

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Magistrsko delo

Cikloidne krivulje s pitagorejskim hodografom

(Pythagorean-hodograph Cycloidal curves)

Ime in priimek: Vesna Volaš

Študijski program: Matematične znanosti, 2. stopnja

Mentor: izr. prof. dr. Vito Vitrih

Koper, september 2017

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Vesna VOLAŠ

Naslov magistrskega dela: Cikloidne krivulje s pitagorejskim hodografom

Kraj: Koper

Leto: 2017

Število listov: 60 Število slik: 22

Število referenc: 21

Mentor: izr. prof. dr. Vito Vitrih

Somentor: /

Ključne besede: polinomska krivulja, pitagorejski hodograf, cikloidne krivulje, algebraične-trigonometrijske krivulje

Math. Subj. Class. (2010): 65D05, 65D17

UDK: 512.772(043.2)

Izvleček:

Magistrsko delo obravnava polinomske, cikloidne in algebraično-trigonometrijske krivulje s pitagorejskim hodografom (PH krivulje). V uvodu so predstavljene osnovne definicije, kot so parametrična krivulja, regularna parametrizacija in različne baze krivulj. Nato so predstavljene glavne lastnosti ravninskih polinomskih PH krivulj, in sicer: polinomska parametrična hitrost, polinomska dolžina loka, racionalna enotska tangenta, racionalna krivulja odmika, enostavna karakterizacija kontrolnih točk in kompleksna reprezentacija PH krivulj. V nadaljevanju so opisane lastnosti prostorskih PH krivulj. Nato smo se osredotočili na cikloidne PH krivulje. Opisali smo njihove lastnosti ter preučili njihovo geometrijsko karakterizacijo. Opisali smo Hermiteovo interpolacijo s PHC krivuljami. Spoznali smo še algebraično-trigonometrijske krivulje s pitagorejskim hodografom (ATPH krivulje). Obravnavali smo njihove lastnosti in jih primerjali s polinomskimi krivuljami s pitagorejskim hodografom.

Key words documentation

Name and SURNAME: Vesna VOLAŠ

Title of the thesis: Pythagorean-hodograph Cycloidal curves

Place: Koper

Year: 2017

Number of pages: 60

Number of figures: 22

Number of references: 21

Mentor: Assoc. prof. Vito Vitrih, PhD

Keywords: polynomial curve, pythagorean-hodograf, cycloidal curve, algebraic-trigonometric curve

Math. Subj. Class. (2010): 65D05, 65D17

Abstract: The master's thesis it is about polynomial, cycloidal and algebraic-trigonometric curves with Pythagorean-hodograf (PH curves). The introduction consists of basic definitions, such as parametric curves, regular parametrization and different basis of curves. The main properties of planar PH curves are then represented: polynomial parametric speed, polynomial arc length, rational unit tangent, rational offset curves, simple characterization of control points and complex representation of PH curves. Later, properties of spatial PH curves are described. Then we focused on the cycloidal PH curves, their properties and studied their geometric characterization. We described Hermite interpolation with PHC curves. We also learned algebraic-trigonometric curves with Pythagorean-hodograf (ATPH curves). We analyzed their properties and compared them with polynomial curves with Pythagorean-hodograf.

Zahvala

Za pomoč pri izdelavi magistrske naloge se za strokovno usmerjanje in nasvete zahvaljujem mentorju izr. prof. dr. Vitu Vitrihu.

Zahvaljujem se tudi članom družine, ki so mi ves čas podiplomskega študija stali ob strani in me na tej poti podpirali.

Kazalo vsebine

1	Uvod	1
2	Osnovne definicije	3
3	Ravninske polinomske parametrične krivulje s pitagorejskim hodografom	6
3.1	Lastnosti ravninskih PH krivulj	7
3.1.1	Parametrična hitrost in dolžina loka	8
3.1.2	Enotska tangenta	8
3.1.3	Krivulje odmika	10
3.2	Kontrolne točke Bézierovih PH krivulj	10
3.3	Kompleksna reprezentacija PH krivulj	15
3.4	Hermiteova interpolacija z ravninskimi PH krivuljami stopnje 5	17
4	Prostorske polinomske parametrične krivulje s pitagorejskim hodografom	20
4.1	Lastnosti prostorskih PH krivulj	21
5	Cikloidne krivulje s pitagorejskim hodografom	24
6	Hermiteova interpolacija s cikloidnimi krivuljami s pitagorejskim hodografom	32
7	Algebraične-trigonometrijske krivulje s pitagorejskim hodografom	38
7.1	Normalizirana B-baza za trigonometrijski in mešan algebraično-trigonometrijski prostor	38
7.2	Algebraično-trigonometrijske Bézierove krivulje	40
7.2.1	Algebraično-trigonometrijske PH krivulje in njihove lastnosti	42
7.3	C^1 Hermiteov interpolacijski problem	45
7.3.1	ATPH interpolanti za rešitev C^1 Hermiteovega problema	46
8	ZAKLJUČEK	50

9 Literatura

51

Kazalo slik

1	Parametrična krivlja Strofoida [21].	4
2	Parametrična krivulja s tangentnimi vektorji [2].	9
3	Krivulje odmika.	10
4	Kubična krivulja je PH krivulja, če velja izrek 3.13.	12
5	Primer štirih različnih PH krivulj stopnje 5 po (3.15) za dve različni množici interpolacijskih podatkov.	19
6	Frenetovo ogrodje $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ ob vijačnici [5].	22
7	Frenetovo ogrodje z ravninami.	23
8	Eden izmed dveh primerov, ko je $\text{sign}(\xi_0 \xi_2) = -1$	27
9	Primer, ko je $\varphi_{12} \in \{0, \pi\}$	28
10	Primer, ko je $\varphi_{02} = 2\pi - \varphi_{01} - \varphi_{12}$	29
11	Primer, ko je $\varphi_{02} = \varphi_{01} + \varphi_{12}$	29
12	Primer, ko je $\varphi_{02} = \varphi_{01} - \varphi_{12}$	30
13	Primer, ko je $\varphi_{02} = \varphi_{12} - \varphi_{01}$	30
14	Za parametre c_{01}, c_{12} in c_{02} smo izbrali $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{8}$ in $\frac{6\pi}{4}$. V črnem območju obstaja en PHC interpolant, v temno sivem območju obstajata dva PHC interpolanta, v svetlo sivem območju pa ni PHC interpolantov. Belo območje predstavlja območje, kjer niti ni izpolnjen pogoj (6.2). . .	36
15	Različne rešitve Herimteovega interpolacijskega problema. Črna krivulja predstavlja rešitev pri parametru $\alpha = \frac{\pi}{4}$, siva krivulja pri $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, črna črtkana krivulja pri $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ in črtkana siva krivulja pri parametru $\alpha = \frac{7\pi}{4}$. . .	37
16	Bazne funkcije $\tilde{B}_i^2(t), i = 0, 1, 2$, za $t \in [0, \alpha]$ in $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (primer a), $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (primer b), $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ (primer c), $\alpha \rightarrow \pi$ (primer d).	39
17	Bazne funkcije $\tilde{B}_i^5(t), i = 0, 1, \dots, 5$, za $t \in [0, \alpha]$ in $\alpha = \pi$ (primer a), $\alpha = \frac{5}{4}\pi$ (primer b), $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ (primer c), $\alpha \rightarrow 2\pi$ (primer d).	41
18	Primerjava Bézierove krivulje stopnje 5 (zelena krivulja) in AT Bézierove krivulje (rdeče krivulje) za $\alpha = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$	41

- 19 Reprodukcijska lokov različnih trigonometrijskih krivulj z AT Bézierovimi krivuljami s komponentami iz prostora U_5 za $\alpha = \frac{3}{4}\pi$ 42
- 20 Primerjava ATPH krivulj (rdeče krivulje), kjer vzamemo $\mathbf{p}_0 = 0, \mathbf{p}_5 = 1$ in tangentna vektorja $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_2$ z vrednostma, zapisanima pod obema slikama za ++ izbiro pri \mathbf{w}_0 in \mathbf{w}_2 ter vrednosti $\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{5}\pi, \frac{3}{5}\pi, \frac{2}{3}\pi \right\}$ s (++) PH krivuljo stopnje pet (modra krivulja). Z vsemi krivuljami rešimo C^1 Hermiteov interpolacijski problem. 48
- 21 Štiri možne kombinacije ATPH krivulj za $\mathbf{p}_0 = 5i, \mathbf{p}_5 = -3 - 4i, \mathbf{d}_0 = \mathbf{d}_2 = 25 - 15i$ za različne vrednosti $\alpha \in (0, \pi)$ 48
- 22 Obnašanje dolžine loka S_α ATPH krivulj iz slike 21 za $\alpha \in (0, \pi)$ in za različne izbire predznakov $\{(++), (+-), (-+), (---)\}$ 49

1 Uvod

Tema sodi na področje računalniško podprtega geometrijskega načrtovanja (Computer Aided Geometric Design - CAGD), ki leži na presečišču matematike in računalništva. To področje se je začelo razvijati okrog leta 1960, njegova osnovna tematika pa je aproksimacija in interpolacija s polinomskimi in racionalnimi objekti, kar ima svojo uporabo v načrtovanju in proizvodnji, računalniški grafiki, animaciji ...

Poznamo številne interpolacijske in aproksimacijske tehnike, s katerimi lahko konstruiramo najosnovnejše objekte (Bézierove krivulje in ploskve, odsekoma polinomske B-zlepke in racionalne B-zlepke (NURBS)), vendar včasih to ni dovolj, saj morda želimo, da imajo krivulje in ploskve dodatne praktične lastnosti. Natančneje: recimo, da želimo poiskati podrazred polinomskih krivulj, ki bi imele naslednje lastnosti: odsekoma polinomske ločno dolžino, racionalne krivulje odmika, racionalno ogrodje ... Razlog za to je, da znajo računalniški programi, ki pokrivajo področji CAD in CAGD večinoma oblikovati le s polinomskimi in racionalnimi objekti. Poseben podrazred polinomskih krivulj, ki zadošča tem zahtevam, so polinomske krivulje s pitagorejskim hodografom (t. i. polinomske PH krivulje). Te krivulje sta prva raziskovala Farouki in Sakkalis leta 1990 [8]. Z uporabo PH krivulj lahko rešimo številne probleme v aplikacijah, še posebej v t.i. računalniško-numerično-vodenem strojništvu (CNC), saj na primer ni potrebno aproksimirati vzporednih krivulj, ampak jih lahko predstavimo eksaktno. Poleg tega nam ni treba numerično računati ločne dolžine krivulj. PH krivulje imajo manj prostostnih stopenj v primerjavi s splošnimi parametričnimi krivuljami, ampak imajo lastnosti, ki so uporabne v številnih posebnih metodah, med drugimi tudi za konstrukcijo gibanj, ki temeljijo na rotacijsko minimizirajočih ogrodjih. Cikloidne krivulje s pitagorejskim hodografom predstavljajo posplošitev polinomskih krivulj s pitagorejskim hodografom. T.i. PHC krivulje posedujejo podobne lepe lastnosti kot polinomske PH krivulje. Zanimiva je obravnava različnih interpolacijskih shem z uporabo cikloidnih krivulj s pitagorejskim hodografom. S cikloidnimi krivuljami s pitagorejskim hodografom lahko rešimo G^1 Hermiteov interpolacijski problem. Da lahko rešimo tudi zahtevnejši C^1 interpolacijski problem, moramo vzeti še splošnejši razred krivulj s pitagorejskim hodografom, t.i. algebraino-trigonometrijske krivulje s pitagorejskim hodografom.

V magistrskem delu bomo obravnavali naslednja poglavja:

- V drugem poglavju bomo zapisali osnovne definicije, kot so parametrična krivulja, regularna parametrizacija, predstavili različne polinomske baze ...
- V tretjem poglavju bomo opisali ravninske polinomske PH krivulje. Obravnavali bomo številne njihove uporabne lastnosti, kot so polinomska parametrična hitrost, polinomska dolžina loka, racionalna enotska tangenta, racionalne krivulje odmika ... Pogledali si bomo tudi strukturo kontrolnih točk Bézierove PH krivulje ter kompleksno reprezentacijo teh krivulj.
- V četrtem poglavju bomo spoznali prostorske polinomske PH krivulje in predstavili njihove lastnosti. Nekatere izmed njih so prostorske PH krivulje “podedovale” od polinomskih PH krivulj, nekatere so povsem nove.
- V petem poglavju bomo obravnavali cikloidne PH krivulje in spoznali njihovo geometrijsko karakterizacijo.
- V šestem poglavju bomo raziskali Hermiteovo G^1 interpolacijo s cikloidnimi krivuljami s pitagorejskim hodografom.
- V sedmem poglavju bomo spoznali algebraično-trigonometrijske krivulje s pitagorejskim hodografom (ATPH krivulje). Obravnavali bomo njihove lastnosti in jih primerjali s polinomskimi krivuljami s pitagorejskim hodografom.

2 Osnovne definicije

V tem poglavju bomo spoznali polinomske krivulje s pitagorejskim hodografom ter njihove lastnosti.

Polinomske krivulje s pitagorejskim hodografom tvorijo poseben podrazred v razredu polinomskih krivulj. Za polinomske krivulje je značilna predvsem preprosta predstavljivost, saj imamo dan seznam koeficientov, hiter izračun vrednosti s pomočjo Hornerjevega algoritma, zapis v različnih bazah, kot so: monomska, Newtonova, Bernsteinova ... Ravno to jih dela tako uporabne na naslednjih področjih [17]:

- računalniško podprto načrtovanje,
- računalniško podprto geometrijsko načrtovanje,
- računalniško podprta proizvodnja in
- računalniško numerično vodenje.

Sedaj bomo definirali parametrično krivuljo \mathbf{r} v prostoru \mathbb{R}^2 [4].

Definicija 2.1. **Ravninska parametrična krivulja** je krivulja $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, oblike

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b] \subset \mathbb{R}.$$

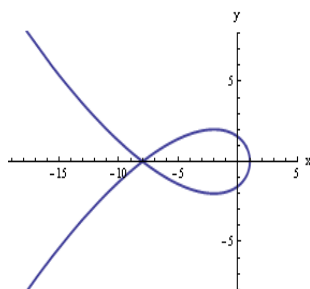
V tej magistrski nalogi se bomo predvsem ukvarjali s krivuljami \mathbf{r} , pri katerih je odvod $\mathbf{r}' \neq 0$ v vsaki točki:

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \neq 0, \quad \forall t \in [a, b] \subset \mathbb{R}.$$

Takšno parametrizacijo krivulje imenujemo **regularna parametrizacija**, krivulji pa rečemo **regularna krivulja**.

V več dimenzijah velja podobno. Parametrično krivuljo v prostoru \mathbb{R}^d predstavimo kot

$$\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t))^T,$$



Slika 1: Parametrična krivlja Strofoida [21].

kjer x_i predstavlja i -to komponento krivulje \mathbf{r} . Krivuljo \mathbf{r} imenujemo **polinomska krivulja**, če so vse komponente krivulje polinomi.

Kot smo že omenili na začetku, lahko polinomske krivulje predstavimo v različnih bazah, in sicer:

- Monomska baza:

$$p_i(t) = t^i, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

- Newtonova baza:

$$p_0(t) = 1,$$

$$p_i(t) = (t - t_0)(t - t_1) \cdots (t - t_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

- Bernsteinova baza:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad \binom{n}{i} := \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} & 0 \leq i \leq n, \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Bernsteinov polinom p je linearna kombinacija Bernsteinovih baznih polinomov,

$$p(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t).$$

Polinomsko parametrično krivuljo v Bernsteinovi bazi imenujemo polinomska Bézierova krivulja.

Definicija 2.2. Naj bo krivulja $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$. Vektorsko polje

$$\mathbf{r}'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_d(t))^T, \quad t \in [a, b],$$

imenujemo **hodograf krivulje** \mathbf{r} .

Definicija 2.3. Polinomska krivulja $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t))^T \in \mathbb{R}^d$ ima pitagorejski hodograf, če obstaja tak polinom σ , da je

$$\sum_{i=1}^d (x'_i(t))^2 = \sigma(t)^2.$$

Na kratko ji rečemo **polinomska PH krivulja**.

V naslednjem poglavju bomo spoznali ravninske polinomske PH krivulje.

3 Ravninske polinomske parametrične krivulje s pitagorejskim hodografom

Krivuljo $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))^T$ imenujemo ravninska krivulja s pitagorejskim hodografom, če komponente njenega hodografa $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t))^T$ ustrezajo pogoju

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \sigma^2(t),$$

kjer je σ nek polinom. Velja, da če je krivulja \mathbf{r} stopnje n , potem je polinom σ stopnje $n - 1$.

Primer 3.1. Dano imamo naslednjo krivuljo \mathbf{r} s hodografom \mathbf{r}' :

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 3t^3 - 4t \\ 6t^2 + 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} 9t^2 - 4 \\ 12t \end{pmatrix}.$$

Krivulja \mathbf{r} ima pitagorejski hodograf, ker velja

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = (9t^2 - 4)^2 + (12t)^2 = (9t^2 + 4)^2.$$

Torej velja enačba

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \sigma^2(t), \quad \sigma(t) = 9t^2 + 4.$$

Naslednji izrek nam bo povedal, kdaj trije polinomi zadoščajo pogoju pitagorejske trojice.

Izrek 3.2. (Kubota) Naj bodo $a(t), b(t), c(t)$ trije realni polinomi. Ti zadoščajo pitagorejskemu pogoju

$$a^2(t) + b^2(t) = c^2(t) \tag{3.1}$$

natanko tedaj, ko obstajajo polinomi $u(t), v(t)$ in $w(t)$, da je

$$\begin{aligned} a(t) &= w(t)(u^2(t) - v^2(t)), \\ b(t) &= 2w(t)u(t)v(t), \\ c(t) &= w(t)(u^2(t) + v^2(t)), \end{aligned} \tag{3.2}$$

kjer sta si polinoma $u(t)$ in $v(t)$ tuja medseboj.

Dokaz.

(\Leftarrow) Enakosti (3.2) vstavimo v enačbo (3.1). Iz tega sledi, da je (3.2) zadosten pogoj.

(\Rightarrow) Predpostavimo, da je $w(t) = \gcd(a(t), b(t), c(t))$, kjer \gcd označuje največji skupni delitelj, in definirajmo polinome

$$\tilde{a}(t) = \frac{a(t)}{w(t)}, \quad \tilde{b}(t) = \frac{b(t)}{w(t)}, \quad \tilde{c}(t) = \frac{c(t)}{w(t)},$$

ki so med seboj paroma tuji in zadoščajo pitagorejskemu pogoju

$$\tilde{a}^2(t) + \tilde{b}^2(t) = \tilde{c}^2(t).$$

Če zgornjo enačbo preoblikujemo, dobimo

$$\tilde{b}^2(t) = \tilde{c}^2(t) - \tilde{a}^2(t) = (\tilde{c}(t) + \tilde{a}(t))(\tilde{c}(t) - \tilde{a}(t)).$$

Vemo, da so $\tilde{a}(t)$, $\tilde{b}(t)$, $\tilde{c}(t)$ paroma tuji med seboj ter da $(\tilde{c}(t) + \tilde{a}(t))$ in $(\tilde{c}(t) - \tilde{a}(t))$ nimata skupnih ničel. Iz tega sledi, da je vsaka ničla polinoma \tilde{b}^2 hkrati tudi ničla enega izmed polinomov $\tilde{c} + \tilde{a}$ in $\tilde{c} - \tilde{a}$. Torej ima vsaka ničla polinomov $\tilde{c} + \tilde{a}$ in $\tilde{c} - \tilde{a}$ sodo večkratnost. Tako lahko zapišemo polinoma kot

$$\tilde{c}(t) + \tilde{a}(t) = 2u^2(t) \quad \text{in} \quad \tilde{c}(t) - \tilde{a}(t) = 2v^2(t),$$

kjer sta $u(t)$ in $v(t)$ paroma tuja. Dobimo

$$\tilde{a}(t) = u^2(t) - v^2(t), \quad \tilde{c}(t) = u^2(t) + v^2(t), \quad \tilde{b}(t) = 2u(t)v(t). \quad (3.3)$$

Če (3.3) pomnožimo z $w(t)$ dobimo (3.2). □

Iz zgornjega izreka sledi naslednja posledica.

Posledica 3.3. *Dane imamo polinome $u(t), v(t), w(t)$, kjer sta $u(t)$ in $v(t)$ tuja med seboj. Krivulja $\mathbf{r}(t)$ bo imela pitagorejski hodograf, natanko tedaj ko za komponenti njenega hodografa velja*

$$x'(t) = (u^2(t) - v^2(t))w(t), \quad y'(t) = 2u(t)v(t)w(t). \quad (3.4)$$

Definicija 3.4. Krivuljo \mathbf{r} imenujemo **primitivna PH krivulja**, če sta polinoma $u(t), v(t)$ paroma tuja in $w(t) = 1$.

V splošnem lahko za primitivno krivuljo povemo, da je hodograf neničelen na celotnem definicijskem območju. Iz tega sledi, da je takšna krivulja \mathbf{r} povsod regularna krivulja.

3.1 Lastnosti ravninskih PH krivulj

Sedaj se bomo osredotočili na lastnosti regularnih ravninskih PH krivulj.

3.1.1 Parametrična hitrost in dolžina loka

Dolžina loka je razdalja na krivulji med dvema izbranimi točkama.

Definicija 3.5. Dolžina loka regularne krivulje $\mathbf{r} = (x(t), y(t))^T$ med dvema točkama $\mathbf{r}(t_1)$ in $\mathbf{r}(t_2)$ je definirana kot

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Definicija 3.6. Parametrična hitrost je odvod dolžine loka in sicer

$$\frac{ds(t)}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

Trditev 3.7. Regularne PH krivulje imajo polinomsko parametrično hitrost.

Dokaz. Iz definicije 3.6 vemo, da velja

$$\frac{ds(t)}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{\sigma(t)^2} = |\sigma(t)|.$$

Ker je krivulja regularna, sledi $\sigma(t) \neq 0$ za $\forall t$. Torej $|\sigma|$ je polinom, saj je ves čas istega predznaka in tako velja $|\sigma| = \pm\sigma$ oziroma

$$|\mathbf{r}'(t)| = \pm\sigma(t).$$

□

3.1.2 Enotska tangenta

Najprej definirajmo enotsko tangento, enotsko normalo in fleksijsko ukrivljenost [5].

Definicija 3.8. Enotska tangenta krivulje \mathbf{r} je definirana kot

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

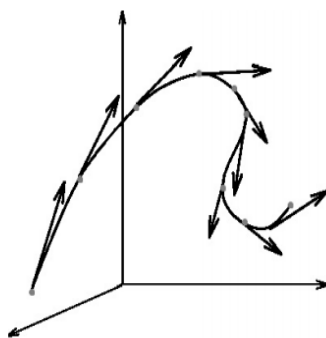
Na sliki 2 lahko opazimo, da tangentni vektorji spreminjajo smer v točkah, kje se krivulja “krivi” [2].

Trditev 3.9. Enotska tangenta regularne PH krivulje \mathbf{r} je racionalna krivulja.

Dokaz. Velja

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{(x'(t), y'(t))^T}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{(x'(t), y'(t))^T}{|\sigma(t)|}.$$

Ker je \mathbf{r} regularna, je $|\sigma|$ polinom (in ne odsekoma polinomska funkcija kot v splošnem). Posledično je torej $\mathbf{t}(t)$ racionalna krivulja. □



Slika 2: Parametrična krivulja s tangentskimi vektorji [2].

Za enotsko tangento in normalo velja, da je njuna dolžina enaka ena ter sta pravokotni med seboj. Vemo, da mora biti skalarni produkt tangente in normale ničelen, zato lahko definiramo enotsko normalo krivulje \mathbf{r} kot

$$\mathbf{n}(t) = \frac{(-y'(t), x'(t))^T}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{(-y'(t), x'(t))^T}{|\sigma(t)|}. \quad (3.5)$$

Iz zgornje enačbe je razvidno, da je tudi enotska normala regularne PH krivulje racionalna krivulja.

Sedaj definiramo še fleksijsko ukrivljenost krivulje \mathbf{r} , ki jo označimo s $\kappa(t)$. Fleksijska ukrivljenost krivulje \mathbf{r} meri spreminjanje smeri tangente. Podana je kot

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}, \quad (3.6)$$

kjer je \times vektorski produkt.

Izrek 3.10. *Fleksijska ukrivljenost regularnih PH krivulj je podana kot*

$$\kappa(t) = 2 \frac{u(t)v'(t) - u'(t)v(t)}{(\sigma(t))^2}. \quad (3.7)$$

Dokaz. Predpostavimo, da je krivulja regularna PH krivulja, zato je $w(t) = 1$ in $|\mathbf{r}'(t)| = \sigma(t) = u^2(t) + v^2(t)$. V enačbo (3.6) vstavimo

$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t)) = (u^2(t) - v^2(t), 2u(t)v(t))$$

in

$$\mathbf{r}''(t) = (x''(t), y''(t)) = (2u(t)u'(t) - 2v(t)v'(t), 2(v(t)u'(t) + u(t)v'(t))).$$

Dobimo

$$\kappa(t) = \frac{((u^2(t) - v^2(t))(2v(t)u'(t) + 2u(t)v'(t)) - 2u(t)v(t)(2u(t)u'(t) - 2v(t)v'(t)))}{(u^2(t) + v^2(t))^3}.$$

Enačbo preuredimo in dobimo

$$\kappa(t) = 2 \frac{(u^2(t) + v^2(t))(u(t)v'(t) - v(t)u'(t))}{(u^2 + v^2)^3} = 2 \frac{u(t)v'(t) - u'(t)v(t)}{(\sigma(t))^2}.$$

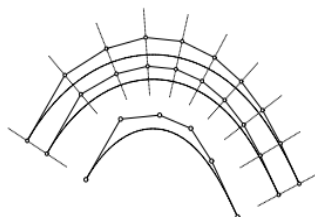
□

Iz enačbe (3.7) je razvidno, da je fleksijska ukrivljenost regularnih PH krivulj tudi racionalna krivulja.

3.1.3 Krivulje odmika

Definicija 3.11. Dano imamo PH krivuljo \mathbf{r} . Krivuljo, ki je odmaknjena v vsaki točki začetne krivulje \mathbf{r} za konstanten odmik d v smeri enotske normale \mathbf{n} v dani točki, imenujemo **krivulja odmika**, ki jo definiramo kot

$$\mathbf{r}_d(t) = \mathbf{r}(t) + d\mathbf{n}(t).$$



Slika 3: Krivulje odmika.

Iz definicije lahko razberemo, da so tangente krivulje \mathbf{r}_d vzporedne s tangentami začetne krivulje \mathbf{r} . V vsaki točki imata \mathbf{r} in \mathbf{r}_d skupno normalo.

Trditev 3.12. *Regularne PH krivulje imajo racionalne krivulje odmika.*

Dokaz. Če upoštevamo definicijo enotske normale (3.5), dobimo

$$\mathbf{r}_d(t) = \mathbf{r}(t) + d\mathbf{n}(t) = \frac{(x(t), y(t))|\sigma(t)| + d(-y'(t), x'(t))}{|\sigma(t)|}.$$

Ker je krivulja regularna PH krivulja, je $|\sigma(t)|$ polinom. Posledično je torej $\mathbf{r}_d(t)$ racionalna krivulja. □

3.2 Kontrolne točke Bézierovih PH krivulj

PH krivulja je regularna, če velja $w(t) = 1$ ter $u(t)$ in $v(t)$ sta si tuja (glej (3.4)). Preučimo sedaj netrivialen primer regularne PH krivulje stopnje 3.

V enačbo (3.4) vstavimo pogoj $w(t) = 1$. Za polinoma $u(t)$ in $v(t)$ velja, da sta linearna in medseboj tuja si polinoma. Krivulja \mathbf{r} ima stopnjo 3. Zapišimo $u(t)$ in $v(t)$ v Bernsteinovi obliki

$$u(t) = u_0 B_0^1(t) + u_1 B_1^1(t), \quad v(t) = v_0 B_0^1(t) + v_1 B_1^1(t). \quad (3.8)$$

Ker sta $u(t)$ in $v(t)$ tuja, mora veljati $u_0 v_1 \neq u_1 v_0$. Poleg tega pa še velja, da $u(t)$ in $v(t)$ nista konstantna, torej vsaj eden izmed njiju mora imeti stopnjo 1, kar lahko zapišemo kot $(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2 \neq 0$.

Enačbi (3.8) vstavimo v enačbo (3.4) in dobimo

$$\begin{aligned} x'(t) &= (u_0^2 - v_0^2) B_0^2(t) + (u_0 u_1 - v_0 v_1) B_1^2(t) + (u_1^2 - v_1^2) B_2^2(t), \\ y'(t) &= 2u_0 v_0 B_0^2(t) + (u_0 v_1 - u_1 v_0) B_1^2(t) + 2u_1 v_1 B_2^2(t). \end{aligned}$$

Z integracijo hodografa dobimo kubično Bézierovo krivuljo kot

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p}_0 B_0^3(t) + \mathbf{p}_1 B_1^3(t) + \mathbf{p}_2 B_2^3(t) + \mathbf{p}_3 B_3^3(t),$$

kjer so kontrolne točke definirane kot [18]

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0 v_0), \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{3}(u_0 u_1 - v_0 v_1, u_0 v_1 + u_1 v_0), \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{3}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1 v_1), \end{aligned} \quad (3.9)$$

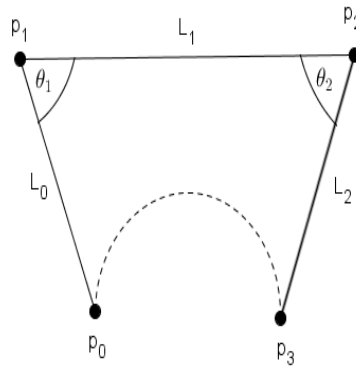
\mathbf{p}_0 pa je poljubna kontrolna točka zaradi integracijske konstante. Kontrolne točke smo izrazili s polinomoma $u(t)$ in $v(t)$. Obratno ne velja, zato bomo spoznali, kakšnim pogojem morajo zadostiti kontrolne točke, da bosta polinoma u in v obstajala in bo krivulja \mathbf{r} imela pitagorejski hodograf.

Izrek 3.13. *Dano imamo kubično krivuljo s kontrolnimi točkami $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ in \mathbf{p}_3 . Označimo z $L_i := \|\Delta \mathbf{p}_{i-1}\|$, $i = 0, 1, 2$, dolžino odseka kontrolnega poligona med točkama \mathbf{p}_i in \mathbf{p}_{i+1} , in naj bosta θ_1 in θ_2 kota med stranicama kontrolnega poligona pri točkah \mathbf{p}_1 in \mathbf{p}_2 . Potem ima krivulja \mathbf{r} pitagorejski hodograf natanko tedaj, ko je*

$$L_1 = \sqrt{L_0 L_2} \quad \text{in} \quad \theta_1 = \theta_2.$$

Posledica 3.14. *Zgornja pogoja sta ekvivalentna pogoju, da sta trikotnika s točkama $\mathbf{p}_i, i = 0, 1, 2$, in $\mathbf{p}_i, i = 1, 2, 3$, podobna.*

V dokazu izreka 3.13 bomo potrebovali definicijo skalarnega produkta in vektorskega produkta [20].



Slika 4: Kubična krivulja je PH krivulja, če velja izrek 3.13.

Definicija 3.15. Skalarni produkt vektorjev \mathbf{a} in \mathbf{b} , ki oklepata kot θ , je število

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta.$$

Dolžina njunega vektorskega produkta pa je enaka

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta.$$

Sedaj bomo dokazali izrek 3.13.

Dokaz.

(\Rightarrow) Recimo, da je \mathbf{r} PH krivulja stopnje 3 s kontrolnimi točkami (3.9). Sedaj izračunamo dolžino odsekov in dobimo

$$\begin{aligned} L_0 = \|\Delta \mathbf{p}_0\| &= \frac{1}{3}(u_0^2 + v_0^2), \\ L_1 = \|\Delta \mathbf{p}_1\| &= \frac{1}{3}\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}, \\ L_2 = \|\Delta \mathbf{p}_2\| &= \frac{1}{3}(u_1^2 + v_1^2). \end{aligned}$$

Vidimo, da velja $L_1 = \sqrt{L_0 L_2}$. Kota θ_1 in θ_2 lahko izrazimo iz formule skalarnega in vektorskega produkta in hkrati upoštevamo (3.9). Najprej izračunamo

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p}_0 &= \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0) \quad \text{in} \\ \Delta \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \frac{1}{3}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0). \end{aligned}$$

Sedaj pomnožimo $\Delta \mathbf{p}_0 \cdot \Delta \mathbf{p}_1$ in $L_0 L_1$ in dobimo

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{\Delta \mathbf{p}_0 \cdot \Delta \mathbf{p}_1}{L_0 L_1} = \frac{\frac{1}{9}(u_0^2 - v_0^2)(u_0u_1 - v_0v_1) + 2u_0v_0(u_0v_1 + u_1v_0)}{\frac{1}{9}\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}(u_0^2 + v_0^2)} \\ &= \frac{(u_0^2 + v_0^2)(u_0u_1 + v_0v_1)}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}(u_0^2 + v_0^2)} = \frac{(u_0u_1 + v_0v_1)}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}}. \end{aligned}$$

Podoben izračun naredimo za $\cos \theta_2$ in dobimo

$$\cos \theta_2 = \frac{\Delta \mathbf{p}_1 \cdot \Delta \mathbf{p}_2}{L_1 L_2} = \frac{(u_0 u_1 + v_0 v_1)}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}}.$$

Vidimo, da velja $\cos \theta_1 = \cos \theta_2$. Sedaj uporabimo formulo za dolžino vektorskega produkta in dobimo

$$\sin \theta_1 = \frac{|\Delta \mathbf{p}_1 \times \Delta \mathbf{p}_0|}{L_0 L_1}.$$

V formulo vstavimo $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ in $L_0 L_1$ ter dobimo

$$\sin \theta_1 = \frac{((u_0 u_1 - v_0 v_1, u_0 v_1 + u_1 v_0) \times (u_0^2 - v_0^2, 2u_0 v_0) + u_1 v_0)}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)(u_0^2 + v_0^2)}}.$$

Sedaj množimo koeficiente in preuredimo enačbo ter dobimo

$$\sin \theta_1 = \frac{(u_1 v_0 - u_0 v_1)(u_0^2 + v_0^2)}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)(u_0^2 + v_0^2)}} = \frac{(u_1 v_0 - u_0 v_1)}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}}.$$

Podoben postopek naredimo za $\sin \theta_2$ in dobimo

$$\sin \theta_2 = \frac{|\Delta \mathbf{p}_2 \times \Delta \mathbf{p}_1|}{L_2 L_1} = \frac{(u_1 v_0 - u_0 v_1)}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}}.$$

Ker sta sinusa in kosinusa kotov enaka, sta enaka tudi kota θ_1 in θ_2 .

(\Leftrightarrow) Recimo, da je \mathbf{r} krivulja, ki zadošča pogoju $L_1 = \sqrt{L_0 L_2}$ in $\theta_1 = \theta_2 =: \theta$.

Z rotacijo in translacijo lahko vektorje kontrolnega poligona krivulje \mathbf{r} izrazimo kot

$$\Delta \mathbf{p}_0 = L_0(1, 0), \quad \Delta \mathbf{p}_1 = \sqrt{L_0 L_2}(-\cos \theta, \sin \theta), \quad \Delta \mathbf{p}_2 = L_2(\cos 2\theta, -\sin 2\theta).$$

Potem je

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}'(t)|^2 &= \left| \sum_{k=0}^2 3\Delta\mathbf{p}_k B_k^2(t) \right|^2 \\
&= \left(\sum_{k=0}^2 3\Delta\mathbf{p}_k B_k^2(t) \cdot \sum_{k=0}^2 3\Delta\mathbf{p}_k B_k^2(t) \right) \\
&= 9 \left(\|\Delta\mathbf{p}_0\|^2 B_0^4 + \frac{2}{3} \|\Delta\mathbf{p}_1\|^2 B_2^4(t) + \|\Delta\mathbf{p}_2\|^2 B_4^4(t) + 2\Delta\mathbf{p}_0 \cdot \Delta\mathbf{p}_1 B_0^2(t) B_1^2(t) \right. \\
&\quad \left. + 2\Delta\mathbf{p}_0 \Delta\mathbf{p}_2 B_0^2(t) B_2^2(t) + 2\Delta\mathbf{p}_1 \cdot \Delta\mathbf{p}_2 B_1^2(t) B_2^2(t) \right) \\
&= 9 \left(L_0^2 B_0^4(t) + L_2^2 B_4^4(t) + \Delta\mathbf{p}_0 \cdot \Delta\mathbf{p}_1 B_1^4(t) + \Delta\mathbf{p}_1 \cdot \Delta\mathbf{p}_2 B_3^4 + \frac{2}{3} B_2^4(t) L_1^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} B_2^4(t) L_0 L_2 \cos 2\theta \right) \\
&= 9L_0^2 B_0^4(t) - 9L_0 \sqrt{L_0 L_2} \cos \theta B_1^4(t) + 3L_2 L_0 (2 + \cos 2\theta) B_2^4(t) \\
&\quad - 9L_2 \sqrt{L_0 L_2} \cos \theta B_3^4(t) + 9L_2^2 B_4^4(t) \\
&= \left(3L_0 B_0^2(t) - 3\sqrt{L_0 L_2} \cos \theta B_1^2(t) + 3L_2 B_2^2(t) \right)^2 \\
&= \sigma(t)^2.
\end{aligned}$$

Torej \mathbf{r}' je hodograf PH krivulje.

□

Podobno izpeljavo kot pri kubičnih PH krivuljah uporabimo za krivuljo stopnje pet in dobimo šest kontrolnih točk, kjer je \mathbf{p}_0 poljubna, tako da zadošča integracijski konstanti. Ostale kontrolne točke izrazimo s polinomi u in v kot:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{5}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0 v_0), \\
\mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{5}(u_0 u_1 - v_0 v_1, u_0 v_1 + u_1 v_0), \\
\mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{2}{15}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1 v_1) + \frac{1}{15}(u_0 u_2 - v_0 v_2, u_0 v_2 + u_2 v_0), \\
\mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}_3 + \frac{1}{5}(u_1 u_2 - v_1 v_2, u_1 v_2 + u_2 v_1), \\
\mathbf{p}_5 &= \mathbf{p}_4 + \frac{1}{5}(u_2^2 - v_2^2, 2u_2 v_2).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Ukrivljenost PH krivulje stopnje pet lahko spreminja svoj predznak, medtem ko za krivulje stopnje tri to ni veljalo. Ravno zaradi tega so PH krivulje stopnje pet najbolj enostavne regularne PH krivulje, ki so zaradi svoje fleksibilnosti praktično najbolj uporabne. Obstajajo pogoji, ki morajo veljati za kontrolne točke PH krivulj stopnje pet.

Izrek 3.16. *Naj bo \mathbf{r} regularna polinomska krivulja stopnje pet. Zapišimo vektorje $\Delta\mathbf{p}_j$ kot $\Delta\mathbf{p}_j = L_j e^{i\varphi_j}$. Krivulja \mathbf{r} bo imela pitagorejski hodograf, če in samo če vektorji*

$\Delta \mathbf{p}_j$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$, zadoščajo pogoju

$$\Delta \mathbf{p}_0(\Delta \mathbf{p}_3)^2 = \Delta \mathbf{p}_4(\Delta \mathbf{p}_1)^2,$$

in dodatnemu pogoju

$$3\Delta \mathbf{p}_0\Delta \mathbf{p}_1\Delta \mathbf{p}_2 - (\Delta \mathbf{p}_0)^2\Delta \mathbf{p}_3 - 2(\Delta \mathbf{p}_1)^3 = 0, \text{ ko velja } \Delta \mathbf{p}_1 \neq 0 \text{ ali } \Delta \mathbf{p}_3 \neq 0,$$

oziroma

$$9\Delta \mathbf{p}_0(\Delta \mathbf{p}_2)^2 - (\Delta \mathbf{p}_0)^2\Delta \mathbf{p}_4 = 0, \text{ ko velja } \Delta \mathbf{p}_1 = \Delta \mathbf{p}_3 = 0.$$

Dokaz izreka je na voljo v [5].

3.3 Kompleksna reprezentacija PH krivulj

Število (x, y) v Evklidski ravnini lahko identificiramo s kompleksnim številom $x + iy$.

Če imamo dani dve kompleksni števili z_1 in z_2 , lahko uporabimo naslednje operacije:

$$z_1 \pm z_2, z_1 z_2, \frac{z_1}{z_2}.$$

V ravnini \mathbb{R}^2 lahko vsako parametrično krivuljo $(x(t), y(t))^T$ predstavimo kot kompleksno funkcijo $\mathbf{r}(t) = x(t) + iy(t)$.

Ideja uporabe kompleksne reprezentacije PH krivulj je, da lahko iz dane polinomske krivulje skostruiramo novo krivuljo, ki bo imela pitagorejski hodograf.

Naj bo Ω množica vseh regularnih polinomskih krivulj in $\hat{\Omega}$ množica vseh regularnih polinomskih PH krivulj. Vemo, da je $\hat{\Omega} \subseteq \Omega$. Obratno ne velja, saj obstajajo nekatere regularne polinomske krivulje, ki nimajo pitagorejskega hodografa (na primer $\mathbf{r}(t) = t + it^2$).

Dano imamo ravninsko krivuljo \mathbf{r} in želimo iz krivulje \mathbf{r} narediti novo krivuljo $\hat{\mathbf{r}}$ s pitagorejskim hodografom. Opis preslikave P , ki preslika $\mathbf{r} \rightarrow \hat{\mathbf{r}}$, je:

1. Določimo hodograf dane krivulje: $\mathbf{w}(t) = \mathbf{r}'(t)$.
 2. Dani hodograf kvadriramo, da dobimo novega: $\hat{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{w}^2(t)$.
 3. Integriramo transformiran hodograf $\hat{\mathbf{w}}(t)$ in dobimo novo krivuljo, ki bo imela pitagorejski hodograf: $\hat{\mathbf{r}}(t) = \int \hat{\mathbf{w}}(t)dt$.
- Pri tem vzamemo $\mathbf{r}(0) = \hat{\mathbf{r}}(0)$.

Izrek 3.17. Preslikava P je bijektivna preslikava med množico regularnih polinomskih krivulj Ω in množico regularnih PH krivulj $\hat{\Omega}$.

Dokaz.

(\Rightarrow) Dano imamo regularno polinomske krivuljo $\mathbf{r}(t) = x(t) + iy(t)$ iz množice Ω s

hodografom $\mathbf{w}(t) = \mathbf{r}'(t) = x'(t) + iy'(t)$. Sedaj uporabimo preslikavo P in dobimo transformiran hodograf:

$$\hat{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{w}^2(t) = (x'(t))^2 - (y'(t))^2 + 2x'(t)y'(t)i.$$

Transformiran hodograf je pitagorejski, ker imata komponenti $(x'(t))^2 - (y'(t))^2$ in $2x'(t)y'(t)$ obliko, ki jo zahteva izrek 3.2. Krivulja \mathbf{r} je regularna, zato hodograf te krivulje nima nikjer vrednosti 0. Iz tega sledi, da sta polinoma $x'(t)$ in $y'(t)$ tuja med seboj. Imamo hodograf PH krivulje, ki ga integriramo in dobimo PH krivuljo.

(\Leftarrow) Dano imamo regularno PH krivuljo $\hat{\mathbf{r}}$, ki je element $\hat{\Omega}$. Hodograf krivulje lahko zapišemo kot

$$\hat{\mathbf{w}}(t) = (u^2(t) - v^2(t)) + 2u(t)v(t)i = (u(t) + iv(t))^2,$$

kjer sta polinoma $u(t)$ in $v(t)$ tuja med seboj. Obrat koraka 2 spremeni $\hat{\mathbf{w}}(t)$ v

$$\mathbf{w}(t) = \sqrt{\hat{\mathbf{w}}(t)} = \pm(u(t) + iv(t)).$$

Dobili smo hodograf, ki nikoli ne zavzame vrednosti 0. Sedaj polinoma izrazimo kot $u(t) = x'(t)$ in $v(t) = y'(t)$. Če integriramo $\mathbf{w}(t)$, dobimo enolično določeno regularno polinomsko krivuljo. \square

Če imamo dano krivuljo \mathbf{r} stopnje n in jo preslikamo s preslikavo P dobimo vedno PH krivuljo stopnje $2n - 1$, ne glede na to, kakšna je stopnja polinomov $u(t)$ in $v(t)$. Stopnja regularne PH krivulje bo vedno lihe stopnje.

Primer 3.18. Dano imamo krivuljo $\mathbf{r}(t) = t + i\frac{t^2}{2}$. Njen hodograf je oblike $\mathbf{w}(t) = 1 + it$. Izračunamo $\hat{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{w}^2(t)$ in dobimo, da je

$$\hat{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{w}^2(t) = 1 - t^2 + 2ti.$$

Sedaj integriramo in dobimo

$$\hat{\mathbf{r}}(t) = \int \hat{\mathbf{w}}(t) dt = t - \frac{t^3}{3} + it^2.$$

Pri tem smo upoštevali, da je $\hat{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{r}(0) = 0$. Ker velja

$$(1 - t^2)^2 + 4t^2 = (1 + t^2)^2,$$

smo res dobili PH krivuljo.

3.4 Hermiteova interpolacija z ravninskimi PH krivuljami stopnje 5

Ravninske PH krivulje stopnje 5 nam ponujajo fleksibilnost glede na obliko in so zelo uporabne v številnih aplikacijah. Glede na lastnosti so zelo podobne ravninskim kubičnim krivuljam.

Interpolacijski problem: dane imamo točke $\mathbf{p}_0 \neq \mathbf{p}_1$ in $\mathbf{p}_4 \neq \mathbf{p}_5$ v ravnini. Ali lahko najdemo dve dodatni točki $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ tako, da vse točke ustrezajo obliki v enačbi (3.10) za realne vrednosti $u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, v_2$?

Ker je $\mathbf{p}_0 \neq \mathbf{p}_1$ in $\mathbf{p}_4 \neq \mathbf{p}_5$ nam to zagotovi, da velja $\mathbf{r}'(0) \neq 0$ in $\mathbf{r}'(1) \neq 0$. Videli bomo, da z ustrezno izbiro $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ dobimo 4 različne rešitve.

Lema 3.19. *Za poljubne realne vrednosti a in b , lahko rešitev sistema enačb*

$$u^2 - v^2 = a \quad \text{in} \quad 2uv = b, \quad (3.11)$$

izrazimo kot

$$(u, v) = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(c+a)}, \text{sign}(b) \sqrt{\frac{1}{2}(c-a)} \right), \quad (3.12)$$

kjer je $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ in $\text{sign}(b) = \pm 1$, če je $b = 0$.

Dokaz. Predpostavimo, da velja $a \neq 0$ in $b \neq 0$. Potem je $u \neq 0$ in v se izraža kot $v = \frac{b}{2u}$, kar vstavimo v prvo enačbo sistema (3.11) in dobimo

$$u^4 - au^2 - \frac{1}{4}b^2 = 0. \quad (3.13)$$

Ker velja $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, je $u^2 = \frac{1}{2}(a \pm c)$. Ker je $a - c < 0$ in $a + c > 0$, potem so realne rešitve enačbe (3.13) oblike

$$u = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(c+a)}. \quad (3.14)$$

Če iz enačbe $v = \frac{b}{2u}$ izpostavimo u , dobimo $u = \frac{b}{2v}$. To vstavimo v enačbo (3.14) in dobimo sledeče

$$v = \pm \frac{b}{2\sqrt{\frac{1}{2}(c+a)}} = \pm \text{sign}(b) \sqrt{\frac{1}{2}(c-a)}.$$

Torej realne rešitve so oblike (3.12), ko velja $a \neq 0, b \neq 0$. Sedaj bomo pokazali, da ima enačba (3.12) realne rešitve tudi, če je a ali b enak nič. Če sta $a = b = 0$, potem je edina rešitev $(u, v) = (0, 0)$. Če je $a = 0 \neq b$, potem dobimo

$$(u, v) = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}|b|}, \text{sign}(b) \sqrt{\frac{1}{2}|b|} \right).$$

Če je $a \neq 0 = b$, potem dobimo

$$(u, v) = \begin{cases} \pm(\sqrt{a}, 0), & \text{kjer } a > 0, \\ \pm(0, \sqrt{-a}), & \text{kjer } a < 0. \end{cases}$$

□

Geometrijsko so rešitve enačb (3.11) presešišča dveh hiperbol v (u, v) ravnini, ki se degenerirata v premici, če je kateri izmed a, b enak nič.

Trditev 3.20. *Enačba (3.11) ima vedno realne rešitve, ki jih lahko izrazimo z $\Delta\mathbf{p}_0 = (\Delta x_0, \Delta y_0) = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$ in $\Delta\mathbf{p}_4 = (\Delta x_4, \Delta y_4) = \mathbf{p}_5 - \mathbf{p}_4$ kot*

$$\begin{aligned} (u_0, v_0) &= \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\left(\sqrt{|\Delta\mathbf{p}_0| + \Delta x_0}, \text{sign}(\Delta y_0)\sqrt{|\Delta\mathbf{p}_0| - \Delta x_0}\right), \\ (u_2, v_2) &= \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\left(\sqrt{|\Delta\mathbf{p}_4| + \Delta x_4}, \text{sign}(\Delta y_4)\sqrt{|\Delta\mathbf{p}_4| - \Delta x_4}\right), \\ (u_1, v_1) &= -\frac{3}{4}(u_0 + u_2, v_0 + v_2) \pm \sqrt{\frac{1}{2}}(\sqrt{c+a}, \text{sign}(b)\sqrt{c-a}), \end{aligned} \quad (3.15)$$

in a, b in $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ so definirani kot

$$\begin{aligned} a &= \frac{9}{16}(u_0^2 - v_0^2 + u_2^2 - v_2^2) + \frac{5}{8}(u_0u_2 - v_0v_2) + \frac{15}{2}(x_4 - x_1), \\ b &= \frac{9}{8}(u_0v_0 + u_2v_2) + \frac{5}{8}(u_0v_2 + u_2v_0) + \frac{15}{2}(y_4 - y_1). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Dokaz. Ker so točke $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ in $\mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5$ določene, lahko uporabimo Lemo 3.19 in prvo ter zadnjo enačbo (3.10) zapišemo kot $(a, b) = (5\Delta x_0, 5\Delta y_0)$ in $(5\Delta x_4, 5\Delta y_4)$. Tako, dobimo prvi dve vrstici enačbe (3.15) za (u_0, v_0) in (u_2, v_2) , kjer je $|\Delta\mathbf{p}_k| = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$. Če zapišemo $\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1 = (\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_3) + (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)$, vidimo, da za (u_1, v_1) mora veljati

$$\begin{aligned} \frac{15}{2}(x_4 - x_1) &= u_1^2 - v_1^2 + \frac{3}{2}(u_0 + u_2)u_1 - \frac{3}{2}(v_0 + v_2)v_1 + \frac{1}{2}(u_0u_2 - v_0v_2), \\ \frac{15}{2}(y_4 - y_1) &= 2u_1v_1 + \frac{3}{2}(v_0 + v_2)u_1 + \frac{3}{2}(u_0 + u_2)v_1 + \frac{1}{2}(u_0v_2 - u_2v_0). \end{aligned}$$

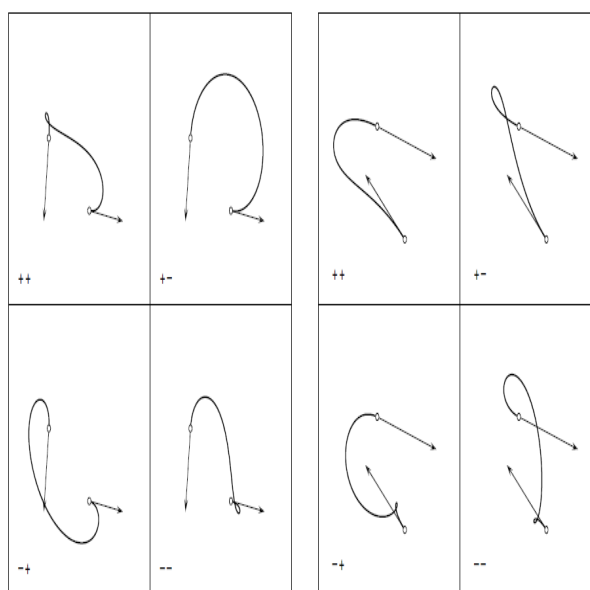
Uvedimo zamenjavo spremenljivk

$$\tilde{u}_1 = u_1 + \frac{3}{4}(u_0 + u_2) \quad \text{in} \quad \tilde{v}_1 = v_1 + \frac{3}{4}(v_0 + v_2).$$

Spremenjene enačbe za $(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1)$ imajo obliko (3.11). Za $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ so rešitve teh enačb oblike podane v zadnji enačbi v (3.15). □

Opomba 3.21. Ker imamo v enačbi (3.15) tri neodvisne predznake, izgleda kot da imamo osem PH krivulj stopnje 5. Če vzamemo vse predznake pozitivne ali negativne iz enačbe (3.10) sledi, da dobimo v obeh primerih enako krivuljo. Razlog je v tem, da so vsi členi v enačbi (3.10) stopnje 2 v neznanakah. Torej v resnici za fiksno izbrane predznake (npr. +, -, -) nam nasprotna izbira predznakov (npr. -, +, +), da natanko isto rešitev. Posledično imamo torej samo 4 interpolacijske PH krivulje stopnje 5.

Na sliki 5 je prikazan primer štirih interpolacijskih PH krivulj stopnje 5, kjer smo vzeli fiksni predznak za (u_1, v_1) iz enačbe (3.15), in predznake ++, +-, -+, -- za izraza (u_0, v_0) in (u_2, v_2) .



Slika 5: Primer štirih različnih PH krivulj stopnje 5 po (3.15) za dve različni množici interpolacijskih podatkov.

Posledica 3.22. Štiri PH krivulje stopnje 5 za Hermiteovo interpolacijo tvorijo dva para, tako da ima vsak predstavnik para enako dolžino loka, ki je podan kot

$$S = \frac{5}{8}(|\Delta \mathbf{p}_0| + |\Delta \mathbf{p}_4|) - \frac{1}{12}(u_0 u_2 + v_0 v_2) + \frac{2}{15}c. \quad (3.17)$$

4 Prostorske polinomske parametrične krivulje s pitagorejskim hodografom

V tem poglavju bomo obravnavali prostorske polinomske krivulje s pitagorejskim hodografom. Prostorske krivulje v trirazsežnem evklidskem prostoru so naprimer vijačnice [2].

Definicija 4.1. Polinomsko krivuljo $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T : I \rightarrow \mathbb{R}^3, I \subseteq \mathbb{R}$, imenujemo **prostorska krivulja s pitagorejskim hodografom**, če obstaja tak polinom σ , da velja:

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 = \sigma^2(t).$$

Izrek 4.2. Naj polinomi $a(t), b(t), c(t)$ in $d(t)$ nimajo skupnega faktorja. Ti polinomi zadoščajo pitagorejskemu pogoju

$$a^2(t) + b^2(t) + c^2(t) = d^2(t), \quad (4.1)$$

če obstajajo polinomi $u(t), v(t), p(t)$ in $q(t)$, da je

$$\begin{aligned} a(t) &= u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t), \\ b(t) &= 2(u(t)q(t) + v(t)p(t)), \\ c(t) &= 2(v(t)q(t) - u(t)p(t)), \\ d(t) &= u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dokaz. Če enačbo (4.1) preoblikujemo, dobimo

$$b^2(t) + c^2(t) = d^2(t) - a^2(t),$$

kar lahko zapišemo tudi kot

$$(b(t) + ic(t))(b(t) - ic(t)) = (d(t) - a(t))(d(t) + a(t)). \quad (4.3)$$

Sedaj bomo dokaz razdelili na dva dela. Prvi del obravnava primer, ko sta polinoma b in c tuja med seboj, drugi del pa, ko obstaja nekonstanten polinom y , ki je delitelj

polinomov b in c .

Prvi del: Recimo, da sta b in c tuja med seboj, potem polinoma $b + ic$ in $b - ic$ nimata skupnih ničel. Vse ničle polinoma $b + ic$, ki imajo kompleksni del pozitiven, označimo kot $\alpha_i, i \in I$, in vse ničle polinoma $b - ic$, ki imajo kompleksni del pozitiven, označimo kot $\beta_j, j \in J$. Ničle prvega polinoma imajo svoj konjugiran par kot ničlo slednjega. Enako velja obratno. Recimo, da sta $f(t) = \prod_{i \in I}(t - \alpha_i)$ in $g(t) = \prod_{j \in J}(t - \beta_j)$. Konjugirane pare polinomov f in g označimo kot \bar{f} in \bar{g} . Potem lahko sledeča polinoma zapišemo kot

$$b(t) + ic(t) = f(t)\bar{g}(t), \quad b(t) - ic(t) = \bar{f}(t)g(t). \quad (4.4)$$

Polinoma $d - a$ in $d + a$ sta realna polinoma, zato imata konjugirane pare ničel, in sicer eno iz polinoma $b + ic$ in eno iz polinoma $b - ic$. Iz tega sledi

$$d(t) - a(t) = f(t)\bar{f}(t), \quad d(t) + a(t) = g(t)\bar{g}(t). \quad (4.5)$$

Ko polinoma f in g zapišemo kot $f(t) = \tilde{p}(t) + i\tilde{q}(t)$ ter $g(t) = \tilde{u}(t) + i\tilde{v}(t)$ in rešimo enačbi (4.4),(4.5), dobimo obliko polinomov a, b, c in d . Polinomi p, q, u, v pa so enaki $\sqrt{2}\tilde{p}, \sqrt{2}\tilde{q}, \sqrt{2}\tilde{u}, \sqrt{2}\tilde{v}$.

Drugi del: Obstaja nekonstanten polinom y , ki je delitelj polinomov b in c . Vidimo, da je leva stran enačbe (4.3) deljiva z y^2 . Vemo pa iz predpostavke izreka, da polinoma a in d nimata skupnega delitelja y . Iz tega sledi, da je eden izmed polinomov $d - a$ ali $d + a$ deljiv z y^2 . Če enačbo (4.3) delimo s polinomom y^2 , dobimo izpolnjene pogoje prvega dela dokaza. Iz tega sledi, da veljajo relacije (4.2). \square

Posledica 4.3. *Hodograf prostorske PH krivulje $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ mora imeti komponente oblike*

$$\begin{aligned} x'(t) &= u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t), \\ y'(t) &= 2(u(t)q(t) + v(t)p(t)), \\ z'(t) &= 2(v(t)q(t) - u(t)p(t)), \end{aligned} \quad (4.6)$$

kjer so $u(t), v(t), p(t), q(t)$ realni polinomi.

4.1 Lastnosti prostorskih PH krivulj

Nekatere lastnosti, ki veljajo za ravninske PH krivulje, veljajo tudi za prostorske PH krivulje. Vzemimo regularno prostorsko polinomsko krivuljo $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$.

Definicija 4.4. Enotska tangenta krivulje $\mathbf{r}(t)$ je definirana kot

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{(x'(t), y'(t), z'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}}.$$

Iz definicije je razvidno, da je enotska tangenta regularne prostorske PH krivulje racionalna funkcija, saj je $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ enak $|\sigma|$, ki je polinom, enak $-\sigma$ ali $+\sigma$.

Pri prostorskih krivuljah pravokoten vektor na tangento ni enolično določen kot pri ravninskih krivuljah, zato bomo najprej definirali enotsko normalo in binormalo.

Definicija 4.5. Enotski normalni vektor definiramo kot

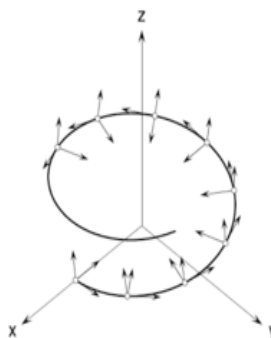
$$\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{t}'(t)}{|\mathbf{t}'(t)|} = \frac{\mathbf{r}'(t) \times (\mathbf{r}''(t) \times \mathbf{r}'(t))}{|\mathbf{r}'(t) \times (\mathbf{r}''(t) \times \mathbf{r}'(t))|}.$$

Enotski normalni vektor je vektor hitrosti spreminjanja tangente in hkrati kaže v smer spreminjanja.

Definicija 4.6. Enotsko binormalo definiramo kot

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}.$$

Torej binormala je enotski vektor, ki je vedno pravokoten na \mathbf{t} in \mathbf{n} . Ogrodje, ki ga tvorijo enotska tangenta, normala in binormala, imenujemo Frenetovo ogrodje.



Slika 6: Frenetovo ogrodje $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ ob vijačnici [5].

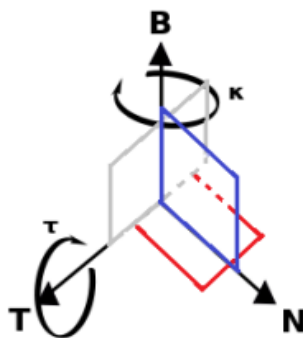
V prostoru poznamo poleg fleksijske ukrivljenosti tudi torzijsko ukrivljenost, ki nam pove koliko “zvita” je krivulja.

Definicija 4.7. Torzijsko ukrivljenost τ definiramo kot

$$\tau(t) = \frac{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \cdot \mathbf{r}'''(t)}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|^2}.$$

Opazimo, da so enotska tangenta, enotska normala, enotska binormala, fleksijska ukrivljenost in torzijska ukrivljenost odvisni od $|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|$. Če v $|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|$ vnesemo zveze (4.6), dobimo

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| &= \sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2} \\ &= \sqrt{\sigma^2 \psi}, \end{aligned}$$



Slika 7: Frenetovo ogrodje z ravninami.

kjer je

$$\psi(t) = 4((up' - u'p)^2 + (uq' - u'q)^2 + vp' - v'p)^2 + (vq' - v'q)^2 + 2(uv' - u'v)(pq' - p'q)).$$

Izraz $|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|$ bo polinomski, če bo ψ popoln kvadrat polinoma. Enotska normala, enotska binormala in fleksijska ukrivljenost prostorske PH krivulje so lahko racionalne ali pa ne. Torzijska ukrivljenost prostorske PH krivulje pa je vedno racionalna krivulja. Lahko povemo, da prostorske PH krivulje nimajo racionalnega Frenetovega ogrodje, ker normala in binormala nista vedno racionalni krivulji. Če ima PH krivulja \mathbf{r} racionalno Frenetovo ogrodje, potem takšno krivuljo imenujemo dvojna PH krivulja.

5 Cikloidne krivulje s pitagorejskim hodografom

Cikloidne krivulje s pitagorejskim hodografom (PHC) so razširitev kubičnih PH krivulj. V nadaljevanju bomo spoznali in preučili njihove lastnosti in geometrijsko karakterizacijo. Izkaže se, da so vse PHC krivulje, ki niso premice, regularne tako v ravnini kot v prostoru. Poleg tega so ravninske tudi vedno konveksne. Opisali bomo še Hermiteovo G^1 interpolacijo s PHC krivuljami.

Cikloidno krivuljo lahko izrazimo na intervalu $[0, \alpha]$, kjer je $\alpha \in (0, 2\pi)$, kot

$$\mathbf{p} = \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i Z_i, \quad (5.1)$$

kjer so $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, C-Bézierove kontrolne točke in $Z_i := Z_{i,\alpha}$ C-Bézierove bazne funkcije [19] prostora

$$S := S_\alpha := \mathcal{L}in\{1, t, \cos t, \sin t\}, \quad t \in [0, \alpha], \quad \alpha \in (0, 2\pi),$$

definirane kot

$$Z_{3,\alpha}(t) := \frac{t - \sin t}{\alpha - \sin \alpha},$$

$$Z_{0,\alpha}(t) := Z_{3,\alpha}(\alpha - t),$$

$$Z_{2,\alpha}(t) := \frac{\sin \alpha}{\alpha - 2\nu(\alpha)} \left(\frac{1 - \cos t}{1 - \cos \alpha} - \frac{t - \sin t}{\alpha - \sin \alpha} \right), \quad (5.2)$$

$$Z_{1,\alpha}(t) := Z_{2,\alpha}(\alpha - t),$$

pri čemer je

$$\nu(\alpha) := \frac{\alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

Funkcije Z_i tvorijo particijo enote in $\nu(\alpha) > 0$ za $\alpha \in (0, 2\pi)$. Bazne funkcije $(Z_i)_{i=0}^3$ so dobro definirane tudi, ko je $\alpha = \pi$,

$$Z_{2,\pi}(t) = \lim_{\alpha \rightarrow \pi} Z_{2,\alpha}(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos t) - \frac{1}{\pi}(t - \sin t).$$

Iz enačbe (5.1) in lastnosti particije enote opazimo, da velja

$$\mathbf{p} = \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i Z_i = \mathbf{b}_0 + \sum_{i=0}^2 \Delta \mathbf{b}_i \sum_{j=i+1}^3 Z_j.$$

Torej hodograf krivulje \mathbf{p} lahko izrazimo kot

$$\mathbf{p}' = \Delta \mathbf{b}_0 w_0 + \Delta \mathbf{b}_1 w_1 + \Delta \mathbf{b}_2 w_2, \quad (5.3)$$

kjer

$$w_i(t) := \sum_{j=i+1}^3 Z_j(t), \quad i = 0, 1, 2.$$

Oziroma

$$w_0(t) = w_2(\alpha - t), \quad w_1(t) = \frac{1 - \cos(t - \alpha) + \cos \alpha - \cos t}{\alpha - 2 \sin \alpha + \alpha \cos \alpha}, \quad w_2(t) = \frac{1 - \cos t}{\alpha - \sin \alpha}.$$

Funkcije $(w_i)_{i=0}^2$ so bazne funkcije prostora, ki ga označimo z S_R . Baza je dobro definirana tudi za $\alpha = \pi$. Sedaj definirajmo

$$\mathbf{w} := \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

$$G := \begin{pmatrix} \|\Delta \mathbf{b}_0\|^2 & \Delta \mathbf{b}_0^T \Delta \mathbf{b}_1 & \Delta \mathbf{b}_0^T \Delta \mathbf{b}_2 \\ \Delta \mathbf{b}_0^T \Delta \mathbf{b}_1 & \|\Delta \mathbf{b}_1\|^2 & \Delta \mathbf{b}_1^T \Delta \mathbf{b}_2 \\ \Delta \mathbf{b}_0^T \Delta \mathbf{b}_2 & \Delta \mathbf{b}_1^T \Delta \mathbf{b}_2 & \|\Delta \mathbf{b}_2\|^2 \end{pmatrix}.$$

Če definiramo kote

$$\varphi_{i,j} := \angle(\Delta \mathbf{b}_i, \Delta \mathbf{b}_j), \quad \varphi_{ij} \in [0, \pi], \quad (5.4)$$

potem lahko elemente matrike G zapišemo kot

$$\Delta \mathbf{b}_i^T \Delta \mathbf{b}_j = \|\Delta \mathbf{b}_i\| \|\Delta \mathbf{b}_j\| \cos \varphi_{ij}.$$

Matrika G je Gramova matrika, kjer so elementi skalarni produkti razlik med dvema kontrolnima točkama. Za Gramovo matriko vemo, da je simetrična in pozitivno semi-definitna [10]. Matrika G je simetrična, če velja $G^T = G$ in pozitivno semidefinitna, če je $x^T A x \geq 0$ za vse $x \in \mathbb{R}^d$. Če so $(\Delta \mathbf{b}_i)_{i=0}^2$ linearno neodvisni, potem je G pozitivno definitna. V tem primeru je \mathbf{p} vedno regularna krivulja. Norma $\|\mathbf{p}'(t)\|$ je lahko zaradi enačbe (5.3) ničelna natanko tedaj, ko je $\mathbf{w}(t^*) = 0$ za nek t^* . Če je $w_2(t^*) = 0$, potem je $t^* = 0$. Toda $w_0(0) = w_2(\alpha) \neq 0$, kar predstavlja protislovje. Parametrično hitrost σ cikloidne krivulje določa zveza

$$\sigma^2(t) = \mathbf{w}(t)^T G \mathbf{w}(t), \quad t \in [0, \alpha]. \quad (5.5)$$

Izrek 5.1. Naj bo \mathbf{p} cikloidna krivulja, podana v enačbi (5.1), ki ni odsek premice. Če so vse kontrolne točke paroma različne, torej $\mathbf{b}_{i+1} \neq \mathbf{b}_i$, $i = 0, 1, 2$, potem je krivulja \mathbf{p} cikloidna krivulja s pitagorejskim hodografom natanko tedaj, ko velja

$$\varphi_{01} = \varphi_{12} \quad \text{in} \quad \frac{\|\Delta\mathbf{b}_0\| \|\Delta\mathbf{b}_2\|}{\|\Delta\mathbf{b}_1\|^2} = 2\rho(\alpha) \left(\frac{1 - \cos^2 \varphi_{01}}{1 - \cos \varphi_{02}} \right), \quad (5.6)$$

kjer je

$$\rho(\alpha) := \left(\frac{\alpha - \sin \alpha}{2\alpha \cos \frac{\alpha}{2} - 4 \sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2$$

in so koti φ_{ij} definirani v (5.4). Za cikloidne krivulje s pitagorejskim hodografom (PHC) je parametrična hitrost podana kot

$$\sigma = \pm \sum_{i=0}^2 \sigma_i w_i = \pm \left(\|\Delta\mathbf{b}_0\| w_0 + \cos \varphi_{01} \|\Delta\mathbf{b}_1\| w_1 + \|\Delta\mathbf{b}_2\| w_2 \right). \quad (5.7)$$

Če je vsaj ena od kontrolnih točk \mathbf{b}_i , $i = 0, 1, 2$, podvojena, potem PHC krivulja postane odsek premice.

Dokaz. Naj bo \mathbf{p} PHC krivulja s parametrično hitrostjo $\sigma(t) \in S_R$, $t \in [0, \alpha]$. Pogoji $\sigma \in S_R \subset S$, $\sigma^2 = \mathbf{p}'^T \mathbf{p}'$ na intervalu $[0, \alpha]$ lahko zapišemo zaradi enačbe (5.5) kot

$$\chi(t) := \mathbf{w}(t)^T G \mathbf{w}(t) - (\xi_0 w_0(t) + \xi_1 w_1(t) + \xi_2 w_2(t))^2 = 0, \quad t \in [0, \alpha], \quad (5.8)$$

kjer je skalarje ξ_i potrebno še določiti. Vzamemo robna parametra 0 in α ter vstavimo v (5.8). Torej

$$\begin{aligned} \chi(0) &= (w_0(0), 0, 0) G (w_0(0), 0, 0)^T - (\xi_0 w_0(0))^2 = \\ &= \|\Delta\mathbf{b}_0\|^2 w_0^2(0) - \xi_0^2 w_0^2(0) = w_0^2(0) (\|\Delta\mathbf{b}_0\|^2 - \xi_0^2) = \frac{1}{\nu(\alpha)^2} (\|\Delta\mathbf{b}_0\|^2 - \xi_0^2). \end{aligned}$$

Enak postopek naredimo za $\chi(\alpha) = 0$ in dobimo

$$\chi(\alpha) = \frac{1}{\nu(\alpha)^2} (\|\Delta\mathbf{b}_2\|^2 - \xi_2^2).$$

Ker mora biti $\chi(0) = 0$ in $\chi(\alpha) = 0$, sledi $\|\Delta\mathbf{b}_0\|^2 = \xi_0^2$ in $\|\Delta\mathbf{b}_2\|^2 = \xi_2^2$ oziroma

$$|\xi_0| = \|\Delta\mathbf{b}_0\|, \quad |\xi_2| = \|\Delta\mathbf{b}_2\|. \quad (5.9)$$

Sedaj izračunajmo odvod $\chi'(0) = 0$ in dobimo

$$\begin{aligned} \xi_1 \xi_0 &= \Delta\mathbf{b}_0^T \Delta\mathbf{b}_1 \\ \xi_1 |\xi_0| \text{sign}(\xi_0) &= \|\Delta\mathbf{b}_0\| \|\Delta\mathbf{b}_1\| \cos \varphi_{01} \\ \xi_1 &= \text{sign}(\xi_0) \cos \varphi_{01} \|\Delta\mathbf{b}_1\|, \end{aligned} \quad (5.10)$$

kjer je $\xi_0 = |\xi_0| \text{sign}(\xi_0)$ ter

$$\text{sign}(\xi_0) = \begin{cases} 1, & \xi_0 \geq 0 \\ -1, & \xi_0 < 0. \end{cases}$$

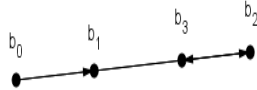
Enak postopek naredimo za $\chi'(\alpha)$ in dobimo

$$\xi_1 \xi_2 - \Delta \mathbf{b}_1^T \Delta \mathbf{b}_2 = 0 \implies \xi_1 = \text{sign}(\xi_2) \cos \varphi_{12} \|\Delta \mathbf{b}_1\|. \quad (5.11)$$

V enačbo $\chi(t)$ vnesemo zveze (5.9), (5.10) in (5.11) in dobimo

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \frac{(1 - \cos t + \cos \alpha - \cos(t - \alpha))^2}{(\alpha - \sin \alpha)^2 (1 + \cos \alpha)} \\ &\cdot \left(2\rho(\alpha)(1 - \cos^2 \varphi_{01}) \|\Delta \mathbf{b}_1\|^2 - (\text{sign}(\xi_0 \xi_2) - \cos \varphi_{02}) \|\Delta \mathbf{b}_0\| \|\Delta \mathbf{b}_2\| \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Če je $\text{sign}(\xi_0 \xi_2) = -1$, potem mora biti $\cos \varphi_{02} = -1$. Torej $\varphi_{02} = \pi$. Prav tako tudi $\cos^2 \varphi_{01} = 1 \implies \varphi_{01} \in \{0, \pi\}$. Edina možnost je torej le odsek premice, kar pa je v protislovju s predpostavko izreka.



Slika 8: Eden izmed dveh primerov, ko je $\text{sign}(\xi_0 \xi_2) = -1$.

Iz enačbe (5.12) sledi, da je $\text{sign}(\xi_0 \xi_2) = 1$, kjer imamo dve možnosti:

- a) $\xi_0 \geq 0$ in $\xi_2 \geq 0 \implies \xi_0 = \|\Delta \mathbf{b}_0\|, \xi_2 = \|\Delta \mathbf{b}_2\|, \xi_1 = \cos \varphi_{01} \|\Delta \mathbf{b}_1\|$
- b) $\xi_0 \leq 0$ in $\xi_2 \leq 0 \implies \xi_0 = -\|\Delta \mathbf{b}_0\|, \xi_2 = -\|\Delta \mathbf{b}_2\|, \xi_1 = -\cos \varphi_{01} \|\Delta \mathbf{b}_1\|$.

S tem smo dokazali (5.7). Posledično velja

$$2\rho(\alpha)(1 - \cos^2 \varphi_{01}) \|\Delta \mathbf{b}_1\|^2 = (1 - \cos \varphi_{02}) \|\Delta \mathbf{b}_0\| \|\Delta \mathbf{b}_2\|, \quad (5.13)$$

s čimer je dokazan drugi del (5.6).

Dokažimo še, da velja $\varphi_{01} = \varphi_{12}$. Kot smo povedali že zgoraj, velja $\text{sign}(\xi_0 \xi_2) = 1$ in tako tudi $\text{sign}(\xi_0) = \text{sign}(\xi_2)$. Iz enačb (5.10) in (5.11) sledi

$$\text{sign}(\xi_0) \cos \varphi_{01} \|\Delta \mathbf{b}_1\| = \text{sign}(\xi_2) \cos \varphi_{12} \|\Delta \mathbf{b}_1\|.$$

Tako dobimo $\cos \varphi_{01} = \cos \varphi_{12}$. To implicira $\varphi_{01} = \varphi_{12}$, saj je $\varphi_{ij} \in [0, \pi]$.

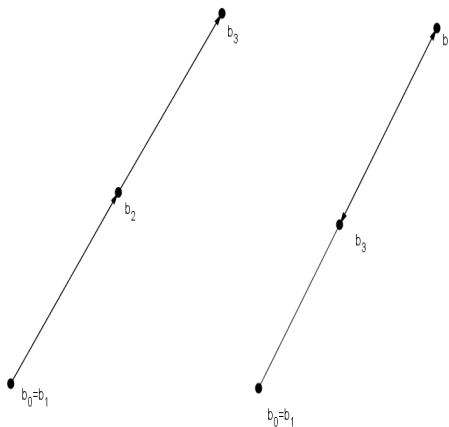
Oglejmo si sedaj še primer, ko je npr. $\Delta \mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$. Velja $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_0$ in $\xi_0 = 0$. Vstavimo to v (5.12) in dobimo

$$\chi(t) = 2\rho(\alpha) \frac{(1 - \cos t + \cos \alpha - \cos(t - \alpha))^2}{(\alpha - \sin \alpha)^2 (1 + \cos \alpha)} (1 - \cos^2 \varphi_{12}) \|\Delta \mathbf{b}_1\|^2.$$

Torej

$$1 - \cos^2 \varphi_{12} = 0 \Rightarrow \cos^2 \varphi_{12} = 1 \Rightarrow \cos \varphi_{12} = \pm 1 \Rightarrow \varphi_{12} \in \{0, \pi\}.$$

□



Slika 9: Primera, ko je $\varphi_{12} \in \{0, \pi\}$.

Posledica 5.2. *Ravninske cikloidne krivulje, ki niso odseki premic in imajo paroma različne kontrolne točke, so PHC krivulje natanko tedaj, ko velja*

$$\varphi_{01} = \varphi_{12}, \quad \frac{\|\Delta \mathbf{b}_0\| \|\Delta \mathbf{b}_2\|}{\|\Delta \mathbf{b}_1\|^2} = \rho(\alpha).$$

Dodatno velja še, da je kontrolni poligon takšne krivulje konveksen.

Dokaz. Iz izreka 5.1 vemo, da velja

$$\frac{\|\Delta \mathbf{b}_0\| \|\Delta \mathbf{b}_2\|}{\|\Delta \mathbf{b}_1\|^2} = 2\rho(\alpha) \left(\frac{1 - \cos^2 \varphi_{01}}{1 - \cos \varphi_{02}} \right).$$

Želimo pokazati, da je

$$\frac{\|\Delta \mathbf{b}_0\| \|\Delta \mathbf{b}_2\|}{\|\Delta \mathbf{b}_1\|^2} = \rho(\alpha),$$

oziroma želimo videti, da je

$$\frac{1 - \cos^2 \varphi_{01}}{1 - \cos \varphi_{02}} = \frac{1}{2}.$$

Poglejmo si dva primera in sicer konveksni poligon in nekonveksni poligon.

1. konveksni kontrolni poligon

Kot φ_{02} lahko izrazimo z ostalimi koti kot $\varphi_{02} = 2\pi - \varphi_{01} - \varphi_{12}$ ali $\varphi_{02} = \varphi_{01} + \varphi_{12}$.

To lahko zapišemo kot $\varphi_{02} = \pi \pm (\varphi_{01} + \varphi_{12} - \pi)$ in hkrati velja

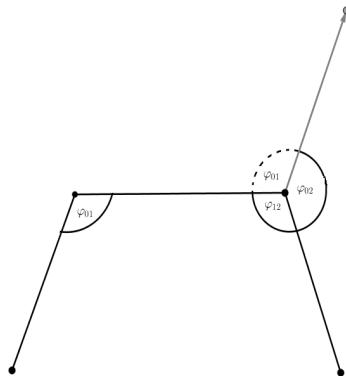
$$\cos \varphi_{02} = \cos(\pi \pm (\varphi_{01} + \varphi_{12} - \pi)) = \cos \varphi_{01} \cos \varphi_{12} - \sin \varphi_{01} \sin \varphi_{12}.$$

Uporabimo dejstvo, da sta kota $\varphi_{01} = \varphi_{12}$, in dobimo

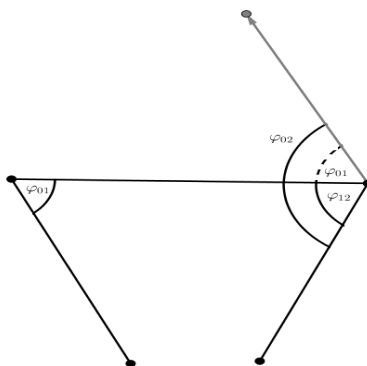
$$\cos \varphi_{02} = \cos \varphi_{01} \cos \varphi_{01} - \sin \varphi_{01} \sin \varphi_{01} = \cos^2 \varphi_{01} - \sin^2 \varphi_{01} = 2 \cos^2 \varphi_{01} - 1.$$

Torej

$$\frac{1 - \cos^2 \varphi_{01}}{1 - \cos \varphi_{02}} = \frac{1 - \cos^2 \varphi_{01}}{1 - 2 \cos^2 \varphi_{01} + 1} = \frac{1 - \cos^2 \varphi_{01}}{2(1 - \cos^2 \varphi_{01})} = \frac{1}{2}.$$



Slika 10: Primer, ko je $\varphi_{02} = 2\pi - \varphi_{01} - \varphi_{12}$.



Slika 11: Primer, ko je $\varphi_{02} = \varphi_{01} + \varphi_{12}$.

2. nekonveksni kontrolni poligon

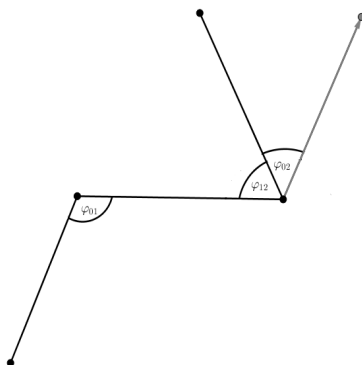
Kot φ_{02} lahko izrazimo z ostalimi koti kot $\varphi_{02} = \varphi_{01} - \varphi_{12}$ ali $\varphi_{02} = \varphi_{12} - \varphi_{01}$.

To lahko zapišemo kot $\varphi_{02} = \pm(\varphi_{01} - \varphi_{12})$. Torej

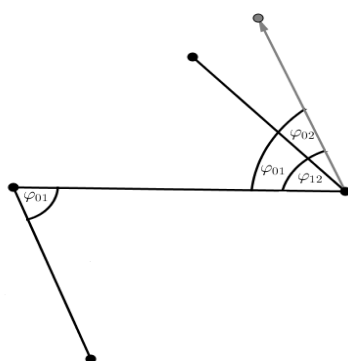
$$\cos \varphi_{02} = \cos(\pm(\varphi_{01} - \varphi_{12})) = \cos \varphi_{01} \cos \varphi_{12} + \sin \varphi_{01} \sin \varphi_{12}.$$

Uporabimo dejstvo, da sta kota $\varphi_{01} = \varphi_{12}$ in dobimo

$$\cos \varphi_{01} \cos \varphi_{01} + \sin \varphi_{01} \sin \varphi_{01} = \cos^2 \varphi_{01} + \sin^2 \varphi_{01} = 1.$$



Slika 12: Primer, ko je $\varphi_{02} = \varphi_{01} - \varphi_{12}$.



Slika 13: Primer, ko je $\varphi_{02} = \varphi_{12} - \varphi_{01}$.

Sedaj si oglejmo enačbo (5.13). Ker je $1 - \cos^2 \varphi_{01} = 0$, potem iz tega sledi $\cos^2 \varphi_{01} = 1$ oziroma $\cos \varphi_{01} = \pm 1$. Torej $\varphi_{01} \in \{0, \pi\}$ in $\varphi_{12} \in \{0, \pi\}$. Dobljena PHC krivulja je odsek premice, kar je protislovje.

□

Posledica 5.3. Če $\alpha \rightarrow 0$, se PHC krivulja $\mathbf{p} = \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_{i,\alpha} Z_{i,\alpha}$ degenerira v kubično PH polinomsko krivuljo \mathbf{p}^0 , ki je izražena z limito

$$\mathbf{p}^0(u) := \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathbf{p}(\alpha u), \quad u \in [0, 1].$$

Dokaz. Parametrizirali bomo krivuljo \mathbf{p} na fiksen interval $[0, 1]$, kjer $t \rightarrow \alpha u$. Funkcije $Z_{i,\alpha}$ v limiti postanejo kubični Bernsteinovi polinomi,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} Z_{i,\alpha}(\alpha u) = B_i^3(u), \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

in \mathbf{p}^0 je kubična polinomska krivulja. Ker velja $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \rho(\alpha) = 1$, se pogoj (5.6) pretvori v pogoj (3.13), kar predstavlja polinomsko kubično PH krivuljo. □

Izrek 5.4. Predpostavimo, da je \mathbf{p} PHC krivulja na intervalu $[0, \alpha]$, $0 < \alpha < 2\pi$, ki ni odsek premice. Potem je \mathbf{p} regularna krivulja na tem intervalu:

$$\mathbf{p}'(t) > 0, \quad t \in [0, \alpha].$$

Če je \mathbf{p} ravninska krivulja, potem mora biti tudi konveksna.

Dokaz. Glej [9]. □

6 Hermiteova interpolacija s cikloidnimi krivuljami s pitagorejskim hodografom

Interpolacijski problem je naslednji: Dani imamo dve točki $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1 \in \mathbb{R}^d, d \geq 2$, in dve enotski tangenti \mathbf{d}_0 in \mathbf{d}_1 . Iščemo PHC krivuljo \mathbf{p} , ki zadošča interpolacijskim pogojem

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{P}_0, \mathbf{p}(\alpha) = \mathbf{P}_1, \mathbf{p}'(0) = \lambda_0 \mathbf{d}_0, \mathbf{p}'(\alpha) = \lambda_1 \mathbf{d}_1, \quad (6.1)$$

kjer sta λ_0 in λ_1 neznani dolžini tangent, ki morata biti pozitivni. Tovrsten interpolacijski problem imenujemo G^1 Hermiteova interpolacija. Pogoji (6.1) predstavljajo $4d$ enačb za $4d + 2$ neznank ($4d$ koeficientov, λ_0 in λ_1).

Poglejmo si interpolacijsko krivuljo \mathbf{p} v Bézierovi obliki (5.1). C-Bézier bazne funkcije v (5.2) nam omogočijo vključitev interpolacijskih pogojev (6.1) v kontrolne točke. Ker velja

$$\mathbf{p}'(0) = w_0(0) \Delta \mathbf{b}_0 = \frac{1}{\nu(\alpha)} \Delta \mathbf{b}_0, \quad \mathbf{p}'(\alpha) = w_2(\alpha) \Delta \mathbf{b}_2 = \frac{1}{\nu(\alpha)} \Delta \mathbf{b}_2,$$

to implicira

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{P}_0 + \lambda_0 \nu(\alpha) \mathbf{d}_0, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{P}_1 - \lambda_1 \nu(\alpha) \mathbf{d}_1, \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{P}_1.$$

To reši linearni del interpolacijskega problema in nam da končno rešitev, brž ko izračunamo še λ_0 in λ_1 . Neznanki λ_0 in λ_1 pa izračunamo ločeno iz PH pogojev (5.6). Definirajmo konstante

$$\delta := \|\Delta \mathbf{P}_0\|, \quad c_{ij} := \cos \theta_{ij},$$

kjer so

$$\theta_{01} := \angle(\mathbf{d}_0, \Delta \mathbf{P}_0), \quad \theta_{12} := \angle(\Delta \mathbf{P}_0, \mathbf{d}_1), \quad \theta_{02} := \angle(\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1).$$

Kosinusi c_{ij} niso neodvisni, ampak morajo zadoščati relaciji [3]

$$(c_{02} - c_{01}c_{12})^2 \leq (1 - c_{01}^2)(1 - c_{12}^2). \quad (6.2)$$

Enakost je dosežena le v ravninskem primeru. Z uporabo izreka 5.1 izpeljemo dve enačbi za neznanki λ_0, λ_1 . Relacija med koti v enačbi (5.6) določa funkcijo

$$e_1(\lambda_0, \lambda_1) := (c_{01} - c_{12})\delta + (c_{02} - 1)\nu(\alpha)(\lambda_0 - \lambda_1),$$

iz drugega pogoja izreka 5.1 pa dobimo funkcijo

$$\begin{aligned} e_2(\lambda_0, \lambda_1) &:= \lambda_0 \lambda_1 \nu(\alpha)^2 (1 - c_{02}) - 2\rho(\alpha) \left(\|\Delta \mathbf{b}_1\|^2 - (\mathbf{d}_0^T \Delta \mathbf{b}_1)^2 \right) \\ &= 2(c_{01}^2 - 1)\delta^2 \rho(\alpha) + 4(c_{12} - c_{01}c_{02})\delta \nu(\alpha)\rho(\alpha)\lambda_1 \\ &+ 2(c_{02}^2 - 1)\nu(\alpha)^2 \rho(\alpha)\lambda_1^2 + (1 - c_{02})\nu(\alpha)^2 \lambda_0 \lambda_1. \end{aligned}$$

Prva funkcija je linearna in druga je kvadratna v neznankeh λ_0 in λ_1 . Nelinearni sistem

$$\mathbf{e}(\lambda_0, \lambda_1) := (e_1(\lambda_0, \lambda_1), e_2(\lambda_0, \lambda_1)) = (0, 0) \quad (6.3)$$

ima tako dva para rešitev. S pomočjo funkcij

$$\begin{aligned} h(x, \alpha) &:= 2(x^2 - 1)\rho(\alpha) - x + 1, \\ g_1(x, y, z, \alpha) &:= 4(xz - y)\rho(\alpha) + y - x, \\ g_2(x, y, z, \alpha) &:= -8\rho(\alpha)(x^2 - 1)h(z, \alpha) + g_1(x, y, z, \alpha)^2, \\ \varsigma^\pm(x, y, z, \alpha) &:= \frac{4\delta\rho(\alpha)(x^2 - 1)}{\nu(\alpha) \left(g_1(x, y, z, \alpha) \mp \sqrt{g_2(x, y, z, \alpha)} \right)}, \end{aligned}$$

izrazimo obe rešitvi $(\lambda_{0,i}, \lambda_{1,i}), i = 1, 2$, kot

$$\begin{aligned} \lambda_{0,1} &:= \zeta^+(c_{12}, c_{01}, c_{02}, \alpha), & \lambda_{1,1} &:= \zeta^+(c_{01}, c_{12}, c_{02}, \alpha), \\ \lambda_{0,2} &:= \zeta^-(c_{12}, c_{01}, c_{02}, \alpha), & \lambda_{1,2} &:= \zeta^-(c_{01}, c_{12}, c_{02}, \alpha). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Razvidno je, da $g_2(x, y, z, \alpha) = g_2(y, x, z, \alpha)$. Naslednji izrek nam pove, ali PHC krivulja obstaja in koliko ima rešitev (glej tudi sliko 14).

Izrek 6.1. *Podane imamo $\mathbf{d}_0, \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, (\mathbf{P}_1 \neq \mathbf{P}_0)$ in \mathbf{d}_1 in naj bo $|c_{01}| < 1, |c_{12}| < 1$. Potem obstaja natanko en interpolant, ki je določen z $\lambda_{0,1}, \lambda_{1,1}$ v (6.4), če in samo če*

$$-1 \leq c_{02} < \vartheta(\alpha) := -1 + \frac{1}{2\rho(\alpha)} \quad \text{ali} \quad c_{02} = \vartheta(\alpha), \quad c_{01} + c_{12} > 0.$$

Če $\vartheta(\alpha) < c_{02} < 1$, potem ima interpolacijski problem dve rešitvi (kot para $(\lambda_{0,1}, \lambda_{1,1})$ in $(\lambda_{0,2}, \lambda_{1,2})$), če in samo če

$$c_{01} + c_{12} > 0, \quad g_2(c_{01}, c_{12}, c_{02}, \alpha) \geq 0. \quad (6.5)$$

V nasprotnem primeru interpolacijski problem nima rešitve. Obe rešitvi sovpadata, če in samo če v zadnji enačbi (6.5) velja enakost.

Dokaz. Upoštevati moramo, da je $h(c_{02}, \alpha) = 0$ za $c_{02} = 1$ ali $c_{02} = \vartheta(\alpha)$. Predpostavimo, da $-1 \leq c_{02} < \vartheta(\alpha)$. Potem $h(c_{02}, \alpha) > 0$ in

$$g_2(x, y, c_{02}, \alpha) > g_1(x, y, c_{02}, \alpha)^2, \quad |x| < 1.$$

Par $(\lambda_{0,1}, \lambda_{1,1})$ je očitno dopusten za tako izbrane c_{02} , ampak drugi par pa ni dopusten. Naj bo sedaj $c_{02} = \vartheta(\alpha)$. Potem $h(c_{02}, \alpha) = 0$ in

$$g_2(x, y, c_{02}, \alpha) = g_1(x, y, c_{02}, \alpha)^2.$$

Še več,

$$g_1(c_{01}, c_{12}, \vartheta(\alpha), \alpha) = g_1(c_{12}, c_{01}, \vartheta(\alpha), \alpha) = (1 - 4\rho(\alpha))(c_{01} + c_{12}).$$

Ker je $1 - 4\rho(\alpha) < 0$ za $\alpha \in (0, 2\pi)$, je funkcija $g_1(c_{01}, c_{12}, \vartheta(\alpha), \alpha)$ negativna za $c_{01} + c_{12} > 0$ in pozitivna za $c_{01} + c_{12} < 0$. Tako je torej za $c_{01} + c_{12} > 0$ samo rešitev $(\lambda_{0,1}, \lambda_{1,1})$ dopustna, medtem ko gre druga rešitev proti neskončnosti. Za $c_{01} + c_{12} \leq 0$ ne obstaja nobena dopustna rešitev, saj gre prva rešitev $(\lambda_{0,1}, \lambda_{1,1})$ v neskončnost, drugi par pa je negativen in gre proti neskončno, ko gre $c_{01} + c_{12} \uparrow 0$. Potrebno je še pogledati primer $\vartheta(\alpha) < c_{02} < 1$. Sedaj je $h(c_{02}, \alpha) < 0$ in

$$g_2(x, y, c_{02}, \alpha) < g_1(x, y, c_{02}, \alpha)^2, \quad |x| < 1.$$

Oba para rešitev $(\lambda_{0,1}, \lambda_{1,1})$ in $(\lambda_{0,2}, \lambda_{1,2})$ sta hkrati dopustna ali pa ne. Oba sta realna in pozitivna natanko tedaj, ko

$$g_2(c_{01}, c_{12}, c_{02}, \alpha) = g_2(c_{12}, c_{01}, c_{02}, \alpha) \geq 0 \quad (6.6)$$

ter

$$g_1(c_{01}, c_{12}, c_{02}, \alpha) < 0, \quad g_1(c_{12}, c_{01}, c_{02}, \alpha) < 0. \quad (6.7)$$

Da se pokazati, da sta (6.6) in (6.7) izpolnjena natanko tedaj, ko velja

$$g_1(c_{01}, c_{12}, c_{02}, \alpha) \geq 0$$

in $c_{01} + c_{12} > 0$. Pokažimo sedaj še, da za $c_{02} = 1$ nobena rešitev ni dopustna. V tem primeru velja, da je $c_{01} = c_{12}$. Še več, $g_1(x, x, 1, \alpha) = g_2(x, x, 1, \alpha) = 0$, kar implicira $\zeta^\pm(x, x, 1, \alpha) \rightarrow \infty$. \square

Sedaj moramo obravnavati še posebne primere, ki so bili izpuščeni v izreku 6.1. Navedimo jih v naslednjih dveh izrekih. Dokaze lahko najdemo v [9].

Izrek 6.2. *Prepostavimo, da je $\delta > 0$ in $|c_{01}c_{12}| < 1$ in naj bo*

$$(\Lambda_0, \Lambda_1) := \frac{\delta}{\nu(\alpha)} \left(\frac{1 + c_{02}}{c_{02} - \vartheta(\alpha)}, \frac{1}{2\rho(\alpha)(c_{02} - \vartheta(\alpha))} \right).$$

(a) *Za $c_{01} = 1$ ali $c_{12} = 1$ obstaja (natanko ena) dopustna rešitev sistema (6.3) natanko tedaj, ko $\vartheta(\alpha) < c_{02} < 1$. Rešitev je par (Λ_0, Λ_1) oziroma (Λ_1, Λ_0) .*

(b) Za $c_{01} = -1$ ali $c_{12} = -1$ obstaja (natanko ena) dopustna rešitev sistema (6.3) natanko tedaj, ko $-1 < c_{02} < \vartheta(\alpha)$. Rešitev je par $(-\Lambda_0, -\Lambda_1)$ oziroma $(-\Lambda_1, -\Lambda_0)$.

Preostane še primer, ko je $\delta = 0$.

Izrek 6.3. Naj velja $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{d}_1 \neq \mathbf{d}_0$, Ta predpostavka ima rešitev natanko tedaj, ko je $c_{02} = \vartheta(\alpha)$. V tem primeru vsak par $\lambda_0 = \lambda_1 > 0$ določa regularen interpolant.

Izpustili smo še primer $|c_{01}c_{12}| = 1$. Vidimo, da v tem primeru dobimo regularno premico, če velja $c_{01} = c_{12} = c_{02} = 1$. V vseh drugih primerih ne dobimo regularnih rešitev.

Naslednja lema nam bo povedala, kako izračunamo dolžino PHC krivulje \mathbf{p} , če uporabimo zveze (6.4).

Lema 6.4. Dolžino PHC krivulje \mathbf{p} , ki zadošča pogojem (6.1), lahko zapišemo kot

$$\ell(\mathbf{p}) = \int_0^\alpha \|\mathbf{p}'(t)\| dt = \delta c_{01} + (1 - c_{02})\nu(\alpha)\lambda_1 = \delta c_{12} + (1 - c_{02})\nu(\alpha)\lambda_0.$$

Če imamo dva dopustna interpolanta, ima interpolant, določen s parom $(\lambda_{0,1}, \lambda_{1,1})$, manjšo dolžino kot interpolant, ki ga določa $(\lambda_{0,2}, \lambda_{1,2})$.

Dokaz.

$$\ell(\mathbf{p}) = \int_0^\alpha \|\mathbf{p}'(t)\| dt = \int_0^\alpha \sigma(t) dt.$$

Sedaj uporabimo enačbo (5.7) in dobimo

$$\int_0^\alpha \sum_{i=0}^2 \sigma_i w_i = \sigma_0 \int_0^\alpha w_0(t) dt + \sigma_1 \int_0^\alpha w_1(t) dt + \sigma_2 \int_0^\alpha w_2(t) dt.$$

Sedaj bomo izračunali zadnji člen zgornje enačbe

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha w_2(t) dt &= \int_0^\alpha \frac{1 - \cos t}{\alpha - \sin \alpha} dt = \\ &= \frac{1}{\alpha - \sin \alpha} \int_0^\alpha dt - \frac{1}{\alpha - \sin \alpha} \int_0^\alpha \cos t dt = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha - \sin \alpha} - \frac{1}{\alpha - \sin \alpha} \int_0^\alpha \cos t dt = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha - \sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\alpha - \sin \alpha} = \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha - \sin \alpha} = 1. \end{aligned}$$

Na podoben način izračunamo še prvi in drugi člen ter dobimo, da je

$$\ell(\mathbf{p}) = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2.$$

Torej

$$\ell(\mathbf{p}) = \sum_{i=0}^2 \sigma_i = \|\Delta \mathbf{b}_0\| + \cos \varphi_{01} \|\Delta \mathbf{b}_1\| + \|\Delta \mathbf{b}_2\|.$$

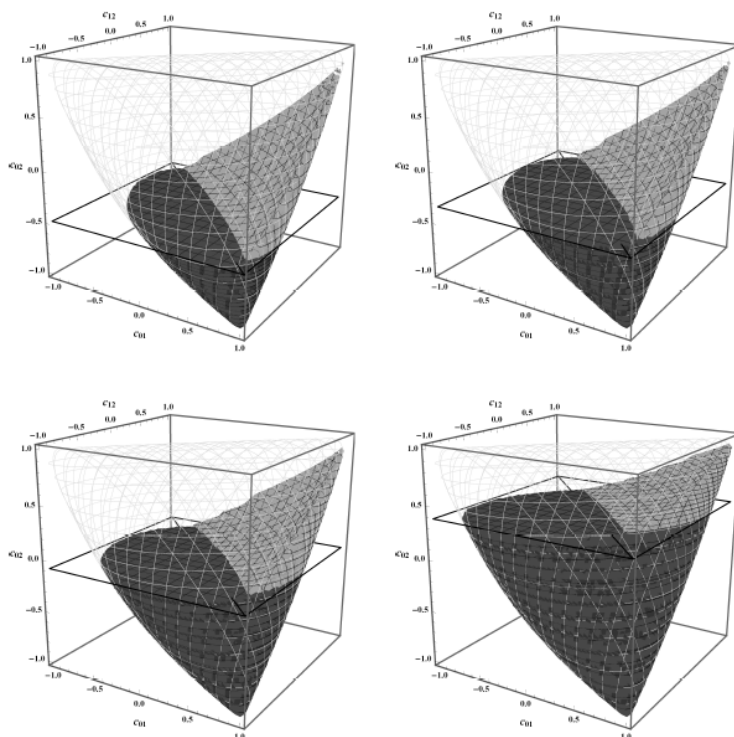
Naj bo \mathbf{p}_i definiran s parom $(\lambda_{0,i}, \lambda_{1,i}), i = 1, 2$. Iz tega sledi

$$\ell(\mathbf{p}_i) = \delta \frac{(c_{01} + c_{12})(4\rho(\alpha) - 1) + (-1)^i \sqrt{g_2(c_{01}, c_{12}, c_{02}, \alpha)}}{4(1 + c_{02})\rho(\alpha) - 2}.$$

Po izreku 6.1 mora biti izpolnjen pogoj za dve rešitvi in sicer $c_{02} > \vartheta(\alpha)$, ki implicira

$$4(1 + c_{02})\rho(\alpha) - 2 > 4(1 + \vartheta(\alpha))\rho(\alpha) - 2 = 0.$$

Iz tega je razvidno, da je $\ell(\mathbf{p}_1) \leq \ell(\mathbf{p}_2)$. □



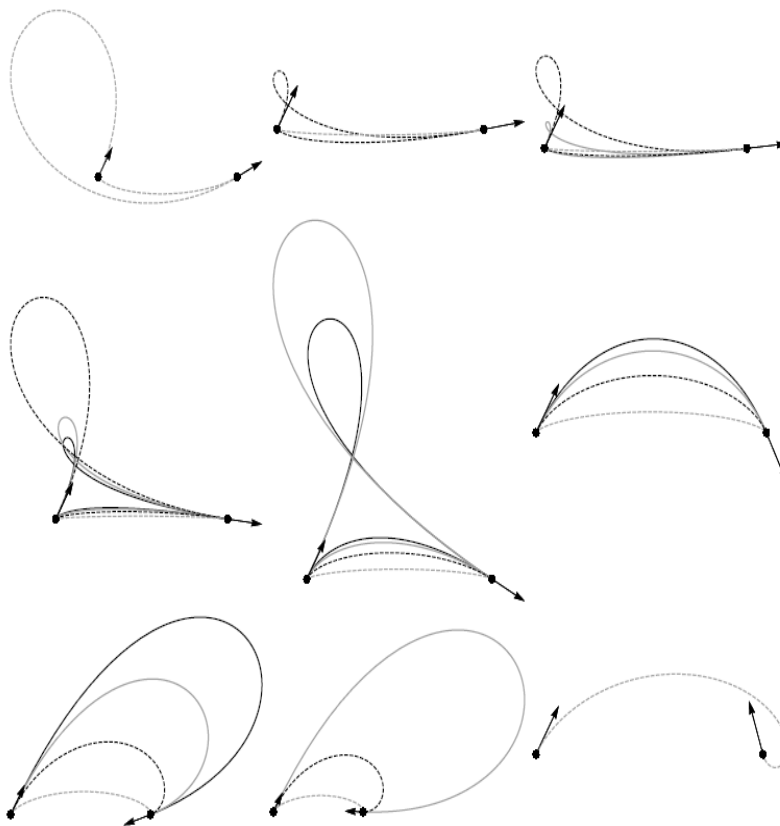
Slika 14: Za parametre c_{01}, c_{12} in c_{02} smo izbrali $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{8}$ in $\frac{6\pi}{4}$. V črnem območju obstaja en PHC interpolant, v temno sivem območju obstajata dva PHC interpolanta, v svetlo sivem območju pa ni PHC interpolantov. Belo območje predstavlja območje, kjer niti ni izpolnjen pogoj (6.2).

Poglejmo si sedaj še en primer.

Primer 6.5. Dane imamo točke $\mathbf{P}_0 = (0, 0)^T, \mathbf{P}_1 = (1, 0)^T$ in tangenti $\mathbf{d}_0 = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3} \right)^T, \mathbf{d}_1 = (\cos \gamma\pi, \sin \gamma\pi)^T$, kjer se tangentna smer v točki \mathbf{P}_1 spreminja z γ , pri čemer

$$\gamma \in \{0.15, 0.05, 0.03, -0.04, -0.16, -0.35, -0.9, -1.01, -1.4\}.$$

Na sliki 15 imamo prikazano vse možne rešitve Hermiteovega interpolacijskega problema pri različnih parametrih $\alpha \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$. Iz izreka 6.1 vemo, da lahko imamo 0, 1 ali 2 interpolanta, katerih število pa je odvisno od parametra α .



Slika 15: Različne rešitve Herimteovega interpolacijskega problema. Črna krivulja predstavlja rešitev pri parametru $\alpha = \frac{\pi}{4}$, siva krivulja pri $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, črna črtkana krivulja pri $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ in črtkana siva krivulja pri parametru $\alpha = \frac{7\pi}{4}$.

7 Algebraične-trigonometrijske krivulje s pitagorejskim hodografom

V tem poglavju bomo definirali nov razred krivulj s pitagorejskim hodografom. Spoznali bomo njihove lastnosti in jih primerjali s polinomskimi krivuljami stopnje pet. S kompleksno reprezentacijo teh krivulj lahko rešimo različne aplikativne probleme, kot je na primer C^1 Hermiteov interpolacijski problem [15].

7.1 Normalizirana B-baza za trigonometrijski in mešan algebraično-trigonometrijski prostor

Naj bo $t \in [0, \alpha]$ in $0 < \alpha < \pi$. Za poljuben $m \in \mathbb{N}$ definiramo prostor trigonometrijskih polinomov reda m kot

$$\tilde{U}_{2m} = \mathcal{L}in\{1, \{\sin(\ell t), \cos(\ell t)\}_{\ell=1}^m\},$$

in označimo z

$$\tilde{B}_i^{2m}(t) = \binom{2m}{i} \mu_i \left(\frac{\cos\left(\frac{2t-\alpha}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)} \right)^{2m} \left(\frac{1}{2} + \frac{\tan\left(\frac{2t-\alpha}{4}\right)}{2 \tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)} \right)^i \left(\frac{1}{2} - \frac{\tan\left(\frac{2t-\alpha}{4}\right)}{2 \tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)} \right)^{2m-i},$$

$i = 0, 1, \dots, 2m$, kjer

$$\mu_i \equiv \mu_{2m-i} := \binom{2m}{i}^{-1} \sum_{r=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} \binom{m}{i-r} \binom{i-r}{r} \left(2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right)^{i-2r}, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

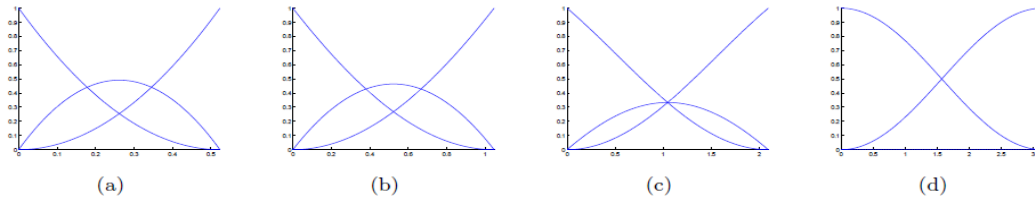
normalizirano B-bazo za tak prostor (glej npr. [11] in [16]). Če je $0 < \alpha < \pi$, potem je za kakršenkoli α μ_i strogo pozitivna vrednost. Bazne funkcije $\tilde{B}_i^{2m}(t)$, $i = 0, 1, \dots, 2m$, imajo naslednje lastnosti:

1. Simetričnost: $\tilde{B}_i^{2m}(t) = \tilde{B}_{2m-i}^{2m}(\alpha - t)$, $t \in [0, \alpha]$,
2. Pozitivnost: $\tilde{B}_i^{2m}(t) \geq 0$, $t \in [0, \alpha]$,
3. Particija enote: $\sum_{i=0}^{2m} \tilde{B}_i^{2m}(t) = 1$, $t \in [0, \alpha]$,
4. Rekurzija: $\tilde{B}_i^{2m}(t) = \tilde{B}_0^2 \tilde{B}_i^{2(m-1)} + \tilde{B}_1^2 \tilde{B}_{i-1}^{2(m-1)} + \tilde{B}_2^2 \tilde{B}_{i-2}^{2(m-1)}$, $m \geq 2$.

Funkcije $\tilde{B}_i^{2m}(t)$, $i = 0, 1, \dots, 2m$, so ekvivalentne Bernsteinovim polinomom v prostoru \tilde{U}_{2m} in konvergirajo proti Bernsteinovim polinomom stopnje $2m$, ko gre $\alpha \rightarrow 0$. Če pa α povečujemo na intervalu $(0, \pi]$, potem dobimo različne krivulje (glej sliko 16). Na sliki 16(d) vidimo, da zgolj prva in zadnja funkcija normalizirane B-baze \tilde{B}_i^{2m} , $i = 0, 1, \dots, 2m$, ostaneta neničelni, če $\alpha \rightarrow \pi$. Krivulja $\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{2m} \mathbf{p}_i \tilde{B}_i^{2m}(t)$, $t \in [0, \alpha]$, se degenerira v daljico $\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_{2m}$. Na primer, ko gre $\alpha \rightarrow \pi$, dobi normalizirana B-baza \tilde{B}_i^2 , $i = 0, 1, 2$, za prostor $\tilde{U}_2 = \langle 1, \sin(t), \cos(t) \rangle$ sledečo obliko:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi} \tilde{B}_0^2(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(t)), \quad \lim_{\alpha \rightarrow \pi} \tilde{B}_1^2(t) = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \pi} \tilde{B}_2^2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(t)).$$

Limitni primer je demonstriran na sliki 16, primer (d).



Slika 16: Bazne funkcije $\tilde{B}_i^2(t)$, $i = 0, 1, 2$, za $t \in [0, \alpha]$ in $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (primer a), $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (primer b), $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ (primer c), $\alpha \rightarrow \pi$ (primer d).

Če izrazimo normalizirane B-bazne funkcije $\{\tilde{B}_i^2\}_{i=0,1,2}$ in $\{\tilde{B}_i^4\}_{i=0,\dots,4}$ za prostora \tilde{U}_2 in \tilde{U}_4 , dobimo

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0^2(t) &= \frac{\cos(\alpha - t) - 1}{\cos(\alpha) - 1}, & \tilde{B}_2^2(t) &= \frac{\cos(t) - 1}{\cos(\alpha) - 1}, \\ \tilde{B}_1^2(t) &= \frac{\cos(\alpha) - \cos(t) - \cos(\alpha - t) + 1}{\cos(\alpha) - 1}, \\ \tilde{B}_0^4(t) &= \frac{(\cos(\alpha - t) - 1)^2}{(\cos(\alpha) - 1)^2}, \\ \tilde{B}_1^4(t) &= \frac{2(\cos(\alpha - t) - 1)(\cos(\alpha) - \cos(t) - \cos(\alpha - t) + 1)}{(\cos(\alpha) - 1)^2}, \\ \tilde{B}_2^4(t) &= \frac{2(\cos(\alpha - t) - 1)(\cos(t) - 1) + (\cos(\alpha) - \cos(t) - \cos(\alpha - t) + 1)^2}{(\cos(\alpha) - 1)^2}, \\ \tilde{B}_3^4(t) &= \frac{2(\cos(t) - 1)(\cos(\alpha) - \cos(t) - \cos(\alpha - t) + 1)}{(\cos(\alpha) - 1)^2}, \\ \tilde{B}_4^4(t) &= \frac{(\cos(t) - 1)^2}{(\cos(\alpha) - 1)^2}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Preidimo sedaj na algebraično-trigonometrijske prostore. Normalizirane B-bazne funkcije v algebraično-trigonometrijskem prostoru

$$U_5 = \mathcal{L}in\{1, t, \sin(t), \cos(t), \sin(2t), \cos(2t)\},$$

bomo označili z $\{\hat{B}_i^5(t)\}_{i=0,\dots,5}$, kjer je $t \in [0, \alpha]$ in $0 < \alpha < 2\pi$ [12]. Dodatno bomo uporabili oznake

$$s_1 := \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad c_1 := \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad s_2 := \sin(\alpha), \quad c_2 := \cos(\alpha), \quad (7.2)$$

in

$$n_0 := 6\alpha + 2s_2(c_2 - 4), \quad n_1 := c_1(s_2 - 3\alpha) + 4s_1, \quad n_2 := (2 + c_2)\alpha - 3s_2. \quad (7.3)$$

Normalizirane B-bazne funkcije v prostoru U_5 lahko izrazimo kot

$$\begin{aligned} \hat{B}_0^5(t) &= \frac{2}{n_0} \left(3(\alpha - t) + \sin(\alpha - t)(\cos(\alpha - t) - 4) \right), \\ \hat{B}_1^5(t) &= \frac{4s_1}{n_0 n_1} \left(n_0 \sin^4\left(\frac{\alpha - t}{2}\right) - 2s_1^4 \left(3(\alpha - t) + \sin(\alpha - t)(\cos(\alpha - t) - 4) \right) \right), \\ \hat{B}_2^5(t) &= \frac{2s_1}{3n_2} \left(8 \sin^3\left(\frac{\alpha - t}{2}\right) \sin \frac{t}{2} - \frac{n_0}{n_1} \sin^4\left(\frac{\alpha - t}{2}\right) + \frac{2s_1^4}{n_1} \left(3(\alpha - t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin(\alpha - t)(\cos(\alpha - t) - 4) \right) \right), \\ \hat{B}_3^5(t) &= \frac{2s_1}{3n_2} \left(8 \sin^3\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - t}{2}\right) - \frac{n_0}{n_1} \sin^4\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{2s_1^4}{n_1} \left(3t + \sin(t)(\cos(t) - 4) \right) \right), \\ \hat{B}_4^5(t) &= \frac{s_1}{n_0 n_1} \left(n_0 \sin^4\left(\frac{t}{2}\right) - 2s_1^4 \left(3t + \sin(t)(\cos(t) - 4) \right) \right), \\ \hat{B}_5^5(t) &= \frac{2}{n_0} \left(3t + \sin(t)(\cos(t) - 4) \right). \end{aligned} \quad (7.4)$$

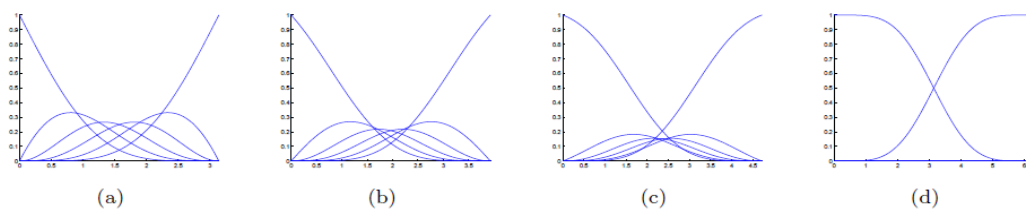
Ko gre α proti 2π , dobijo normalizirane B-bazne funkcije iz enačbe (7.4) sledečo obliko:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi} \hat{B}_0^5(t) &= \frac{1}{12\pi} (12\pi - 6t + 8 \sin(t) - \sin(2t)), \\ \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi} \hat{B}_1^5(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi} \hat{B}_2^5(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi} \hat{B}_3^5(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi} \hat{B}_4^5(t) = 0, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi} \hat{B}_5^5(t) &= \frac{1}{12\pi} (6t - 8 \sin(t) + \sin(2t)). \end{aligned}$$

Limitni primer je predstavljen na sliki 17, primer (d).

7.2 Algebraično-trigonometrijske Bézierove krivulje

V tem poglavju bomo parametrične krivulje v algebraično-trigonometrijskem prostoru U_5 obravnavali kot algebraično-trigonometrijske Bézierove krivulje (AT-Bézierove kri-

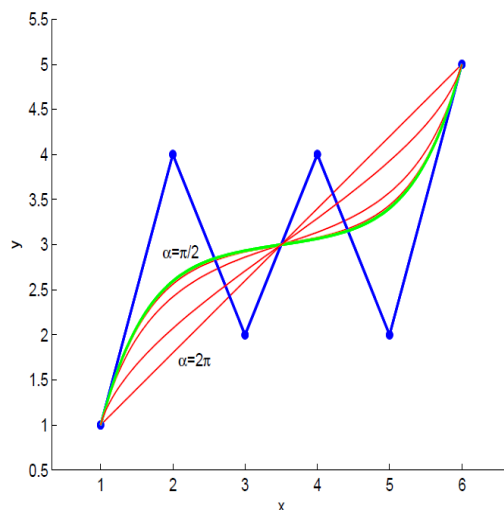


Slika 17: Bazine funkcije $\hat{B}_i^5(t)$, $i = 0, 1, \dots, 5$, za $t \in [0, \alpha]$ in $\alpha = \pi$ (primer a), $\alpha = \frac{5}{4}\pi$ (primer b), $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ (primer c), $\alpha \rightarrow 2\pi$ (primer d).

vulje). Ker ima prostor U_5 normalizirano B-bazo, lahko definiramo parametrično krivuljo na prostoru U_5 s kontrolnim poligonom na podoben način kot pri polinomskem Bézierovem primeru. AT-Bézierovo krivuljo definiramo kot

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^5 \mathbf{p}_i \hat{B}_i^5(t), \quad t \in [0, \alpha], \quad 0 < \alpha < 2\pi,$$

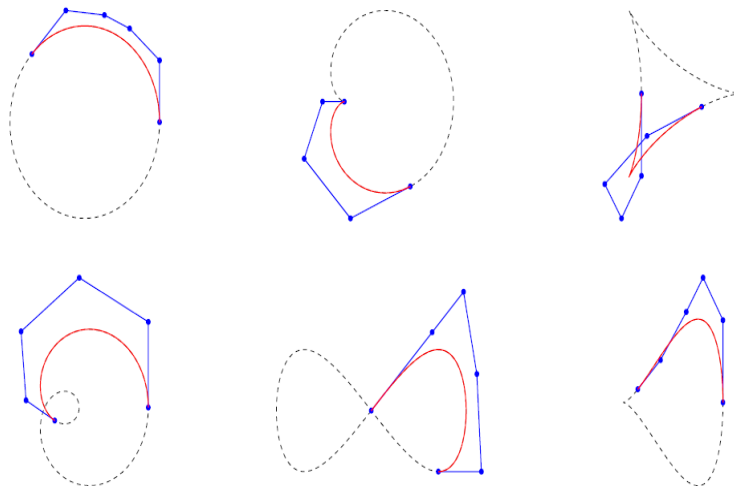
kjer so \hat{B}_i^5 , $i = 0, 1, \dots, 5$, definirane v (7.4). Te krivulje imajo sledeče lastnosti: konveksne ovojnice, afina invariatnost, interpolacija kontrolnih točk ... [1]. Poleg tega so odvisne od parametra α , s katerim skonstruiramo željeno obliko krivulje (glej sliko 18). Slika 18 prikazuje Bézierovo krivuljo stopnje 5 v primerjavi s AT-Bézierovo krivuljo stopnje 5 z različnimi vrednostmi α in istim kontrolnim poligonom.



Slika 18: Primerjava Bézierove krivulje stopnje 5 (zelena krivulja) in AT Bézierove krivulje (rdeče krivulje) za $\alpha = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$.

Imamo še eno pomembno lastnost, to je, da lahko AT-Bézierove krivulje reproducirajo loka poljubnih dolžin ravninskih trigonometrijskih krivulj, katerih komponente so

iz prostora U_5 (glej sliko 19) .



Slika 19: Reprodukcijska lokov različnih trigonometrijskih krivulj z AT Bézierovimi krivuljami s komponentami iz prostora U_5 za $\alpha = \frac{3}{4}\pi$.

7.2.1 Algebraično-trigonometrijske PH krivulje in njihove lastnosti

Če izkoristimo dejstvo, da za $f \in \tilde{U}_2$ velja $f^2 \in \tilde{U}_4$ in $\int f^2 \in \tilde{U}_5$, lahko posplošimo definicijo polinomskih PH krivulj na ATPH krivulje. Pri tem prostor polinomov stopnje ≤ 2 nadomestimo s prostorom $\tilde{U}_2 = \mathcal{L}in\{1, \sin t, \cos t\}$. Ker je $f \in \tilde{U}^2$ definiran za $\alpha \in (0, \pi)$, je potem konstrukcija novega razreda krivulj s pitagorejskim hodografom omejena na $t \in [0, \alpha]$ za $\alpha \in (0, \pi)$.

Definicija 7.1. Naj bodo $u(t), v(t), w(t)$ neničelne realne funkcije v prostoru \tilde{U}_2 , takšne, da sta si $u(t)$ in $v(t)$ tuja med seboj in nekonstantna. Potem se ravninska parametrična krivulja $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^T$, katere odvod je oblike

$$x'(t) = w(t)(u^2(t) - v^2(t)) \quad \text{in} \quad y'(t) = 2w(t)u(t)v(t) \quad (7.5)$$

imenuje **algebraično-trigonometrijska PH krivulja** (ATPH krivulja). Parametrična hitrost ATPH krivulje je dana kot

$$\sigma(t) := \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = w(t)(u^2(t) + v^2(t)), \quad (7.6)$$

medtem, ko so enotska tangenta, enotska normala in fleksijska ukrivljenost podani kot

$$\mathbf{t} = \frac{(u^2 - v^2, 2uv)}{u^2 + v^2}, \quad \mathbf{n} = \frac{(2uv, v^2 - u^2)}{u^2 + v^2}, \quad \kappa = \frac{2(uv' - u'v)}{w(u^2 + v^2)^2}.$$

V nadaljevanju se bomo omejili na regularni primer, in sicer, ko je $w(t) = 1$. V tem primeru lahko enačbo (7.5) predstavimo s kompleksno funkcijo $\mathbf{w}(t) = u(t) + iv(t) \in \tilde{U}_2$, ki jo kvadriramo in dobimo $\mathbf{w}^2(t) = u^2(t) - v^2(t) + i2u(t)v(t)$. Torej enačba (7.5) je dana z realnim in imaginarnim delom od $\mathbf{w}^2(t) \in \tilde{U}_4$. V nadaljevanju bomo uporabili samo kompleksno notacijo in sicer

$$\mathbf{x}'(t) = x'(t) + iy'(t) = u^2(t) - v^2(t) + i2u(t)v(t) = \mathbf{w}^2(t). \quad (7.7)$$

Ker je $\mathbf{w}(t)$ kompleksna funkcija v prostoru \tilde{U}_2 , jo zapišemo kot

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_0 \tilde{B}_0^2(t) + \mathbf{w}_1 \tilde{B}_1^2(t) + \mathbf{w}_2 \tilde{B}_2^2(t), \quad (7.8)$$

kjer $\mathbf{w}_j \in \mathbb{C}$ za $j = 0, 1, 2$. Z integriranjem enačbe (7.7) dobimo parametrično funkcijo $\mathbf{x}(t) \in U_5$, ki jo lahko izrazimo v B-bazi (7.4).

Poglejmo si naslednje vprašanje: kdaj je dana AT krivulja tudi ATPH krivulja?

Trditev 7.2. *Ravninska parametrična krivulja v algebraično-trigonometrijskem prostoru U_5 , izražena kot*

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^5 \mathbf{p}_i \hat{B}_i^5(t), \quad t \in [0, \alpha],$$

je ATPH krivulja, če in samo če lahko njene kontrolne točke izrazimo kot

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 + \frac{n_0}{16s_1^4} \mathbf{w}_0^2, \quad (7.9)$$

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \frac{n_0 - 6n_2}{8s_1^4} \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1, \quad (7.10)$$

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 + \frac{n_2}{4s_1^4} \left((1 + c_2) \mathbf{w}_1^2 + \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_2 \right), \quad (7.11)$$

$$\mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_3 + \frac{n_0 - 6n_2}{8s_1^4} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2, \quad (7.12)$$

$$\mathbf{p}_5 = \mathbf{p}_4 + \frac{n_0}{16s_1^4} \mathbf{w}_2^2, \quad (7.13)$$

kjer so $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ kompleksna števila in s_0, s_1, c_2, n_0, n_2 definirane v (7.2) in (7.3).

Dokaz. Funkcijo v enačbi (7.8) zapišemo v obliki (7.7) in z integriranjem dobimo

$$\mathbf{x}(t) = \int \mathbf{x}'(t) dt = \mathbf{k} + \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 \sin(t) + \mathbf{a}_3 \cos(t) + \mathbf{a}_4 \sin(2t) + \mathbf{a}_0 \cos(2t), \quad (7.14)$$

kjer

$$\mathbf{a}_0 = -\frac{1}{2} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{a}_1 = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_1^2 + \mathbf{u}_2^2) + \mathbf{u}_0^2, \quad \mathbf{a}_2 = 2u_0 u_2, \quad \mathbf{a}_3 = -2\mathbf{u}_0 \mathbf{u}_1,$$

$$\mathbf{a}_4 = \frac{1}{4}(-\mathbf{u}_1^2 + \mathbf{u}_2^2),$$

z

$$\mathbf{u}_0 = \frac{(1 + c_2)\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_2}{c_2 - 1}, \quad \mathbf{u}_1 = \frac{s_2(\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_1)}{c_2 - 1}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{c_2(\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_1) + \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1}{c_2 - 1} \quad (7.15)$$

in \mathbf{k} je konstanta. Zapis baznih funkcij prostora U_5 po normalizirani B-bazi (7.4) in upoštevanje tega v enačbi (7.14) implicira (7.9), kjer $\mathbf{p}_0 = \mathbf{k} - \frac{c_1}{2s_1^3}(\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_1)(c_2(\mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_1) + \mathbf{w}_1 - 2\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_2)$. \square

Po enačbi (7.6) imamo $\sigma(t) := \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = |\mathbf{w}^2(t)|$ in dolžina loka je dana kot

$$\begin{aligned} \int \sigma(t) dt &= \frac{1}{2}(-\gamma_{12} + (2\gamma_{00} + \gamma_{11} + \gamma_{22})t + 4\gamma_{02} \sin(t) - 4\gamma_{01} \cos(t)) \\ &+ \frac{1}{2}(\gamma_{22} - \gamma_{11}) \sin(2t) - \gamma_{12} \cos(2t) \in U_5, \end{aligned} \quad (7.16)$$

kjer

$$\gamma_{ij} = \operatorname{Re}\left(\frac{\mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_j}\right) |\mathbf{u}_j|^2, \quad i, j \in \{0, 1, 2\}, \quad (7.17)$$

z $\mathbf{u}_i, i = 0, 1, 2$, definirani v (7.15). ATPH krivulja nam da poleg točne prezentacije dolžine loka tudi eksaktne krivulje odmika. Za dano ATPH krivuljo $\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^5 \mathbf{p}_i B_i^5(t), t \in [0, \alpha]$, definiramo krivuljo odmika kot $\mathbf{x}_d = \mathbf{x}(t) + d\mathbf{n}(t), t \in [0, \alpha]$. Enotski vektor \mathbf{n} ima racionalno AT prezentacijo v prostoru $\tilde{U}_4 = \mathcal{L}in\{1, \sin(t), \cos(t), \sin(2t), \cos(2t)\}$ in je podan kot

$$\mathbf{n}(t) = \frac{-i\mathbf{w}^2(t)}{\mathbf{w}(t)\bar{\mathbf{w}}(t)},$$

kjer je $\bar{\mathbf{w}}$ konjugiran par od \mathbf{w} in

$$\mathbf{w}^2(t) = \mathbf{w}_0^2 \tilde{B}_0^4(t) + \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1 \tilde{B}_1^4(t) + \frac{\mathbf{w}_0 \mathbf{w}_2 (1 + \cos(\alpha)) \mathbf{w}_1^2}{2 + \cos(\alpha)} \tilde{B}_2^4(t) + \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \tilde{B}_3^4(t) + \mathbf{w}_2^2 \tilde{B}_4^4(t) \in \tilde{U}_4$$

in

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t)\bar{\mathbf{w}}(t) &= \mathbf{w}_0 \bar{\mathbf{w}}_0 \tilde{B}_0^4(t) + \frac{1}{2}(\mathbf{w}_0 \bar{\mathbf{w}}_1 + \mathbf{w}_1 \bar{\mathbf{w}}_0) \tilde{B}_1^4(t) + \\ &+ \frac{\mathbf{w}_0 \bar{\mathbf{w}}_2 + 2(1 + \cos(\alpha)) \mathbf{w}_1 \bar{\mathbf{w}}_1 + \mathbf{w}_2 \bar{\mathbf{w}}_0}{2(2 + \cos(\alpha))} \tilde{B}_2^4(t) + \\ &+ \frac{1}{2}(\mathbf{w}_1 \bar{\mathbf{w}}_2 + \mathbf{w}_2 \bar{\mathbf{w}}_1) \tilde{B}_3^4(t) + \mathbf{w}_2 \bar{\mathbf{w}}_2 \tilde{B}_4^4(t) \in \tilde{U}_4, \end{aligned}$$

kjer so $\tilde{B}_i^4(t), i = 0, 1, \dots, 4$, definirane v (7.1). Tako dobimo

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\sum_{i=0}^4 \tilde{v}_i \tilde{\mathbf{p}}_i \tilde{B}_i^4(t)}{\sum_{j=0}^4 \tilde{v}_j \tilde{B}_j^4(t)}, \quad t \in [0, \alpha],$$

kjer so

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_0 &= \mathbf{w}_0 \bar{\mathbf{w}}_0 = |\mathbf{w}_0|^2, & \tilde{v}_0 \tilde{\mathbf{p}}_0 &= -i \mathbf{w}_0^2, \\
\tilde{v}_1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{w}_0 \bar{\mathbf{w}}_1 + \mathbf{w}_1 \bar{\mathbf{w}}_0), & \tilde{v}_1 \tilde{\mathbf{p}}_1 &= -i \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1, \\
\tilde{v}_2 &= \frac{\mathbf{w}_0 \bar{\mathbf{w}}_2 + 2(1 + \cos(\alpha)) \mathbf{w}_1 \bar{\mathbf{w}}_1 + \mathbf{w}_2 \bar{\mathbf{w}}_0}{2(2 + \cos(\alpha))}, & \tilde{v}_2 \tilde{\mathbf{p}}_2 &= -i \frac{\mathbf{w}_0 \mathbf{w}_2 + (1 + \cos(\alpha)) \mathbf{w}_1^2}{2 + \cos(\alpha)}, \\
\tilde{v}_3 &= \frac{1}{2}(\mathbf{w}_1 \bar{\mathbf{w}}_2 + \mathbf{w}_2 \bar{\mathbf{w}}_1), & \tilde{v}_3 \tilde{\mathbf{p}}_3 &= -i \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2, \\
\tilde{v}_4 &= \mathbf{w}_2 \bar{\mathbf{w}}_2 = |\mathbf{w}_2|^2, & \tilde{v}_4 \tilde{\mathbf{p}}_4 &= -i \mathbf{w}_2^2.
\end{aligned}$$

Ker je torej krivulja $\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^5 \mathbf{p}_i \hat{B}_i^5(t) \in U_5$, lahko definiramo krivuljo odmika $\mathbf{x}_d(t)$ kot racionalno algebrainčno-trigonometrijsko krivuljo v prostoru pridobljenim iz “množenje” \tilde{U}_4 in U_5 . Spomnimo se, da je

$$\tilde{U}_2 = \mathcal{L}in\{1, \sin(t), \cos(t)\}, \quad \tilde{U}_4 = \mathcal{L}in\{1, \sin(t), \cos(t), \sin(2t), \cos(2t)\}$$

in

$$\tilde{U}_8 = \mathcal{L}in\{1, \sin(t), \cos(t), \sin(2t), \cos(2t), \sin(3t), \cos(3t), \sin(4t), \cos(4t)\}.$$

Tako veljata relaciji $\tilde{U}^2 * \tilde{U}^2 = \tilde{U}^4$ in $\tilde{U}^4 * \tilde{U}^4 = \tilde{U}^8$, kjer $*$ označuje “množenje” med dvema prostoroma na način, da so bazne funkcije določene kot produkti posameznih baznih funkcij, iz vsakega prostora po ena. Ker velja $U_5 = \mathcal{L}in\{1, t, \sin(t), \cos(t), \sin(2t), \cos(2t)\}$, dobimo

$$\begin{aligned}
\bar{U} = \tilde{U}^4 * U_5 &= \mathcal{L}in\{\{1, \sin(t), \cos(t), \sin(2t), \cos(2t), \sin(3t), \cos(3t), \sin(4t), \cos(4t)\} \\
&\cup \{t, t \sin(t), t \cos(t), t \sin(2t), t \cos(2t)\}\}.
\end{aligned}$$

Krivulja odmika $\mathbf{x}_d(t)$ od ATPH krivulje $\mathbf{x}(t)$ je torej oblike

$$\mathbf{x}_d(t) = \mathbf{x}(t) + d \mathbf{n}(t) = \sum_{i=0}^5 \mathbf{p}_i \hat{B}_i^5(t) + d \frac{\sum_{i=0}^4 \tilde{v}_i \tilde{\mathbf{p}}_i \tilde{B}_i^4(t)}{\sum_{i=0}^4 \tilde{v}_i \tilde{B}_i^4(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{13} \bar{v}_i \bar{\mathbf{p}}_i \bar{B}_i^{13}(t)}{\sum_{i=0}^{13} \bar{v}_i \bar{B}_i^{13}(t)}, \quad t \in [0, \alpha],$$

kjer so $\bar{B}_i^{13}, i = 0, 1, \dots, 13$, bazne funkcije prostora \bar{U} .

Opomba 7.3. Za polinomske PH krivulje stopnje 5 je njihova krivulja odmika racionalna krivulja stopnje 9. Za ATPH krivulje pa je njihova krivulja odmika racionalna AT krivulja stopnje 13.

7.3 C^1 Hermiteov interpolacijski problem

V tem poglavju bomo predstavili rešitev problema, ki je predstavljen v [7] za polinomske PH krivulje, v kontekstu ATPH krivulj.

Dane imamo kontrolne točke $\mathbf{p}_0 \neq \mathbf{p}_1$ in $\mathbf{p}_4 \neq \mathbf{p}_5$ AT-Bézierove krivulje

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^5 \mathbf{p}_i \hat{B}_i^5(t), \quad t \in [0, \alpha], \quad (7.18)$$

definirane na prostoru U_5 . Iščemo kontrolni točki \mathbf{p}_2 in \mathbf{p}_3 tako, da bo krivulja $\mathbf{x}(t)$ ATPH krivulja. Vemo, da lahko vseh šest kontrolnih točk izrazimo z enačbami (7.9) - (7.13) za neke kompleksne vrednosti $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1$ in \mathbf{w}_2 . Če AT-Bézeirovo krivuljo zapišemo po B-bazi $\hat{B}_i^5, i = 0, 1, \dots, 5$, zanjo velja

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{x}(\alpha) = \mathbf{p}_5, \quad \mathbf{x}'(0) = \frac{16s_1^4}{n_0}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0), \quad \mathbf{x}'(\alpha) = \frac{16s_1^4}{n_0}(\mathbf{p}_5 - \mathbf{p}_4), \quad (7.19)$$

kjer je s_1 dan v (7.2) in n_0 v (7.3). Ta problem lahko poimenujemo kot C^1 Hermiteov interpolacijski problem, kjer potrebujemo prvo kontrolno točko \mathbf{p}_0 in zadnjo kontrolno točko \mathbf{p}_5 in tangentna vektorja v teh dveh kontrolnih točkah, ki bosta označena z \mathbf{d}_0 in \mathbf{d}_2 . Kasneje bomo videli, da sta ta dva tangentna vektorja direktno povezana s kompleksnimi vrednostmi \mathbf{w}_0 in \mathbf{w}_2 .

7.3.1 ATPH interpolanti za rešitev C^1 Hermiteovega problema

Izrek 7.4. *Rešitev Hermiteovega interpolacijskega problema, podanega v (7.18) in (7.19) s kompleksnimi vrednostmi $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$, je podana kot*

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_0 &= \pm |\mathbf{d}_0|^{\frac{1}{2}} \exp\left(i \frac{\omega_0}{2}\right) = \pm |\mathbf{d}_0|^{\frac{1}{2}} \left(\cos\left(\frac{\omega_0}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\omega_0}{2}\right) \right), \\ \mathbf{w}_2 &= \pm |\mathbf{d}_2|^{\frac{1}{2}} \exp\left(i \frac{\omega_2}{2}\right) = \pm |\mathbf{d}_2|^{\frac{1}{2}} \left(\cos\left(\frac{\omega_2}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \right), \\ \mathbf{w}_1 &= \pm |\mathbf{d}_1|^{\frac{1}{2}} \left(\cos\left(\frac{\omega_1}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \right) - \frac{n_0 - 6n_2}{4n_2(1 + c_2)}(\mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_2), \end{aligned} \quad (7.20)$$

kjer so

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_0 &= \frac{16s_1^4}{n_0}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0), \quad \mathbf{d}_2 = \frac{16s_1^4}{n_0}(\mathbf{p}_5 - \mathbf{p}_4), \\ \mathbf{d}_1 &= \frac{1}{1 + c_2} \left(\frac{4s_1^4}{n_2}(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1) + \frac{(n_0 - 6n_2)^2}{16n_2^2(1 + c_2)}(\mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_2)^2 - \mathbf{w}_0\mathbf{w}_2 \right), \end{aligned}$$

$\omega_k = \arg(\mathbf{d}_k), k = 0, 1, 2$, in s_1, c_2, n_0, n_2 so definirane v (7.2) in (7.3).

Dokaz. Po Moivrovem izreku iz (7.9) - (7.13) pridobimo izraza za \mathbf{w}_0 in \mathbf{w}_2 v (7.20). Zapišimo sedaj $\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1 = (\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_3) + (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)$ in vstavimo izraze iz (7.9) - (7.13). Dobimo

$$\frac{8s_1^4}{n_0 - 6n_2}(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1) = \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2 + \frac{2n_2}{n_0 - 6n_2} \left((1 + c_2)\mathbf{w}_1^2 + \mathbf{w}_0\mathbf{w}_2 \right) + \mathbf{w}_0\mathbf{w}_1. \quad (7.21)$$

Z zamenjavo spremenljivk

$$\tilde{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{w}_1 + \frac{n_0 - 6n_2}{4n_2(1 + c_2)}(\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_2) \quad (7.22)$$

enačba (7.21) postane

$$\tilde{\mathbf{w}}_1^2 = \frac{4s_1^4}{n_2(1 + c_2)}(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1) + \frac{(n_0 - 6n_2)^2}{16n_2^2(1 + c_2)^2}(\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_2)^2 - \frac{1}{1 + c_2}\mathbf{w}_0\mathbf{w}_2. \quad (7.23)$$

Iz (7.23) dobimo

$$\tilde{\mathbf{w}}_1 = \pm|\mathbf{d}_1|^{\frac{1}{2}}\exp\left(i\frac{\omega_1}{2}\right) = \pm|\mathbf{d}_1|^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{\omega_1}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\right) \quad (7.24)$$

z

$$\mathbf{d}_1 = \frac{4s_1^4}{n_2(1 + c_2)}(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1) + \frac{(n_0 - 6n_2)^2}{16n_2^2(1 + c_2)^2}(\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_2)^2 - \frac{1}{1 + c_2}\mathbf{w}_0\mathbf{w}_2.$$

Enačbo (7.24) vstavimo v enačbo (7.22) in dobimo izraz za \mathbf{w}_1 , kot smo ga zapisali v enačbi (7.20). \square

Opomba 7.5. Z enačbami (7.20) lahko zaradi neodvisne izbire predznakov skonstruiramo osem ATPH krivulj. Toda, če na primer vzamemo $(-\mathbf{w}_0, -\mathbf{w}_1, -\mathbf{w}_2)$ ali $(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$, dobimo isto krivuljo. Izkaže se [7], da lahko fiksiramo predznak ene izmed treh enačb v (7.20) in tako dobimo samo štiri različne ATPH krivulje.

Opomba 7.6. Parameter α vpliva na obliko krivulje ATPH. To lahko vidimo na sliki 20, kjer imamo različne ATPH krivulje z enako začetno in končno točko ter odvodi (izbrana + predznaka pri \mathbf{w}_0 in \mathbf{w}_2), prikazane skupaj s standardno polinomsko PH krivuljo stopnje pet, s katero lahko tudi rešimo C^1 Hermiteov problem [5].

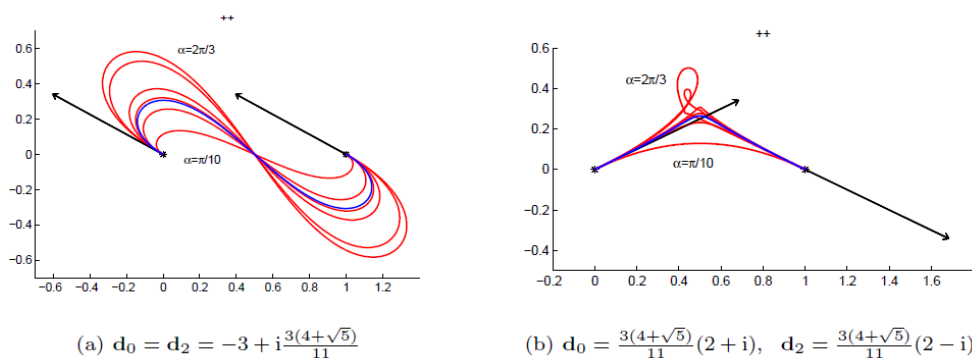
Slika 21 prikazuje vedenje štirih možnih kombinacij ATPH krivulj, ki interpolirajo podatke $\mathbf{p}_0 = 5i$, $\mathbf{p}_5 = -3 - 4i$, $\mathbf{d}_0 = \mathbf{d}_2 = 25 - 15i$ za različno izbiro $\alpha \in (0, \pi)$. Dobimo štiri možne kombinacije ATPH krivulj z izbiro predznakov $\{(++), (+-), (-+), (--)$ v izrazu za \mathbf{w}_0 in \mathbf{w}_2 .

Dolžino loka ATPH krivulj lahko izračunamo iz enačbe (7.16) tako, da uvedemo meje med 0 in α in dobimo

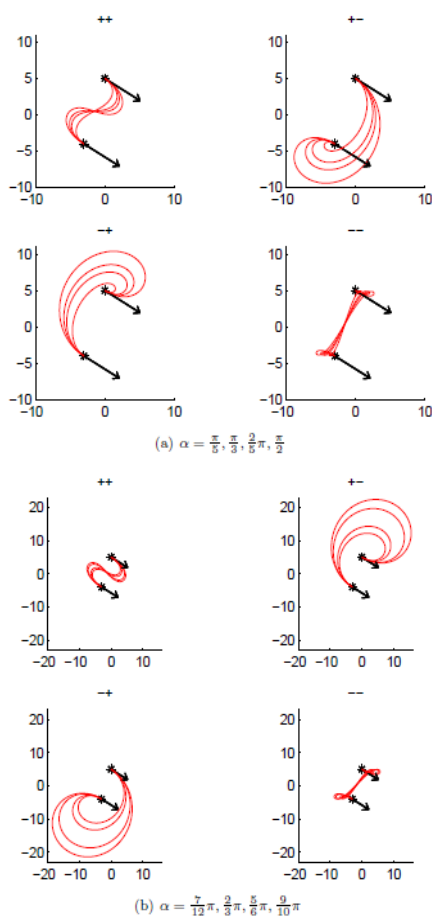
$$\begin{aligned} S_\alpha = \int_0^\alpha \theta(t)dt &= 2\gamma_{01} + \frac{1}{2}\gamma_{12} + (\gamma_{00} + \frac{1}{2}(\gamma_{11} + \gamma_{22}))\alpha + 2\gamma_{02}\sin(\alpha) \\ &\quad - 2\gamma_{01}\cos(\alpha) + \frac{1}{4}(\gamma_{22} - \gamma_{11})\sin(2\alpha) - \frac{1}{2}\gamma_{12}\cos(2\alpha) \end{aligned} \quad (7.25)$$

z γ_{ij} iz (7.17). Iz (7.25) lahko ugotovimo, da ločna dolžina S_α monotono narašča z naraščanjem α , kar je razvidno tudi na sliki 22.

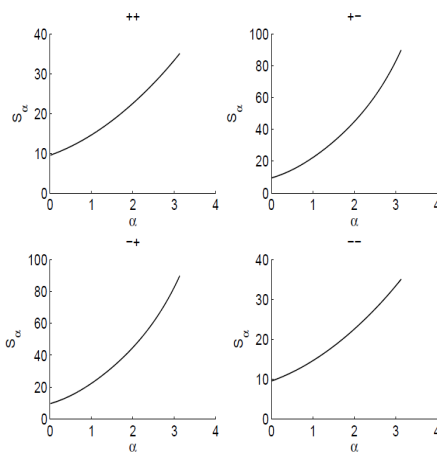
Obstajajo še drugi načini, kako izbrati najboljšo izmed rešitev. Dve izmed teh metod sta rotacijski indeks ali absolutni rotacijski indeks [15].



Slika 20: Primerjava ATPH krivulj (rdeče krivulje), kjer vzamemo $\mathbf{p}_0 = 0, \mathbf{p}_5 = 1$ in tangentna vektorja $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_2$ z vrednostma, zapisanima pod obema slikama za ++ izbiro pri \mathbf{w}_0 in \mathbf{w}_2 ter vrednosti $\alpha \in \{\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{5}\pi, \frac{3}{5}\pi, \frac{2}{3}\pi\}$ s (++) PH krivuljo stopnje pet (modra krivulja). Z vsemi krivuljami rešimo C^1 Hermiteov interpolacijski problem.



Slika 21: Štiri možne kombinacije ATPH krivulj za $\mathbf{p}_0 = 5i, \mathbf{p}_5 = -3 - 4i, \mathbf{d}_0 = \mathbf{d}_2 = 25 - 15i$ za različne vrednosti $\alpha \in (0, \pi)$.



Slika 22: Obnašanje dolžine loka S_α ATPH krivulj iz slike 21 za $\alpha \in (0, \pi)$ in za različne izbire predznakov $\{(++), (+-), (-+), (--)\}$.

8 ZAKLJUČEK

V magistrski nalogi smo obravnavali teoretično ozadje polinomskih krivulj s pitagorejskim hodografom. Te krivulje sodijo v podrazred razreda polinomskih krivulj. Ker imajo številne uporabne lastnosti, se jih uporablja v CAD in CAGD. Spoznali smo uporabo kompleksne reprezentacije krivulj s pitagorejskim hodografom tako, da iz dane polinomske krivulje naredimo novo krivuljo s pitagorejskim hodografom. Nato smo se osredotočili na cikloidne krivulje s pitagorejskim hodografom, ki so razširitev kubičnih krivulj s pitagorejskim hodografom. Spoznali smo, da so vse PHC krivulje, ki niso premice, regularne v ravnini in v prostoru. Poleg tega smo prikazali, da so vse PHC krivulje v ravnini vedno konveksne. Potem smo rešili Hermiteov interpolacijski problem s PHC krivuljami, kjer smo imeli dani dve točki in predpisani smeri tangent v teh dveh točkah, poiskali pa smo PHC krivuljo, ki te podatke interpolira. Nato smo z algebraično-trigonometrijsko krivuljo s pitagorejskim hodografom rešili C^1 Hermiteov interpolacijski problem, kjer imamo dani dve točki in tangentna vektorja v teh dveh točkah.

V magistrski nalogi nismo obravnavali prostorov algebraično-eksponentnih funkcij, pri katerih kombiniramo polinome in funkcijo e^x ali algebraično-hiperboličnih funkcij, kjer bi bilo prav tako zanimivo pogledati PH lastnost.

PH krivulje so osnova, da dobimo krivulje, ki imajo racionalno rotacijsko minimizirajoče ogrodje (RRMF), s katerim je določeno prostorsko gibanje togega telesa. Žal pa samo PH lastnost ni dovolj, da bi krivulja imela RRMF ogrodje. Kaj bi moralo dodatno veljati za PH krivulje, da bi imele RRMF ogrodje je še vedno v določenih primerih odprt raziskovalni problem [5], [6]. To tudi nakazuje, da raziskovanje s PH krivuljami še zdaleč ni zaključeno.

9 Literatura

- [1] J.M. CARNICER in J.M. PENA, Totally positive bases for shape preserving curve design and optimality of B-splines. *Comput. Aided Geom. Design* 11 (1994) 633–654. (*Citirano na strani 41.*)
- [2] M. ČERNE, *Ogradja prostorskih parametričnih krivulj*, Fakulteta za računalništvo in informatiko. Univerza v Ljubljani 2013 (*Citirano na straneh VII, 8, 9 in 20.*)
- [3] J. DATTORRO, *Convex Optimization & Euclidean Distance Geometry*, Μεβoo Publishing. 2009 (*Citirano na strani 32.*)
- [4] G. FARIN, *Curves and surfaces for CAGD*, Morgan Kaufmann publishers, Fifth ed., San Francisco. 2006 (*Citirano na strani 3.*)
- [5] R.T. FAROUKI, *Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and geometry inseparable*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. 2008 (*Citirano na straneh VII, 8, 15, 22, 47 in 50.*)
- [6] R.T. FAROUKI, C. GIANNELLI, C. MANNI in A. SESTINI, Quintic Space Curves with Rational Rotation-Minimizing Frames. *Comput. Aided Geom. Design* 26 (2009) 580–592. (*Citirano na strani 50.*)
- [7] R.T. FAROUKI in C.A. NEFF, Hermite interpolation by Pythagorean-Hodograph quintics. *Math. Comput.* 64 (1995) 1589–1609. (*Citirano na straneh 45 in 47.*)
- [8] R.T. FAROUKI in T. SAKKALIS, Pythagorean hodographs. *IBM Journal of Research and development* 34 (1990) 736–752. (*Citirano na strani 1.*)
- [9] J. KOZAK, M. KRAJNC, M. ROGINA in V. VITRIH, Pythagorean-hodograph Cycloidal curves. *Journal of Numerical Mathematics* 4 (2015) 345–360. (*Citirano na straneh 31 in 34.*)
- [10] J. KOZAK, *Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov*, <http://www.fmf.uni-lj.si/kozak/PedagoskoDelo/Gradiva/UvodVNumericneMetode/Prosojnice/AproksimacijaPoMetodiNajmanjsihKvadratov.pdf>. (Datum ogleda: 02. 4. 2017.) (*Citirano na strani 25.*)

- [11] E. MAINAR in J.M. PÉÑA, A general class of Bernstein-like bases. *Computers and Mathematics with Applications* 53 (2007) 1686–1703. (Citirano na strani 38.)
- [12] E. MAINAR, J.M. PÉÑA in J. SANCHEZ-REYES, Shape preserving alternatives to the rational Bézier model. *Comput. Aided Geom. Design* 18 (2001) 37–60. (Citirano na strani 40.)
- [13] N. MITROVIĆ, *Karakterizacija ravninskih krivulj in prostorskih krivulj s pitagorejskim hodografom*, Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije, Slovenija, Koper. 2015 (Ni citirano.)
- [14] F. PELOSI, RIDA T. FAROUKI, C. MANNI in A. SESTINI, Hermite interpolation by spatial Pythagorean-hodograph cubics. *Adv. Comput. Math.* 22 (2005) 325–352. (Ni citirano.)
- [15] L. ROMANI, L. SAINI in G. ALBRECHT, Algebraic-Trigonometric Pythagorean-Hodograph curves and their use for Hermite interpolation. *Adv. Comput. Math.* 40 (2014) 977–1010. (Citirano na straneh 38 in 47.)
- [16] J. SANCHEZ-REYES, Harmonic rational Bézier curves, p-Bézier curves and trigonometric polynomials. *Comput. Aided Geom. Design* 15 (1998) 909–924. (Citirano na strani 38.)
- [17] E. ŽAGAR, *Ravninske krivulje s pitagorejskim hodografom*, <http://uc.fmf.uni-lj.si/mi/arhivpoletih/gradiva/1011/EZagar.pdf>. (Datum ogleda: 10. 2. 2017.) (Citirano na strani 3.)
- [18] E. ŽAGAR, *Interpolacija s parametričnimi polinomskimi krivuljami*, http://studentski.net/gradivo/ulj_fmf_pm1_nm2_sno.bezierove.krivulje_01?r=1. (Datum ogleda: 14. 2. 2017.) (Citirano na strani 11.)
- [19] J. ZHANG, C-curves: An extension of cubic curves. *Comput. Aided Geom. Design* 13 (1996) 199–217. (Citirano na strani 24.)
- [20] M. ŽELJKO, *Matematika*, <http://zeljko.dmfa.si/lectures/2010/Goz-Matematika.pdf>. (Datum ogleda: 14. 2. 2017.) (Citirano na strani 11.)
- [21] *Tschirnhausen cubic (polar)*, <http://blog.digi-area.com/2012/02/>. (Datum ogleda: 22. 4. 2017.) (Citirano na straneh VII in 4.)