma

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + \ldots + a_{m-1} &= 1, \\ a_1 + 2a_2 + \ldots + (m-1)a_{m-1} &= 0, \\ &\vdots \\ a_{m-2} + (m-1)a_{m-1} &= 0, \\ a_{m-1} &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Ker je $(I - N + N^2 - N^3 + \ldots + (-1)^{m-1}N^{m-1})(I + N) = (I - N + N^2 - N^3 + \ldots + (-1)^{m-1}N^{m-1}) + (N - N^2 + N^3 - N^4 + \ldots + (-1)^{m-1}N^{m-1}) = I$, sklepamo, da je inverz bloka B_1 enak $(I - N + N^2 - N^3 + \ldots + (-1)^{m-1}N^{m-1})$, kar lahko zapišemo kot $(I - Np(N))$, kjer je polinom $p(N) = (I - N + N^2 - N^3 + \ldots + (-1)^{m-1}N^{m-1})$.

Potem je

$g(B_1^{-1}) = g(I - Np(N)) = a_0 I + a_1(I - Np(N)) + a_2(I - Np(N))^2 + \ldots + a_{m-1}(I - Np(N))^{m-1} = (a_0 + a_1 + \ldots + a_{m-1})I + (a_1 + 2a_2 + \ldots + (m-1)a_{m-1})(Np(N)) + \ldots + (a_{n_{m-2}} + (m-1)a_{m-1})(Np(N))^{n_{m-2}} + a_{m-1}(Np(N))^{m-1}$, kar pa je po zgornjih enačbah (8) res enako $(a_0 + a_1 + \ldots + a_{m-1})I + 0 + \ldots + 0 = (1 + 0 + \ldots + 0)I = I$.

Sedaj pokažimo še, da je $g(B_2^{-1}) = g(B_2) = 0$. Po Trditvi 4.3.3 imamo za vsako Jordanovo kletko $J(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$, kjer $\lambda_i^2 \neq 1$ v bloku B_2 tudi kletko (enake velikosti) $J(\frac{1}{\lambda_i}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_i} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_i} & 1 \\ & & & \frac{1}{\lambda_i} \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$, ki je po Trditvi 4.3.2 podobna matriki $(J(\lambda_i))^{-1}$. Upoštevajoč dejstvo, da iz $O = SJS^{-1}$ sledi $O^{-1} = SJ^{-1}S^{-1}$, ugotovimo, da vsaki Jordanovi kletki $J(\lambda_i)$ (kjer $\lambda_i^2 \neq 1$) matrike O ustreza v matriki O^{-1} Jordanova kletka enake velikosti $J(\frac{1}{\lambda_i})$, za katero pa je $g(J(\frac{1}{\lambda_i})) = 0$. To pa pomeni, da se vse kletke bloka B_2^{-1} (razen tistih, ki pripadajo lastni vrednosti $\lambda = -1$) s polinomom $g(x)$ preslikajo v 0.

Pokažimo, da se tudi inverz kletk $J(-1)$, ki lahko sestavljajo blok B_2^{-1}, preslikajo z $g(x)$ v 0. Označimo z B_3 blok v B_2, ki ga sestavljajo vse Jordanove kletke $J(-1)$. Zanj lahko podobno kot smo za blok B_1 zapišemo $B_3 = -(I + N_1)$, kjer je N_1 nilpotent s stopnjo nilpotentnosti l in $l \times l$ velikost največje kletke v bloku B_3. Dokaz nadaljujemo povsem analogno kot zgoraj (v primeru bloka B_1) in ugotovimo, da mora za neke koeficiente a_i veljati:
$0 = g(B_3) = g(-(I + N_1)) = a_0 I + a_1(-(I + N_1)) + a_2(-(I + N_1))^2 + a_3(-(I + N_1))^3 + \ldots + a_{l-1}(-(I+N_1))^{l-1} = a_0 I - a_1(I+N_1) + a_2(I+N_1)^2 - a_3(I+N_1)^3 + \ldots + (-1)^{l-1} a_{l-1}(I+N_1)^{l-1} = a_0 I - a_1(I+N_1) + a_2(I+2N_1+N_1^2) - \ldots + (-1)^{l-1} a_{l-1}(I + \binom{l-1}{1} N_1 + \binom{l-1}{2} N_1^2 + \ldots + \binom{l-1}{l-1} N_1^{l-1}) = (a_0 - a_1 + \ldots + (-1)^{l-1} a_{l-1}) I + (-a_1 + 2a_2 - \ldots + (-1)^{l-1}(l-1)a_{l-1}) N_1 + \ldots$
$((-1)^{l-2} a_{l-2} + (-1)^{l-1}(l-1)a_{l-1}) N_1^{l-2} + (-1)^{l-1} a_{l-1} N_1^{l-1}$ oziroma

$$
\begin{aligned}
a_0 - a_1 + \ldots + (-1)^{l-1} a_{l-1} &= 0, \\
-a_1 + 2a_2 - \ldots + (-1)^{l-1}(l-1)a_{l-1} &= 0, \\
&\vdots \\
(-1)^{l-2} a_{l-2} + (-1)^{l-1}(l-1)a_{l-1} &= 0, \\
(-1)^{l-1} a_{l-1} &= 0.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Ker je $-(I - N_1 + N_1^2 - N_1^3 \pm \ldots + (-1)^{l-1} N_1^{l-1})$ inverz bloka B_3, kar lahko zapišemo kot $B_3^{-1} = -(I - N_1 r(N_1))$, kjer je polinom $r(N_1) = (I - N_1 + N_1^2 - N_1^3 \pm \ldots + (-1)^{m-1} N_1^{l-1})$, je $g(B_3^{-1}) = g(-(I - N_1 r(N_1))) = a_0 I + a_1(I - N_1 r(N_1)) + a_2(I - N_1 r(N_1))^2 + \ldots + a_{l-1}(I - N_1 r(N_1))^{l-1} = (a_0 - a_1 + \ldots + (-1)^{l-1} a_{l-1}) I + (-a_1 + 2a_2 - \ldots + (-1)^{l-1}(l-1)a_{l-1})(N_1 r(N_1)) + \ldots + ((-1)^{l-2} a_{l-2} + (-1)^{l-1}(l-1)a_{l-1})(N_1 r(N_1)^{l-2} + (-1)^{l-1} a_{l-1}(N_1 r(N_1))^{l-1}$, kar je po enačbah (9) res enako 0. $g(x)$ je torej v inverzu Jordanovih kletk $J(-1)$ res enak $g((J(-1))^{-1}) = 0$. $\square$

Trditev 4.3.5. *V primeru, da je lastna vrednost ortogonalne matrike O enaka $\lambda_0 = 1$ ali*

$\lambda_0 = -1$, *je število Jordanovih kletk sode velikosti, ki pripadajo* λ_0*, sodo.*

Dokaz. Dokaz razdelimo na tri dele.

- Najprej predpostavimo, da 1 je lastna vrednost ortogonalne matrike O, -1 pa ne. Torej je $det(I-O)=0$ in $det(I+O)\neq 0$, kar pomeni, da za matriko $(I+O)$ obstaja inverz $(I+O)^{-1}$. Sedaj definirajmo matriko

  $$K = (I+O)^{-1}(I-O).$$

  Ker je $(I+O)(K+K^T)(I+O^T) = (I+O)\big((I+O)^{-1}(I-O)+(I-O^T)(I+O^T)^{-1}\big)(I+O^T) = (I+O)(I+O)^{-1}\big((I-O)+(I+O)(I-O^T)(I+O^T)^{-1}\big)(I+O^T) = \big((I-O)(I+O^T)+(I+O)(I-O)^T\big)(I+O^T)^{-1}(I+O^T) = 2I-2OO^T = 0$ in ker sta matriki $(I+O)$ in $(I+O^T)$ obrnljivi, mora veljati $K+K^T=0$. Torej je matrika K antisimetrična.

  S pomočjo definicije matrike K izrazimo še matriko O. Ker je $K=(I+O)^{-1}(I-O)$, je po množenju z leve z $(I+O)$ in po krajšanju $O(I+K)=I-K$. Toda enačbo lahko pomnožimo z $(I+K)^{-1}$, saj je matrika $I+K=(I+O)^{-1}(I+O)+(I+O)^{-1}(I-O)=(I+O)^{-1}(I+O+I-O)=2I(I+O)^{-1}$ obrnljiva. Matrika O je torej enaka $O=(I-K)(I+K)^{-1}$.

  Opazimo, da za racionalno funkcijo $f(\lambda)=(1-\lambda)(1+\lambda)^{-1}$ velja, da je $f(K)=O$ in $f(O)=K$. Torej je po Posledici 3.3.7 število Jordanovih kletk $\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$ v Jordanovi formi matrike O enako številu Jordanovih kletk $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$ v Jordanovi formi matrike K. Toda v Trditvi 4.2.5 smo pokazali, da je število Jordanovih kletk $J(0)$, ki pripadajo antisimetrični matriki K in so sode velikosti, sodo, torej je sodo tudi število Jordanovih kletk $J(1)$, ki pripadajo matriki O in so sode velikosti.

- Primer, ko je -1 lastna vrednost matrike O, 1 pa ni njena lastna vrednost, rešimo na povsem analogen način kot zgoraj, le da namesto O obravnavamo matriko $-O$.

- V zadnjem delu dokaza pa predpostavimo, da sta tako 1 kot -1 lastni vrednosti matrike O, $m_O(\lambda) = (\lambda-1)^{m_1}(\lambda+1)^{m_2}\prod_{j=1}^{u}(\lambda-\lambda_j)^{p_j}(\lambda-\frac{1}{\lambda_j})^{p_j}; (\lambda_j \neq \pm 1; j = 1, 2, \ldots, u)$ njen minimalni polinom in matrika $P = g(O)$, kjer je $g(O)$ polinom iz Leme 4.3.4 tak, da je P simetrični idempotent. To je simetrična matrika, za katero velja $P^2 = P$.

  Definirajmo še matriko

$$Q = h(O) = (O - I)P,$$

  kjer je polinom $h(x) = (x-1)g(x)$.

  Ker je $Q = ((S(B_1^{n_1\times n_1} \oplus B_2^{n_2\times n_2})S^{-1}) - I)S(I^{n_1\times n_1} \oplus 0^{n_2\times n_2})S^{-1} = S((B_1^{n_1\times n_1} - I) \oplus (B_2^{n_2\times n_2} - I))S^{-1}S(I^{n_1\times n_1} \oplus 0^{n_2\times n_2})S^{-1}$ in ker je $(B_1^{n_1\times n_1} - I^{n_1\times n_1})^{m_1} = 0^{n_1\times n_1}$, je matrika Q nilpotentna matrika s stopnjo nilpotentnosti m_1.

  Pokažimo, da je potem matrika $R = Q(Q^T + 2I)$ antisimetrična. Uporabimo dejstvo, da je $P = P^T = P^2$, ter da matrike $P, O, O^T = O^{-1}$ komutirajo, saj so vse polinomi v matriki O. Torej je:

  $R = Q(Q^T + 2I) = (O - I)P(P^T(O - I)^T + 2I) = (OP - P)(P^T(O^T - I) + 2I) = (OP - P)(P^TO^T - P^T + 2I) = OPP^TO^T - OPP^T + 2OP - PP^TO^T + PP^T - 2P = OP^2O^T - P^2O + 2PO - P^2O^T + P^2 - 2P = POO^{-1} - PO + 2PO - PO^T + P - 2P = P + PO - PO^T - P = P(O - O^T)$ iz česar ugotovimo, da je $R^T = P^T(O^T - O) = -P(O - O^T) = -R$, torej je matrika R res antisimetrična.

  Po drugi strani iz definicije matrike $R = Q(Q^T + 2I)$ sledi, da je $R^n = Q^n(Q^T + 2I)^n; n \in \mathbb{N}$. Ker je matrika Q nilpotent, je $(I + \frac{1}{2}Q^T)(I - \frac{1}{2}Q^T + \frac{1}{4}(Q^T)^2 - \ldots) = (I - \frac{1}{2}Q^T + \frac{1}{4}(Q^T)^2 - \ldots) + (\frac{1}{2}Q^T - \frac{1}{4}(Q^T)^2 + \ldots) = I$, torej je matrika $(Q^T + 2I)^n$ obrnljiva, kar pa pomeni, da imata matriki R^n in Q^n za vsak n enak rang.

  Toda za antisimetrične matrike smo v Trditvi 4.2.1 pokazali, da imajo vedno sod rang. Ker je R^n antisimetrična za vsako liho število n, je tudi rang matrik $Q, Q^3, Q^5, \ldots$ sod.

Na strani 59 smo pokazali, da je število Jordanovih kletk antisimetrične matrike, ki pripadajo lastni vrednosti $\lambda = 0$ in so sode velikosti, sodo. V dokazu smo uporabili le dejstvo, da za vsako antisimetrično matriko K velja, da so $K, K^3, K^5 \ldots$ sodega ranga. Ker to velja tudi za antisimetrično matriko Q, isti argumenti pokažejo, da je tudi v Q število Jordanovih kletk $J(0)$, ki so sode velikosti, sodo.

Toda ker je $h(O) = Q$, lahko vsako kletko Jordanove forme matrike O preslikamo s funkcijo $h(x)$. Tako je $h\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{2n\times 2n}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_m \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \alpha_1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{2n\times 2n}$, za neka števila $\alpha_i; i = 1, 2, \ldots m$, kjer je $\alpha_i \neq 0$. Matriko $A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_m \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \alpha_1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{2n\times 2n}$ pa lahko preslikamo v kletko $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{2n\times 2n}$. Velja namreč $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_m \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \alpha_1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{2n\times 2n}$, torej je $A - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} A^2 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & & \alpha_m \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \alpha_1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{2n\times 2n}$. Na podoben način izničimo še preostale superdiagonale in dobimo matriko $\begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \alpha_1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{2n\times 2n}$, ki jo le še pomnožimo z $\frac{1}{\alpha_1}$.

Vsaki Jordanovi kletki $J(0) \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ matrike Q pripada torej v Jordanovi formi matrike O kletka iste velikosti $J(1) \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$. Ker je število kletk $J(0)$ sode velikosti, ki pripadajo matriki Q sodo, mora biti sodo tudi število Jordanovih kletk $J(1)$ sode velikosti, ki pripadajo matriki O.

Na povsem analogen način lahko pokažemo, da je tudi število Jordanovih kletk $J(-1)$ za matriko O sodo. Ponoviti moramo celoten zgoraj opisan postopek in namesto matrike O uporabiti $-O$.

$\square$

Trditev 4.3.6. *Matrika, ki jo bločno diagonalno sestavljajo kletke*

$$J(\lambda_j)^{n_j \times n_j} = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix}, J(\frac{1}{\lambda_j})^{n_j \times n_j} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_j} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \frac{1}{\lambda_j} \end{bmatrix};$$

kjer $j = 1, 2, \ldots, u$ in $\lambda_j \neq 0$ ter

$$J(1)^{\tilde{n}_l \times \tilde{n}_l} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}, J(-1)^{\hat{n}_k \times \hat{n}_k} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & -1 \end{bmatrix};$$

$l = 1, 2, \ldots v; k = 1, 2, \ldots w$ in $\tilde{n}_l, \hat{n}_k$ liha števila, je Jordanova forma neke ortogonalne matrike O.

Dokaz. Za vsako antisimetrično matriko K je po Trditvi 4.3.1 matrika e^K ortogonalna. Poleg tega po Posledici 3.4.5 vsaki kletki $J(\mu_j) = \begin{bmatrix} \mu_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \mu_j \end{bmatrix}$ Jordanove forme matrike K v matriki $e^{J(\mu_j)}$, pripada Jordanova kletka $\begin{bmatrix} e^{\mu_j} & 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & e^{\mu_j} \end{bmatrix}$. Torej lahko za lastne vrednosti λ_j ortogonalne matrike O, kjer $j = 1, 2, \ldots, u$ vpeljemo taka števila μ_j, da je $\lambda_j = e^{\mu_j}$ in da številu $\frac{1}{\lambda_j}$ ustreza število $-\mu_j$. Potem lahko po prejšnjem podpoglavju številom μ_j pripišemo antisimetrične matrike $K(\pm\mu_j)^{n_j \times n_j}$, katerim ustrezajo Jordanove kletke $J(\mu_j) = \begin{bmatrix} \mu_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \mu_j \end{bmatrix}_{n_j \times n_j}$ in $J(-\mu_j) = \begin{bmatrix} -\mu_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & -\mu_j \end{bmatrix}_{n_j \times n_j}$. Enako vpeljemo za lastno vrednost $\lambda = \pm 1$ antisimetrične matrike $K^{\tilde{n}_l \times \tilde{n}_l}, K^{\hat{n}_k \times \hat{n}_k}$, ki jim pripadajo Jordanove kletke $J(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{\tilde{n}_l \times \tilde{n}_l}$, $J(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{\hat{n}_k \times \hat{n}_k}$.

Ob upoštevanju Trditve 4.2.2 moramo le še matrike $\exp(K^{\hat{n}_k \times \hat{n}_k})$ pomnožimo z -1, da dobimo ustrezne bloke, ki pripadajo lastni vrednosti $\lambda = -1$ matrike O. Bločno diagonalna matrika

$$\widetilde{O} = diag(e^{K(\mu_1)^{n_1 \times n_1}}, \ldots, e^{K(\mu_u)^{n_u \times n_u}}; e^{K^{\tilde{n}_1 \times \tilde{n}_1}}, \ldots, e^{K^{\tilde{n}_v \times \tilde{n}_v}}; -e^{K^{\hat{n}_1 \times \hat{n}_1}}, \ldots, -e^{K^{\hat{n}_w \times \hat{n}_w}}) \quad (10)$$

je torej ortogonalna in ima Jordanove kletke kot jih zahteva trditev. □

Posledica 4.3.7. *Poljubna (kompleksna) ortogonalna matrika O je vedno ortogonalno podobna ortogonalni matriki $\widetilde{O}$, definirani v (10).*

Dokaz. Dokaz sledi iz pravkar dokazane trditve in Trditve 3.5.2. □

Posledica 4.3.8. *Kompleksno ortogonalno matriko O, ki nima -1 za lastno vrednost, lahko zapišemo kot $O = e^K$, kjer je matrika K antisimetrična.*

Dokaz. Po Posledici 4.3.7 lahko matriko O zapišemo kot $O = O_1\widetilde{O}O_1^{-1}$, kjer je matrika O_1 ortogonalna $\widetilde{O} = diag(e^{K(\mu_1)^{n_1\times n_1}}, \ldots, e^{K(\mu_u)^{n_u\times n_u}}; e^{K^{\tilde{n}_1\times\tilde{n}_1}}, \ldots, e^{K^{\tilde{n}_v\times\tilde{n}_v}})$ in $K(\mu_i)^{n_i\times n_i}$ antisimetrične. Kar lahko po Lemi 3.4.2 preoblikujemo v

$$O = O_1 \exp(diag(K(\mu_1)^{n_1\times n_1}, \ldots, K(\mu_u)^{n_u\times n_u}; K^{\tilde{n}_1\times\tilde{n}_1}, \ldots, K^{\tilde{n}_v\times\tilde{n}_v}))O_1^{-1}.$$

Nato uporabimo dejstvo, da je $O_1e^XO_1^{-1} = e^{O_1XO_1^{-1}}$ in dobimo $O = e^{K_1}$, kjer $K_1 = O_1diag\big(K(\mu_1)^{n_1\times n_1}, \ldots, K(\mu_u)^{n_u\times n_u}; K^{\tilde{n}_1\times\tilde{n}_1}, \ldots, K^{\tilde{n}_v\times\tilde{n}_v}\big)O_1^{-1}$. □

Zgled 4.3.9. *Pokažimo, da ortogonalne matrike $-I \in \mathbb{C}^{n\times n}$, kjer n liho število, ne moremo zapisati kot e^K, kjer je K antisimetrična matrika.*

Denimo, da obstaja taka antisimetrična matrika K, da je $e^K = -I$, ki ima Jordanovo formo sestavljeno iz Jordanovih kletk $J(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$.

Ker je po Trditvi 3.4.3 eksponent $e^{J(\lambda)} = e^{\lambda}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(k-1)!} \\ & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$ in ker obstaja tak polinom $p(x)$, da je $p\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(k-1)!} \\ & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$, to pomeni, da kletka v matriki $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(k-1)!} \\ & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$ ne razpade.

Torej morajo biti vse kletke $J(\lambda)$ velikosti 1×1, saj matriko $-I$ sestavlja n Jordanovih kletk $J(-1)$, velikosti 1×1. Toda K je antisimetrična matrika lihe velikosti, zato njena Jordanova forma vsebuje vsaj eno ničelno Jordanovo kletko in ker $e^0 \neq -1$, antisimetrična matrika K lihe velikosti, za katero bi bilo $e^K = -I$, ne obstaja.

5 ZAKLJUČEK

V magistrski nalogi smo spoznali vse možne oblike Jordanovih form, ki jih lahko imajo kompleksne simetrične, antisimetrične in ortogonalne matrike. Za poljubno kompleksno simetrično, antisimetrično in ortogonalno matriko znamo zapisati tudi kanonične forme, ki so bolj zapletena kot kanonične forme realnih simetričnih, antisimetričnih oziroma ortogonalnih matrik, saj so slednje matrike normalne.

Literatura

[1] F. Blume, C. E. Piston, *Applied calculus for scientists and engineers: a journey in dialogues*, Jones and Bartlett Publishers, Sudbury, 2005.

[2] F. R. Gantmacher, *Applications of the theory of matrix*, Interscience Publishers, New York, London, 1959.

[3] H. Haber, *Diagonalization by a unitary similarity transformation*. Dostopno na spletu 21. 6. 2011: `http://scipp.ucsc.edu/`haber/ph116A/diag 11.pdf.

[4] L. Harvill, *Applied Matrix Algebra*, Xlibris Corporation, USA, 2011.

[5] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[6] K. Jänich, *Linear Algebra: with 58 illustrations*, Springer, New York [etc.], 1994.

[7] T. Košir, *Linearna algebra za študente Praktične matematike*. Dostopno na spletu 8. 2. 2011: `http://www.fmf.uni-lj.si/`kosir/poucevanje/linalg.html.

[8] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York [etc.], 1976.

[9] O. Ruff, *The Jordan Canonical Forms of complex orthogonal and skew-symmetric matrices: characterization and examples*. Dostopno na spletu 6. 8. 2011: `http://www.math.iastate.edu/thesisarchive/MSC/Ru_MSCSS07.pdf`.

[10] Wolfram MathWorld, *Unitary matrix*. Dostopno na spletu 1. 4. 2011: `http://mathworld.wolfram.com/UnitaryMatrix.html`.