

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Zaključna naloga
Izrek Kuratowskega
(Kuratowski's Theorem)

Ime in priimek: Tilen Sabadin

Študijski program: Matematika

Mentor: izr. prof. dr. Martin Milanič

Koper, september 2017

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Tilen SABADIN

Naslov zaključne naloge: Izrek Kuratowskega

Kraj: Koper

Leto: 2017

Število listov: 55

Število slik: 46

Število referenc: 17

Mentor:izr. prof. dr. Martin Milanič

Ključne besede: ravninski graf, ravninska vložitev, subdivizija, izrek Kuratowskega, minor, izrek o grafovskih minorjih

Math. Subj. Class. (2010): 05C10, 05C75, 05C38

Izvleček:

V nalogi predstavimo izrek Kuratowskega, ki karakterizira ravninske grafe kot grafe, ki ne vsebujejo kakšnega podgrafa, izomorfnega subdiviziji grafov K_5 ali $K_{3,3}$. Graf je ravninski, če ga lahko vložimo v ravnino brez presečišč povezav. Subdivizija grafa G je graf, ki ga dobimo iz grafa G z zamenjavo vsake od povezav s potjo dolžine vsaj ena. V nalogi predstavimo pet dokazov izreka Kuratowskega treh različnih avtorjev. Trije Thomassenovi dokazi so podani induktivno po številu vozlišč oz. po vsoti števila vozlišč in povezav grafa. Zasnovani so na ideji prekrivanja t. i. C -komponent grafa, tako da pokažemo, da je graf bodisi ravninski ali pa poiščemo prekrivajoče C -komponente in z njihovo pomočjo subdivizijo grafov $K_{3,3}$ ali K_5 . Naslednji, Tverbergov, dokaz je zasnovan na študiju minimalnega protiprimera izreku Kuratowskega, za katerega pa se izkaže, da ne obstaja. Nato predstavimo še algoritmično zasnovan dokaz Klotza, v katerem originalni graf iterativno 'razbijemo' na dva manjša grafa in bodisi ugotovimo, da sta oba grafa ravninska, ali pa v enem izmed njiju poiščemo subdivizijo K_5 ali $K_{3,3}$. Podamo tudi Harary-Tutteovo ekvivalentno formulacijo izreka. V zadnjem poglavju spoznamo grafovske minorje in nekaj rezultatov v povezavi z njimi.

Key words documentation

Name and SURNAME: Tilen SABADIN

Title of final project paper: Kuratowski's Theorem

Place: Koper

Year: 2017

Number of pages: 55

Number of figures: 46

Number of references: 17

Mentor: Assoc. Prof. Martin Milanič, PhD

Keywords: planar graph, planar embedding, subdivision, Kuratowski's theorem, minor, Graph Minor theorem

Math. Subj. Class. (2010): 05C10, 05C75, 05C38

Abstract:

In the final project paper we present Kuratowski's theorem, which characterises planar graphs as graphs that do not contain any subgraph isomorphic to a subdivision of K_5 or $K_{3,3}$. A graph is planar if we can embed it in the plane without edge crossings. A subdivision of graph G is a graph obtained from G by substituting each of its edges with a path of length at least one. We present five proofs of Kuratowski's theorem by three different authors. The three Thomassen's proofs are given inductively on the number of vertices or on the sum of the number of vertices and edges. The proofs are based on the idea of overlapping C -components. We either show that the graph is planar, or else find overlapping C -components, and with their help a subdivision of K_5 or $K_{3,3}$. The next, Tverberg's, proof is based on the study of properties of a minimal counterexample to Kuratowski's Theorem, which turns out to be non-existent. Then we present an algorithmic proof by Klotz, in which the original graph is iteratively divided into two smaller ones, and we either find out that both smaller graphs are planar, or identify a subdivision of K_5 or $K_{3,3}$ in one of them. We also present an equivalent formulation of Kuratowski's Theorem by Harary and Tutte. In the last chapter we summarize some of the most important results from the theory of graph minors.

Zahvala

Izr. prof. dr. Martinu Milaniču bi se rad zahvalil za pomoč in strokovne nasvete, kadar koli sem jih potreboval v času nastajanja te diplomske naloge, ter za odličen odnos, ki ga ima s študenti. Rad bi se zahvalil tudi mami, očetu in bratoma za podporo.

Kazalo vsebine

1	Uvod	1
1.1	Osnove in definicije	1
1.1.1	Podgrafi in osnovne vrste grafov	2
1.1.2	Ravninski grafi	3
1.1.3	Subdivizija	4
1.1.4	Povezanost grafov	4
1.1.5	Lica ravninske vložitve grafa	6
1.1.6	Eulerjeva formula	8
2	Različni dokazi izreka Kuratowskega	10
2.1	Utemeljitev predpostavke o 3-povezanosti za neravninske grafe	11
2.2	Trije Thomassenovi dokazi	12
2.2.1	Dokaz z uporabo prekrivajočih se komponent	13
2.2.2	Dokaz, ki temelji na karakterizaciji 3-povezanih grafov	18
2.2.3	Dokaz, ki temelji na skrčitveni lemi za 3-povezane grafe	23
2.3	Tverbergov dokaz	30
2.4	Dokaz Klotza in njegova algoritmična uporaba	33
2.4.1	Dokaz	33
2.4.2	Algoritmična uporaba in ocena časovne zahtevnosti	37
2.5	Harary-Tutteova ekvivalentna formulacija izreka	39
2.6	Razprava o dokazih	42
3	O grafovskih razredih, zaprtih za minorje	48
3.1	Relacija minorjev in drevesna dekompozicija	48
3.2	Izrek o grafovskih minorjih	51
4	Zaključek	53
5	Literatura	54

Kazalo slik

1	Subdivizija povezave.	4
2	p in njej ekvivalentne točke.	6
3	Slika k dokazu Jordanovega izreka.	7
4	Posledica Jordanovega izreka.	7
5	V ravninski vložitvi grafa so lica omejena s ciklom.	8
6	Sliki grafov K_5 in $K_{3,3}$	10
7	Prekrivajoči graf.	14
8	C -komponentna H_i je C -prekrivajoča s komponentama H_{i-1} in H_{i+1}	16
9	Cikel C nadomestimo z rdeče obarvanim ciklom C'	16
10	H'_i je edina C' -komponenta, ki ni hkrati tudi C -komponenta.	16
11	Z inverznim subdividiranjem povezav najdemo podgraf $K_{3,3}$ grafa G	17
12	Subdiviziji $K_{3,3}$ (levo v modrem) in K_5 (desno) v G	18
13	Subdivizija $K_{3,3}$ v G , obarvana modro.	18
14	Hipotetičen graf $G - e$, v katerem H_x in H_y nista C -prekrivajoči komponenti.	21
15	Tri komponente grafa $(G - e) - \{u, v\}$	22
16	Subdivizija grafa $K_{3,3}$ v G v modri barvi.	22
17	Subdivizija grafa K_5 v G , v modri barvi.	23
18	Skrčitev povezave e v grafu G	24
19	S skrčitvijo označenih povezav e_i iz Petersenovega grafa dobimo graf K_5	24
20	Graf G in njegov dualni graf G^*	25
21	Povezava med dualnim grafom grafa G in dualnim grafom grafa G'	25
22	Komponenti H in H' ter prerezna množica $\{z, u, v\}$, kjer je $v \in H$ ali $v \in H'$	26
23	Podgraf Kuratowskega v G , dobljen iz podgrafa Kuratowskega H	27
24	Subdivizija K_5 , H , in subdivizija grafa $K_{3,3}$ v G , pridobljena iz H	27
25	Konveksna vložitev grafa K_4	28
26	Konveksna vložitev grafa $G' = G/e$ in graf G	29
27	Subdiviziji grafov K_5 (levo) in $K_{3,3}$ (desno) v G	29
28	Dve subdiviziji grafa K_5^- , izomorfni grafu $K_{3,3}^-$	31

29	Projekcija vozlišč in robov tetraedra T v ravnino.	31
30	Primeri majnih in velikih H -mostov in H -most, ki ni niti majhen niti velik.	32
31	Način razdelitve grafa G na grafa G_1 in G_2 za $\kappa_H(a, b) = 0$	33
32	Način razdelitve grafa G na grafa G_1 in G_2 za $\kappa_H(a, b) = 1$	34
33	Podgraf Kuratowskega K v grafu G_1 (levo) in K v grafu G desno.	34
34	Oznake vozlišč grafa G za $\kappa_H(a, b) = 2$	34
35	Graf G , za katerega velja $\kappa_G(r, s) = 3$	35
36	‘Velika’ črna in bela vozlišča so vozlišča stopnje 3 subdivizije $K_{3,3}$ v G	35
37	Način razdelitve grafa G na grafa G_1 in G_2 za $\kappa_H(a, b) = 2$	36
38	Podgraf grafa H , v katerem najdemo subdivizijo grafa $K_{3,3}$	37
39	Podgraf grafa G , v katerem najdemo subdivizijo grafa $K_{3,3}$	37
40	Subdividiran K_5 v G in K_5 , ki je subkontrakcija grafa G	40
41	Primer subdivizije $K_{3,3}$ v $(G \cdot S)$, ki jo dobimo iz subkontrakcije $K = (G \cdot S) \times T = K_{3,3}$	41
42	Primer, ko lahko subkontrakcijo K_5 preoblikujemo v subkontrakcijo $K_{3,3}$	42
43	Dva vozliščno minimalna grafa, s po tremi C -komponentami.	43
44	Podgraf H v grafu G , ki je $K_{3,3}^-$	45
45	Drevo $T(G)$	46
46	Graf G in njegova drevesna dekompozicija (T, \mathcal{V})	50

Seznam kratic

i. p. indukcijska predpostavka

npr. na primer

oz. oziroma

t. i. tako imenovani

tj. to je

1 Uvod

Vemo, da lahko kateri koli graf vložimo v prostor. Kaj pa v ravnino? Ravninski graf je graf, vozlišča katerega je moč predstaviti kot različne točke v evklidski ravnini, povezave pa kot enostavne krivulje v ravnini, tako da vsaka krivulja, ki predstavlja povezavo s krajiščema u in v , povezuje točki v ravnini, ki predstavljata vozlišči u in v , in se nobeni dve krivulji ne sekata, razen morda v skupnem krajišču. Znameniti izrek Kuratowskega, poimenovan po poljskem matematiku Kazimierzu Kuratowskemu, karakterizira ravninske grafe kot grafe, ki ne vsebujejo podgrafa izomorfnega neki subdiviziji grafov K_5 (poln graf na petih točkah) ali $K_{3,3}$ (poln dvodelni graf na šestih vozliščih, izmed katerih so tri povezana s preostalimi tremi). Subdivizijo grafa dobimo z zaporedno subdivizijo povezav; povezave torej zamenjamo z netrivialnimi potmi med ustreznimi pari krajišč. Za originalen članek Kuratowskega, napisan v francoskem jeziku, glej [10].

V drugem poglavju bomo spoznali dokaz trivialne implikacije in pet različnih dokazov netrivialne implikacije izreka Kuratowskega, v katerih so uporabljeni različne tehnike in pristopi. Spoznali bomo tri Thomassenove dokaze, Tverbergov dokaz ter Klotzev dokaz in nekaj algoritmičnega ozadja. Povzeli bomo tudi Hararyjevo in Tutteovo ekvivalentno formulacijo izreka Kuratowskega, vključno z dokazom ekvivalence. Na kratko bomo povzeli dokaze in tehnike oz. pristope. V zadnjem poglavju bomo spoznali pojem grafovskih minorjev in osnovne rezultate Robertsona in Seymourja o grafovskih razredih, zaprtih za minorje. Še pred tem pa se bomo v naslednjem razdelku seznanili z nekaterimi osnovami in definicijami, potrebnimi v nadaljevanju.

1.1 Osnove in definicije

Graf G je trojica, ki jo sestavljajo množica vozlišč $V(G)$, množica povezav $E(G)$ in relacija, ki vsaki povezavi dodeli dve (ne nujno različni) vozlišči, imenovani *krajišči* povezave. *Red* grafa je število njegovih vozlišč.

Zanka je povezava, katere krajišči sta isti. *Večkratne povezave* so povezave, ki imajo enak par krajišč. Graf G je *enostaven*, če ne vsebuje zank in večkratnih povezav. Vsi grafi v nalogi so enostavni, razen če bomo poudarili drugače. Dejstvo, da v splošnih grafih dopuščamo zanke in večkratne povezave, bomo po potrebi poudarili tako, da

bomo namesto ‘graf’ pisali ‘*multigraf*’. Če sta vozlišči u in v krajišči ene povezave, pravimo, da sta *sosednji*. Množico vseh sosednjih vozlišč (množico sosedov) vozlišča u v grafu G označimo z $N_G(u)$.

Izomorfizem grafov G in H , je bijektivna preslikava $f : V(G) \rightarrow V(H)$, ki ohranja sosednjost vozlišč (tj. če sta sosednji vozlišči $u, v \in V(G)$, potem sta sosednji tudi vozlišči $f(u), f(v) \in V(H)$ v H). Grafoma G in H , med katerima obstaja izomorfizem, rečemo, da sta izomorfna, in pišemo $G \cong H$.

Končni graf je graf, ki ima končni množici vozlišč in povezav.

1.1.1 Podgrafi in osnovne vrste grafov

Definicija 1.1 (podgraf). *Podgraf* grafa G je tak graf H , da velja $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$. Pišemo tudi $H \subseteq G$ in pravimo, da G vsebuje H .

Definicija 1.2 (vpeti podgraf). H je *vpeti podgraf* grafa G , če je $V(H) = V(G)$.

Definicija 1.3 (inducirani podgraf). Podgraf $H \subseteq G$ je *inducirani podgraf* grafa G , če je $U = V(H) \subseteq V(G)$ in je vsaka povezava $xy \in E(G)$, kjer sta vozlišči $x, y \in U$ povezani tudi v H , torej $xy \in E(H)$. Pravimo tudi, da je H inducirani podgraf grafa G na množici vozlišč U in ga označimo z $G[U]$.

Definicija 1.4 (pot). *Pot* $P = (V, E)$ je (neprazen) graf, kjer je $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{n-1}x_n\}$ in $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$. Vozlišči x_0 in x_n sta ‘povezani’ preko P in sta *krajišči poti*; vozlišča x_1, \dots, x_{n-1} so *notranja vozlišča* poti P .

Pot pogosto označimo glede na zaporedje njenih vozlišč; npr. pot $P = x_0x_1 \dots x_n$ je pot od x_0 do x_n .

Za $0 \leq i \leq j \leq n$ pišemo $x_iPx_j = x_i \dots x_j$ in $\dot{P} := x_1 \dots x_{n-1}$. Za poti $P_1 \dots P_n$ pravimo, da so *neodvisne* (ali *notranje disjunktne*), če velja: $V(\dot{P}_1) \cap \dots \cap V(\dot{P}_n) = \emptyset$. Če sta A, B množici vozlišč, pravimo poti $P = x_0 \dots x_n$ *A, B-pot*, če velja $V(P) \cap A = \{x_0\}$ in $V(P) \cap B = \{x_n\}$. Če je G graf in sta $u, v \in V(G)$, pravimo poti uPv *u, v-pot* v G . Največje število notranje disjunktne *u, v-poti* v G označimo s $\kappa_G(u, v)$.

Definicija 1.5 (*G-pot*). Za nek graf G rečemo poti P *G-pot*, če P ni trivialna in sreča G samo v njenih krajiščih.

Definicija 1.6 (cikel). *Cikel* je sklenjena pot oz. pot, v kateri je začetno vozlišče enako končnemu. Ciklu z n vozlišči pravimo *n-cikel* in ga označimo s C_n .

Definicija 1.7 (polni graf). *Polni graf* K_n je enostaven graf reda n , v katerem sta poljubni dve vozlišči sosednji. *Polni dvodelni graf* je enostaven dvodelni graf, v katerem je vsako vozlišče povezano z nekim drugim natanko tedaj, ko vozlišči pripadata različnima deloma particije grafa. Če imata dela particije red r oz. s , označimo tak poln dvodelni graf s $K_{r,s}$.

1.1.2 Ravninski grafi

Definicija 1.8 (ravninski graf). Graf G je *ravninski*, če ga lahko preslikamo (narišemo) v ravnino tako, da nobeni dve povezavi nimata skupnih točk (se ne sekata), razen morda v krajiščih. Taki preslikavi oz. na novo dobljenemu grafu, pravimo *ravninska vložitev* grafa G .

Spodaj si pogledjmo formalnejšo definicijo vložitve grafa v ravnino, še pred tem pa definicijo poligonalne krivulje.

Definicija 1.9 (daljica). *Daljica* pq v evklidski ravnini je podmnožica \mathbb{R}^2 , ki ima obliko $\{p + \lambda(q - p) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$, kjer sta $p, q \in \mathbb{R}^2$, $p \neq q$.

Definicija 1.10 (poligonalna krivulja). *Poligonalna krivulja* je podmnožica \mathbb{R}^2 , ki jo določa zaporedje x_1, x_2, \dots, x_n točk v ravnini, kjer je točka x_i , $i \in \{2, 3, \dots, n - 1\}$ prek daljice povezana z obema sosednjima točkama x_{i-1} in x_{i+1} . Poligonalna krivulja je po definiciji homeomorfna zaprtemu intervalu $[0, 1]$. Sliki krajišč intervala 0 in 1 takega homeomorfizma sta krajišči x_1 in x_n poligonalne krivulje.

Definicija 1.11 (poligon). *Poligon* je sklenjena poligonalna krivulja, homeomorfna enotskemu krogu $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\}$.

Opomba 1.12. Če je P poligonalna krivulja med x in y , potem označimo množico točk $P \setminus \{x, y\}$, torej *notranjost* krivulje P , s $\overset{\circ}{P}$.

Naslednji izrek najdemo v Thomassenovem članku [13].

Izrek 1.13. Če sta J in J' poligona v \mathbb{R}^2 , potem obstaja tak homeomorfizem $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, da velja $\phi(J) = J'$, pri tem pa ϕ poligonalne loke preslika v poligonalne loke.

Naslednja definicija je povzeta po [8].

Definicija 1.14 (ravninska vložitev grafa). *Ravninsko vložitev grafa* G definiramo kot poljubno trojico (G, φ, ψ_e) , za katero veljajo naslednje lastnosti:

$G = (V, E)$ abstrakten ravninski graf, ki mu prirejamo ravninsko vložitev.

$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ je injektivna preslikava, ki vsakemu vozlišču $v \in V$ priredi vozlišče v ravnini $\varphi(v)$.

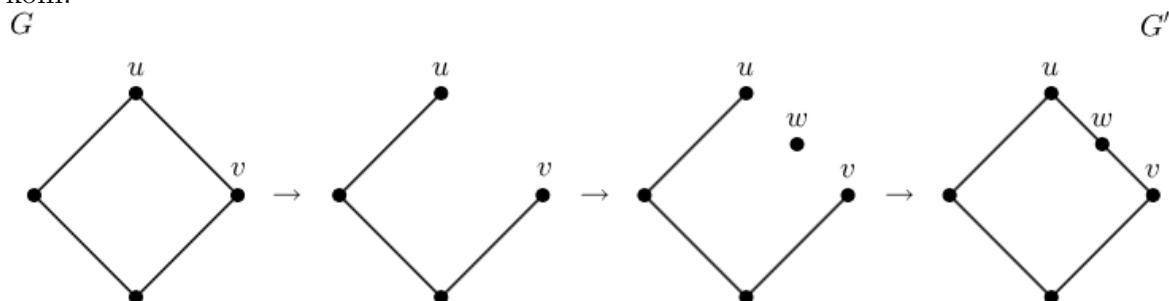
$\psi_e : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ je družina zveznih preslikav, ki vsaki povezavi $e \in E(G)$, predstavljeni z intervalom $[0, 1]$, priredi neko poligonalno krivuljo v ravnini, tako da sta $\psi_e(0)$ in $\psi_e(1)$ sliki obeh krajišč povezave e , $\psi_e|_{(0,1)}$ pa injektivna preslikava notranosti povezave e . Pri tem velja naslednja lastnost, ki zagotavlja, da se notranjosti povezav paroma ne sekajo: $\forall e_1, e_2 \in E, \forall v \in V : \text{Im}(\psi_{e_1}|_{(0,1)}) \cap \text{Im}(\psi_{e_2}|_{(0,1)}) \cap \{\varphi(v)\} = \emptyset$.

1.1.3 Subdivizija

Definicija 1.15 (subdivizija povezave, glajenje vozlišča). Naj bo $G = (V, E)$ graf. *Subdivizija povezave* $\{u, v\} \in E$ je operacija, ki izbriše povezavo $\{u, v\}$ iz grafa G , namesto nje pa doda novo vozlišče w in dve novi povezavi $\{u, w\}$ in $\{w, v\}$. Tako dobimo nov graf G' oblike $G' = (V \cup \{w\}, (E \setminus \{u, v\}) \cup \{u, w\} \cup \{w, v\})$.

Glajenje vozlišča je obratna operacija, 'inverzna subdivizija'. Naj bo $w \in V$ vozlišče stopnje 2, incidenčno z dvema povezavama, $e_1 = \{u, w\}$ in $e_2 = \{w, v\}$. Glajenje na w napravimo tako, da vozlišče w izbrišemo iz grafa (vključno s pripadajočima povezavama e_1 in e_2) in ustvarimo novo povezavo $e = \{u, v\}$.

Na sliki 1 je postopek subdividiranja povezave uv grafa G prikazan korak za korakom.



Slika 1: Subdivizija povezave.

Definicija 1.16 (subdivizija grafa). Graf G je *subdivizija* grafa H , če ga lahko dobimo iz grafa H tako, da vsako povezavo $uv \in E(H)$ zamenjamo z u, v -potjo dolžine vsaj 1.

1.1.4 Povezanost grafov

Definicija 1.17 (stopnja vozlišča). *Stopnja vozlišča* $v \in V(G)$, je število povezav incidenčnih z v . Zapišemo jo kot $d_G(v)$ ali kar $d(v)$. Številu $\delta(G) := \min\{d(v) \mid v \in V(G)\}$ pravimo *minimalna stopnja* grafa G , številu $\Delta(G) := \max\{d(v) \mid v \in V(G)\}$ pa *maksimalna stopnja* grafa G .

Naslednja trditev je znana tudi kot 'lema o rokovanju'.

Trditev 1.18 (formula vsote stopenj). Naj bo G graf. Potem velja $\sum_{v \in G} d(v) = 2|E(G)|$.

Dokaz. Ko seštevamo stopnje vozlišč, vsako povezavo štejemo dvakrat, saj ima povezava dve krajišči in zato k vsoti prispeva dvakrat, po enkrat v vsakem izmed krajišč. \square

Posledica 1.19. V grafu G je povprečna stopnja vozlišča enaka $\frac{2e(G)}{n(G)}$, zato velja $\delta(G) \leq \frac{2e(G)}{n(G)} \leq \Delta(G)$.

Naslednja definicija je povzeta po [4], [16].

Definicija 1.20 (prerezna množica vozlišč, povezanost, k -povezanost). *Prerezna množica vozlišč* grafa G je taka množica $S \subseteq V(G)$, da ima $G - S$ več kot eno komponento. *Povezanost* grafa G , $\kappa(G)$, je najmanjša velikost take množice vozlišč S , da je $G - S$ nepovezan graf ali pa ima samo eno vozlišče. G je k -povezan, če je $\kappa(G) \geq k$. Morda bolj intuitivna, a zaradi Mengerjevega izreka ekvivalentna definicija k -povezanosti pa pravi, da je graf k -povezan, če sta kateri koli dve izmed njegovih vozlišč povezani prek vsaj k disjunktnih poti.

Definicija 1.21 (prerezna množica povezav, povezavna povezanost, povezavna k -povezanost). *Prerezna množica povezav* grafa G je taka množica $F \subseteq E(G)$, da ima graf $G - F$ več kot eno komponento. Graf G je *povezavno k -povezan*, če ima katera koli prerezna množica povezav vsaj k povezav. *Povezavna povezanost* grafa G , $\kappa'(G)$, je najmanjša velikost prerezne množice povezav (ekvivalentno, največje tako število k , da je graf G povezavno k -povezan).

Izrek 1.22 (Whitney, [16]). *Če je G graf, potem velja $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$.*

Naslednjo lemo najdemo v Diestelovi knjigi [4].

Lema 1.23. *Graf G je 2-povezan natanko tedaj, ko ga lahko konstruiramo iz cikla z zaporednim dodajanjem H -poti v že konstruiran graf H .*

Opomba 1.24 (ušesna dekompozicija). Naboru začetnega cikla in vseh dodanih H -poti kot v lemi 1.23 pravimo *ušesna dekompozicija* grafa G .

Definicija 1.25 (tetiva). Naj bo C cikel. Povezavi $e = uv$, $u, v \in V(C)$, za katero velja $e \notin E(C)$, pravimo *tetiva*.

Naslednjo lemo najdemo v Westovem učbeniku [16].

Lema 1.26. *Naj bo G 2-povezan graf. Tedaj za vsaki dve vozlišči $x, y \in V(G)$ obstaja nek cikel, ki vsebuje vozlišči x in y .*

Naslednjo trditev bomo potrebovali v Thomassenovem dokazu izreka Kuratowskega v poglavju 2.2.1.

Trditev 1.27. *Naj bo G 2-povezan, neravninski graf minimalne stopnje vsaj tri. Potem ima G vsaj en cikel s tetivo.*

Dokaz. Ker je G 2-povezan, ima ušesno dekompozicijo. Zadnje uho (zadnja dodana H -pot) je pot dolžine ena, recimo xy . (V nasprotnem primeru bi graf G imel vozlišče stopnje 2). To pa je ravno tetiva poljubnega cikla v grafu $G - xy$ skozi x in y . Pri tem uporabimo lemo 1.26, ki zagotavlja obstoj cikla skozi x in y v 2-povezanem grafu $G - xy$. □

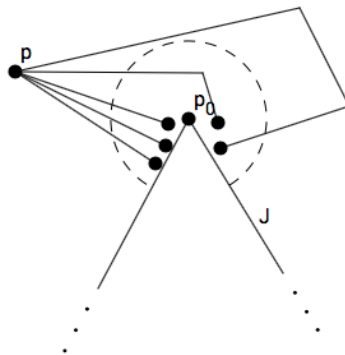
1.1.5 Lica ravninske vložitve grafa

Definicija 1.28 (ekvivalentni točki). Če imamo ravninsko vložitev grafa G v \mathbb{R}^2 in sta p, q točki komplementa $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ je v sliki ravninske vložitve grafa } G\}^C$, potem pravimo, da sta p in q G -ekvivalentni, če ju lahko povežemo s poligonalno krivuljo, ki ne seka množice točk ravninske vložitve grafa G .

Definicija 1.29 (lice grafa). Vzamimo neko točko p iz komplementa ravninske vložitve grafa G . Potem p in vse točke q , ki so ekvivalentne točki p , sestavljajo *lice* grafa G . Za poligon $J \subseteq \mathbb{R}^2$ definiramo lice poligona J na podoben način.

Izrek 1.30 (Jordanov izrek o zaprti krivulji, [7]). Če je $J \subset \mathbb{R}^2$ poligon, potem ima J natanko 2 lici, vsako izmed njiju pa ima J za mejo.

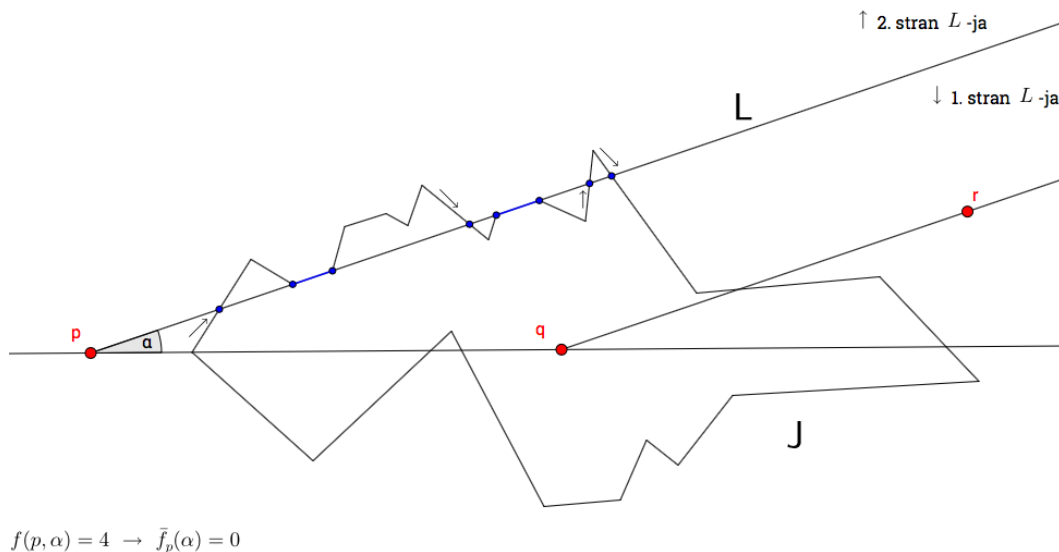
Dokaz. Predstavili bomo Thomassenov dokaz [13]. Naj bo p_0 fiksna točka na J . Če je p katera koli točka v $\mathbb{R}^2 \setminus J$, potem opazimo, da je p ekvivalentna točkam poljubno blizu p_0 (glej sliko 2). Sledi, da ima J kvečjemu 2 lici.



Slika 2: p in njej ekvivalentne točke.

Pokazali smo, da ima J kvečjemu 2 lici. Pokazati je treba še, da ima J več kot eno lice.

Za katero koli točko $p \in \mathbb{R}^2 \setminus J$ in katero koli število $\alpha \in [0, 2\pi)$ si zamislimo poltrak L , ki se začne v p in oklepa kot α s premicami, vzporednimi x -osi (glej sliko 3). Potem $L \cap J$ sestoji iz intervalov na L (obarvani modro na sliki 3).

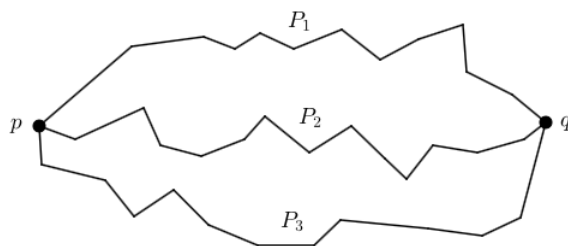


Slika 3: Slika k dokazu Jordanovega izreka.

Definirajmo funkcijo $f : (\mathbb{R}^2 \setminus J) \times [0, 2\pi)$ z naslednjim predpisom: za vse $p \in (\mathbb{R}^2 \setminus J)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ definiramo $f(p, \alpha)$ kot število intervalov, kjer J 'vstopi' v interval iz različnih strani poltraka L . Puščice na sliki 3 nakazujejo različne smeri vstopa J -ja v neko stran L -ja. Naj bo za fiksno $p \in \mathbb{R}^2 \setminus J$ funkcija $\bar{f}_p : [0, 2\pi) \rightarrow \{0, 1\}$ podana s predpisom $\bar{f}_p(\alpha) = f(p, \alpha) \pmod{2}$ parnost vozlišča p . Vidimo, da je parnost p -ja zvezna funkcija, ki zavzame vrednost 0 ali 1. Očitno je, da je parnost enaka za vse točke na poljubni daljici, ki ne seka J -ja, in tako je parnost enaka za vse točke na enem licu J -ja. Po drugi strani pa parnost ni enaka za krajišči daljice, ki seka J v natanko eni točki (npr. $\bar{f}_p(\alpha) = 1$ in $\bar{f}_r(\alpha) = 0$ na sliki 3), in tako ima J vsaj 2 lici. \square

Očitno je zunanje lice J -ja, $ext(J)$, neomejeno, notranje lice, $int(J)$, pa omejeno. Naslednjo posledico najdemo v [4, 13].

Posledica 1.31. Naj bodo P_1, P_2, P_3 trije poligonalni loki med dvema skupnima krajiščema p in q , ki nimajo skupne nobene druge točke. Potem ima $P_1 \cup P_2 \cup P_3$ natanko 3 lica, z mejami $P_1 \cup P_2$, $P_1 \cup P_3$ in $P_2 \cup P_3$ (glej sliko 4).



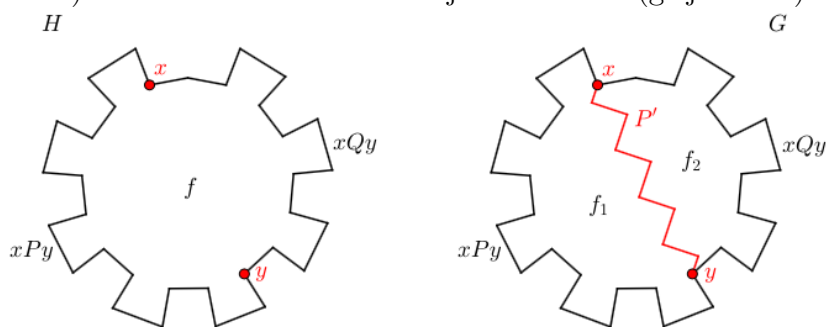
Slika 4: Posledica Jordanovega izreka.

Izrek 1.32 (glej [13]). V ravninski vložitvi 2-povezanega grafa G je vsako lice omejeno s ciklom.

Dokaz. Dokazujemo z indukcijo po $|E(G)|$.

Za bazo vzamemo $|E(G)| \leq 3$. Edini graf, ki ustreza predpostavkam izreka, je C_3 , ki ga lahko obravnavamo kot poligon in uporabimo izrek 1.30.

Naj bo sedaj $|E(G)| > 3$. Predpostavimo, da izrek drži za vsak manjši graf $H = G - P'$, $P' = x \dots y$, kjer je P' zadnje dodana H -pot v ušesni dekompoziciji grafa G . Pokazati moramo, da drži tudi za G . Naj bo f lice v H , omejeno s ciklom C , ki vsebuje vozlišči x in y . Razdelimo C v dve notranje disjunktni poti xPy in xQy . Ko dodamo P' v H , razdelimo lice f na 2 novi lici, f_1 in f_2 , omejeni s cikloma $xPy \cup xy$ in $xQy \cup xy$ (po posledici 1.31). Tudi v G so vsa lica omejena s ciklom (glej sliko 5).



Slika 5: V ravninski vložitvi grafa so lica omejena s ciklom. □

Naslednjo lemo najdemo v [16].

Lema 1.33. Če imamo ravninsko vložitev grafa G in je J meja poljubnega lica f , potem lahko G narišemo na način, da je J meja neomejenega lica.

V [16] najdemo tudi naslednjo kratko idejo dokaza.

Ideja dokaza. Projicirajmo ravninsko vložitev grafa G na sfero, kjer množice povezav, ki omejujejo posamezna lica, ostanejo enake kot tiste iz ravninske vložitve, in kjer so vsa lica omejena. Nato se vrnemo v ravnino, tako da projiciramo iz neke točke v licu f . □

1.1.6 Eulerjeva formula

Izrek 1.34 (Eulerjeva formula, [17]). Naj bo G povezan, v ravnino vložen ravninski graf. Naj bodo n, m in f zaporedoma število vozlišč, povezav in lic grafa G . Potem velja:

$$n - m + f = 2.$$

Ideja dokaza. Ideja dokaza je povzeta po [17]. Naj bo T poljubno vpeto drevo grafa G . Vidimo, da je v tem primeru število vozlišč enako n_T , število povezav $m_T = n_T - 1$

in lice samo eno, $f_T = 1$. Torej $n_T - m_T + f_T = n_T - (n_T - 1) + 1 = 2$. Sedaj vpetemu drevesu T zaporedoma dodajajmo povezave grafa G , dokler ne dobimo celotnega grafa G . Pri tem na vsakem koraku opazujmo, kako se spreminjajo parametri n, m in f . Vidimo, da ob vsaki dodani povezavi ustvarimo nov cikel, s tem povečamo f za 1, prav tako povečamo število povezav m za 1, število vozlišč n pa ostaja enako. Ker sta m in f v Eulerjevi formuli različno predznačena, ostaja vsota $n - (m + 1) + (f + 1) = n - m + f$ konstantna in enaka 2. \square

Naslednjo posledico Eulerjeve formule povzemamo po [17].

Posledica 1.35. *V ravninski vložitvi povezanega grafa G z $n \geq 3$ vozlišči in m povezavami velja naslednja zveza med številom povezav in številom vozlišč: $m \leq 3n - 6$. Če pa G ne vsebuje 3-ciklov, velja $m \leq 2n - 4$.*

Dokaz. Naj bo $F_G = \{f_i \mid i \in \{1, 2, \dots, |F_G|\}\}$ množica vseh lic ravninske vložitve grafa G . Definirajmo funkcijo $g : F_G \rightarrow \mathbb{N}$, kjer je $g(f_i)$ število povezav, ki omejujejo lice f_i . Z a označimo vsoto števil mejnih povezav vseh lic iz F_G : $a = \sum_{i=1}^{|F_G|} g(f_i)$. Opazimo naslednje: ker je G povezan, je vsako lice omejeno z vsaj tremi povezavami. Velja torej $3f \leq a$, kjer je $f = |F_G|$. Ker je vsaka povezava meja bodisi enemu ali pa dvema licema, jo v vsoti a -ja preštejemo enkrat ali dvakrat, zato velja tudi $a \leq 2m$. Torej velja $3f \leq a \leq 2m$, oz. $3f \leq 2m$, zato je $f \leq \frac{2}{3}m$. Zadnjo neenakost nato vstavimo v Eulerjevo formulo ($n - m + f = 2$) in dobimo željeno neenakost $m \leq 3n - 6$.

Če G ne vsebuje 3-ciklov, je dokaz enak zgornjemu, le da imamo namesto neenakosti $3f \leq a$ neenakost $4f \leq a$, saj najkrajšo mejo poljubnega lica v tem primeru sestavljajo vsaj 4 povezave. \square

2 Različni dokazi izreka Kuratowskega

Izrek 2.1 (Izrek Kuratowskega). *Graf je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje podgrafa, ki je subdivizija grafa K_5 ali $K_{3,3}$.*

Z uporabo Eulerjeve formule (izrek 1.34) in posledice 1.35 ni težko dokazati lažje implikacije izreka Kuratowskega, zapisane v naslednji trditvi:

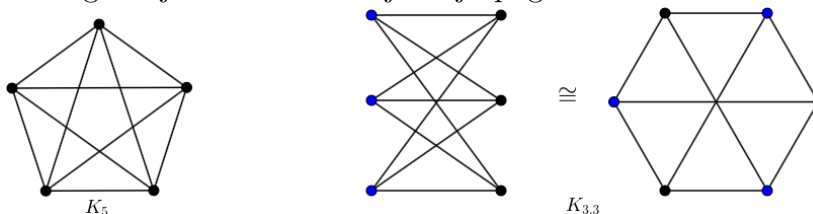
Trditev 2.2. *Če je G ravninski, potem ne vsebuje podgrafa, ki je subdivizija grafov K_5 ali $K_{3,3}$.*

Dokaz. Dokazali bomo ekvivalentno trditev, in sicer, da če G vsebuje omenjena podgrafa, potem ni ravninski. To lahko pokažemo tako, da pokažemo, da grafa K_5 in $K_{3,3}$ sama po sebi nista ravninska. Ravninskost poljubne subdivizije nekega grafa H je namreč ekvivalentna ravninskosti grafa H . Uporabili bomo posledico 1.35.

Graf K_5 je polni graf na petih vozliščih; ima torej 5 vozlišč in 10 povezav ter vsebuje 3-cikle, zato uporabimo prvo formulo iz posledice 1.35, da preverimo, ali lahko grafu K_5 priredimo ravninsko vložitev. Torej, ali je $10 \leq 3 \times 5 - 6 = 9$? Ne. Grafu K_5 ne moremo prirediti ravninske vložitve. Posledično tudi vsak graf, ki vsebuje K_5 kot subdivizijo, ni ravninski.

Graf $K_{3,3}$ je polni dvodelni graf, v obeh delih particije so po 3 vozlišča, povezana z vsemi vozlišči nasprotnega dela particije in z nobenim vozliščem iz lastnega dela particije. Sestavlja ga 6 vozlišč in 9 povezav. $K_{3,3}$ ne vsebuje nobenega 3-cikla, vsebuje pa 4-cikle, zato uporabimo drugo formulo iz posledice 1.35. Ali v tem primeru velja enakost? Ali je $9 \leq 2 \times 6 - 4 = 8$? Ne, enakost tudi tokrat ne velja, torej tudi noben graf, ki vsebuje podgraf, ki je subdivizija grafa $K_{3,3}$, ni ravninski. \square

Na sliki 6 si pogledjmo sliki grafa K_5 in različni sliki grafa $K_{3,3}$. Grafa nastopata v izreku Kuratowskega in ju bomo v nadaljevanju pogosto srečevali.



Slika 6: Sliki grafov K_5 in $K_{3,3}$.

2.1 Utemeljitev predpostavke o 3-povezanosti za neravninske grafe

Definicija 2.3 (podgraf Kuratowskega). *Podgraf Kuratowskega* grafa G je podgraf grafa G , ki je subdivizija grafa K_5 ali $K_{3,3}$.

Definicija 2.4 (minimalno neravninski graf). *Minimalno neravninski graf* je graf, ki ni ravninski, vsak njegov pravi podgraf pa je ravninski.

Vsak neravninski graf lahko ‘zgradimo’ iz nekega minimalno neravninskega grafa z dodajanjem vozlišč in povezav (vsak neravninski graf vsebuje nek minimalno neravninski pograf). Dokazali bomo, da mora biti minimalno neravninski graf 2-povezan, in da mora biti povezano minimalen neravninski graf, ki ne vsebuje podgrafa Kuratowskega, 3-povezan. (Tak graf sicer ne obstaja.) To bodo zelo pomembne ugotovitve, ki jih bomo uporabljali v predpostavkah dokazov netrivialnega dela izreka Kuratowskega (glej izrek 2.10) v poglavjih 2.2, 2.3, 2.4 in 2.5.

Leme 2.5, 2.7, 2.8 in 2.9 najdemo v [16].

Lema 2.5. *Vsak minimalno neravninski graf je 1-povezan.*

Dokaz. Naj bo G minimalno neravninski graf. Naj bo G nepovezan. Potem je sestavljen iz $k \geq 2$ komponent, recimo $G = G_1 \cup \dots \cup G_k$. Ker je G minimalno neravninski graf, morajo biti posamezne komponente $G_i \in G, i \in \{1, \dots, k\}$, ravninske. Vendar v tem primeru komponente $G_j, j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$ lahko vložimo v neko lice vložitve komponente G_i (po lemi 1.33) in dobimo ravninsko vložitev za G . \square

Definicija 2.6 (S -komponenta). Naj bo G graf in $S \subseteq V(G)$. S -komponenta grafa G je induciran podgraf grafa G , katerega množico vozlišč sestavljajo S in vozlišča ene izmed komponent iz $G - S$.

Lema 2.7. *Vsak minimalno neravninski graf je 2-povezan.*

Dokaz. Naj bo G minimalno neravninski graf. Naj G ne bo 2-povezan. Torej mora imeti neko prerezno vozlišče, recimo mu v . Naj bodo G_1, \dots, G_k $\{v\}$ -komponente grafa G . Zaradi minimalnosti G je vsak G_i ravninski. Po lemi 1.33 lahko vsak G_i vložimo na način, da ima vozlišče v na meji zunanjega lica. Vsako vložitev nato skrčimo tako, da zajame kot, manjši od $2\pi/k$ radianov v v , in nato združimo vse vložitve v vozlišču v . Minimalno neravninski graf torej ne sme imeti prereznega vozlišča, zato mora biti 2-povezan. \square

Lema 2.8. *Naj bo $S = \{x, y\}$ prerezna množica v G . Če je G neravninski, potem dodajanje povezave xy neki S -komponenti grafa G ustvari neravninski graf.*

Dokaz. Naj bo G neravninski. Naj bodo G_1, \dots, G_k S -prezezi grafa G , in naj bo $H_i = G_i + xy$. Če je H_i ravninski, ima po lemi 1.33 ravninsko vložitev s povezavo xy na meji zunanjega lica. Če je H_i ravninski za vsak i , potem lahko vsak $H_i, i > 1$ priključimo v ravninsko vložitev unije $\cup_{j=1}^{i-1} H_j$, tako da vložimo H_i v lice, ki ima xy na meji. Če povezava xy ni v G , in če jo izbrišemo iz $\cup_{j=1}^k H_j$, dobimo ravninsko vložitev za G . To je protislovje s predpostavko, da je G neravninski, zato mora biti vsaj en H_i neravninski. \square

Lema 2.9. Če je G graf z najmaj povezavami med vsemi neravninskimi grafi brez podgrafa Kuratowskega, potem je G 3-povezan.

Dokaz. Če izbrišemo povezavo v G , s tem ne moremo ustvariti podgrafa Kuratowskega v G . Po predpostavki zato z brisanjem poljubne povezave dobimo ravninski podgraf grafa G , in je G tako minimalno neravninski graf. Po lemi 2.7 je G 2-povezan.

Predpostavimo, da ima G prerezno množico $S = \{x, y\}$. Ker je G neravninski, je po lemi 2.8 unija povezave xy in neke S -komponente grafa G neravninska. Naj bo H taka unija. Ker ima H manj povezav od G , minimalnost G -ja implicira, da mora H imeti nek podgraf Kuratowskega K . Celoten graf K se pojavi kot podgraf G z morebitno izjemo povezave xy .

Ker je S minimalna prerezna množica, imata tako x kot y sosede v vseh S -komponentah. Zato lahko povezavo xy v K zamenjamo z neko x, y -potjo skozi neko drugo S -komponento in s tem ohranimo podgraf Kuratowskega tudi v G . To pa nasprotje predpostavki, da G nima podgrafa Kuratowskega, zato G nima prerezne množice z dvema vozliščema. Sledi, da mora biti povezano minimalen neravninski graf 3-povezan. \square

2.2 Trije Thomassenovi dokazi

V nadaljevanju si bomo pogledali tri dokaze Thomassena [13] netrivialnega dela izreka Kuratowskega. Zapišimo ga v naslednjem izreku:

Izrek 2.10. Če G ne vsebuje podgrafa, ki je subdivizija grafa K_5 ali $K_{3,3}$, potem je ravninski.

Opomba 2.11. V dokazih nam bo sicer pogosto bolj prav prišla naslednja ekvivalentna formulacija težje implikacije izreka Kuratowskega, in sicer: če G ni ravninski, potem vsebuje podgraf, ki je subdivizija grafa K_5 ali $K_{3,3}$.

2.2.1 Dokaz z uporabo prekrivajočih se komponent

Prvi dokaz temelji na konceptu t. i. prekrivajočih se C -komponent, zato si, še preden se spustimo v dokaz, pogledajmo nekaj definicij, potrebnih za dokaz.

Definicija 2.12. Če je C cikel v grafu G , potem je C -komponenta H grafa G bodisi tetiva na ciklu C , K_2 , ali pa neka povezana komponenta iz množice $V(G) \setminus V(C)$, skupaj z vsemi povezavami iz te povezane komponente na C in njenimi krajišči. Vozliščem preseka $V(H) \cap V(C)$ pravimo *vozllišča priključitve* C -komponente H .

V naslednjih treh definicijah si oglejmo tri binarne relacije na množici C -komponent.

Definicija 2.13. Naj bosta H in H' dve C -komponenti. Pravimo, da se H in H' izogibata druga drugi, torej sta C -izogibajoči se, če obstajata taki vozlišči $x, y \in C$, da vsa vozlišča priključitve H -ja ležijo na eni od poti s krajiščema x, y , vsa vozlišča H' -ja pa na drugi taki poti.

Če se dve komponenti ne izogibata druga drugi, potem se *prekrivata* (sta C -prekrivajoči).

Definicija 2.14. Naj bosta H in H' dve C -komponenti. Pravimo, da sta H in H' C -ekivalentni, če velja $V(H) \cap V(C) = V(H') \cap V(C)$ in so v tem preseku 3 vozlišča.

Definicija 2.15. Naj bosta H in H' dve C -komponenti. Pravimo, da sta H in H' C -poševni, če obstajajo 4 različna vozlišča x_1, x_2, x_3, x_4 v tem cikličnem vrstnem redu na C , tako da sta x_1 in x_3 v H ter x_2 in x_4 v H' .

Lema 2.16. Dve C -komponenti H in H' sta prekrivajoči se natanko tedaj, ko sta bodisi C -poševni ali C -ekivalentni.

Dokaz. Predpostavimo, da sta H in H' C -prekrivajoči. Če je $V(H) \cap V(C) \subseteq V(H') \cap V(C)$, potem je $|V(H') \cap V(C)| \geq 3$ in sta H in H' C -ekivalentni, če je $|V(H') \cap V(C)| = 3$. V nasprotnem (če $|V(H') \cap V(C)| \geq 4$) sta H in H' C -poševni. Po drugi strani pa, če $V(H) \cap V(C) \not\subseteq V(H') \cap V(C)$, potem obstaja vozlišče $x \in V(H) \cap V(C)$, ki ni v H' . Ampak potem $V(H) \cap V(C)$ ni vsebovan v unikatnem segmentu, ki vsebuje x in ima natanko krajiščna vozlišča v skupnem s H' . To pa implicira, da sta H in H' C -poševni.

Sedaj pa predpostavimo, da sta H in H' C -ekivalentni. Naj bo P poljubna minimalna pot na C , na kateri ležijo vsa tri vozlišča iz $V(H) \cap V(C)$. Tedaj ne glede na izbiro poti P vidimo, da druga pot Q na C , ki povezuje krajišči poti P , ne vsebuje vseh vozlišč priključitve H' na C . Sledi, da sta H in H' C -prekrivajoči.

Naj bosta H in H' C -poševni. Naj bo P poljubna minimalna pot na C , ki vsebuje vsa vozlišča iz $V(H) \cap V(C)$. Iz definicije C -poševnosti sledi, da obstaja neko vozlišče

$x \in V(H') \cap V(C)$, za katerega velja tudi $x \in \mathring{P}$. To pa implicira, da bo za katero koli pot Q na C , na kateri ležijo vse točke priključitve H' na C , veljalo $V(\mathring{P}) \cap V(Q) \neq \emptyset$. Sledi, da sta H in H' prekrivajoči C -komponenti. \square

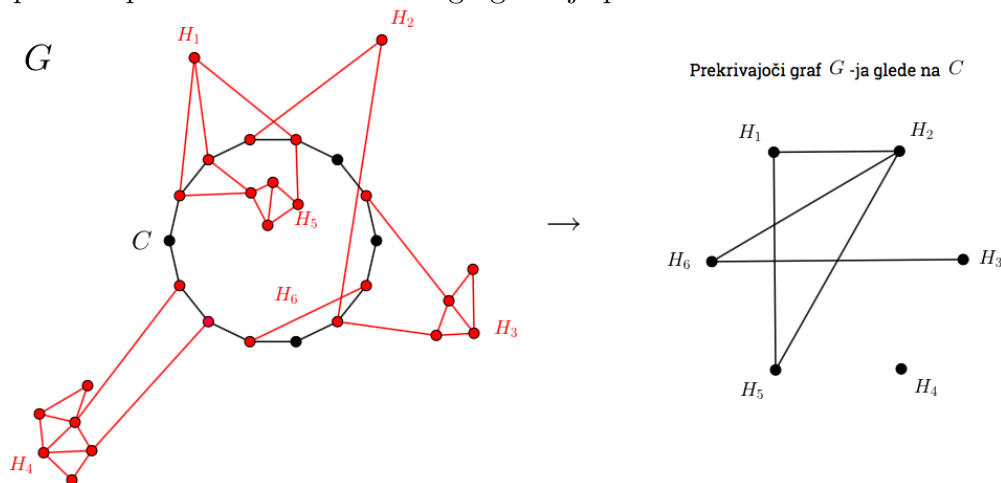
Sedaj smo opremljeni s potrebnimi definicijami za prvi dokaz Thomassena [13] izreka 2.10. Dokaz se nanaša na 2-povezane grafe.

Dokaz izreka 2.10. Dokaz gre po indukciji glede na število vozlišč $|V(G)|$. Naj bo G 2-povezan neravninski graf. Najmanjši 2-povezan graf je K_3 , a je ravninski. Najmanjši neravninski 2-povezan graf je K_5 , zato za bazo indukcije vzamemo $|V(G)| = 5$. Naj bo zdaj G graf na več kot 5 vozliščih. Predpostavimo, da izrek Kuratowskega drži za vse manjše 2-povezane grafe. Dokazati moramo, da ima G subdivizijo grafa $K_{3,3}$ ali K_5 . Predpostavimo torej, da temu ni tako.

Predpostavimo najprej, da ima G vozlišče x stopnje 2. Potem izbrišemo x iz G in dodamo povezavo med dvema sosedoma od x , če ta še ni prisotna. Po induksijski predpostavki izrek 2.10 drži za na novo nastali graf. Prepričajmo se, da drži tudi za G . Namreč, če smo dodali povezavo med dvema sosedoma x , potem dobimo G s subdivizijo, vemo pa, da subdivizija povezav ne vpliva na ravninskost. Če pa nismo dodali povezave med sosedoma x , potem dobimo G z dodajanjem vzporedne povezave s krajiščema v vozliščih sosednjih x -u, na kateri s subdivizijo dodamo tudi x . Tudi to ne vpliva na ravninskost.

Zato sklepamo, da ima vsako vozlišče grafa G stopnjo vsaj 3. Potem po trditvi 1.27 vidimo, da ima G cikel C , tako da ima G C -komponento, ki je K_2 . Če G nima nobene druge C -komponente (to sicer ni mogoče, saj je $\delta(G) \geq 3$), potem je G ravninski, zato predpostavimo, da ima G vsaj 2 C -komponenti.

Sedaj si zamislimo *prekrivajoči graf* grafa G glede na C ; to je graf, katerega vozlišča so C -komponente, pri tem pa sta dve vozlišči povezani, če in samo če se pripadajoči C -komponenti prekrivata. Primer takega grafa je prikazan na sliki 7.



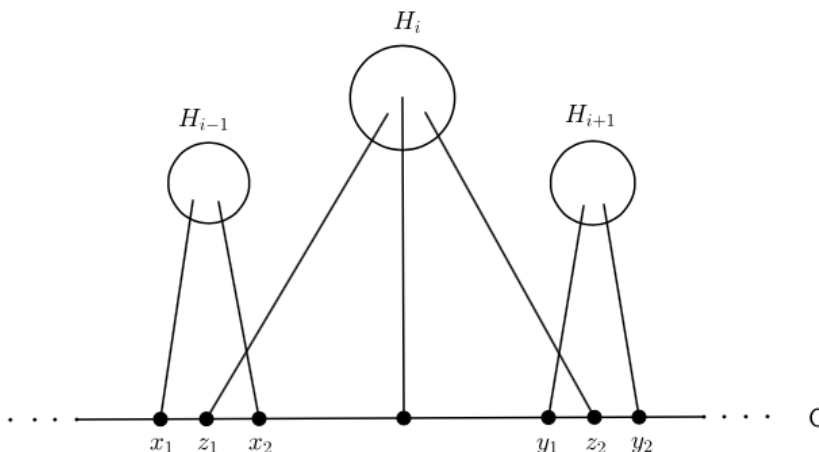
Slika 7: Prekrivajoči graf.

Najprej pogledimo primer, ko je prekrivajoči graf dvodelen z bipartitijo $A \cup B$. Cikel C predstavimo kot poligon v ravnini in dokažemo, da ima G tako vložitev, da vse C -komponente iz množice A (oz. iz B) ležijo v notranjosti cikla C (oz. v zunanosti cikla C). Naj bodo H_1, H_2, \dots, H_p C -komponente iz množice A in predpostavimo, da smo že narisali H_1, H_2, \dots, H_{k-1} , $1 \leq k \leq p$ v notranjost C -ja. Po predpostavki (da izrek drži za vse grafe manjše od G) je graf $C \cup H_k$ ravninski in po definiciji C -komponente je C meja licu v kateri koli ravninski vložitvi $C \cup H_k$. Po lemi 1.33 lahko predpostavimo, da je to lice meja neomejenemu licu. Ker H_k ni C -prekrivajoča z nobeno H_1, H_2, \dots, H_{k-1} , sledi, da C vsebuje neko pot P , ki nima skupnih točk z nobeno H_i , $i < k$. Z uporabo Eulerjeve formule (izrek 1.34) in izreka 1.13, lahko H_k narišemo v neko omejeno lice iz unije $C \cup H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{k-1}$. Z enakim pristopom (v zunanosti C -ja) za C -komponente iz množice B dobimo ravninsko vložitev grafa G . To pa je protislovje s predpostavko, da G ni ravninski.

Ostane pokazati povsem grafovsko teoretično trditev, da poljuben graf G , ki vsebuje tak cikel C , da prekrivajoči graf G -ja glede na C ni dvodelen, vsebuje subdivizijo od K_5 ali $K_{3,3}$. Zadosti je trditev pokazati za kateri koli tak povezavno minimalen graf G . Prekrivajoči graf ima lihi cikel H_0, H_1, \dots, H_{2k} , kjer je vseh indeksov $2k - 1$. Cikel C izberemo na način, da je k najmanjši možen.

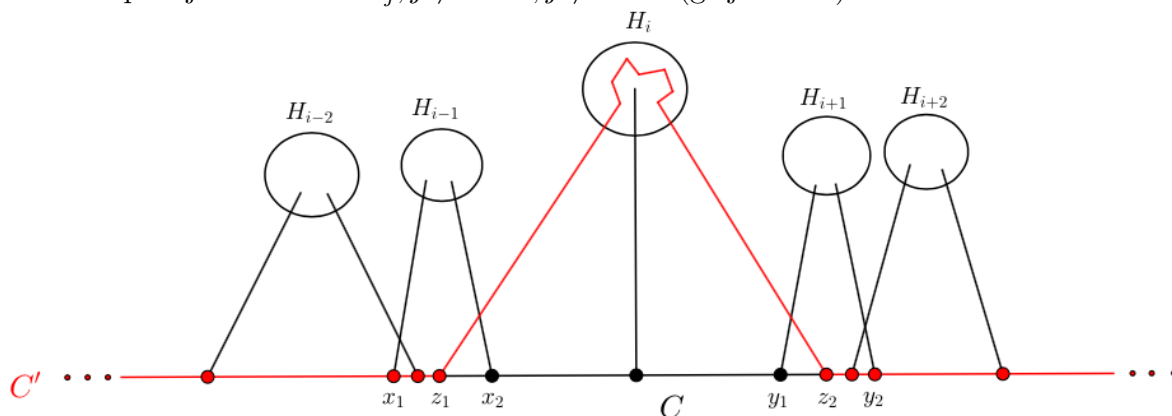
Opomba 2.17 (razlaga povezavne minimalnosti grafa). Povezavna minimalnost pomeni, da če obstaja taka povezava e v G , da tudi po njeni odstranitvi obstaja tak cikel C , da je prekrivajoči graf grafa $G - e$ glede na C nedvodelen, potem zadošča pokazati, da graf $G - e$ vsebuje subdivizijo grafa K_5 ali $K_{3,3}$. Postopek odstranjevanja povezav nadaljujemo, vse dokler v G ne obstaja nobena povezava več, ki bi jo lahko izbirisali in pri tem našli neki cikel, ki bi imel nedvodelen prekrivajoči graf glede na G brez vseh do tedaj izbranih povezav. Tako pridobljen graf označimo z G' . Če dokažemo, da povezavno minimalen graf G' vsebuje subdivizijo grafa K_5 ali $K_{3,3}$, potem jo vsebuje tudi G , saj velja $G' \subseteq G$. V nadaljevanju dokaza bo G povezavno minimalen.

Predpostavimo najprej $k \geq 2$. Minimalnost k -ja implicira, da je H_i C -prekrivajoča s H_{i-1} in H_{i+1} ter z nobeno drugo H_j . V posebnem H_i in H_{i+1} nista C -ekvivalentni, saj bi bila v tem primeru H_i C -prekrivajoča tudi s H_{i+2} , protislovje s predpostavko (s tem bi dobili 3-cikel H_i, H_{i+1}, H_{i+2} v prekrivajočem grafu, a potem bi moral biti $k = 1$). Zato sta kateri koli H_i in H_{i+1} C -poševni po lemi 2.16. Naj bosta x_1, x_2 (oz. y_1, y_2) taki vozlišči priključitve H_{i-1} (oz. H_{i+1}) na C , da H_i seka vsakega od segmentov (poti) grafa $C - \{x_1, x_2\}$ (oz. $C - \{y_1, y_2\}$). Ker sta H_{i-1} in H_{i+1} C -izogibajoči, lahko sklepamo, da se x_1, x_2, y_1, y_2 pojavijo na C v tem cikličnem zaporedju (kjer je mogoče tudi $x_2 = y_1$ ali $y_2 = x_1$). Primer je na sliki 8.



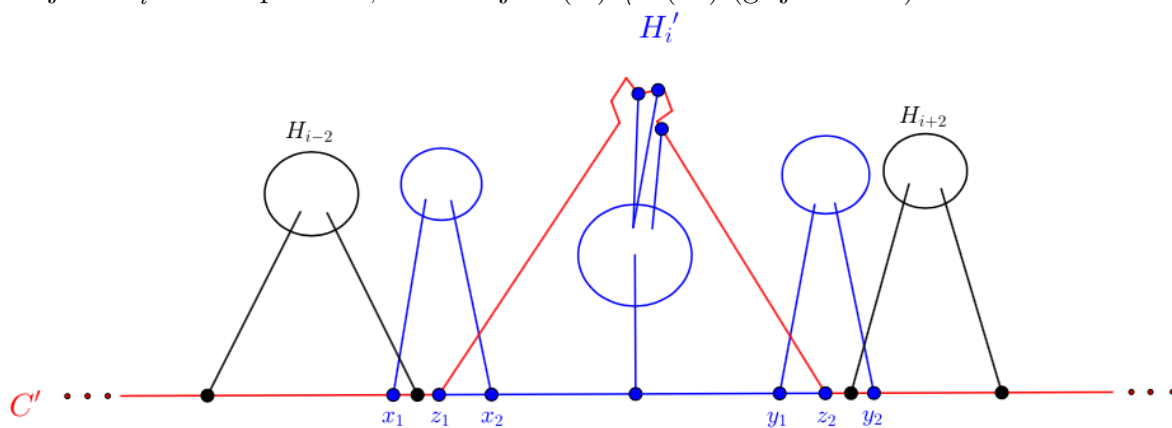
Slika 8: C -komponentna H_i je C -prekrivajoča s komponentama H_{i-1} in H_{i+1} .

Sedaj naj bo z_1 (oz z_2) vozlišče priključitve H_i na C , ležeče na poti med x_1 in x_2 (oz. med y_1 in y_2), tako da velja $\{z_1, z_2\} \cap \{x_1, x_2, y_1, y_2\} = \emptyset$. Naj bo P pot, ki prek komponente H_i povezuje vozlišči z_1 in z_2 . Ker H_i ni C -prekrivajoča z nobeno izmed $H_j, j \neq i \pm 1$, sledi, da je unija poti P in podpoti cikla C cikel C' , ki vsebuje vsa vozlišča priključitve vseh $H_j, j \neq i + 1, j \neq i - 1$ (glej sliko 9).



Slika 9: Cikel C nadomestimo z rdeče obarvanim ciklom C' .

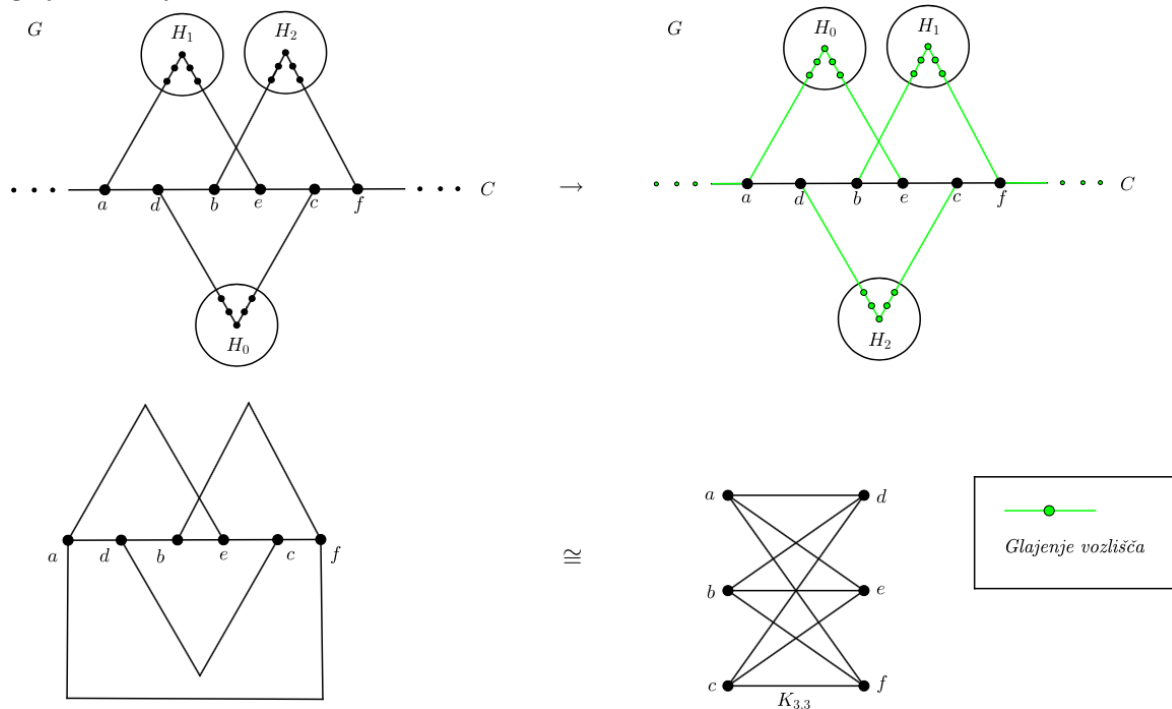
Naj bo H'_i C' -komponenta, ki vsebuje $V(C) \setminus V(C')$ (glej sliko 10).



Slika 10: H'_i je edina C' -komponenta, ki ni hkrati tudi C -komponenta.

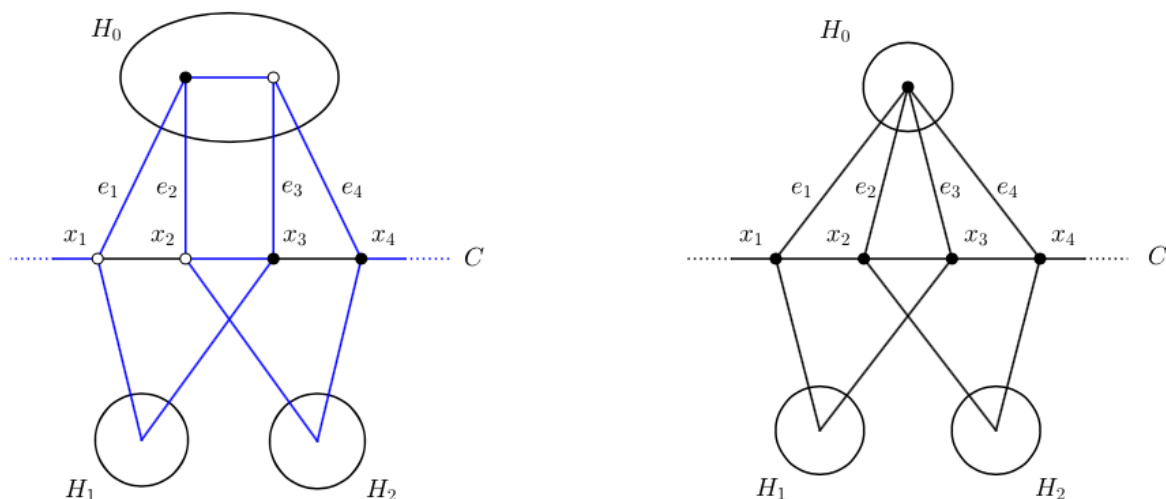
Potem v prekrivajočem grafu grafa G glede na C' komponente $H_{i+2}, \dots, H_{i-2}, H'_i$ tvorijo lihi cikel dolžine $(2k + 1) - 2$. To nasprotuje minimalnosti k -ja.

Zato lahko sklepamo, da je $k = 1$, torej so H_0, H_1, H_2 tri paroma prekrivajoče C -komponente. Če imajo vse tri C -komponente po dve vozlišči priključitve, potem G vsebuje subdivizijo $K_{3,3}$. Primer je na sliki 11. Za definicijo operacije glajenja vozlišča glej definicijo 1.15.



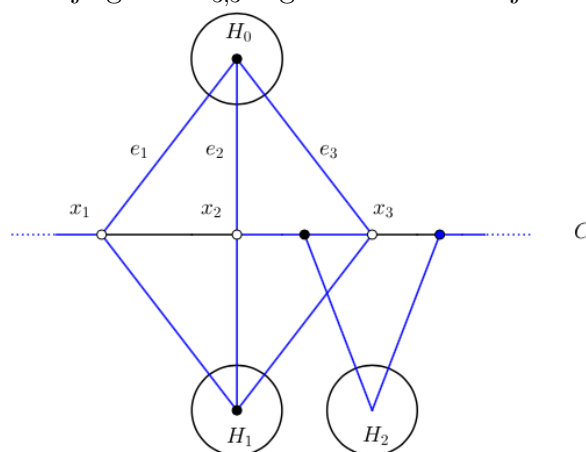
Slika 11: Z inverznim subdividiranjem povezav najdemo podgraf $K_{3,3}$ grafa G .

Zato predpostavimo, da je $V(H_0) \cap V(C) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, m \geq 3$. Za vsak $i = 1, 2, \dots, m$ naj bo e_i poljubna povezava iz H_0 , incidenčna z vozliščem x_i . Minimalnost G -ja implicira, da je prekrivajoči graf grafa $G - e_i$ glede na cikel C dvodelen. Zato za vsak $i = 1, 2, \dots, m$ $H_0 - e_i$ ni C -prekrivajoč z obema komponentama H_1 in H_2 . Če je $m \geq 4$, preprosto zaključimo, da je $m = 4$ (za $m > 4$ namreč G ni več povezano minimalen) in lahko izberemo oznake tako, da je $V(H_1) \cap V(C) = \{x_1, x_3\}$ in $V(H_2) \cap V(C) = \{x_2, x_4\}$. V tem primeru ni težko poiskati subdivizije K_5 ali $K_{3,3}$ (glej sliko 12).



Slika 12: Subdiviziji $K_{3,3}$ (levo v modrem) in K_5 (desno) v G .

Po drugi strani pa, če je $m = 3$, lahko izberemo oznake tako, da H_1 ni C -prekrivajoč z $H_0 - e_i$ za $i = 1, 2$. Ker je H_1 C -prekrivajoča z H_0 , zaključimo, da sta H_0 in H_1 C -ekvivalentni. Z uporabo dejstva, da sta tudi H_2 in H_1 C -prekrivajoči, v tem primeru ni težko poiskati subdivizije grafa $K_{3,3}$ v grafu G . Primer je na sliki 13.



Slika 13: Subdivizija $K_{3,3}$ v G , obarvana modro.

S tem zaključimo dokaz izreka 2.10. □

Naslednja dokaza Thomassena se nanašata samo na 3-povezane grafe.

2.2.2 Dokaz, ki temelji na karakterizaciji 3-povezanih grafov

Iz leme 1.23 razberemo, da lahko kateri koli 2-povezan graf dobimo iz grafa K_3 s subdividiranjem ali z dodajanjem povezav.

Naslednji dokaz temelji na karakterizaciji 3-povezanih grafov Barnettea in Grünbauma [1]. Poglejmo si lemo, ki opisuje to karakterizacijo, še pred tem pa Mengerjev izrek (glej npr. [4, str. 62] in [3] za slovenski vir), njegovo posledico in dve trditvi,

ki ju bomo uporabili v dokazu te karakterizacije.

Definicija 2.18. Naj bo G graf. Če so množice $A, B \subseteq V(G)$ in $X \subseteq V(G) \cup E(G)$ take, da vsaka A, B -pot v G vsebuje vsaj eno vozlišče ali povezavo iz X , pravimo, da X loči množici A in B v G .

Izrek 2.19 (Menger, [11]). Naj bo $G = (V, E)$ graf in $A, B \subseteq V$. Potem je najmanjše število vozlišč, ki loči množici A in B , enako največjemu številu disjunktnih $A-B$ poti.

Definicija 2.20 (pahljača). Naj bo x vozlišče in U množica vozlišč. Množici x, U -poti pravimo x, U -pahljača, če ima kateri koli par poti samo x v skupnem.

Poglejmo si lemo o pahljači, ki je posledica Mengerjevega izreka.

Lema 2.21 (Lema o pahljači). Graf $G = (V, E)$ je k -povezan natanko tedaj, ko ima vsaj $k + 1$ vozlišč in za vsako izbiro $U \subseteq V$, $x \in V \setminus U$, kjer je $|U| \geq k$, vsebuje x, U -pahljačo velikosti k .

Trditev 2.22. Naj bo $G = (V, E)$ 3-povezan graf z $|V(G)| > 4$. Potem G vsebuje subdivizijo grafa K_4 .

Dokaz. Naj bo $U \subseteq V$ množica vozlišč najkrajšega inducirane cikla H v G . Naj bo $x \in V \setminus U$ (tak x obstaja, ker je G 3-povezan). Dolžina najkrajšega cikla H je vsaj tri ($|U| \geq 3$). Po lemi o pahljači G vsebuje vsaj tri x, U -poti, ki skupaj s ciklom H tvorijo subdivizijo K_4 . \square

Trditev 2.23. Naj bo $H_0 = (V, E)$ 3-povezan graf. Potem sta 3-povezana tudi grafa H'_0 in H''_0 , ki ju dobimo iz H_0 na naslednja načina:

1. Naj bo u (oz. v) vozlišče, pridobljeno s subdivizijo povezave $e = xy \in E$ (oz. $f = wz \in E$), $e \neq f$. $H'_0 = (V \cup \{u, v\}, \{E \setminus \{xy, wz\}\} \cup \{uv, xu, uy, wv, vz\})$.
2. Naj bo u vozlišče, pridobljeno s subdivizijo povezave $e = xy \in E$ in naj bo $w \in V$. $H''_0 = (V \cup \{u\}, \{E \setminus \{xy\}\} \cup \{uw, xu, uy\})$.

Dokaz. 1. Predpostavimo, da H'_0 ni 3-povezan. Torej obstaja taka množica dveh vozlišč $\{v_1, v_2\} \subseteq V(H'_0)$, da je $H'_0 - \{v_1, v_2\}$ nepovezan. Ker je H_0 3-povezan, bi po odstranitvi dveh vozlišč iz $V(H_0) \cap V(H'_0)$ graf H'_0 ostal povezan, zato mora biti $|\{v_1, v_2\} \cap V(H_0)| \leq 1$.

Recimo, da velja $|\{v_1, v_2\} \cap V(H_0)| = 1$. Brez škode za splošnost naj bo $\{v_1, v_2\} \cap V(H_0) = \{v_1\}$ in $\{v_1, v_2\} \setminus V(H_0) = \{u\}$. Tedaj je graf $H'_0 - \{v_1, v_2\}$ bodisi enak grafu $H_0 - v_1 - e$ (če je $v_1 \in \{w, z\}$) ali pa je enak grafu, dobljenem iz grafa $H_0 - v_1 - e$ s subdivizijo povezave f (sicer). V vsakem primeru je to povezan graf.

Sledi $|\{v_1, v_2\} \cap V(H_0)| = 0$. Ostane le ena možnost, da bo $H'_0 - \{v_1, v_2\}$ nepovezan, in sicer $\{v_1, v_2\} = \{u, v\}$. Ampak $H'_0 - \{u, v\}$ je ravno graf $H_0 - e - f$ (3-povezan graf, ki mu odstranimo dve povezavi). Po Whitnejevem izreku (izrek 1.22) je ta graf povezan, protislovje. Sledi, da je H'_0 3-povezan.

2. Predpostavimo, da H''_0 ni 3-povezan. Če odstranimo vozlišči u in w iz H''_0 , dobimo nek podgraf grafa H_0 . Natančneje, graf $H''_0 - u - w$ je izomorfen podgrafu $H_0 - w - xy \subset H_0$. Iz definicije k -povezanosti (oz. povezavne k -povezanosti) – glej definicijo 1.20 (oz. definicijo 1.21) – sledi, da odstranitev poljubnega vozlišča (oz. poljubne povezave) grafa zmanjša povezanost za kvečjemu 1. Z odstranitvijo vozlišča w in povezave e bo H_0 še vedno vsaj povezan, protislovje. Sledi, da je H''_0 3-povezan. \square

Omenjeno karakterizacijo 3-povezanih grafov lahko ekvivalentno zapišemo na naslednji način [13]:

Lema 2.24. *Če je G 3-povezan graf in $|V(G)| > 4$, potem G vsebuje tako povezavo e , da je $G - e$ subdivizija 3-povezanega grafa.*

Dokaz. Po trditvi 2.22 G vsebuje podgraf, ki je subdivizija grafa K_4 . Sledi, da je množica $\{H \mid H \text{ je pravi podgraf } G, H \text{ je subdivizija 3-povezanega grafa}\}$ neprazna, oz. da je graf H z navedenimi lastnostmi dobro definiran. Iz množice vseh teh H -jev izberimo tistega, ki maksimizira $|E(H)|$. Dovolj bo pokazati, da tak H vsebuje vse povezave G -ja z izjemo ene, tj. $|E(G) \setminus E(H)| = 1$.

Najprej predpostavimo, da H ni 3-povezan, tj. H vsebuje tako pot P dolžine vsaj 2, da imata natanko njeni krajišči x in y stopnjo večjo od 2. Ker je G 3-povezan, ima $G - \{x, y\}$ pot P' od $V(P) \setminus \{x, y\}$ do $V(H) \setminus V(P)$. Ker je $H \cup P'$ subdivizija 3-povezanega grafa (po trditvi 2.23), in ker je H izbran na način, da je število $|E(H)|$ največje možno, mora biti $H \cup P' = G$ (v nasprotnem pridemo v protislovje z maksimalnostjo H -ja). Ker je G 3-povezan, sklepamo, da ima P' samo eno povezavo. Od tod sledi $|E(G) \setminus E(H)| = 1$, kar je bilo treba pokazati.

Če je H 3-povezan in če je $V(H) = V(G)$, je lemo lahko preveriti. Zato predpostavimo, da je H 3-povezan in da obstaja vozlišče $x \in V(G) \setminus V(H)$. Po Lemi o pahljači (lema 2.21) G vsebuje tri poti, P_1, P_2, P_3 , iz x -a do $V(H)$, tako da imajo samo x v skupnem in da je $V(P_i) \cap V(H) = \{x_i\}$ za $i = 1, 2, 3$. Če x_1 in x_2 nista sosednja v H , potem je $H \cup P_1 \cup P_2$ subdivizija 3-povezanega grafa. Če sta x_1 in x_2 sosednja v H , označimo z e povezavo, ki ju povezuje in je $(H \cup P_1 \cup P_2) - e$ subdivizija 3-povezanega grafa (e odstranimo, da se izognemo multigrafu, ki bi nastal po subdividiranju). Oba grafa, $H \cup P_1 \cup P_2$ in $(H \cup P_1 \cup P_2) - e$, vsebujeta več povezav kot H , kar je protislovje maksimalnosti H -ja. \square

Sledi drugi dokaz Thomassena [13] izreka 2.10. Zaradi leme 2.9 bomo v dokazu predpostavili, da je G 3-povezan.

Dokaz izreka 2.10. Pokazali bomo, da ima vsak 3-povezan graf G , ki ne vsebuje podgrafa, ki je subdivizija grafa K_5 ali $K_{3,3}$, ravninsko vložitev. To dokažemo z indukcijo po $|V(G)| + |E(G)|$.

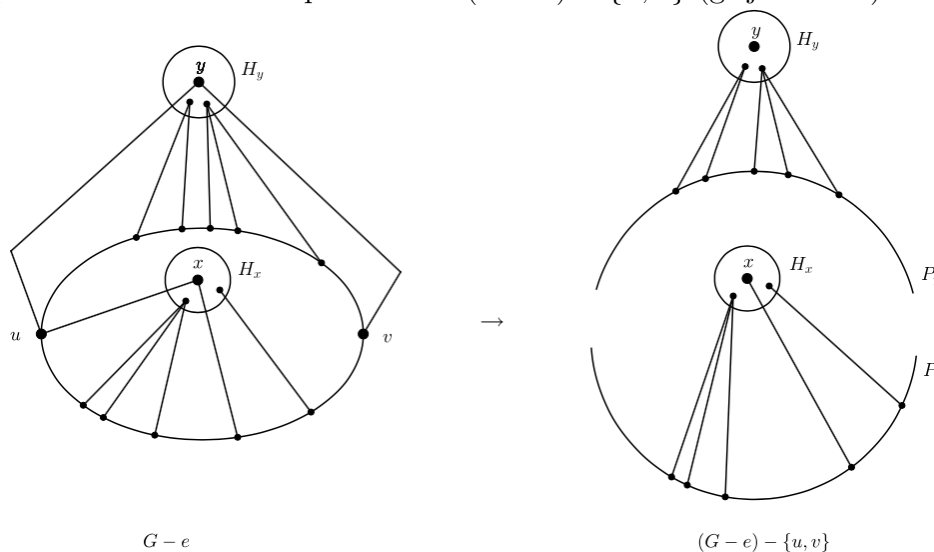
Če je $|V(G)| = 4$, nimamo težav. Tak graf ima manj vozlišč kot oba ‘prepovedana’ grafa, zato ne more vsebovati podgrafa, ki bi bil njuna subdivizija, poleg tega pa je edini 3-povezan graf na štirih vozliščih graf K_4 , za katerega pa ni težko poiskati ravninske vložitve.

Zato predpostavimo, da je $|V(G)| \geq 5$. Po lemi 2.24, G vsebuje tako povezavo $e = xy$, da je $G - e$ subdivizija nekega 3-povezanega grafa G' . Ker G ne vsebuje podgrafa Kuratowskega, tudi $G - e$ ne vsebuje podgrafa Kuratowskega. Zato lahko uporabimo indukcijsko predpostavko in zaključimo, da ima $G - e$ ravninsko vložitev. Če sta vozlišči x in y na ciklu, ki je meja nekemu licu v $G - e$, potem obdržimo ravninsko vložitev tudi za G .

Zato predpostavimo, da x in y ne ležita na tovrstnem ciklu. Ker je $G - x$ 2-povezan, vsebuje cikel C , ki je meja licu, v katerem je x . Po zgornji predpostavki $y \notin C$.

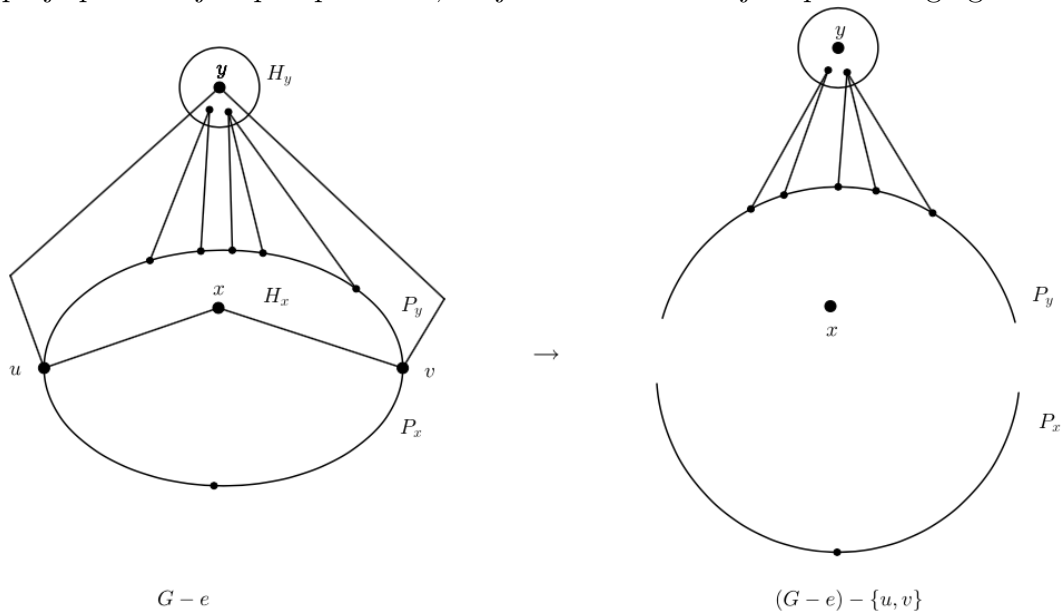
Naj bosta H_x in H_y C -komponenti grafa $G - e$, ki vsebujeta x oz. y . Potem C loči H_x in H_y tako, da je $H_x \in \text{int}(C)$ in $H_y \in \text{ext}(C)$. Iz definicije C -ja sledi, da je H_x edina C -komponenta grafa $G - e$, ki leži v $\text{int}(C)$.

Zadnji korak v dokazu je, da pokažemo, da sta H_x in H_y C -prekrivajoči komponenti. Če temu ne bi bilo tako, bi komponenta H_y imela taki dve vozlišči priključitve, recimo jima u, v , da bi veljalo $C - \{u, v\} = P_x \cup P_y$, kjer je P_x (oz. P_y) pot, ki vsebuje vsa vozlišča priključitve H_x (oz. H_y), razen vozlišč u in v . Potem je lahko videti, da x in y pripadata različnim komponentama $(G - e) - \{u, v\}$ (glej sliko 14).



Slika 14: Hipotetičen graf $G - e$, v katerem H_x in H_y nista C -prekrivajoči komponenti.

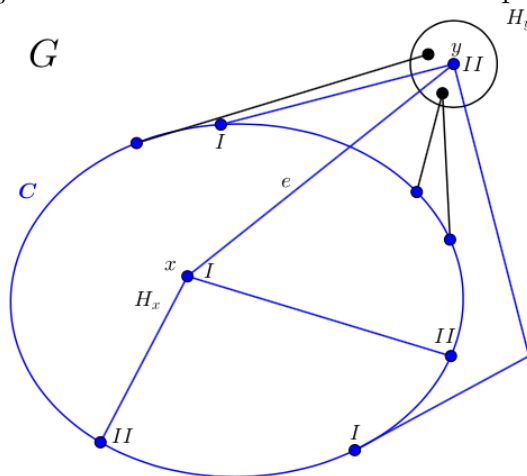
Ker je $\{u, v\}$ prerezna množica v $G - e$, je $G - e$ prava subdivizija 3-povezanega grafa G' . Vozlišči u in v morata biti krajišči tiste ali tistih dveh povezav iz grafa G' , na katerih napravimo subdivizijo, da dobimo graf $G - e$. Zato ima vozlišče x ali y v $G - e$ stopnjo 2. Brez škode za splošnost naj ima x stopnjo 2. Zaključimo, da je H_x sestavljena zgolj iz uxv poti. Potem u in v nista sosednji v $G - e$ (iz istega razloga, ker je $G - e$ subdivizija 3-povezanega grafa), torej je dolžina poti uP_xv vsaj 2. Ampak potem x, y in P_x pripadajo trem različnim komponentam v $(G - e) - \{u, v\}$ (glej sliko 15), kar pa je protislovje s predpostavko, da je $G - e$ subdivizija 3-povezanega grafa G' .



Slika 15: Tri komponente grafa $(G - e) - \{u, v\}$.

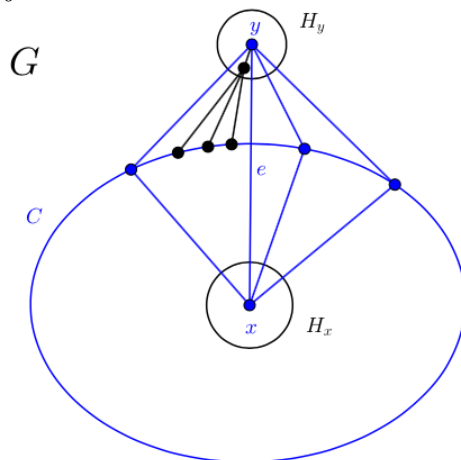
Sledi torej, da sta H_x in H_y C -prekrivajoči, in, po lemi 2.16 sta H_x in H_y bodisi C -poševni bodisi C -ekvivalentni.

Če sta C -poševni, je enostavno poiskati podgraf, ki je subdivizija grafa $K_{3,3}$ v G . Primer je na sliki 16, kjer so z I in II označena vozlišča stopnje ≥ 3 te subdivizije.



Slika 16: Subdivizija grafa $K_{3,3}$ v G v modri barvi.

Če sta C -ekvivalentni, si zamislimo 3 poti od x (oz. y) do C v H_x (oz. H_y), ki imajo paroma samo x oz. y v preseku. Unija teh šestih poti skupaj s C in e je subdivizija grafa K_5 . Primer si pogledjmo na sliki 17.



Slika 17: Subdivizija grafa K_5 v G , v modri barvi.

V vsakem primeru smo torej našli podgraf Kuratowskega v grafu G , kar je v protislovju s predpostavko. Dokaz je zaključen. \square

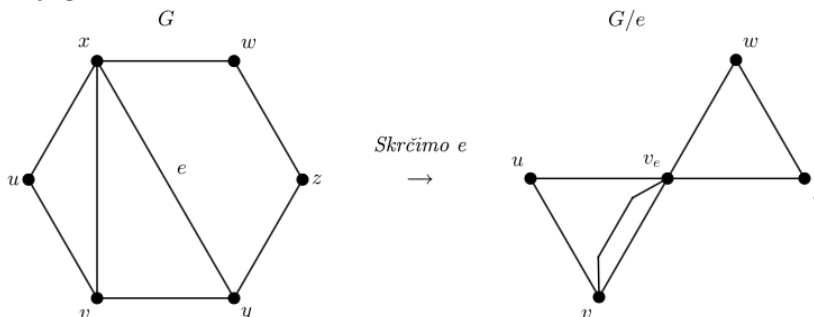
2.2.3 Dokaz, ki temelji na skrčitveni lemi za 3-povezane grafe

Za razumevanje tretjega Thomassenovega dokaza [13] izreka 2.10 potrebujemo naslednjo definicijo, v kateri predstavimo operacijo skrčitve povezave. V dokazu bomo uporabili tudi lemo 2.29, ki je zelo podobna lemi 2.24 iz drugega Thomassenovega dokaza izreka 2.10, razlika je le v tem, da povezave e ne izberemo, ampak jo skrčimo. Zgolj za intuitivno razumevanje povezave med obema lema (2.24 in 2.29) predstavimo še pojem dualnega grafa. Z lemo 2.30 nato pokažemo, da s skrčitvijo povezave ne moremo ustvariti podgrafa Kuratowskega, če ga ni bilo že pred skrčitvijo. Nato predstavimo pojem konveksne vložitve grafa, ki je strožji pogoj od ravninskosti, zato z dokazom reformuliranega izreka Kuratowskega v trditvi 2.32 hkrati dokažemo tudi sam izrek Kuratowskega (oz. njegov netrivialni del).

Definicija 2.25 (skrčitev povezave). Naj bo $e = xy$ povezava v grafu $G = (V, E)$. Z G/e označimo multigraf, pridobljen iz grafa G s *skrčitvijo povezave* (ali *kontrakcijo povezave*) e v vozlišče v_e , ki postane sosednje vsem vozliščem, ki so bila prej sosednja bodisi x ali y .

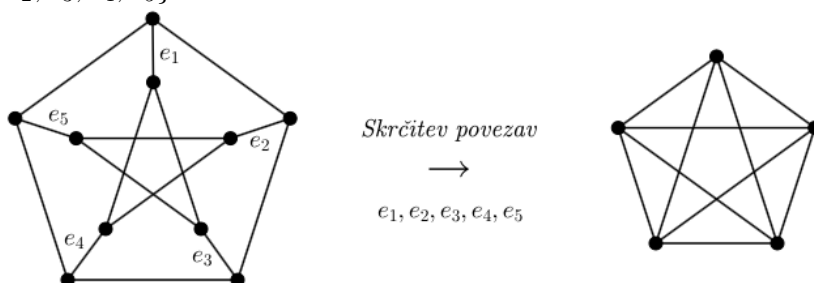
Formalno je G/e multigraf (V', E') z množico vozlišč $V' = (V \setminus \{x, y\}) \cup \{v_e\}$, $v_e \notin V(G)$ in množico povezav $E' = \{vw \in E \mid \{v, w\} \cap \{x, y\} = \emptyset\} \cup \{v_e w \mid xw \in E \setminus \{e\} \text{ ali } yw \in E \setminus \{e\}\}$.

Primer 2.26. Spodnja slika 18 prikazuje graf G in multigraf G/e , ki nastane po skrčitvi povezave $e = xy$ grafa G .



Slika 18: Skrčitev povezave e v grafu G .

Graf K_5 je skrčitev Petersenovega grafa. Dobimo ga z zaporedno skrčitvijo povezav iz množice $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ na sliki 19.

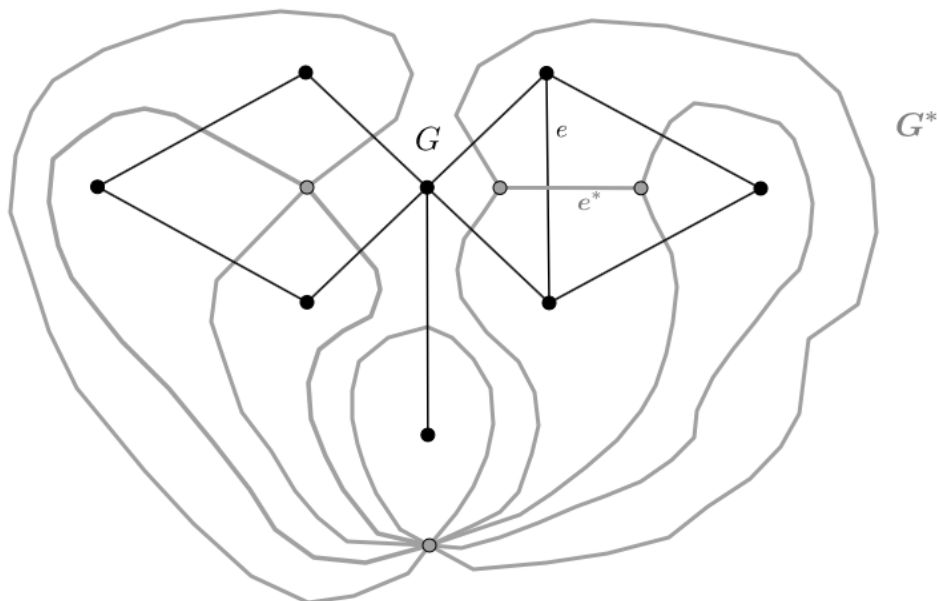


Slika 19: S skrčitvijo označenih povezav e_i iz Petersenovega grafa dobimo graf K_5 .

Pri skrčitvi povezave grafa se lahko zgodi, da je rezultiran graf *multigraf* (kot na sliki 18). To se zgodi, če je povezava e , na kateri opravimo skrčitev, del kakega trikotnika v G . V multigrafu tako zanke kot tudi večkratne povezave štejejo kot cikli.

Definicija 2.27 (Dualni graf). Dana je ravninska vložitev grafa $G = (V, E)$. *Dualni graf* $G^* = (V^*, E^*)$ grafa G dobimo tako, da vstavimo po eno vozlišče $v^* \in V^*$ v notranjost vsakega lica ravninske vložitve G -ja. Nato povežemo ta vozlišča tako, da ustvarimo ravninsko vložitev grafa G^* , na naslednji način: za vsako povezavo e grafa G povežemo dve vozlišči, ki sta v licih, katerima e predstavlja mejo, s povezavo e^* , ki seka e . Če pa je e sosednja samo enem licu, ustvarimo zanko e^* , ki izhaja iz vozlišča v temu licu, in seka e .

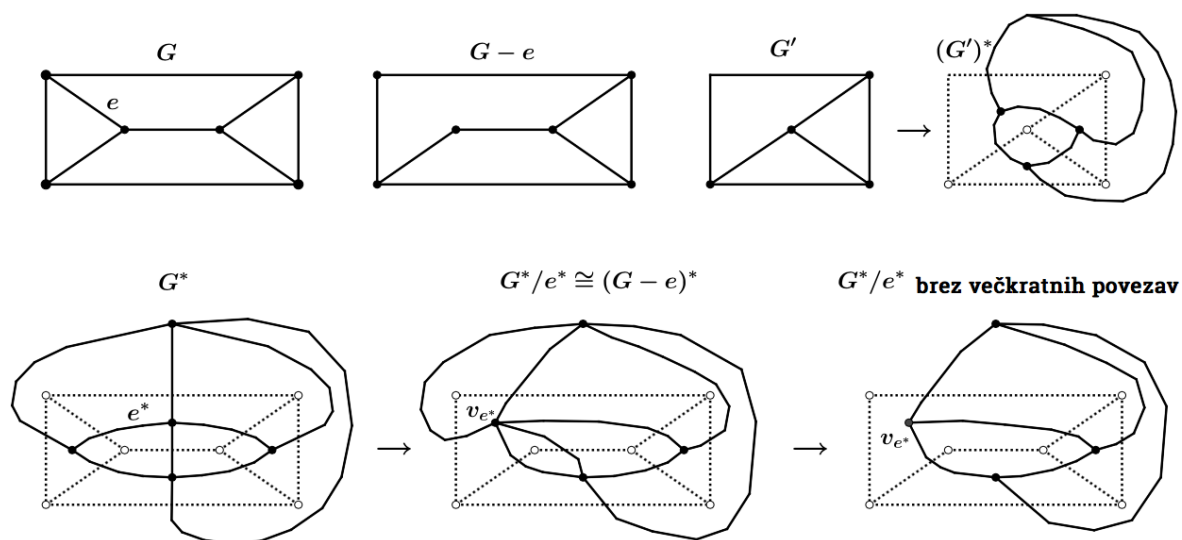
Primer 2.28. Na sliki 20 vidimo ravninsko vložitev (multi)grafov G in njegov dualni multigraf G^* . Da je G^* dual G^* -ja pravimo zato, ker je dual grafa G^* zopet nek graf, izomorfen grafu G (lastnost $G \cong (G^*)^*$ sicer velja le če je G povezan).



Slika 20: Graf G in njegov dualni graf G^* .

Naj bo G 3-povezan ravninski graf z več kot štirimi vozlišči in naj bo $e \in E(G)$ taka povezava, da je $G - e$ subdivizija 3-povezanega grafa G' (taka povezava obstaja po lemi 2.24). Naj bo e^* povezava duala G ($e^* \in E(G^*)$), ki bi sekala e v G . Potem je dualni graf grafa G' dobljen iz dualnega grafa G s skrčitvijo povezave e^* in z zamenjavo vsakega 2-cikla z enojno povezavo.

Kar smo opisali v tem odstavku, prikažemo na sliki 21, na kateri vidimo, da sta grafa G^*/e^* , ki mu odstranimo večkratne povezave, in $(G')^*$ izomorfna.



Slika 21: Povezava med dualnim grafom grafa G in dualnim grafom grafa G' .

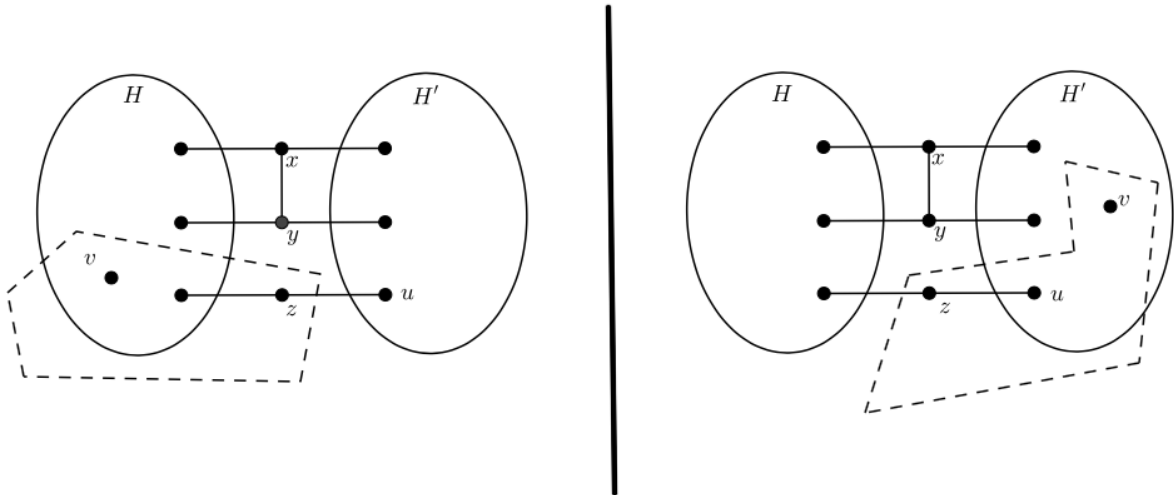
To namiguje na dualno verzijo leme 2.24, zapisano v lemi 2.29.

Lema 2.29 (glej [13]). *Vsak 3-povezan graf G z $|V(G)| > 4$ vsebuje tako povezavo e , da je graf G/e , ki mu odstranimo večkratne povezave, 3-povezan.*

Dokaz. Dokažemo z uporabo protislovja in ekstremalnosti (podobno kot v [16]). Naj bo $e \in G$ povezava s krajiščema x in y . Če G/e ni 3-povezan, potem vsebuje prerezno množico S velikosti 2. Ker G je 3-povezan, S vsebuje vozlišče v_e (vozlišče, ki je nastalo ob skrčitvi povezave e) in še eno vozlišče, recimo mu z , ki mu bomo rekli 'kolega' sosednjega para vozlišč x in y . Opazimo, da je $G - \{x, y, z\}$ nepovezan.

Predpostavimo, da G ne vsebuje nobene povezave e , za katero bi bil G/e 3-povezan. Potem ima vsak povezan par vozlišč nekega kolega. Izmed vseh povezav $e = xy$ in njihovih kolegov z izberimo tisto trojico, za katero bo rezultiran nepovezan graf $G - \{x, y, z\}$ imel komponento H z največjim številom vozlišč. Manjšo izmed nastalih komponent pa poimenujmo H' . Ker je $\{x, y, z\}$ najmanjša prerezna množica v G , imajo x, y, z sosede tako v H kot tudi H' . Naj bo $u \in H'$ sosed vozlišča z , v pa naj bo njun kolega.

Po definiciji kolega je $G - \{z, u, v\}$ nepovezan. Podgraf grafa G , induciran z množico $V(H) \cup \{x, y\}$, pa je povezan. Sedaj ločimo dva primera, glede na to, kje se nahaja v (glej sliko 22).



Slika 22: Komponenti H in H' ter prerezna množica $\{z, u, v\}$, kjer je $v \in H$ ali $v \in H'$.

Če je $v \in V(H) \cup \{x, y\}$, potem je $G - \{z, v\}$ nepovezan, kar nasprotuje 3-povezanosti G . Če je $v \in V(H')$, pa $V(H) \cup \{x, y\}$ inducira podgraf neke večje komponente (komponente z večjim številom vozlišč kot H), ki nastane iz $G - \{z, u, v\}$. To pa je protislovje maksimalnosti H oz. izbiri vozlišč x, y, z . Zaključimo, da G vsebuje vsaj eno povezavo e , za katero je G/e 3-povezan. \square

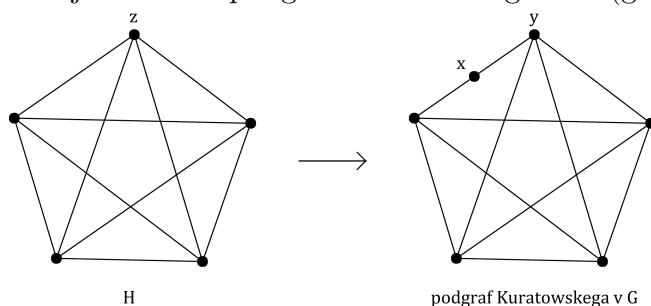
Lema 2.30 (glej [16]). Če G ne vsebuje podgrafa Kuratowskega, potem tudi G/e ne vsebuje podgrafa Kuratowskega.

Dokaz. Dokazujemo z protislovjem. Če G/e vsebuje podgraf Kuratowskega, potem tudi G vsebuje podgraf Kuratowskega. Naj bo H subdivizija grafa Kuratowskega v G/e , kjer je $e = xy$ in z vozlišče, pridobljeno s skrčitvijo povezave e . Obravnavali bomo več

primerov, glede na to, kje se nahaja z v H in glede na stopnjo vozlišča z v H .

1. Če $z \notin V(H)$, potem je H že sam tudi podgraf Kuratowskega v G .
2. Če $z \in V(H)$, $d_H(z) < 3$, potem je z vozlišče, ki je bilo del subdivizije neke povezave iz K_5 ali $K_{3,3}$, da je nastal H . Podgraf Kuratowskega v G dobimo iz H z zamenjavo vozlišča z za x ali y ali povezavo xy .
3. Če $z \in V(H)$, $d_H(z) \geq 3$, potem ločimo dva primera:

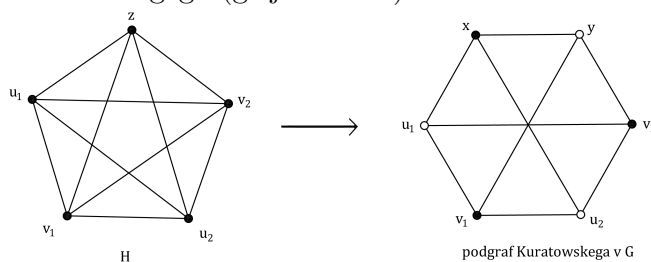
- (a) Največ ena povezava s krajiščem z v H ima (brez škode za splošnost) krajišče x v G . Potem z razširitvijo vozlišča z v xy podaljšamo pot med dvema vozliščema stopnje vsaj 3 v H , pri čemer je y pripadajoče krajišče te poti, ki ima stopnjo vsaj 3 in tvori podgraf Kuratowskega v G (glej sliko 23).



Slika 23: Podgraf Kuratowskega v G , dobljen iz podgrafa Kuratowskega H .

- (b) H je subdivizija K_5 , $d(z) = 4$, pri čemer imata dve izmed povezav s krajiščem z v H krajišče x v G , dve pa krajišče y v G . V tem primeru naj bosta u_1, u_2 vozlišči stopnje vsaj 3 v H , ki sta drugi krajišči poti, ki se začneta v z na povezavah, s krajiščem x v G ; in naj bosta v_1, v_2 vozlišči stopnje vsaj 3 v H , ki sta drugi krajišči poti, ki se začneta v z na povezavah s krajiščem y v G .

Po tem, ko izberemo u_1, u_2 -pot in v_1, v_2 -pot iz H , dobimo subdivizijo grafa $K_{3,3}$ v G , v kateri so vozlišča x, v_1, v_2 elementi enega dela bipartitije, vozlišča y, u_1, u_2 pa elementi drugega (glej sliko 24).



Slika 24: Subdivizija K_5 , H , in subdivizija grafa $K_{3,3}$ v G , pridobljena iz H .

□

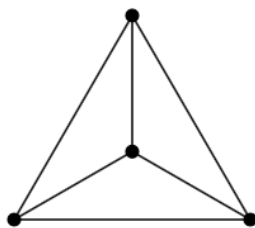
Definicija 2.31. *Konveksna vložitev* grafa G je ravninska vložitev, v kateri je meja vsakega lica konveksen poligon.

Trditev 2.32. *Če je graf G 3-povezan in nima podgrafa Kuratowskega, potem ima konveksno vložitev.*

Sedaj zaključimo tretji dokaz izreka 2.10 tako, da dokažemo trditev 2.32. Za graf G , ki zadošča predpostavkama trditve, moramo poiskati nek manjši graf G' , ki zadošča obema predpostavkama iz trditve, da lahko apliciramo indukcijsko predpostavko.

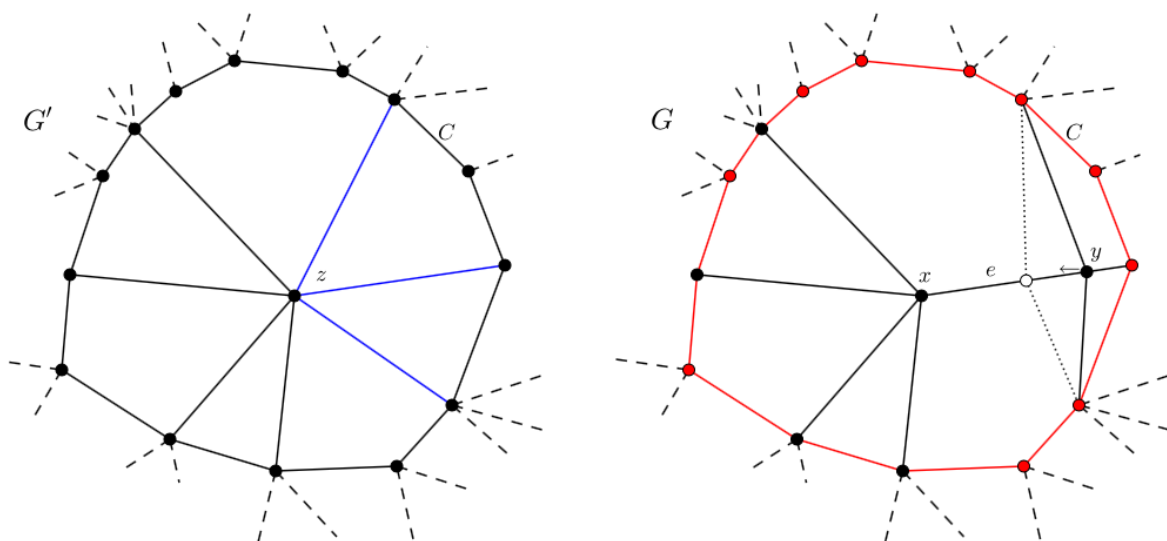
Lema 2.29 nam zagotavlja, da dobimo manjši graf G' iz G , tako da skrčimo neko povezavo v G . Lema 2.30 nam zagotavlja, da G' ne bo vseboval podgrafa Kuratowskega. Dokaz končamo tako, da pokažemo, da obdržimo konveksno vložitev za G iz konveksne vložitve G' . Dokaz poteka z indukcijo na $|V(G)|$.

Dokaz trditve 2.32. Naj bo G 3-povezan graf, ki ne vsebuje podgrafa Kuratowskega. Baza indukcije: najmanjši 3-povezan graf je graf na štirih vozliščih ($|V(G)| = 4$), K_4 . Graf K_4 očitno ima konveksno vložitev (glej sliko 25), zato lahko nadaljujemo z indukcijskim korakom.



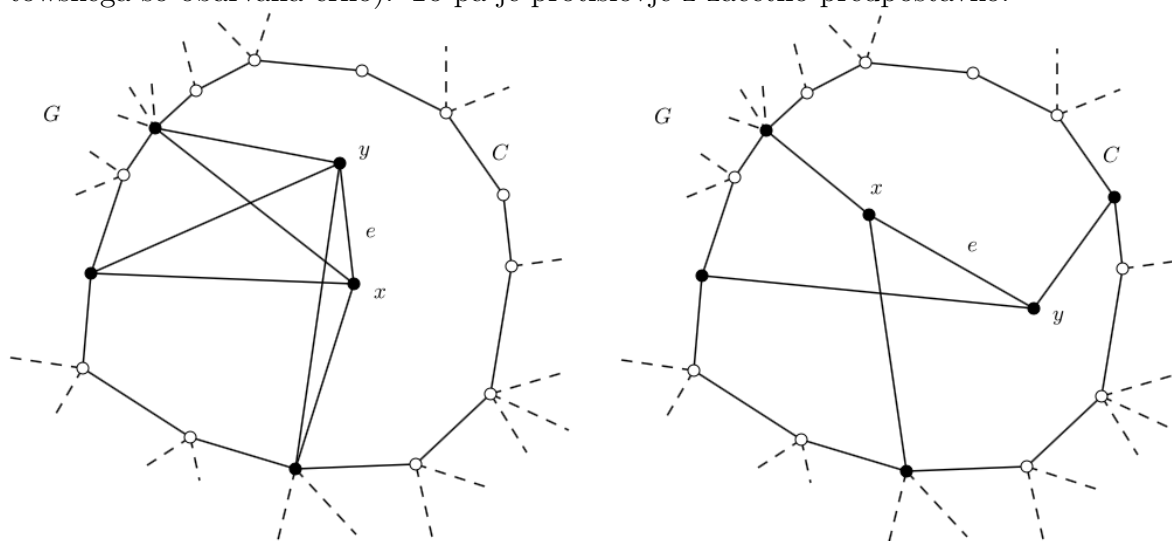
Slika 25: Konveksna vložitev grafa K_4 .

Naj bo $|V(G)| \geq 5$. Po lemi 2.29 G vsebuje tako povezavo $e = xy$, da je $G/e = G'$ 3-povezan. Če G' vsebuje podgraf Kuratowskega, iz negacije leme 2.30 sledi, da tudi G vsebuje podgraf Kuratowskega, kar je v nasprotju s predpostavko. Zato lahko predpostavimo, da ima G' konveksno vložitev (kot npr. na sliki 26). Pokazati moramo, da ima tudi G konveksno vložitev. Naj bo z vozlišče, v katerega smo skrčili povezavo e (glej sliko 26). Potem je $G' - z$ 2-povezan ravninski graf in s C označimo cikel tega grafa, ki je meja licu, v katerem je z . Sosedje x v G (razen y) razdelijo C v $|N_G(x) - 1|$ poligonalnih lokov (na sliki 26 obarvani rdeče).



Slika 26: Konveksna vložitev grafa $G' = G/e$ in graf G .

Če noben izmed teh poligonalnih lokov ne vsebuje vseh sosedov y (z izjemo x), potem sta po lemi 2.16 C -komponenti H_x in H_y (ki vsebujeta vozlišči x oz. y) grafa $G - e$ bodisi C -prekrivajoči ali C -ekvivalentni. V teh dveh primerih ni težko poiskati subdivizije grafa K_5 ali $K_{3,3}$ v G (glej sliko 27; vozlišča stopnje ≥ 3 v podgrafih Kuratowskega so obarvana črno). To pa je protislovje z začetno predpostavko.



Slika 27: Subdiviziji grafov K_5 (levo) in $K_{3,3}$ (desno) v G .

Predpostavimo, da eden izmed zgoraj opisanih poligonalnih lokov vsebuje vse sosede y (razen x) (kot prikazano na sliki 26 desno). Iz G/e nato izbrisemo vse povezave s krajiščem z , ki imajo v G krajišče v y , ne pa tudi v x (modro obarvane povezave na sliki 26 levo). Dobljeni graf je ravninska vložitev grafa $G - y$ in vse izbrisane povezave so del istega lica v $G - y$. Sedaj $G - y$ ni težko razširiti do konveksne vložitve G , tako da y pomaknemo dovolj blizu k x (kot prikazano na sliki 26, ko y premaknemo v smeri puščice proti x). □

2.3 Tverbergov dokaz

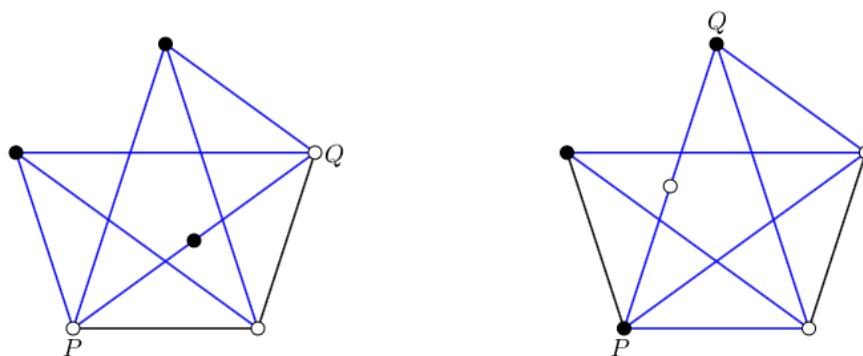
Tudi Tverbergov dokaz [15] se nanaša na netrivialni del Kuratowskega izreka (izrek 2.10). Dokazali ga bomo s protislovjem, z analizo namišljenega protiprimera, ki bo imel minimalno število vozlišč.

Definicija 2.33 (*H*-most). Naj bo G graf in H njegov podgraf. Vpeljimo binarno relacijo R na množici $E(G) \setminus E(H)$, tako da za vse $e, f \in E(G) \setminus E(H)$ velja eRf natanko tedaj, ko imata e in f skupno krajišče izven H . Relacija R je refleksivna (eRe za vse $e \in E(G) \setminus E(H)$) in simetrična ($eRf \implies fRe$ za vse $e, f \in E(G) \setminus E(H)$), porodi torej ekvivalenčno relacijo R^* , definirano kot tranzitivno zaprtje operacije R . Relacijo R^* definiramo rekurzivno: $R^{(0)} := R$, $R^{(n+1)} := R^{(n)} \cup \{(e, g) : (e, f) \in R^{(n)} \text{ in } (f, g) \in R^{(n)}\}$ za vse $n \geq 0$; $R^* = \cup_{n \geq 0} R^{(n)}$. Ekvivalenčnemu razredu R^* , pravimo *H*-most.

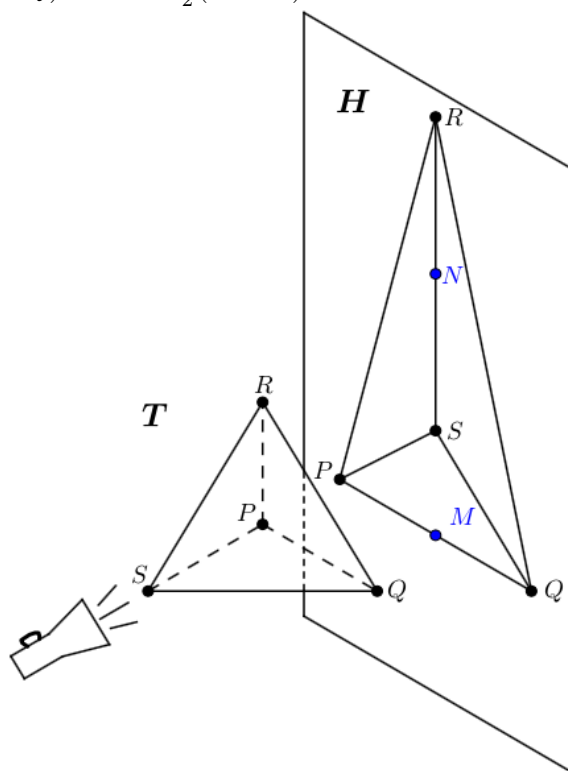
Drugače povedano, če je H podgraf v grafu G , potem je *H*-most B grafa G neka povezana komponenta iz množice $V(G) \setminus V(H)$ skupaj z vsemi povezavami te povezane komponente na H in njenimi krajišči. Vozlišča $V(B) \cap V(H)$ imenujemo *vozišča priključitve B na H*. Definicija je zelo podobna definiciji Thomassenovih *C*-komponent (glej definicijo 2.12).

Dokaz izreka 2.10. Naj bo G protiprimer izreka 2.10, torej neravninski graf, ki ne vsebuje podgrafa Kuratowskega. Naj bo G najmanjši tak graf, torej tak graf, ki ima najmanjše možno število vozlišč (če odstranimo poljubno vozlišče, dobimo ravninski graf). Predpostavimo lahko, da je G enostaven, povezan in ne vsebuje prereznih vozlišč (je 2-povezan). Predpostavimo lahko tudi, da po dodajanju povezav G vsebuje podgraf H , ki je subdivizija grafa K_5^- (K_5 brez ene povezave) ali subdividiran $K_{3,3}^-$ in je G povezavno minimalen pod temi predpostavkami (za poljubno množico $E' \subset E(G)$ je graf $(V(G), E')$ bodisi ravninski ali pa ne vsebuje niti subdivizije K_5^- niti subdivizije $K_{3,3}^-$). Sedaj graf G razstavimo na podgraf H in *H*-mostove.

V tem odstavku utemeljimo, zakaj lahko predpostavimo, da je H subdivizija grafa $K_{3,3}^-$. Naj bo H nesubdividiran K_5^- in B poljuben *H*-most (ki mora obstajati, saj je H ravninski, G pa mora biti neravninski). Naj bosta P in Q vozlišči priključitve mostu B (morata biti vsaj dve, saj G nima prereznih vozlišč). Vozlišči P in Q sta povezani prek poti v B in zato ne moreta biti tisti dve vozlišči v H , ki sta nesosednji (saj G ne vsebuje subdivizije K_5). Ker sta P in Q povezani v H in je G enostaven, obstaja vsaj še eno vozlišče na P, Q -poti v B . Sedaj lahko ob zamenjavi povezave PQ za P, Q -pot predpostavimo, da je H prava subdivizija grafa K_5^- . S pomočjo slike 28 sedaj zgolj še preverimo, da vsaka izmed obeh subdivizij grafa K_5^- (na desnem grafu slike 28 subdividirana povezava povezuje krajišči stopenj 3 oz. 4, v levem pa krajišči stopenj 4) na 6 vozliščih enoličen podgraf, izomorfen $K_{3,3}^-$.

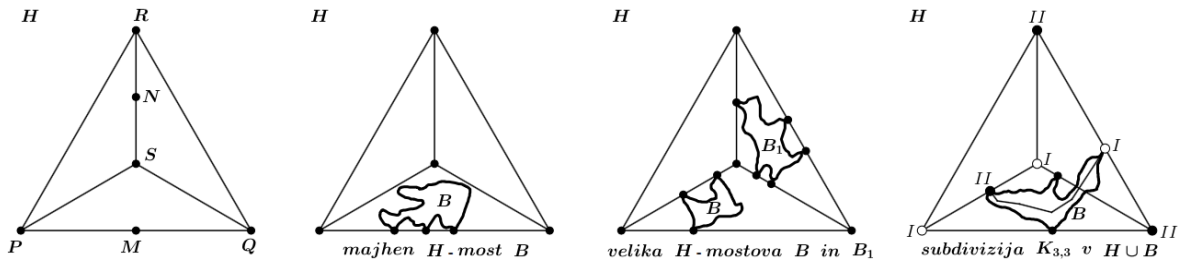
Slika 28: Dve subdiviziji grafa K_5^- , izomorfnii grafu $K_{3,3}^-$.

Od tu naprej je H subdividiran $K_{3,3}^-$. Glede na ekvivalentnost sferične in ravninske vložitve (topološko gledano lahko ravnino zvijemo v sfero brez severnega pola) bomo H poskusili vložiti na mejo (robove in vozlišča) tetraedra T z vozlišči P, Q, R, S . Začnemo z vložitvijo H -ja v skelet T (to si lahko intuitivno predstavljamo kot projekcijo vozlišč in robov T v ravnino, kot je prikazano na sliki 29; topološke podrobnosti izpustimo, saj za nas ne bodo pomembne); pri tem pa naj H poleg vozlišč P, Q, R, S vsebuje vsaj še vozlišči $M = \frac{1}{2}(P + Q)$ in $N = \frac{1}{2}(R + S)$.

Slika 29: Projekcija vozlišč in robov tetraedra T v ravnino.

Naj bo B poljuben H -most. Opazimo, da B ne more vsebovati obeh M in N , saj bi sicer G vseboval subdividiran $K_{3,3}$. Ampak zaradi vozliščne minimalnosti G morata oba M in N imeti stopnjo $d_G(M), d_G(N) \geq 3$. (V nasprotnem bi namreč lahko zgladili eno od vozlišč M ali N (glej definicijo 1.15), pri tem pa ne bi izgubili pogoja neravninskosti za G – protislovje vozliščni minimalnosti.) Obstajati mora torej vsaj še en most,

B_1 . Ker je $E(H \cup B) \subseteq E(G) \setminus E(B_1) \neq E(G)$, $H \cong K_{3,3}^-$, povezavna minimalnost G implicira, da je graf $H \cup B$ ravninski. Zaključimo, da so vozlišča priključitve B na H bodisi vsebovana znotraj ene same povezave v T – v tem primeru rečemo, da je B *majhen H -most* – ali pa so vsebovane znotraj dveh ali treh povezav, ki so meja nekemu trikotniku v T – v tem primeru pravimo, da je B *velik H -most*. Na sliki 30 vidimo tudi, da H ne vsebuje H -mostu B , ki ima vozlišča priključitve na štirih povezavah v T , saj bi v tem primeru $H \cup B$ vseboval subdividiran $K_{3,3}$.



Slika 30: Primeri majhnih in velikih H -mostov in H -most, ki ni niti majhen niti velik.

Podgraf H izberemo na način, da je B_0 velik H -most (če je to mogoče) z maksimalnim številom $|E(B_0)|$. Sedaj imamo štiri podprobleme v zvezi z vložitvijo velikih mostov, po enega za vsako lice iz T . Če je bil problem vložitve velikega mostu v lice PQS nerešljiv, bo ta problem ostal nerešljiv tudi npr. po odstranitvi velikega mostu, ki vsebuje N , kar pa je protislovje povezavni minimalnosti G (z odstranitvijo nekega velikega mostu, npr. B' , ki vsebuje N , bo $G - B'$ še vedno neravninski). Zato lahko v ravnino vložimo vse velike H -mostove in vidimo, da imamo šest podproblemov v zvezi z vložitvijo majhnih H -mostov, po enega za vsako povezavo iz T . Minimalnost pove, da so vsi mostovi pritrjeni na eno povezavo iz T , ki pa ne more biti PQ zaradi enakega argumenta kot prej, saj bi imeli po odstranitvi H -mostov, ki vsebujejo N , še vedno nevložljivost. Predpostavimo lahko torej, da je problematična povezava PS (ki je mejna obema trikotnikoma, vsebujočima M oz. N).

Sedaj je jasno, da mora obstajati nekaj velikih (vsaj 2) H -mostov (ker noben majhen most ne vsebuje M in N , vemo pa, da potrebujemo vsaj 2 mostova, vsak izmed katerih bi vseboval M oz. N). Naj bo B_0 definiran kot zgoraj. B_0 ne more vplivati na vložljivost majhnih mostov, saj bi v tem primeru obstajala tri vozlišča X, Y, Z na PS , kjer bi vozlišči X in Z pripadali malemu H -mostu B_1 , Y pa velikemu B_0 in bi pri tem Y ležal med X in Z . Ampak potem bi X, Z -pot v H zamenjali z X, Z -potjo skozi B_1 in pri tem povečali $|E(B_0)|$ za vsaj 2, kar pa je protislovje z izbiro H .

Tako bi po odstranitvi B_0 še vedno imeli protiprimer grafu iz izreka 2.10 (neravninski graf brez podgrafa Kuratowskega), ki bi nasprotoval vsaj povezavni minimalnosti G . Torej vidimo, da tak namišljen protiprimer, opisan v prvem odstavku dokaza, ne obstaja, kar potrjuje veljavnost izreka. \square

2.4 Dokaz Klotza in njegova algoritmična uporaba

Po Eulerjevi formuli (izrek 1.34) ima ravninski graf največ $3|V| - 6$ povezav. Po formuli vsote stopenj (trditev 1.18) je povprečna stopnja vozlišč enaka $\frac{2|E|}{|V|}$ (posledica 1.19). Naj velja $|E| < 3|V|$. Potem je $\frac{2|E|}{|V|} < 6$ in torej G vsebuje vozlišče stopnje kvečjemu 5.

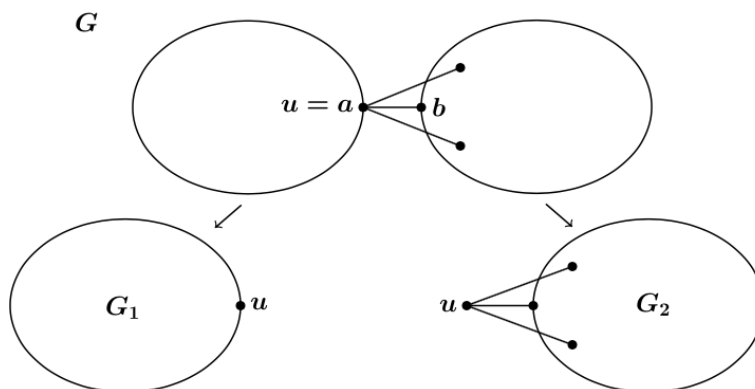
2.4.1 Dokaz

Poglejmo sedaj Klotzev dokaz [9] izreka 2.10 in izpustimo lažji del dokaza.

Dokaz izreka 2.10. Naj bo $G = (V, E)$ poljuben neravninski graf. Pokažimo, da vsebuje podgraf Kuratowskega. Dokaz je z indukcijo po $|V|$. Pri $|V| \leq 5$ očitno ne bo težav, zato se osredotočimo na indukcijski korak. Če je $|E| > 3|V| - 5$, zreduciramo $|E|$ na $3|V| - 5$ z brisanjem poljubnih $|E| - 3|V| + 5$ povezav. Predpostavimo lahko, da je G povezan in da je stopnja vsakega vozlišča vsaj 3. Naj bo a vozlišče stopnje kvečjemu 5, $ab \in E$ in $H = G - \{ab\}$.

Primer 0: $\kappa_H(a, b) = 0$.

V tem primeru je $u = a$ prerezno vozlišče grafa G . Razdelimo G v podgrafa G_1, G_2 tako, da velja $G_1 \cap G_2 = \{u\}$ in $G = G_1 \cup G_2$ (kot na sliki 31). Ker je G neravninski, je neravninski vsaj eden izmed grafov G_1 in G_2 in po indukcijski predpostavki G_1 ali G_2 vsebuje podgraf Kuratowskega. (Argumenti iz dokaza leme 2.7 nas prepričajo, da je neravninski vsaj eden izmed grafov G_1 in G_2 , saj bi bil v nasprotnem primeru tudi graf G ravninski.)

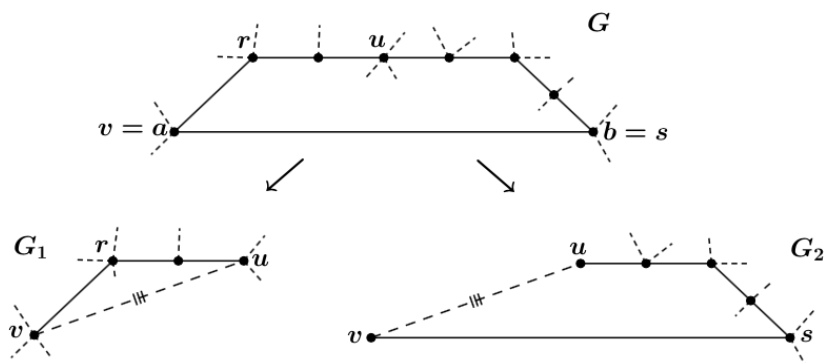


Slika 31: Način razdelitve grafa G na grafa G_1 in G_2 za $\kappa_H(a, b) = 0$.

Primer 1: $\kappa_H(a, b) = 1$.

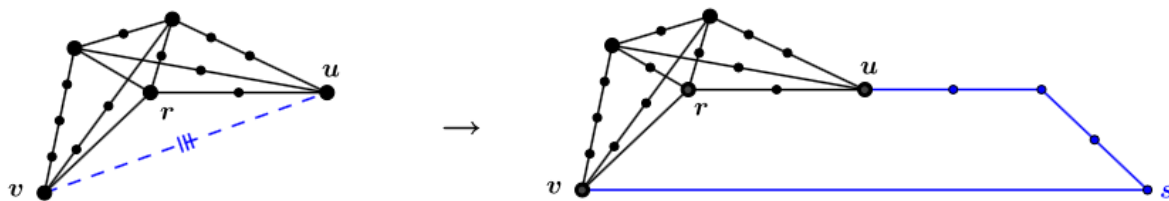
Po Mengerjevem izreku (izrek 2.19) lahko ločimo a in b v H z odstranitvijo enega samega vozlišča, u . Naj bo r poljuben sosed vozlišča a , pri čemer $r \neq u, b$, in naj bo $s = b, v = a$. Potem sta r in s ločena v G z odstranitvijo vozlišč u in v . Razdelimo G na podgrafa G_1, G_2 tako, da velja $G_1 \cap G_2 = G[\{u, v\}]$ in $G_1 \cup G_2 = G$. Če $uv \notin E$,

potem jo dodamo kot ‘prepovedano povezavo’ (na sliki 32 označena črtkano s tremi prečrtaji na sredini) v G_1 in G_2 .



Slika 32: Način razdelitve grafa G na grafa G_1 in G_2 za $\kappa_H(a, b) = 1$.

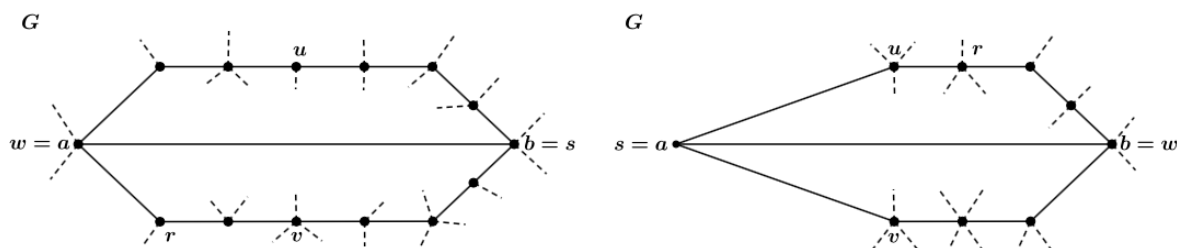
Ker G ni ravninski, tudi vsaj eden od grafov G_1 in G_2 ni ravninski. Recimo, da G_1 ni ravninski. Po indukcijski predpostavki G_1 vsebuje podgraf Kuratowskega K . Če je prepovedana povezava $uv \in K$, potem zamenjamo uv z u, v -potjo v $G \cap G_2$, da dobimo podgraf Kuratowskega v G (glej sliko 33).



Slika 33: Podgraf Kuratowskega K v grafu G_1 (levo) in K v grafu G desno.

Primer 2: $\kappa_H(a, b) = 2$.

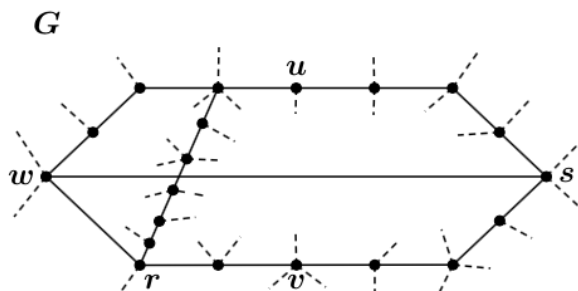
Določimo vozlišči u, v , ki ločita a, b v H . Če ima a soseda $r \notin \{b, u, v\}$, potem vzamemo $w = a, s = b$ (kot na sliki 34 levo). V nasprotnem primeru (ima a natanko 3 sosede: b, u in v) naj bo r sosed enega izmed vozlišč b, u ali v , ki ne pripada množici $\{a, b, u, v\}$, in vzamemo $s = a, w = b$ (kot na sliki 34 desno).



Slika 34: Oznake vozlišč grafa G za $\kappa_H(a, b) = 2$.

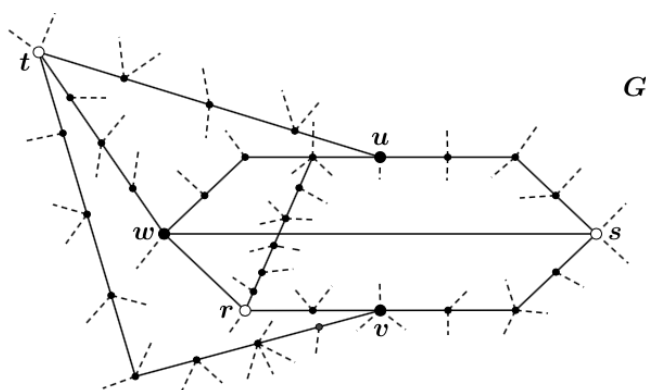
Vozlišči r in s ločimo v G z odstranitvijo trojice u, v, w . Če $\kappa_G(r, s) \leq 2$, potem ločimo r in s z odstranitvijo zgolj dveh vozlišč ($\{u, w\}$ ali $\{v, w\}$). V tem primeru je

$\kappa_H(r, x) \leq 1$, $x \in N_G(r)$, $x \in \{u, v, w\}$ in nadaljujemo kot v primerih 0 ali 1. Naj bo $\kappa_G(r, s) = 3$ (kot na sliki 35).



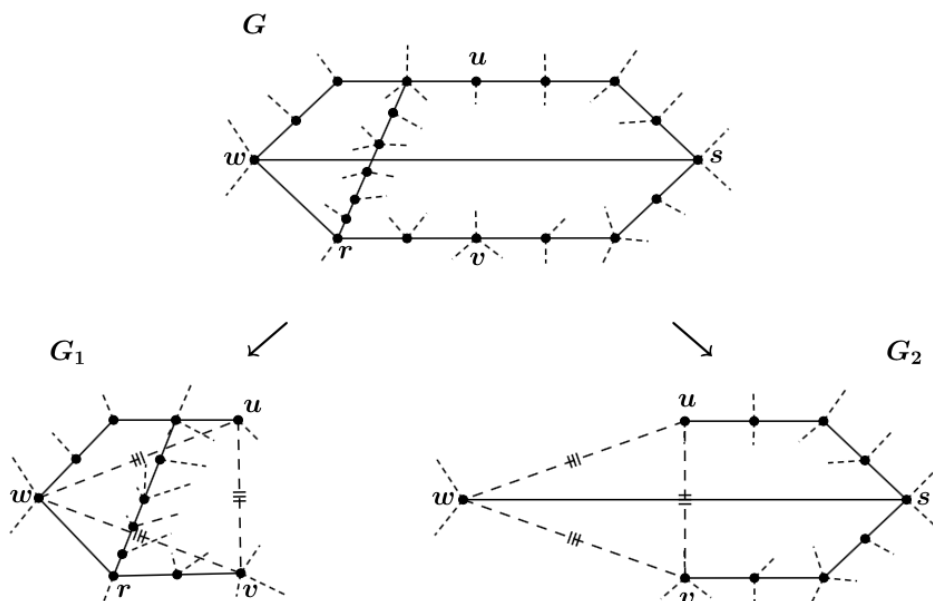
Slika 35: Graf G , za katerega velja $\kappa_G(r, s) = 3$.

Če ima $G - \{u, v, w\}$ komponento C , ki je različna od tistih, v katerih se nahajata r in s , potem naj bo $t \in V(C)$ (glej sliko 37). Predpostavimo lahko, da je $\kappa_G(s, t) \geq 3$, saj bi v nasprotnem lahko vnovič nadaljevali kot v primeru 0 ali 1. Sedaj najdemo subdivizijo $K_{3,3}$ v G , sestavljeno iz treh disjunktih r, s -poti in treh disjunktih t, s -poti, in v kateri so r, s, t in u, v, w vozlišča stopnje 3.



Slika 36: ‘Velika’ črna in bela vozlišča so vozlišča stopnje 3 subdivizije $K_{3,3}$ v G .

Zato lahko predpostavimo, da $G - \{u, v, w\}$ sestoji iz natanko dveh komponent. Razdelimo G v podgrafa G_1, G_2 , tako da velja $G_1 \cap G_2 = G[\{u, v, w\}]$ in $G_1 \cup G_2 = G$, $r \in V(G_1)$, $s \in V(G_2)$. Morebitne manjkajoče povezave trikotnika uvw dodamo kot ‘prepovedane povezave’ v oba, G_1 in G_2 (kot prikazano na sliki 37, kjer so povezave s tremi prečrtaji prepovedane povezave).



Slika 37: Način razdelitve grafa G na grafa G_1 in G_2 za $\kappa_H(a, b) = 2$.

Z odstranitvijo vozlišč $\{u, v, w\}$ tako G_1 kot tudi G_2 ostaneta povezana. Če bi bila G_1 in G_2 ravninska, bi ju lahko ‘zlepili’ skupaj prek trikotnika uvw , da bi dobili ravninsko vložitev za G . Ker pa G ni ravninski, potem tudi vsaj eden izmed grafov G_1, G_2 ni ravninski. Recimo, da G_1 ni ravninski. Po indukcijski predpostavki G_1 vsebuje podgraf Kuratowskega K .

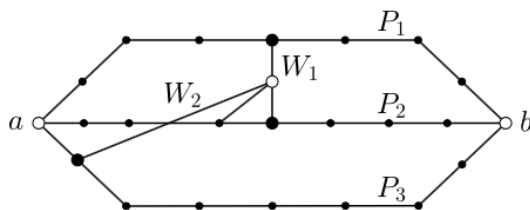
Če K vsebuje natanko eno prepovedano povezavo, recimo uw , ali natanko dve prepovedani povezavi, recimo uv in vw , tako da v ni vozlišče stopnje vsaj 3 v K , potem zamenjamo te povezave z u, w -potjo v $G \cap G_2$, da dobimo podgraf Kuratowskega v G . Če K vsebuje dve taki prepovedani povezavi, recimo uv in vw , da je v vozlišče stopnje vsaj 3 v K , potem te povezave zamenjamo s tremi notranje disjunktne poti iz s do u, v, w v $G \cap G_2$, da dobimo podgraf, ki je subdivizija grafa $K_{3,3}$ v G .

Primer 3: $\kappa_H(a, b) \geq 3$.

Naj bodo P_1, P_2, P_3 notranje disjunktne a, b -poti v H .

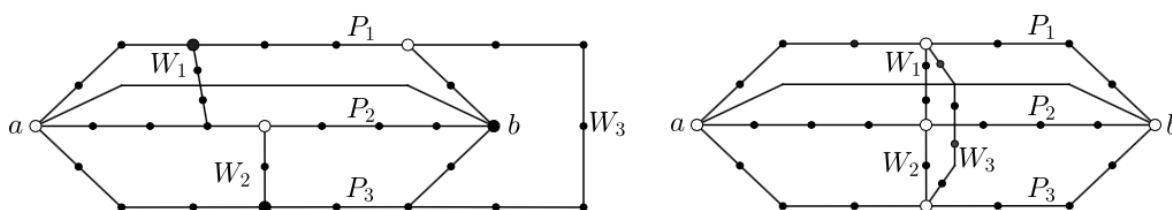
Primer 3.1: Obstajata taki poti P_i, P_j , da ne obstaja nobena pot, ki bi povezovala P_i in P_j v $G - P_k$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Če bi obstajala ravninska vložitev grafa H , bi lahko vstavili povezavo ab ‘med’ poti P_i in P_j in pri tem obdržali ravninsko vložitev za G . Ker pa je G neravninski, je tudi H neravninski. Zamenjajmo zato G za H , ab z neko drugo povezavo z krajiščem a (sedaj je $3 \leq d_G(a) \leq 4$) in začnemo novo analizo primerov od 0 do 3. Ker je sedaj stopnja vozlišča a največ 4, se lahko Primer 3.1 zgodi še kvečjemu enkrat.

Primer 3.2: Za vsako permutacijo i, j, k števil 1, 2, 3 obstaja pot $W_{i,j}$, ki povezuje poti P_i in P_j v $G - P_k$. Naj bo $W_1 = W_{1,2}$, $W_2 = W_{2,3}$ in $W_3 = W_{3,1}$. Predpostavimo lahko, da so poti P_i notranje disjunktne z W_j za $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Če poti W_i in W_j nista notranje disjunktne za $i \neq j$, potem najdemo subdivizijo grafa $K_{3,3}$ v H (glej sliko 38).



Slika 38: Podgraf grafa H , v katerem najdemo subdivizijo grafa $K_{3,3}$.

Če pa poti W_j ($j = 1, 2, 3$) so paroma notranje disjunktne, potem je podgraf grafa G sestavljen iz poti P_i, W_j ($i, j = 1, 2, 3$) in povezave ab , skrčljiv do subdivizije grafa K_5 ; vsebuje pa tudi subdivizijo grafov K_5 ali $K_{3,3}$ (primera vidimo na sliki 39).



Slika 39: Podgraf grafa G , v katerem najdemo subdivizijo grafa $K_{3,3}$.

□

2.4.2 Algoritmčna uporaba in ocena časovne zahtevnosti

Najprej bomo preverili lemo, ki nam bo pomagala oceniti časovno zahtevnost algoritma, še prej pa pogledjmo definicijo binarnega drevesa.

Definicija 2.34 (drevo, binarno drevo). *Drevo* je povezan graf, ki ne vsebuje cikla. *Drevo s korenom* je drevo, ki ima neko vozlišče r izbrano za *koren*. Naj bo $v \neq r$ poljubno vozlišče drevesa s korenom in $P(v)$ (enolično določena) r, v -pot. *Otroci* vozlišča v so njegovi sosedje, ki ne ležijo na $P(v)$. *Listi* so vozlišča brez otrok. *Ravninsko drevo s korenom* je zakoreninjeno drevo z leva-proti-desni ureditvijo, določeno za otroke vsakega vozlišča. *Binarno drevo* je ravninsko drevo s korenom, v katerem ima vsako vozlišče največ dva otroka, vsak otrok vozlišča pa je opredeljen kot njegov *levi otrok* ali *desni otrok*. Poddrevesi, ki imata korena v otrocih korena se imenujeta *levo poddrevo* in *desno poddrevo*.

Lema 2.35. *Naj bo S množica z n elementi, $n \geq 2$, razdeljena na podmnožici S_1, S_2 , tako da velja $S = S_1 \cup S_2$, $|S_1 \cap S_2| \leq 3$, $S_1 \not\subset S_2, S_2 \not\subset S_1$. Konstruirajmo binarno drevo $T(S)$ s korenom S , kjer sta S_1 in S_2 levo oz. desno poddrevo; S_1, S_2 razdelimo naprej na enak način, kot smo razdelili S itd. ... Z delitvijo neke podmnožice prenehamo, ko ima le-ta manj kot 5 elementov. Naj bo $f(n)$ maksimalno število vozlišč v drevesu $T(S)$. Potem je $f(n) = \max\{1, 2n - 7\}$.*

Dokaz. Dokazali bomo na način, da najprej pokažemo neenakost $f(n) \leq \max\{1, 2n-7\}$ s krepko indukcijo, in nato neeneakost $f(n) \geq \max\{1, 2n-7\}$ z navadno indukcijo.

1. Baza indukcije: $n \leq 4$. $T(S)$ ima samo koren S , $f(n) = 1 \leq \max\{1, 2n-7\}$.

Naj bo $n \geq 4$, $|S| = n+1$ in $T(S)$ poljubno drevo kot v lemi. Naj bosta S_1 in S_2 otroka korena S . Predpostavimo, da neenakost velja za vsa (pod)drevesa s kvečjemu $n \geq 4$ elementi v korenu, torej tudi za drevesi $T(S_1)$ in $T(S_2)$, in pokažimo, da velja za $T(S)$. Ozačimo $n_1 = |S_1|$ in $n_2 = |S_2|$. Iz definicije drevesa v lemi najprej izpeljemo naslednje neenakosti:

$$|S_1| + |S_2| \geq |S| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2| \geq |S_1| + |S_2| - 3, \text{ tj. } n_1 + n_2 \leq n + 4.$$

Ker $S_1 \not\subset S_2$, je $|S_2| < |S|$.

Ker $S_2 \not\subset S_1$, je $|S_1| < |S|$.

Sedaj ločimo 4 primere:

- (a) $n_1, n_2 \geq 4$.

V tem primeru velja $\max\{1, 2n_i - 7\} = 2n_i - 7$, $i = 1, 2$. Sledi:

$$|V(T(S))| = |V(T(S_1))| + |V(T(S_2))| + 1 \stackrel{i.p.}{\leq} (2n_1 - 7) + (2n_2 - 7) + 1 = 2(n_1 + n_2) - 13 \leq 2(n + 1 + 3) - 13 = 2n - 5 = 2(n + 1) - 7 = \max\{1, 2(n + 1) - 7\}.$$

- (b) $n_1 \geq 4, n_2 \leq 3$.

V tem primeru velja $\max\{1, 2n_1 - 7\} = 2n_1 - 7$, $\max\{1, 2n_2 - 7\} = 1$. Sledi:

$$|V(T(S))| = |V(T(S_1))| + |V(T(S_2))| + 1 \stackrel{i.p.}{\leq} (2n_1 - 7) + (1) + 1 \leq 2(n + 1) - 7.$$

- (c) $n_1 \leq 3, n_2 \geq 4$.

Ta primer je simetričen primeru (b).

- (d) $n_1, n_2 \leq 3$.

V tem primeru velja $\max\{1, 2n_i - 7\} = 1$, $i = 1, 2$. Sledi:

$$|V(T(S))| = |V(T(S_1))| + |V(T(S_2))| + 1 \stackrel{i.p.}{\leq} 1 + 1 + 1 = 3 \leq 2(n + 1) - 7.$$

V vseh štirih primerih je utemeljena pravilnost indukcijskega koraka in s tem tudi neenakost $f(n) \leq \max\{1, 2n-7\}$ za vse n .

2. Baza indukcije: $n \leq 4$. $f(n) = 1 = \max\{1, 2n-7\}$

Naj bo zdaj $n \geq 4$. Naj bo $S' = \{1, 2, \dots, n\}$ in $T(S')$ drevo z vsaj $\max\{1, 2n-7\}$ vozlišči. Naj bo $S = \{1, 2, \dots, n+1\}$ in pokažimo, da obstaja drevo $T(S)$, ki ima vsaj $\max\{1, 2(n+1)-7\}$ vozlišč. Konstruirajmo drevo $T(S)$ tako, da ima koren S dva otroka, ki sta korena dreves $T(S')$ in trivialnega drevesa $T(\{n+1\})$. Sledi: $f(n+1) \geq |V(T(S))| = |V(T(S'))| + 2 \stackrel{i.p.}{\geq} \max\{1, 2n-7\} + 2 = 2n-7+2 = 2(n+1)-7 = \max\{1, 2(n+1)-7\}$.

□

Zgornji dokaz izreka Kuratowskega proizvede algoritem s ponavljanjem delitvenega koraka (G razdelimo na dva manjša podgrafa in predpostavimo, da eden izmed njiju vsebuje podgraf Kuratowskega), dokler ne najdemo podgrafa Kuratowskega, ali pa se izkaže, da je dani graf $G = (V, E)$ ravninski. Začeniši z $G' = G$ smo v vsaki fazi algoritma graf $G' = (V', E')$ razdelili na podgrafa $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, tako da $V' = V_1 \cup V_2$, in $|V_1 \cap V_2| \leq 3$, $V_1 \not\subseteq V_2$, $V_2 \not\subseteq V_1$. Nato nadaljujemo s procesom delitve nastalih grafov, razen če je v kakšnem izmed njih najden podgraf Kuratowskega ali če imajo manj kot 5 vozlišč. Na tak način je konstruirano binarno drevo $T(G)$ s korenom G . Lema 2.35 pokaže, da je število vozlišč (grafov) v $T(G)$ enako $O(|V|)$, kar je torej meja za število rekurzivnih klicev algoritma. Vsaka od rekurzivnih klicev zahteva rešitev naslednjih problemov:

1. Določitev povezanih komponent grafa.
2. Določitev največ treh notranje disjunktnih poti med danima vozliščema grafa.
3. Določitev minimalne prerezne množice vozlišč za dani vozlišči r, s , kjer je $\kappa(r, s) \leq 2$.

Ti problemi imajo ob predpostavki $|E| = O(|V|)$ dobro poznane rešitve v linearnem času. Časovna zahtevnost algoritma je torej $O(|V|^2)$. Če se algoritem uporablja samo za preverjanje ravninskosti, potem zadošča shraniti samo liste drevesa $T(G)$, kar zahteva samo $O(|V|)$ prostora, če pa želimo poiskati še podgrafe Kuratowskega, potrebujemo $O(|V|^2)$ prostora. Če je G' razdeljen v G_1 in G_2 , shranimo k vsaki prepovedani povezavi uv v G_i še ustrezno u, v -pot v $G' \cap G_j$, $i \neq j$. Na ta način lahko v primeru, ko najdemo podgraf Kuratowskega v enem izmed listov drevesa $T(G)$, prepovedane povezave zamenjamo s potmi v G , da obdržimo podgraf Kuratowskega v G . Glej [9].

2.5 Harary-Tutteova ekvivalentna formulacija izreka

V tem poglavju bo naš cilj predstaviti dualno verzijo izreka Kuratowskega, skupaj s Harary-Tutteovim dokazom [5, 6], s katero je možno preveriti ravninskost grafa s skrčitvijo povezanih podgrafov grafa G v vozlišča. Ob predpostavki, da izrek Kuratowskega drži, bomo dokazali, da drži tudi njegova ekvivalentna formulacija (zapisana v izreku 2.39).

Definicija 2.36 (redukcija). Naj bo G graf, $S \subseteq E(G)$, $\bar{S} = E(G) - S$, $G : S = G - \bar{S}$. *Redukcija* $G : S$ iz G na S je graf, dobljen iz grafa $G : S$, z brisanjem izoliranih vozlišč.

Definicija 2.37 (skrčitev). Naj bo G graf, $S \subseteq E(G)$. *Skrčitev* $H = G \times S$ grafa G na S je graf, ki ga dobimo iz G s skrčitvami vseh povezav iz komponent grafa $G : \bar{S}$,

tako da iz vsake komponente ostane eno vozlišče. Vozlišča $V(H)$ so torej komponente grafa $G - S$ in $E(H) = S$. Če je $A \in S$, potem sta krajišči A v H tisti komponenti, ki vsebujeta krajišči povezave A v G .

Z notacijo $[u], [v], \dots$ bomo v nadaljevanju označevali vozlišča skrčitev.

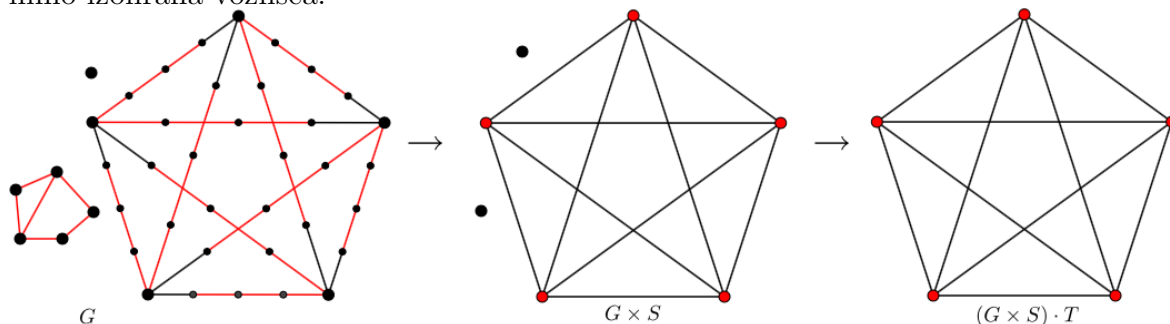
Definicija 2.38 (subkontraktcija). *Subkontraktcija* grafa G je redukcija skrčitve (reducirana skrčitev) grafa G $((G \times S) \cdot T)$ ali skrčitev redukcije grafa G $((G \cdot S) \times T)$.

Izrek 2.39 (ekvivalentna formulacija izreka Kuratowskega). *Graf G je neravninski natanko tedaj, ko vsebuje graf K_5 ali $K_{3,3}$ kot subkontraktcijo.*

Dokaz. Običajna verzija Kuratowskega izreka nam pove, da je G neravninski natanko tedaj, ko vsebuje podgraf K , ki je subdivizija grafa K_5 ali $K_{3,3}$. Če je ta pogoj izpolnjen in G vsebuje podgraf Kuratowskega, je jasno, da je graf K_5 ali $K_{3,3}$ vsebovan tudi kot subkontraktcija grafa G . Namreč, če je K podgraf Kuratowskega v G , tedaj lahko:

1. Dobimo K kot $K = G \cdot E(K)$.
2. Z ustrezno skrčitvijo grafa K dobimo K_5 ali $K_{3,3}$.

Podobno prikažemo na sliki 40 (kjer imamo subdivizijo grafa K_5 , K v G), le da sta koraka 1. in 2. zamenjana. Povezane komponente v G , katerih povezave so obarvane rdeče, skrčimo v posamezna vozlišča, obarvana rdeče v sredinskem grafu $G \times S$. Črno obarvane povezave iz G se 'ohranijo' tudi v $G \times S$. V desnem grafu z redukcijo odstranimo izolirana vozlišča.



Slika 40: Subdividiran K_5 v G in K_5 , ki je subkontraktcija grafa G .

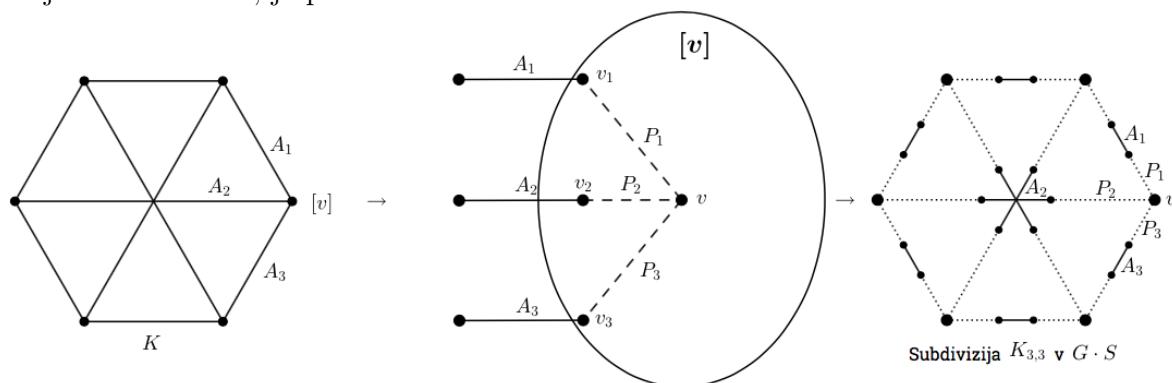
Nasprotno bomo sedaj predpostavili, da sta grafa $K_{3,3}$ oz. K_5 subkontraktciji grafa G in pokazali, da vsebuje G podgraf Kuratowskega.

Predpostavimo, da G vsebuje subkontraktcijo $K = (G \cdot S) \times T$, ki je $K_{3,3}$. Naj bo $[v] \in V(K)$ krajišče trem povezavam A_1, A_2, A_3 v K . Potem je $[v]$ povezan podgraf grafa $G \cdot S$. Naj bodo njegova vozlišča v G , ki so krajišča povezav A_1, A_2 in A_3 , poimenovana v_1, v_2 in v_3 .

Če so vozlišča v_1, v_2 in v_3 različna, lahko najdemo vozlišče v , ki je z vozlišči v_1, v_2 in v_3

povezano prek poti P_1, P_2 in P_3 v $[v]$, tako da se nobeni dve poti P_i ne sekata, razen v skupnem vozlišču v . Podobno vidimo, če sta dve izmed vozlišč v_i enaki, recimo $v_1 = v_2$. Potem je $v = v_1 = v_2$ in sta poti P_1 in P_2 trivialni (vsebujeta zgolj po eno vozlišče). Če so vsa tri vozlišča v_i enaka, potem je $v = v_1 = v_2 = v_3$ in je trivialna tudi pot P_3 . Ko to konstrukcijo apliciramo na vsa vozlišča v K , lahko zamenjamo K s podgrafom grafa $G \cdot S$ z vozlišči, kot je v , ki postanejo vozlišča stopnje 3 in skupaj s potmi, kot so P_i , in povezavami, kot so A_i , tvorijo subdivizijo grafa $K_{3,3}$ v G .

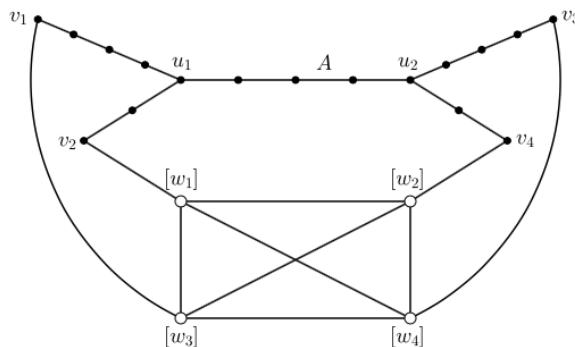
Primer subkontraksije $K = (G \cdot S) \times T = K_{3,3}$, in subdivizije grafa $K_{3,3}$ v $(G \cdot S) \subseteq G$, ki jo dobimo iz K , je prikazan na sliki 41.



Slika 41: Primer subdivizije $K_{3,3}$ v $(G \cdot S)$, ki jo dobimo iz subkontraksije $K = (G \cdot S) \times T = K_{3,3}$.

Predpostavimo sedaj, da ima G subkontraksijo $K = (G \cdot S) \times T$, ki je K_5 . Vzemimo vozlišče $[v] \in K$, ki je krajišče štirim povezavam, A_1, A_2, A_3 in A_4 . Če si zamislimo $[v]$ kot podgraf v G , potem poimenujmo z v_1, v_2, v_3 krajišča povezav A_i (v G) in v_4 , ki pripadajo $[v]$. Potem obstaja možnost, da najdemo vozlišče $v \in [v]$, ki je priključeno na vozlišča v_1, v_2, v_3, v_4 prek poti P_1, P_2, P_3, P_4 , ki imajo samo v v preseku. Če lahko to storimo za vseh pet vozlišč iz K , potem G vsebuje podgraf, ki je subdivizija grafa K_5 .

V preostalem primeru lahko predpostavimo, da so v nekemu vozlišču $[v] \in K$ vozlišča v_1, v_2, v_3, v_4 združena, kot je prikazano na sliki 42. (Gre torej za primer subkontraksije K_5 v G , v kateri ne obstaja vozlišče $v \in [v]$, iz katerega bi izhajale 4 disjunktne poti do vozlišč v_1, \dots, v_4 , zato ne moremo dobiti subdivizije K_5 iz nje). Na sliki 42 so preostala vozlišča iz K označena z $[w_1], [w_2], [w_3], [w_4]$ in predstavljajo povezane podgrafe grafa $G \cdot S$. Naj bo A ena izmed povezav u_1, u_2 -poti. Naj bo $S_1 = S - \{[w_1][w_3], [w_2][w_4]\}$ in T_1 množica, ki jo dobimo iz T z brisanjem povezav $[w_1][w_3]$ in $[w_2][w_4]$ in z dodajanjem povezave A .



Slika 42: Primer, ko lahko subkontrakcijo K_5 preoblikujemo v subkontrakcijo $K_{3,3}$.

Očitno je $(G \cdot S_1) \times T_1$ graf $K_{3,3}$. Dobimo ga iz vozlišč $[w_i]$ in s kontrakcijo dveh povezanih podgrafov grafa na zgornji sliki 42, ki ju sestavljajo vsa črno obarvana vozlišča, loči pa ju povezava A in ju skrčimo v levo oz. desno krajišče povezave A . Pokazali pa smo že, da graf, ki vsebuje $K_{3,3}$ kot subkontrakcijo, vsebuje tudi podgraf Kuratowskega.

S tem smo pokazali, da velja tudi modifikacija oz. ekvivalentna verzija izreka Kuratowskega. \square

2.6 Razprava o dokazih

V tem poglavju bomo na kratko prediskutirali posamezne dokaze ter metode in pristope, uporabljene v dokazih. V prvih petih dokazih dokazujemo zgolj težjo implikacijo izreka Kuratowskega (izrek 2.10). Dokaze izreka Kuratowskega smo začeli z obravnavo treh Thomassenovih dokazov, nadaljevali pa s Tverbergovim dokazom, z algoritmičnim Klotzevim dokazom ter končali z ekvivalentno verzijo izreka Kuratowskega, kot sta jo zapisala Harary in Tutte.

1. dokaz (Thomassenov dokaz z uporabo prekrivajočih se komponent)

Dokazujemo negacijo implikacije za 2-povezane grafe, in sicer predpostavimo, da je G neravninski in dokazujemo, da vsebuje subdivizijo grafa K_5 ali $K_{3,3}$. Dokaz je zasnovan na indukciji po številu vozlišč $|V(G)|$. V tem dokazu definiramo pojem C -komponente, ki se pojavlja tudi v drugem in tretjem Thomassenovem dokazu, a morda ne v tako izraziti vlogi. C je cikel v G , C -komponenta pa je komponenta grafa G , ki bi nastala ob odstranitvi cikla C , vsebuje pa še tista vozlišča iz C in povezave, s katerimi se na cikel priključi. Pravimo, da sta C -komponenti prekrivajoči, kadar ne moremo poiskati dveh povezavno disjunktnih poti na C , vsaka izmed katerih bi vsebovala vsa vozlišča ene izmed komponent. Izkaže se, da so prekrivajoče C -komponente bodisi C -poševne ali C -ekvivalentne. C -ekvivalentni komponenti imata natanko tri vozlišča priključitve, ki so sestavni del obeh komponent. C -poševni komponenti pa vsebujeta

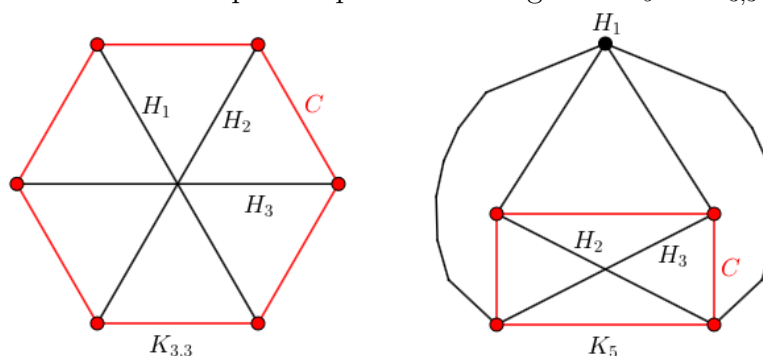
po dve vozlišči priključitve, za katere velja, da se izmenjujejo ciklično, torej v zaporedju x_1, x_2, x_3, x_4 , kjer sta x_1, x_3 v eni, x_2, x_4 pa v drugi C -komponenti. V dokazu je zelo pomembna tudi definicija prekrivajočega grafa grafa G glede na C , katerega vozlišča so C -komponente grafa. Dve vozlišči sta povezani, če sta pripadajoči komponenti C -prekrivajoči.

Najprej predpostavimo, da je prekrivajoči graf grafa G glede na C dvodelen. V tem primeru se izkaže, da lahko vse komponente enega dela particije tega dvodelnega grafa vložimo v eno lice cikla C , komponente iz drugega dela particije pa v drugo lice cikla C . V tem primeru dobimo ravninsko vložitev G , kar je protislovje s predpostavko.

Ko to ugotovimo, moramo dokazati zgolj še trditev, da vsak graf G , ki vsebuje cikel C , tako da je njegov prekrivajoči graf nedvodelen, vsebuje podgraf Kuratowskega. Dovolj je to pokazati za povezano minimalen graf G . Ker je prekrivajoči graf nedvodelen, ima nek lihi cikel H_0, H_1, \dots, H_k , kjer so H_i C -komponente in izberemo C na način, da je k najmanjši možen. Najprej predpostavimo da je $k \geq 2$, torej, da H vsebuje vsaj 5 C -komponent. Izkaže se, da lahko v tem primeru najdemo nek drug cikel, C' , ki vsebuje 2 komponenti manj kot cikel C . To pa nasprotuje minimalnosti k .

Zato lahko predpostavimo, da je $k = 1$ in v tem primeru imamo 3 prekrivajoče C -komponente, za katere pa potem ločimo več primerov in poiščemo subdivizijo $K_{3,3}$ ali K_5 v G .

Dokaz porodi zanimivo ugotovitev: v vsakem vozliščno minimalnem neravninskem grafu G lahko najdemo cikel C , ki ima natanko 3 (paroma) prekrivajoče C -komponente. Primer takega cikla C in treh komponent prikažemo na grafih K_5 in $K_{3,3}$ na sliki 43.



Slika 43: Dva vozliščno minimalna grafa, s po tremi C -komponentami.

Naslednja dva Thomassenova dokaza se nanašata zgolj na 3-povezane grafe.

2. dokaz (Thomassenov dokaz, ki temelji na karakterizaciji 3-povezanih grafov)

Preden se spustimo v dokaz, spoznamo lemo 2.24, ki nam zagotovi, da v grafu G , ki je 3-povezan in z več kot štirimi vozlišči, obstaja taka povezava e , da je graf $G - e$ subdivizija 3-povezanega grafa. Težjo implikacijo Kuratowskega izreka dokažemo z

dokazom trditve, da je vsak 3-povezan graf G , ki ne vsebuje podgrafa Kuratowskega, ravninski. Dokaz gre z indukcijo po vsoti $|V(G)| + |E(G)|$. Z bazo indukcije ($|V(G)| \leq 4$) ni težav. Predpostavimo, da je $|V(G)| \geq 5$ in izberemo povezavo $e = xy \in G$, ki ustreza povezavi iz prej omenjene leme. Predpostavimo, da izrek velja za $G - e$ in pokažemo, da velja za G .

To zopet naredimo s pomočjo C -komponent H_x in H_y , ki vsebujeta vozlišči x oz. y , za cikel C pa vzamemo tistega, znotraj katerega leži x v grafu $G - x$. Komponenta H_x je po definiciji tako edina komponenta znotraj C in torej H_y leži zunaj cikla C .

Dokaz zaključimo tako, da predpostavimo, da H_x in H_y nista C -prekrivajoči, a v tem primeru najdemo dve vozlišči u in v v $G - e$, za kateri velja, da ima graf $(G - e) - \{u, v\}$ tri komponente, kar pa je v nasprotju s predpostavko, da je $G - e$ subdivizija 3-povezanega grafa. Zato zaključimo, da sta H_x in H_y C -prekrivajoči in opišemo, kako najti subdivizijo $K_{3,3}$ oz. K_5 v tem primeru.

3. dokaz (Thomassenov dokaz, ki temelji na skrčitveni lemi za 3-povezane grafe)

Preden se spustimo v dokaz, spoznamo pojem skrčitve povezave $e = xy$ v vozlišče v_e , ki postane krajišče vsem povezavam, katerim krajišče sta predstavljal vozlišči x in y . Pogledamo si lemo 2.29, ki pravi, da če je G 3-povezan, potem vsebuje tako povezavo e , da je tudi G/e 3-povezan. Nato dokažemo lemo 2.30, da če G/e vsebuje podgraf Kuratowskega, ga vsebuje tudi G . Spoznamo pojem konveksne vložitve, ki je ravninska vložitev, v kateri so meje vseh lic konveksni poligoni. S temi orodji smo pripravljene, da se lotimo dokaza.

Podobno kot prva dokaza Thomassena, je tudi tretji dokaz zasnovan z indukcijo po številu vozlišč $|V(G)|$. Dokazujemo, da ima 3-povezan graf G , ki ne vsebuje subdivizije grafa $K_{3,3}$ ali K_5 , konveksno vložitev. Baza indukcije je $|V(G)| = 4$, kjer je K_4 edini predpostavki ustrezajoč graf in ima konveksno vložitev. Zato naredimo indukcijski korak, $|V(G)| \geq 5$ in na osnovi prej omenjenih lem 2.29 in 2.30, predpostavimo, da dobimo nek manjši graf G' iz G , ki ne vsebuje podgrafa Kuratowskega, tako da mu skrčimo povezavo e ($G' = G/e$, $|V(G')| = |V(G)| - 1$), in ki ima po indukcijski predpostavki konveksno vložitev. Naš cilj je pokazati, da ima tudi G konveksno vložitev.

Poimenujemo z z vozlišče, ki nastane po skrčitvi povezave $e = xy$. V $G' - z$ definiramo cikel C , v katerem leži z . Cikel C razdelimo na poligonalne loke, katerih mejne točke predstavljajo sosedni vozlišča x . Če ne obstaja tak poligonalen lok na C , ki bi vseboval vsa vozlišča priključitve C -komponente $H_y = G[y \cup N_{G-e}(y)] \setminus E(C)$ v grafu $G - e$, potem sta $H_x = G[x \cup N_{G-e}(x)] \setminus E(C)$ in H_y prekrivajoči C -komponenti v grafu $G - e$ (po lemi 2.16) in najdemo podgraf Kuratowskega v G , kar nasprotuje začetni predpostavki.

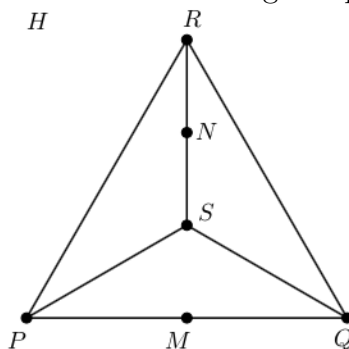
Če pa nek poligonalni lok iz C vsebuje vse sosede y iz $G - e$, potem se izkaže, da lahko graf $G' = G - y$, ki po predpostavki ima konveksno vložitev, razširimo do konveksne vložitve za G z premikom vozlišča y zadosti blizu vozlišču x .

4. dokaz (Tverbergov dokaz)

Dokaz s protislovjem je zasnovan na ideji, da analiziramo strukturo protiprimera (težji implikaciji) izreka Kuratowskega, torej nekega neravninskega grafa, ki ne vsebuje podgrafa Kuratowskega. Izkaže se, da tak graf ne obstaja.

Poleg tega pa predpostavimo še, da je G enostaven, 2-povezan, vozliščno minimalen (odstranitev vozlišča generira ravninski graf) ter vsebuje podgraf H , ki je subdivizija grafa K_5^- ali $K_{3,3}^-$ (tj. K_5 oz. $K_{3,3}$ brez ene povezave). Predpostavimo še, da je pod temi pogoji G povezavno minimalen, torej da z odstranitvijo poljubne povezave bodisi ne vsebuje več subdivizije K_5^- in $K_{3,3}^-$ ali pa ni neravninski. Potem razbijemo G na H in H -mostove, ki so povezane komponente grafa $G - H$, skupaj s povezavami in vozlišči priključitve na H (analog C -komponent iz Thomassenovih dokazov, le da je tu H nek poljuben podgraf, pri Thomassenu pa so bile komponente vezane na cikel).

Nato pokažemo, da lahko za H vedno vzamemo subdivizijo grafa $K_{3,3}^-$, ki ga vložimo na projekcijo ogrodja tetraedra T v ravnino in izgleda približno tako kot na sliki 44:



Slika 44: Podgraf H v grafu G , ki je $K_{3,3}^-$.

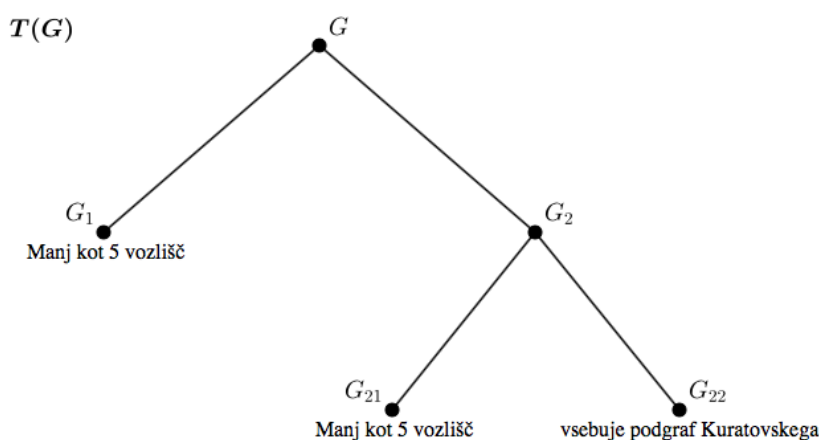
Pokažemo, da morata v G obstajati vsaj 2 H -mostova – eden izmed katerih vsebuje vozlišče M , drugi pa N – in zaradi povezavne minimalnosti grafa G ugotovimo, da je $H \cup B$ (B je H -most) ravninski. Mostove ločimo na male (vozlišča priključitve imajo zgolj na eni povezavi iz T) ter velike (priključene na 2 ali 3 povezave, ki sestavljajo trikotnik v T). H izberemo na način, da je število povezav $|E(B_0)|$ za H -most B_0 maksimalno. Zaradi povezavne minimalnosti grafa G lahko vložimo vse velike mostove v H in vse male mostove moramo zaradi istega razloga priklopiti na eno povezavo, ki pa ne more biti PQ ali RS . Predpostavimo torej, da jih priklopimo na PS . Sedaj je jasno, da ima G vsaj 2 velika H -mostova (ki vsebujeta M oz. N). Izkaže se, da B_0 ne more vplivati na vložljivost malih mostov, kar pa je problem, saj bi po odstranitvi B_0 iz G še vedno imeli protiprimer izreku Kuratowskega, ki pa bi nasprotoval povezavni minimalnosti

G iz predpostavke. Zamišljen protiprimer torej ne obstaja, izrek Kuratowskega pa drži.

5. dokaz (dokaz Klotza in njegova algoritmična uporaba)

Klotzev dokaz (zahtevnejšega dela) Kuratowskega izreka lahko opišemo z algoritmom, ki v vsakem neravninskem grafu G poišče podgraf Kuratowskega v času $O(|V|^2)$. Ta algoritem sicer ni konkurenčen nekaterim drugim algoritmom za preverjanje ravninskosti, ki se izvedejo v linearnem času, ima pa zato, kot navaja avtor, prednost v konceptualni enostavnosti.

Dokaz je zasnovan na ponavljanju indukcijske predpostavke, dokler ne najdemo podgrafov Kuratowskega ali odkrijemo, da je dani graf $G = (V, E)$ ravninski. Začnemo z grafom $G' = G$, in v vsaki fazi dokaza trenutni graf $G' = (V', E')$ razdelimo na dva grafa $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, da je $V' = V_1 \cup V_2$, $|V_1 \cap V_2| \leq 3$, $V_1 \not\subseteq V_2$, $V_2 \not\subseteq V_1$. Delitveni proces nadaljujemo, dokler nastali graf vsebuje vsaj 5 vozlišč oz. dokler ne najdemo podgrafov Kuratowskega. Na ta način gradimo drevo $T(G)$, ki ima G za koren, kot je prikazano na sliki 45. Po lemi 2.35 je število vozlišč, v tem drevesu (število rekurzivnih klicev algoritma) v linearni odvisnosti od števila vozlišč $|V(G)|$ (natančneje, $|V(T(G))| \leq 2|V(G)| - 7$).



Slika 45: Drevo $T(G)$

6. 'dokaz' (Harary-Tutteova ekvivalentna formulacija izreka)

Harary-Tutteov dokaz ni neposredno dokaz Kuratowskega izreka, temveč dokaz ekvivalence med izrekom Kuratowskega in njegovo ekvivalentno formulacijo, kot sta jo zapisala Harary in Tutte. Ekvivalentna formulacija izreka pravi, da je graf G neravninski natanko takrat, ko vsebuje K_5 ali $K_{3,3}$ kot subkontrakcijo. Subkontrakcija je graf, ki ga dobimo s kombinacijo skrčitev (serije skrčitev izbranih povezav grafa) in redukcije (izbris izoliranih vozlišč vpetega podgrafov grafa G).

V dokazu ekvivalence predpostavimo veljavnost izreka Kuratowskega. Pokazati moramo dve stvari. Prvič, da če ima G podgraf Kuratowskega, potem ima G grafa K_5 ali

$K_{3,3}$ tudi kot subkontrakcijo, in drugič, ravno obratno, torej če imamo subkontrakcijo K_5 ali $K_{3,3}$ grafa G , potem G vsebuje podgraf Kuratowskega. Prvi del je trivialen, drugi del pa dokažemo s pregledom vseh možnih primerov. Predpostavimo najprej, da imamo $K_{3,3}$ kot subkontrakcijo grafa G in dokažemo, da najdemo $K_{3,3}$ tudi kot subdivizijo v G . Primer, ko je K_5 subkontrakcija v G , pa razdelamo na dva podprimera; v prvem najdemo K_5 tudi kot subdivizijo v G , v drugem pa najdemo neko drugo subkontrakcijo $K_{3,3}$ v G in s tem se vrnemo na že rešen problem. Ugotovimo, da če velja izrek Kuratowskega, velja tudi njegova ekvivalentna formulacija.

Ta dokaz je ‘najšibkejši,’ saj zgolj pokaže, da je izrek Kuratowskega ekvivalenten njegovi ekvivalentni formulaciji. Zgolj iz rezultata Hararyja in Tuttea ni mogoče neposredno izpeljati izreka Kuratowskega (ni neodvisen dokaz).

Dokaz ekvivalence je zanimiv predvsem zato, ker vpeljemo pojem subkontrakcije – obliko relacije med grafi, ki zelo spominja na minorje. Da se pokazati, da če je nek graf H subkontrakcija grafa G , potem je H tudi minor grafa G in obratno. V naslednjem, zadnjem poglavju spoznamo minorje in nekaj ključnih rezultatov v povezavi z njimi.

3 O grafovskih razredih, zaprtih za minorje

Na začetku 80. let 20. stoletja sta Neil Robertson in Paul Seymour začela razvijati teorijo o grafovskih minorjih v seriji triindvajsetih člankov. Njun najpomembnejši rezultat je dokaz Wagnerjeve domneve, da so (končni) grafi *dobro kvazi urejeni* z relacijo minorja za grafe (v nadaljevanju to dejstvo imenujemo *izrek o grafovskih minorjih* ali, krajše, *izrek o minorjih*) (glej npr. [12]). Drugače povedano z naslednjo izjavo: *V vsaki neskončni množici grafov sta dva taka, da je eden minor drugega*. Ta izrek, ki ima globok vpliv na teorijo grafov in druge veje matematike ter računalništva, je nedvomno eden izmed globljih izrekov, ki jih matematika lahko ponudi in bo predstavljal osrednji del zadnjega poglavja. Spoznali bomo tehniko *drevesne dekompozicije*, ki nastopa v kar nekaj rezultatih Robertsona in Seymourja v povezavi z relacijo minorja. Pogledali si bomo tudi *izrek o prepovedanih minorjih* (posledico izreka o grafovskih minorjih), ki opiše strukturo grafa, ki ne vsebuje enega ali več specifičnih grafov kot minorjev. Na koncu pa bomo pogledali še posplošen izrek Kuratowskega, in sicer da je vložljivost v poljubno fiksno ploskev karakterizirana s prepovedjo končno mnogo minorjev.

3.1 Relacija minorjev in drevesna dekompozicija

Kot glavni viri za ta razdelek nam bodo služili [2, 4] in [12].

Definicija 3.1. Graf H je *minor* grafa G (oznaka: $H \leq_m G$), če lahko dobimo H iz podgrafa grafa G s skrčitvijo povezav. H je *pravi minor* grafa G (oznaka: $H <_m G$), če je $H \leq_m G$ in H ni izomorfen grafu G .

Vsak minor H grafa G je pridobljen s serijo naslednjih operacij: odstranitev povezave, odstranitev izoliranega vozlišča in krčenje povezave.

Definicija 3.2. Refleksivna in tranzitivna relacija (ali *kvazi urejenost*) \leq na množici X je *dobra kvazi urejenost*, če X ne vsebuje neskončne padajoče verige $x_1 > x_2 > \dots$ in če ne vsebuje neskončne antiverige (neskončne množice paroma neprimerljivih elementov).

Ekvivalentno povedano, če je x_0, x_1, \dots neskončno zaporedje v X , pravimo, da so elementi iz X *dobro kvazi urejeni* glede na \leq , če obstajata taka indeksa $i < j$, da velja $x_i \leq x_j$.

Trditev 3.3. *Relacija minorja \leq_m je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna na množici (razredov izomorfnosti) končnih grafov.*

Definicija 3.4 (Razred grafov). *Razred grafov je poljubna množica X grafov, zaprta za izomorfizem; velja torej naslednja implikacija: če je $G \in X$ in $H \cong G$, potem je tudi $H \in X$.*

Definicija 3.5. Razred grafov \mathcal{M} je *zaprt za minorje*, če velja naslednja implikacija: $G \in \mathcal{M}$, $H \leq_m G \implies H \in \mathcal{M}$.

Primer 3.6. Poglejmo dva primera:

1. Razred grafov $\mathcal{M} = \{G \mid G \text{ je ravninski}\}$ je zaprt za minorje.
2. Razred grafov $\mathcal{M} = \{G \mid G \text{ je dvodelen}\}$ ni zaprt za minorje. Naj bo $G = C_4$ in $e \in E(G)$. Tedaj je $C_4 \in \mathcal{M}$, $H = C_4/e <_m C_4$, vendar $H \notin \mathcal{M}$, saj je $H \cong C_3$, ki ni dvodelen.

Definicija 3.7. Naj bo \mathcal{F} poljuben razred grafov. Definirajmo s $Forb_{\leq_m}(\mathcal{F}) := \{G \mid G \not\leq_m H \text{ za vsak } H \in \mathcal{F}\}$ razred vseh grafov brez minorja v \mathcal{F} . Grafov $H \in \mathcal{F}$ pravimo *prepovedani* (ali *izključeni*) *minorji* za razred $Forb_{\leq_m}(\mathcal{F})$.

Po trditvi 3.3 je razred $Forb_{\leq_m}(\mathcal{F})$ zaprt za minorje. Vsako lastnost, zaprto za minorje, je moč izraziti s prepovedanimi minorji:

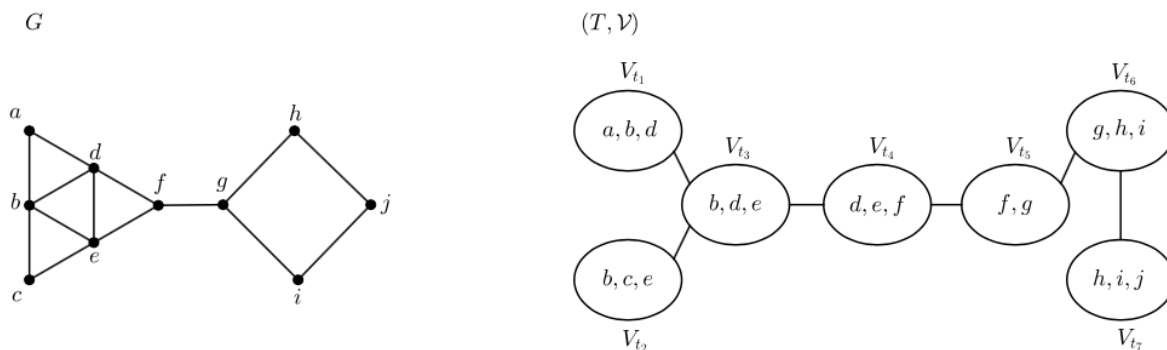
Trditev 3.8. *Razred grafov \mathcal{P} je moč izraziti s prepovedanimi minorji natanko tedaj, ko je zaprt za minorje.*

Naslednja definicija drevesne dekompozicije je povzeta po [4]. Pojem drevesne dekompozicije je ključen pri dokazu izreka o minorjih (v tej nalogi ga sicer ne bomo dokazali) in se pojavi v kar nekaj izrekih, obravnavanih v nadaljevanju.

Definicija 3.9. Naj bo G graf, T drevo in $\mathcal{V} = (V_t)_{t \in T}$ družina množic vozlišč iz $V(G)$, katerih indeksi so vozlišča $t \in T$. Paru (T, \mathcal{V}) pravimo *drevesna dekompozicija* grafa G , če zadošča naslednjim trem pogojem:

1. $V(G) = \cup_{t \in T} V_t$;
2. Za vsako povezavo $e \in G$ obstaja tako vozlišče $t \in T$, da sta obe krajišči povezave e vsebovani v V_t ;
3. $V_{t_1} \cap V_{t_3} \subseteq V_{t_2}$, za vse trojice vozlišč $t_1, t_2, t_3 \in T$, za katere velja $t_2 \in t_1 T t_3$.

Primer tovrstnega drevesa je prikazan na sliki 46. Na levi strani je prikazan graf G , na desni pa njegova drevesna dekompozicija (T, \mathcal{V}) . Drevesna dekompozicija poljubnega grafa ni enolično določena; isti graf ima lahko več različnih drevesnih dekompozicij.



Slika 46: Graf G in njegova drevesna dekompozicija (T, \mathcal{V}) .

Definicija 3.10. Širina dekompozicije (T, \mathcal{V}) je število $\max\{|V_t| - 1 : t \in T\}$, drevesna širina, $tw(G)$, grafa G pa je najmanjša širina poljubne drevesne dekompozicije grafa G .

Širina drevesne dekompozicije (T, \mathcal{V}) na sliki 46 je 2, kar je obenem tudi drevesna širina grafa G . Naslednjo trditev najdemo v [4].

Trditev 3.11. Če je $H \leq_m G$, potem je $tw(H) \leq tw(G)$.

Sledijo trije izreki Robertsona in Seymourja.

Izrek 3.12 (Robertson in Seymour, glej npr. [4]). Za vsako pozitivno celo število k so grafi drevesne širine $< k$ dobro kvazi urejeni glede na relacijo 'biti minor' \leq_m .

Izrek 3.13 (Robertson in Seymour, glej npr. [4]). Za dani graf H imajo grafi brez H minorja omejeno drevesno širino, natanko tedaj, ko je H ravninski.

Definicija 3.14. Kartezični produkt $G \square H$ grafov G in H je graf z množico vozlišč $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$, vozlišči (u, u') in (v, v') iz te množice pa sta povezani natanko tedaj, ko velja:

- $u = v$ in $u'v' \in E(H)$ ali
- $u' = v'$ in $uv \in E(G)$.

Kartezičnemu produktu dveh poti pravimo mreža (ali mrežni graf). Za $r \in \mathbb{N}$ je graf $r \times r$ mreža graf $P_r \square P_r$.

Izrek 3.15 (Robertson in Seymour, glej npr. [4]). Za vsak $r \in \mathbb{N}$ obstaja tak $k \in \mathbb{N}$, da vsak graf z drevesno širino vsaj k vsebuje $r \times r$ mrežo kot minor.

3.2 Izrek o grafovskih minorjih

Izreki, ki lahko karakterizirajo lastnost (razred) \mathcal{P} z množico prepovedanih minorjev, so med najzanimivejšimi v teoriji grafov (npr. Wagnerjev izrek: verzija izreka Kuratowskega, v kateri subdivizijo zamenjamo z minorjem). Po trditvi 3.8 tovrstna karakterizacija obstaja, kadar koli je lastnost \mathcal{P} zaprta za minorje. Takrat je $\mathcal{P} = \text{Forb}_{\leq m}(\overline{\mathcal{P}})$, kjer je $\overline{\mathcal{P}}$ (npr. vsi neravninski grafi) komplement množice \mathcal{P} (npr. vsi ravninski grafi).

Seveda pa si želimo, da bi bila množica prepovedanih minorjev čim manjša. V ta namen definiramo množico Kuratowskega $\mathcal{K}_{\mathcal{P}} := \{H \mid H \text{ je minimalen za operacijo minorja } \leq_m \text{ v } \overline{\mathcal{P}}\}$, ki je enolično določena, najmanjša taka množica. Množica Kuratowskega zadošča pogoju $\mathcal{P} = \text{Forb}_{\leq m}(\mathcal{K}_{\mathcal{P}})$ in za poljubno drugo množico \mathcal{F} prepovedanih minorjev za lastnost \mathcal{P} (tj. $\mathcal{P} = \text{Forb}_{\leq m}(\mathcal{F})$) velja $\mathcal{K}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{F}$.

Elementi množice $\mathcal{K}_{\mathcal{P}}$ so paroma neprimerljivi glede na relacijo minorja \leq_m (tvorijo antiverigo).

Sedaj predstavimo osrednji izrek tega poglavja, izrek o minorjih Robertsona in Seymourja in njegovo posledico.

Izrek 3.16 (Izrek o minorjih, Robertson in Seymour, glej npr. [4]). *Končni grafi so dobro kvazi urejeni z operacijo minorja \leq_m .*

Drugače povedano, v vsaki neskončni množici grafov, obstajata dva, tako da je eden minor drugega.

Posledica 3.17. *Za poljubno grafovsko lastnost \mathcal{P} , zaprto za minorje, je množica Kuratowskega $\mathcal{K}_{\mathcal{P}}$ končna.*

V posebnem iz posledice 3.17 vidimo, da imamo izreke podobne izreku Kuratowskega ne samo za ravnino, ampak za poljubno ploskev Σ . Naj bo $\mathcal{P}(\Sigma)$ lastnost vložljivosti v Σ . Take grafe lahko karakteriziramo z množico prepovedanih minorjev $\mathcal{K}_{\mathcal{P}(\Sigma)}$, ki je končna. To opišemo v naslednji posledici:

Posledica 3.18. *Za vsako ploskev Σ obstaja le končno mnogo grafov H_1, \dots, H_n , tako da je graf vložljiv v Σ natanko tedaj, ko ne vsebuje nobenega izmed grafov H_1, \dots, H_n kot minor.*

Sicer to velja v principu, v praksi pa je zelo težko poiskati vse prepovedane minorje za lastnost vložljivosti v poljubno ploskev in take množice Kuratowskega niso poznane. Izjemi sta le sfera, katere prepovedana minorja sta K_5 in $K_{3,3}$, in projektivna ravnina, ki ima 35 prepovedanih minorjev. Računalniške raziskave so pokazale, da ima torus več tisoč prepovedanih minorjev, ni pa jasno, kako bi dobili celoten seznam.

Tem težavam navkljub sta Robertson in Seymour odkrila, da obstaja algoritem za graf na n vozliščih časovne zahtevnosti $O(n^3)$, ki nam za vsako fiksno ploskev Σ in graf G pove, ali je G možno vložiti v Σ .

Splošneje sta dokazala, da za vsak fiksni graf H obstaja algoritem s časovne zahtevnosti $O(n^3)$, ki za poljuben graf G , $|V(G)| = n$, določi, ali je H minor grafa G . Za več glej npr. [12].

4 Zaključek

V zaključni nalogi smo predstavili izrek Kuratowskega. ‘Lažje’ implikacije izreka (ki pravi, da če je graf G ravninski, potem ne vsebuje podgrafa, ki je subdivizija grafov K_5 ali $K_{3,3}$) ni bilo težko dokazati s pomočjo Eulerjeve formule. Drugo implikacijo izreka pa je bilo nekoliko težje dokazati. To smo storili na pet različnih načinov, v vsakem pa so bile uporabljene različne ideje. V Thomassenovih dokazih smo s pomočjo prekrivanja C -komponent v neravninskih grafih odkrili, kje se nahajajo podgrafi Kuratowskega. V Tverbergovem dokazu smo analizirali protiprimer izreku Kuratowskega, pa se je izkazalo, da tak protiprimer ne obstaja. S Klotzevim dokazom smo pokazali, da je podgrafe Kuratowskega v (neravninskih) grafih mogoče poiskati tudi algoritmično.

Najzanimivejša stvar, ki se je bralec lahko nauči iz izreka Kuratowskega, se mi zdi ta, da lahko vse ravninske grafe karakteriziramo s pomočjo zgolj dveh grafov. Torej karakteriziramo jih tako, da za poljuben graf ugotovimo, ali vsebuje kako strukturo (kak podgraf), ki je homeomorfna grafu K_5 ali grafu $K_{3,3}$. Če graf vsebuje tako strukturo, ga uvrstimo v skupino neravninskih grafov, sicer pa zaključimo, da je graf ravninski.

Bralca, ki bi ga zanimalo kaj več o izreku Kuratowskega, napotimo k branju Thomassenovega članka [14], v katerem je predstavljena izboljšava izreka Kuratowskega.

Naslednja stvar, ki jo v zaključni nalogi pokažemo, je Harary-Tutteova izpeljava ekvivalentne verzije izreka Kuratowskega. Izrek pravi, da če G vsebuje podgraf Kuratowskega, potem vsebuje tudi graf K_5 ali $K_{3,3}$ kot minor, in obratno.

Na ta način naredimo ‘prehod’ k zadnjemu poglavju, v katerem napravimo zgolj ‘površinski pregled’ relativno mladega področja teorije grafov, ki se ukvarja z grafovskimi razredi, zaprtimi za minorje. Najpomembnejši rezultat, ki ga tu predstavimo, je izrek o grafovskih minorjih, ki pravi, da v vsaki neskončni množici grafov obstajata dva taka, da je eden minor drugega. Ta izrek ima globok vpliv tudi na druge veje matematike in računalništva ter je eden globljih, ki jih matematika lahko ponudi. Radovednemu bralcu, ki bi ga utegnilo zanimati kaj več na to temo, predlagamo, da si kaj več o tem prebere v knjigah [2, 4].

5 Literatura

- [1] D. W. Barnette in B. Grünbaum, On Steinitz's theorem concerning convex 3-polytopes and on some properties of planar graphs. V: *The Many Facets of Graph Theory. Springer Lecture Notes 110 (1969) 27–40.* (Citirano na strani 18.)
- [2] L. W. Beineke in R. J. Wilson, urednika. *Topics in Topological Graph Theory*, volume 128 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. (Citirano na straneh 48 in 53.)
- [3] M. Čeč. *Povezanost grafov*. Zaključna projektna naloga. Univerza na Primorskem, Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije, Koper, Slovenija, 2010. Dosegljivo na http://www.famnit.upr.si/sl/izobrazevanje/zakljucna_dela/view/50. (Citirano na strani 18.)
- [4] R. Diestel. *Graph Theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Heidelberg, peta izdaja, 2016. <http://diestel-graph-theory.com/basic.html>. (Citirano na straneh 5, 7, 18, 48, 49, 50, 51 in 53.)
- [5] F. Harary in W. T. Tutte. Correction and addendum to: A dual form of Kuratowski's theorem. *Canad. Math. Bull.*, 8:373, 1965. (Citirano na strani 39.)
- [6] F. Harary in W. T. Tutte. A dual form of Kuratowski's theorem. *Canad. Math. Bull.*, 8:17–20, 1965. (Citirano na strani 39.)
- [7] M. C. Jordan Cours d'Analyse de l'École Polytechnique (*Gauthier-Villars, Paris, 1887*) vol. 3, 587–594. (Citirano na strani 6.)
- [8] M. Juvan in P. Potočnik. *Teorija grafov in kombinatorika*. DMFA, 2000. (Citirano na strani 3.)
- [9] W. Klotz. A constructive proof of Kuratowski's theorem. *Ars Combin.*, 28: 51–54, 1989. (Citirano na straneh 33 in 39.)
- [10] C. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15(1):271–283, 1930. (Citirano na strani 1.)
- [11] K. Menger, *Zur allgemeinen Kurventheorie*, *Fund. Math.* 10 (1927) 96–115. (Citirano na strani 19.)

- [12] B. Mohar. What is . . . a Graph Minor. *Notices Amer. Math. Soc.*, 53(3): 338–339, 2006. (*Citirano na straneh 48 in 52.*)
- [13] C. Thomassen. Kuratowski's theorem. *J. Graph Theory*, 5(3): 225–241, 1981. (*Citirano na straneh 3, 6, 7, 12, 14, 20, 21, 23 in 25.*)
- [14] C. Thomassen. A refinement of Kuratowski's theorem. *J. Combin. Theory Ser. B*, 37(3): 245–253, 1984. (*Citirano na strani 53.*)
- [15] H. Tverberg. A proof of Kuratowski's theorem. V: *Graph Theory in Memory of G. A. Dirac (Sandbjerg, 1985)*, volume 41 of *Ann. Discrete Math.*, pages 417–419. North-Holland, Amsterdam, 1989. (*Citirano na strani 30.*)
- [16] D. B. West. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 1996. (*Citirano na straneh 5, 8, 11 in 26.*)
- [17] R. J. Wilson in J. J. Watkins. *Uvod v teorijo grafov*. DMFA Slovenije, 1997. (*Citirano na straneh 8 in 9.*)