UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Magistrsko delo

Kromatično število in kromatični indeks grafa

(The chromatic number and the chromatic index of a graph)

Ime in priimek: Angelina Ćirković
Študijski program: Matematične znanosti, 2. stopnja
Mentor: izr. prof. dr. Martin Milanič

Koper, september 2017

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Angelina ĆIRKOVIĆ

Naslov magistrskega dela: Kromatično število in kromatični indeks grafa

Kraj: Koper

Leto: 2017

Število listov: 53 Število slik: 18

Število referenc: 38

Mentor: izr. prof. dr. Martin Milanič

UDK: 519.17(043.2)

Ključne besede: barvanje točk, barvanje povezav, kromatično število, kromatični indeks, popoln graf.

Math. Subj. Class. (2010): 05C15, 05C17, 05C70

Izvleček: V magistrskem delu so najprej opisani osnovni pojmi teorije grafov, nato pa se osredotočimo na najpomembnejša koncepta s področja kromatične teorije grafov, kromatično število in kromatični indeks grafa. Izraz "barvanje grafov" se namreč lahko nanaša na (vsaj) dve različni vrsti barvanj: barvanje točk in barvanje povezav, pri čemer je cilj določitev najmanjšega števila barv, potrebnega v takem barvanju točk oziroma povezav, da sta sosednji točki oziroma povezavi obarvani različno. V magistrskem delu so podane številne trditve, vezane na obravnavane teme, vključno z dokazi, in številni zgledi. Obravnavane teme med drugim zajemajo zgornje in spodnje meje za kromatično število in kromatični indeks grafa, lastnosti barvno kritičnih grafov, različne konstrukcije grafov brez trikotnikov s poljubno velikim kromatičnim številom, vključno z Erdősevim pristopom na osnovi verjetnostne metode, popolne grafe in Galvinov izrek o seznamskih povezavnih barvanjih dvodelnih grafov. V nekaterih trditvah in dokazih so uporabljeni tudi usmerjeni grafi.

Key words documentation

Name and SURNAME: Angelina ĆIRKOVIĆ

Title of the thesis: The chromatic number and the chromatic index of a graph

Place: Koper

Year: 2017

Number of pages: 53 Number of figures: 18

Number of references: 38

Mentor: Assoc. Prof. Martin Milanič, PhD

UDC: 519.17(043.2)

Keywords: vertex coloring, edge coloring, chromatic number, chromatic index, perfect graph.

Math. Subj. Class. (2010): 05C15, 05C17, 05C70

Abstract: In the master's thesis we first describe the basic concepts of graph theory and then focus on two fundamental concepts studied by chromatic graph theory, the chromatic number and the chromatic index of a graph. Namely, the term "graph colouring" can refer to (at least) two different types of colouring: vertex colouring and edge colouring, where the goal is to determine the smallest number of colours, either in a vertex colouring or in an edge colouring of the graph, considering that neighbouring vertices or adjacent edges have to be coloured differently. Numerous theorems and propositions will be given, with proofs, as well as various examples. Considered topics include, among others, upper and lower bounds for the chromatic number and the chromatic index of a graph, properties of colour-critical graphs, various constructions of triangle-free graphs of large chromatic number, including the approach due to Erdős based on the probabilistic method, perfect graphs, and Galvin's theorem on list edge colourings of bipartite graphs. In some of the propositions directed graphs are also used.

Kazalo vsebine

Kazalo slik

Zahvala

Zahvaljujem se mentorju izr. prof. dr. Martinu Milaniču, za vso strokovno pomoč, čas in trud, ki ga je vložil v času pisanja magistrskega dela.

Posebno se zahvaljujem staršem in sestri za neizmerno podporo v teku mojega študija.

Seznam kratic

idr.	in drugi
itd.	in tako dalje
oz.	oziroma
npr.	na primer
t.i.	tako imenovani
tj.	to je

1 Uvod

Predvsem zaradi znamenitega "problema štirih barv" iz leta 1852 se je področje barvanja grafov razvilo v eno najbolj priljubljenih podpodročij teorije grafov. Tako imenovana kromatična teorija grafov raziskuje povezave med klasičnimi koncepti teorije grafov in številnimi različicami barvanj grafov. Na tem področju je bilo narejenega že veliko.
Osrednji probem, ki ga študira kromatična teorija grafov, je določitev najmanjšega števila barv točkam grafa, tako da bodo sosednje točke imele različno barvo. Skozi leta so se razvile različne vrste barvanj grafov: poleg barvanja točk tudi seznamska barvanja in barvanja povezav. Pri točkovnem barvanju barvamo točke tako, da poljubni dve sosednji točki ne dobita enake barve. Pri seznamskem barvanju vsaki točki priredimo seznam razpoložljivih barv namesto univerzalnega seznama barv, ki so na voljo za vse točke. Pri barvanju povezav barvamo povezave grafa, tako da poljubni dve sosednji povezavi dobita različno barvo.

Magistrsko delo je teoretične narave. Najprej bomo opisali osnovne pojme iz teorije grafov, nato pa se bomo osredotočili na najpomembnejša koncepta s področja kromatične teorije grafov: kromatično število grafa in kromatični indeks grafa. Namen magistrskega dela je torej poglobiti se v analizo teoretičnih vsebin dveh vrst barvanj grafov, točkovnih in povezavnih.

Podan bo pregled temeljnih rezultatov s področij točkovnih in povezavnih barvanj grafov. Rešitve samostojno rešenih nalog iz knjige Bondyja in Murtyja [3] bomo prikazali v obliki trditev z dokazi. Poleg tega bomo predstavili še nekaj zgledov, ki se navezujejo na osnovne pojme obravnavanih tem.

Na začetku magistrske naloge bomo predstavili nekaj osnovnih definicij in pojmov s področja teorije grafov. Nato bomo nadaljevali s poglavjem o kromatičnem številu. Opisali bomo požrešno metodo barvanja grafov ter barvanje digrafov. Obravnavali bomo kritične grafe, grafe velike ožine in velikega kromatičega števila ter popolne grafe. Nato bomo nadaljevali s poglavjem o kromatičnem indeksu grafa. Nazadnje bomo opisali povezavno barvanje dvodelnih grafov, Vizingov izrek in zaključili s seznamskim barvanjem povezav.

Metode raziskovanja, ki smo jih uporabili pri pisanju magistrskega dela, so: analiza strokovne literature (vključno s sintezo rezultatov in poenotenjem oznak in strokovnih izrazov), deskriptivna metoda (opisovali smo ter razlagali s pomočjo uporabe strokovne literature), pri samostojnem reševanju nalog pa smo uporabili standardne metode dokazovanja v teoriji grafov, torej metodo indukcije, metodo dokazovanja s protislovjem, ekstremalnost.

Cilj magistrskega dela je, da po analizi literature o točkovnih in povezavnih barvanjih grafov prikažemo pregled izbranih, ključnih rezultatov s področja. Pri tem bomo pokazali poznavanje temeljnih konceptov in rezultatov iz teorije grafov, s posebnim poudarkom na kromatični teoriji grafov.

2 Osnovne definicije

Preden preidemo na glavno temo magistrske naloge, moramo najprej definirati nekaj osnovnih pojmov. Glavni vir za to poglavje so knjige [3, 36, 37].

Graf G je urejen par (V, E), sestavljen iz množice točk, $V = V(G)$ in množice povezav, $E = E(G)$. Povezave so definirane kot (neurejeni) pari točk. Povezavo $e = \{u, v\}$ lahko skrajšano zapišemo tudi kot uv, kjer u in v imenujemo *krajišči povezave* e. Rečemo, da sta točki $u, v \in V(G)$ grafa G *sosednji*, če je (neurejen) par $\{u, v\}$ element množice povezav $E(G)$. Število povezav, ki imajo točko v za krajišče, imenujemo *stopnja točke* v in označimo z $d_G(v)$. *Največjo stopnjo točke grafa* G označimo z $\Delta(G)$, *najmanjšo* pa z $\delta(G)$. Množico vseh sosedov točke v označimo z $N(v)$ in jo imenujemo *soseščina točk*e v. Množico vseh povezav, incidenčnih s točko v, pa označimo z $\partial(v)$. *Zanka* je povezava, ki ima obe krajišči v isti točki. *Večkratne povezave* so take povezave (dve ali več), ki povezujejo isti par točk. *Multigrafi* so grafi, kjer so dovoljene tudi večkratne povezave in zanke. V multigrafu G označimo z $\mu(G)$ *večkratnost povezav*, tj. največje število večkratnih povezav med poljubnima dvema točkama multigrafa. V literaturi so "grafi" pogosto imenovani "enostavni grafi", "multigrafi" pa kot "grafi". V magistrskem delu so obravnavani le grafi, razen poglavja 5, kjer so obravnavani multigrafi brez zank. Graf $G = (V, E)$ tako lahko označuje tudi multigraf brez zank, pri tem je E multimnožica, posamezne povezave se lahko pojavijo več kot enkrat.

Graf $H = (V(H), E(H))$ je *podgraf* grafa $G = (V(G), E(G))$ natanko tedaj, ko je $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$. Graf H je *induciran podgraf* grafa G, če ima na svojih točkah vse iste povezave kot graf G. Rečemo, da sta grafa G in H *izomorfna*, če obstaja taka bijektivna preslikava $f : V(G) \to V(H)$, da velja: $xy \in E(G)$, če in samo če $f(x)f(y) \in E(H)$.

Naj bosta $x_0, x_n \in V(G)$ točki grafa G. Potem imenujemo zaporedje povezav $x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{n-1}x_n$ grafa G *sprehod* med točkama x_0 in x_n. Pot P v grafu je sprehod, v katerem so vse točke različne. Poleg tega dopuščamo tudi *trivialno pot*, tj. pot, ki sestoji iz ene same točke. *Dolžina poti* je število povezav v poti. Dolžino najkrajše poti med točkama u in v imenujemo *razdalja med točkama* in jo označimo z $d_G(u, v)$ ali $d(u, v)$, če je razvidno, za kateri graf gre. *Sklenjen sprehod* je sprehod, v katerem sta prva in zadnja točka enaki. *Cikel* v grafu pa je sklenjen sprehod, v katerem so vse točke, razen prve in zadnje, različne. Graf G je *povezan*, če za poljubni dve točki iz grafa G obstaja pot iz ene točke v drugo, sicer je nepovezan. *Komponente grafa G* so njegovi maksimalni povezani podgrafi.

Komplement grafa G je graf $\overline{G}$, ki ga dobimo iz G tako, da ohranimo točke $V(\overline{G}) = V(G)$, dve različni točki pa sta povezani v grafu $\overline{G}$ natanko tedaj, ko nista povezani v grafu G.

Unija grafov G_1 in G_2 je graf G ($G = G_1 \cup G_2$), za katerega velja $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ in $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$.

Ožina grafa G je najmanjše število točk v ciklu v grafu G, oz.velikost najmanjšega cikla.

Prirejanje M je množica povezav grafa G, ki nimajo skupnih krajišč oz. noben par povezav množice M nima skupnega krajišča. Prirejanje M je *popolno*, če je vsaka točka grafa G krajišče povezave množice M.

K_n je *poln graf* na n točkah, tj. graf, v katerem je vsak par različnih točk povezan z natanko eno povezavo. Število povezav v polnem grafu K_n je enako $\binom{n}{2}$.

P_n je *pot* na n točkah, tj. graf, ki ima množico točk $V(P_n) = \{v_i; i = 1, \ldots, n\}$ in množico povezav $E(P_n) = \{v_i v_{i+1};\ \ i = 1, \ldots, n-1\}$.

Z oznako C_n označimo *cikel* na n točkah, tj. graf, ki ima množico točk $V(C_n) = V(P_n)$ in množico povezav $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_1 v_n\}$. *Dolžina cikla* je enaka številu točk v ciklu. Če je število točk v ciklu liho (oz. sodo), bomo govorili o lihih (oz. sodih) ciklih. Cikel, ki gre skozi vse točke grafa, imenujemo *Hamiltonov cikel*. Pot, ki gre skozi vse točke grafa, imenujemo *Hamiltonova pot*. Graf brez ciklov se imenuje *gozd*. Če je gozd povezan graf, mu bomo rekli *drevo*.

Graf G je *dvodelen*, če lahko njegovo množico točk razdelimo na dve podmnožici X in Y, tako, da ima vsaka povezava eno krajišče v X in eno v Y. Dvodelen graf označimo z $G[X, Y]$.

Poln dvodelen graf $K_{m,n}$ je graf definiran na m točkah iz ene množice in n točkah iz druge množice, pri čemer velja, da so točke iz prve povezane s točkami iz druge množice. *Kolo* imenujemo graf W_n, ki je spoj cikla C_n in točke brez povezav, K_1, torej $W_n = C_n \vee K_1$. Graf W_n ima $n+1$ točk.

Rečemo, da je graf G n-delen, kjer je $n \geq 2$, če lahko množico točk $V(G)$ razdelimo na n disjunktnih podmnožic $V_1, V_2, \ldots, V_n$, kjer je $V(G) = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, tako da velja: če je $uv \in E(G)$ in $u \in V_i$, $v \in V_j$, potem je $i \neq j$. *Particija* množice X je družina paroma disjunktnih (običajno nepraznih) množic, katerih unija je X.

Neodvisna množica točk grafa G je taka množica $S \subseteq G$, za katero velja, da noben par točk iz množice S ni soseden v grafu G. *Neodvisnostno število* grafa G, $\alpha(G)$, je velikost največje neodvisne množice grafa G. *Klika* v grafu G je množica paroma povezanih točk. Število točk v največji kliki označimo z $\omega(G)$ in ga imenujemo *klično število* grafa G. *Točkoven prerez* grafa G je taka množica točk, da z odstranitvijo teh točk postane graf nepovezan. *Prerezna klika* je točkoven prerez, ki je tudi klika. *Prerezna točka* je prerezna klika z eno samo točko. Graf je *neločljiv*, če je povezan in nima prereznih točk.

Za nenegativno število k pravimo, da je graf G k*-regularen*, če je $d_G(u) = k$ za vse $u \in V(G)$. *Regularen graf* je graf, ki je k-regularen za neko število k.

Kubičen graf je graf, kjer imajo vse točke stopnjo 3.

Graf je *sebi-komplementaren*, če je izomorfen svojemu komplementu.

Naj bo M prirejanje grafa G. M*-alternirajoča pot* G je taka pot, kjer se povezave alternirajo (izmenjujejo) v M in $E \setminus M$. Če niti začetna niti končna točka nista pokriti z M, imenujemo pot M*-naraščajoča pot*.

Naj bo $G = (V, E)$ graf. Njegov *presečni graf* je tak graf, za katerega velja, da je E množica točk, dve točki v E pa sta sosednji, če je njun presek neprazen; z drugimi besedami, dve povezavi sta sosednji, če imata skupno krajišče. Tak graf imenujemo tudi *povezavni graf* grafa G in ga označimo z $L(G)$.

Usmerjen graf D (ali digraf) je definiran kot urejen par (V, A), sestavljen iz množice točk $V = V(G)$ in množice (usmerjenih) povezav $A = A(D)$. Velja naslednje: če za točki $u, v \in V(D)$ urejen par $(u, v) \in A(D)$, potem rečemo, da je povezava uv usmerjena od točke u k točki v (oz. da gre iz točke u v točko v). Če v digrafu D zamenjamo vse usmerjene povezave z ustreznimi neusmerjenimi povezavami, dobimo graf, ki ga imenujemo *temeljni graf* digrafa D. Zaporedje k usmerjenih povezav iz množice usmerjenih povezav $A(D)$ oblike $v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}v_k$ imenujemo *usmerjen sprehod* dolžine k v digrafu D oziroma sprehod od točke v_0 do točke v_k. Če so vse usmerjene povezave in vse točke sprehoda različne, sprehod imenujemo *usmerjena pot* od točke v_0 do točke v_k. Rečemo, da je digraf D *povezan*, če je njegov temeljni graf povezan, sicer pa je *nepovezan*. Če v digrafu D obstaja usmerjena pot med poljubnim urejenim parom točk, rečemo, da je digraf D *krepko povezan*.

Usmeritev neusmerjenega grafa je digraf, ki ga dobimo z dodelitvijo smeri vsaki povezavi. Na ta način lahko poljuben neusmerjen graf pretvorimo v usmerjen graf. *Turnir* je poljubna usmeritev polnega grafa, t.j. digraf, da za poljubni različni točki u, v velja, da je natanko ena izmed uv in vu usmerjena povezava. Če za poljubne točke u, v in w velja, da je uw usmerjena povezava, kadarkoli sta tako uv kot vw usmerjeni povezavi, rečemo, da je turnir *tranzitiven*.

V usmerjenem grafu je treba ločiti med *izhodno stopnjo* točke x (število povezav, ki se pričnejo v točki x), ki jo označujemo z $d^+(x)$ in njeno *vhodno stopnjo* (število povezav, ki se končajo v točki x), ki jo označujemo z $d^-(x)$. *Izvirna točka* (izvor) je točka z vhodno stopnjo 0 ($d^-(v) = 0$), *ponor* pa je točka z izhodno stopnjo 0 ($d^+(v) = 0$). Največjo vhodno stopnjo označimo z Δ^-, največjo izhodno stopnjo pa z Δ^+. *Jedro* digrafa D je taka neodvisna množica S, da ima vsaka točka digrafa $D - S$

povezavo do neke točke v množici S.

Dirichletov princip pravi, če n predmetov razporedimo v r škatel, pri čemer je $n > r$, potem vsaj ena od škatel vsebuje več kot en predmet (glej npr. [12]).

Lema 2.1 (Lema o rokovanju)**.** *Vsota stopenj vseh točk poljubnega multigrafa brez zank je enaka dvakratniku števila vseh povezav v multigrafu.*

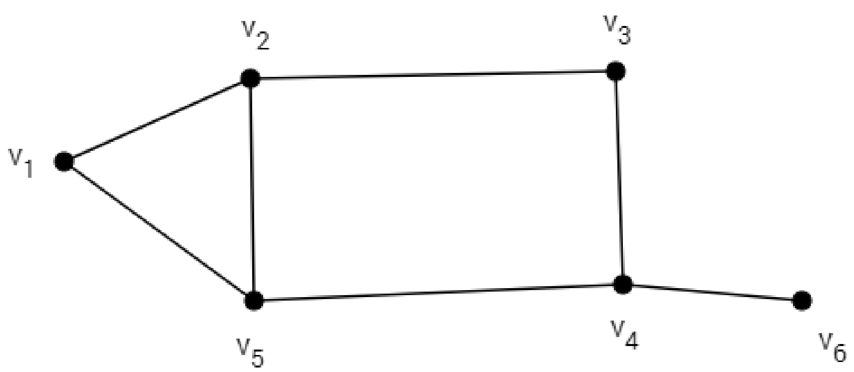
Učinkovitost algoritma oz. njegovo časovno zahtevnost lahko izrazimo s številom korakov, ki jih algoritem potrebuje za reševanje problema. Če za odločitveni problem obstaja polinomski algoritem, ki za dano rešitev preveri, ali je rešitev ustrezna, se odločitveni problem nahaja v razredu *NP*. V razredu *NP* obstaja posebna podmnožica problemov, *NP*-polni problemi. Za *NP*-polne probleme velja, da če bi obstajal polinomski algoritem za reševanje enega od njih, potem bi lahko v polinomskem času rešili katerikoli problem iz množice *NP*.

Preden preidemo na pojem barvanja grafov, si oglejmo nekaj zgledov, vezanih na nekatere zgoraj definirane pojme.

Zgledi

1. Naj bo graf $G = (V, E)$ definiran na množici točk $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ z množico povezav $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}\}$ (glej sliko 1).

   Analizirajmo soseščino točk, največjo stopnjo točke in najmanjšo stopnjo točke.



Slika 1: Graf na šestih točkah.

- **Soseščina točk**

  $N(v_1) = \{v_2, v_5\}$ $N(v_2) = \{v_1, v_3, v_5\}$ $N(v_3) = \{v_2, v_4\}$
  $N(v_4) = \{v_3, v_5, v_6\}$ $N(v_5) = \{v_1, v_2, v_4\}$ $N(v_6) = \{v_4\}$

- **Največja stopnja točke**

  Točke največje stopnje so v_2, v_4 in v_5.

  $\Delta(G) = 3$.

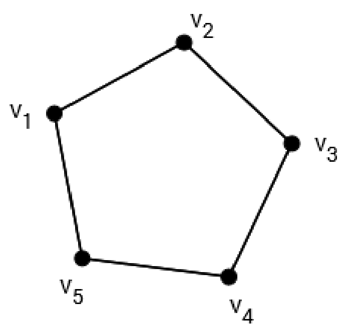
- **Najmanjša stopnja točke**

  Točka v_6 ima najmanjšo stopnjo.

  $d_G(v_6) = 1$.

2. Naj bo graf G definiran na množici točk $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ z množico povezav $E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_1\}\}$. Očitno je graf G cikel C_5.

   Naj bo podgraf H definiran na množici točk $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ z množico povezav $E(H) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$. Opazimo, da je H pot P_4.



Slika 2: Cikel na petih točkah, C_5.

Slika 3: Pot na štirih točkah, P_4.

Podgraf H je induciran podgraf grafa G, ki ga dobimo z odstranitvijo ene točke v grafu G.

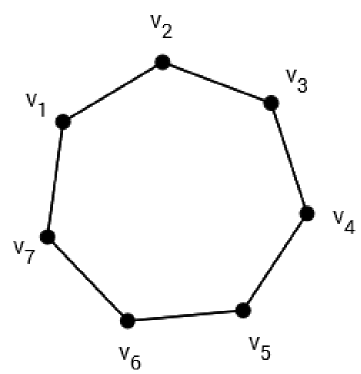
3. Oglejmo si zgleda za neodvisnostno število in klično število dveh grafov, in sicer ciklov, na sedmih in osmih točkah.

   (a) Cikel na sedmih točkah, C_7, ima neodvisnostno število enako 3, saj je velikost največje neodvisne množice enaka 3. Njegovo klično število pa je enako 2, saj je velikost največje klike enaka 2.
   S simboli zapisano: $\alpha(C_7) = 3$ in $\omega(C_7) = 2$.

   Klike:

   - klike velikosti 0: $\{\}$ (prazna množica)
   - klike velikosti 1: $\{v_1\}, \ldots, \{v_7\}$;
   - klike velikosti 2: $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_7, v_1\}$.

   Največje neodvisne množice: $\{v_1, v_3, v_5\}$, $\{v_2, v_4, v_6\}$, $\{v_3, v_5, v_7\}$, $\{v_4, v_6, v_1\}$, $\{v_5, v_7, v_2\}$, $\{v_6, v_1, v_3\}$, $\{v_7, v_2, v_4\}$.



Slika 4: Cikel na sedmih točkah, C_7.

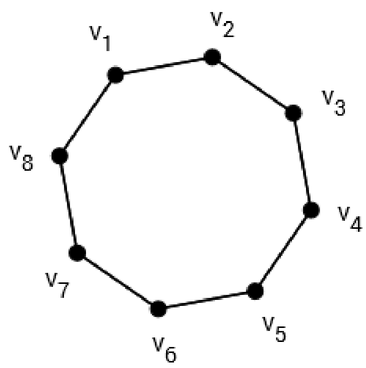
(b) Cikel na osmih točkah, C_8, ima neodvisnostno število enako 4, saj je velikost največje neodvisne množice enaka 4. Njegovo klično število pa je enako 2, saj je velikost največje klike enaka 2.

S simboli zapisano: $\alpha(C_8) = 4$ in $\omega(C_8) = 2$.

Klike:

- klike velikosti 0: $\{\}$ (prazna množica)
- klike velikosti 1: $\{v_1\}, \ldots, \{v_8\}$;
- klike velikosti 2: $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_8, v_1\}$.

Največji neodvisni množici sta dve: $\{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ in $\{v_2, v_4, v_6, v_8\}$.



Slika 5: Cikel na osmih točkah, C_8.

3 Kromatično število grafa

V tem poglavju bomo obravnavali koncept barvanja točk grafa. Glavni viri za to poglavje so knjige [3, 33, 36, 37].

3.1 Osnovne definicije in zgledi

Naj bo $G = (V, E)$ graf in $k \in \mathbb{N}$, kjer $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Rečemo, da je k-*barvanje* grafa G preslikava $c : V(G) \to S$, kjer je S množica k barv, $\{1, 2, \ldots, k\}$. k-barvanje je dodelitev k barv točkam grafa G. Barvanje c je *pravo*, če dvema sosednjima točkama ni dodeljena ista barva. Po drugi strani lahko na k-barvanje gledamo tudi kot na particijo $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ množice V, kjer V_i označuje (morda prazno) množico točk, katerim je dodeljena barva i. Množice V_i imenujemo barvni razredi. Pravo k-barvanje je torej k-barvanje, v katerem je vsak razred neodvisna množica.

V tem poglavju se bomo osredotočili samo na prava barvanja. V nadaljevanju bomo uporabili namesto izraza "pravo barvanje" izraz "barvanje" in namesto izraza "pravo k-barvanje" izraz "k-barvanje". Graf G je k-obarvljiv, če ima k-barvanje. Graf je 1-obarvljiv natanko takrat ko je brez povezav. 2-obarvljivi grafi pa so natanko dvodelni grafi.

Najmanjše število k, za katerega je graf G k-obarvljiv, imenujemo *kromatično število* grafa G in ga označimo s $\chi(G)$. Če je $\chi(G) = k$, je graf G k-*kromatičen*. Pravo k-barvanje k-kromatičnega grafa je *optimalno barvanje*. Na primer, trikotnik (cikel na treh točkah, C_3) in vsi lihi cikli so 3-obarvljivi in niso 2-obarvljivi, ker niso dvodelni. Njihovo kromatično število je enako 3, torej so 3-kromatični. Poln graf K_n ima kromatično število n, saj ne obstajata dve točki, ki bi lahko imeli enako barvo. Splošneje, vsak graf G zadošča neenakosti:

$$\chi(G) \geqslant \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}, \tag{3.1}$$

saj je vsak razred barv neodvisna množica in ima torej največ $\alpha(G)$ točk.

Problem barvanja grafov se pojavi v številnih praktičnih problemih, v katerih je potrebna razdelitev množice objektov v skupine, tako da so člani vsake skupine med seboj usklajeni po nekem kriteriju. Podali bomo dva tovrstna primera [3].

Primer 3.1. Razporejanje izpitov. Študenti neke univerze imajo v študijskem letu izpite pri vseh predmetih, ki jih poslušajo. Izpiti iz različnih predmetov ne morejo biti istočasno, če so pri teh predmetih skupine istih študentov. Kako lahko razporedimo izpite v čim manj možnih vzporednih sej? Da bi uskladili datume oz.ustvarili takšen razpored, konstruiramo graf G, katerega množica točk je množica vseh predmetov; povezavo dodamo, če imata dva predmeta skupnega študenta (saj v tem primeru izpita ne moreta potekati sočasno). Neodvisne množice grafa G tedaj predstavljajo skupine predmetov brez konfliktov. Tako je iskano najmanjše število vzporednih sej ravno kromatično število grafa G.

Primer 3.2. Skladiščenje kemikalij. Podjetje proizvaja n kemikalij, ki jih označimo s $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Nekateri pari teh kemikalij so nezdružljivi in povzročijo eksplozijo, če kemikaliji v paru prideta v stik druga z drugo. Kot previdnostni ukrep želi podjetje razdeliti svoje skladišče v oddelke in shraniti nezdružljive (nekompatibilne) kemikalije v različne oddelke. Kolikšno je najmanjše število oddelkov, na katere bo skladišče razdeljeno? Dobimo graf G na množici točk $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, kjer sta točki v_i in v_j povezani, če in samo če sta kemikaliji C_i in C_j nekompatibilni. Najmanjše število oddelkov, na katere bo skladišče razdeljeno, je enako kromatičnemu številu grafa G.

Če je H podgraf grafa G in je graf G k-obarvljiv, potem je tak tudi H. Velja $\chi(H) \leq \chi(G)$. Če graf G vsebuje kopijo polnega grafa K_r, potem je $\chi(G) \geq r$. Sklepamo, da za vsak graf G velja naslednja spodnja meja za kromatično število:

$$\chi(G) \geq \omega(G), \tag{3.2}$$

saj morajo biti točke klike obarvane z različnimi barvami.

Lihi cikli dolžine pet ali več za katere velja, da je $\omega(G) = 2$ in $\chi(G) = 3$ nam dajo videti, da meja (3.2) za kromatično število ni vselej dosežena z enakostjo. Ta meja je lahko celo poljubno slaba. Kot bo vidno v nadaljevanju, obstajajo grafi s poljubno veliko ožino in kromatičnim številom.

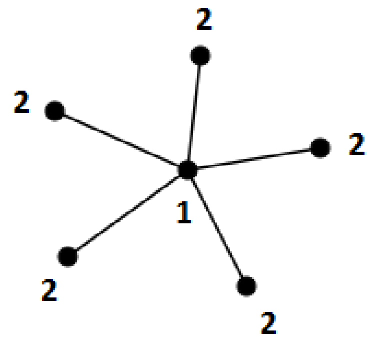
Oglejmo si nekaj zgledov za kromatično število grafa.

Zgled 3.3.

Naj bo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ množica barv, ki jih bomo uporabili za barvanje grafov. Podano bo kromatično število za naslednje grafe:

- **Poln dvodelen graf z** $1+5$ **točkami**: $G = K_{1,5}$.

  Najmanjše število barv, potrebnih za barvanje tega grafa, je enako 2.

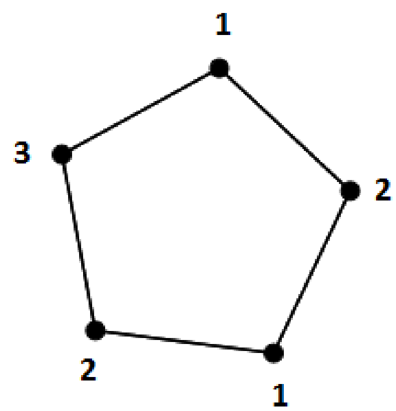


Slika 6: Barvanje točk polnega dvodelnega grafa z $1+5$ točkami, $K_{1,5}$.

Opazimo, da graf vsebuje kliko velikosti 2, od koder po (3.2) sledi $\chi(K_{1,5}) \geq 2$.
Barvanje grafa z 2 barvama je podano na sliki 6; od tod sledi $\chi(K_{1,5}) \leq 2$.

- **Cikel na petih točkah**: $G = C_5$

  Najmanjše število barv, potrebnih za barvanje tega grafa, je enako 3.

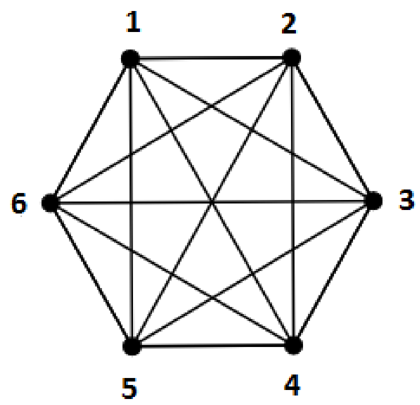


Slika 7: Barvanje točk cikla na petih točkah, C_5.

Ker cikel C_5 ni dvodelen, je $\chi(C_5) \geq 3$.
Barvanje grafa s 3 barvami je podano na sliki 7; od tod sledi $\chi(C_5) \leq 3$.

- **Poln graf na šestih točkah**: $G = K_6$

  Najmanjše število barv, potrebnih za barvanje tega grafa, je enako 6.

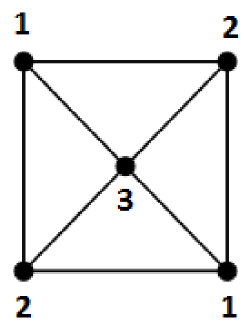


Slika 8: Barvanje točk polnega grafa na šestih točkah, K_6.

Opazimo, da graf vsebuje kliko velikosti 6, od koder po (3.2) sledi $\chi(K_6) \geq 6$. Barvanje grafa s 6 barvami je podano na sliki 8; od tod sledi $\chi(K_6) \leq 6$.

- **Graf - kolo na petih točkah**: $G = W_4$

  Najmanjše število barv, potrebnih za barvanje tega grafa, je enako 3.



Slika 9: Barvanje točk grafa (kolesa) na petih točkah, W_4.

Opazimo, da graf vsebuje kliko velikosti 3, od koder po (3.2) sledi $\chi(W_4) \geq 3$. Barvanje grafa s 3 barvami je podano na sliki 9; od tod sledi $\chi(W_4) \leq 3$.

3.2 Osnovni rezultati o kromatičnem številu grafa

Ker je graf 2-obarvljiv, če in samo če je dvodelen, obstaja algoritem polinomske časovne zahtevnosti za odločanje, ali je dani graf 2-obarvljiv. Nasprotno pa je že problem 3-obarvljivosti NP-poln. Iz tega sledi, da je problem iskanja kromatičnega števila grafa NP-težek. Pri praktičnih primerih moramo biti zato zadovoljni z učinkoviti hevrističnimi postopki, ki izračunajo razmeroma dobre rešitve. Najbolj naraven pristop je barvanje točk s požrešno metodo, kot sledi v nadaljevanju.

Hevristika: Požrešno (hevristično) barvanje
Vhodni podatki: graf G
Izhodni podatki: barvanje grafa G
1. Razvrsti točke grafa G v linearno zaporedje: $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
2. Pobarvaj točke eno za drugo v tem vrstnem redu in dodeli točki v_i najmanjše naravno število, ki še ni dodeljeno eni od sosednjih točk, ki so že obarvane.

Treba je poudariti, da je število barv, ki je uporabljeno pri tem požrešnem hevrističnem barvanju, zelo odvisno od vrstnega reda, ki smo ga izbrali za točke. Na primer, če je graf $K_{n,n}$ poln dvodelen graf z množicama $X := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ in $Y := \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, potem bi dvodelen graf $G[X, Y]$, ki ga dobimo iz tega grafa z brisanjem popolnega prirejanja $\{x_i y_i : 1 \leq i \leq n\}$ potreboval n barv, če bi bile točke razporejene v vrstnem redu $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$. Po drugi strani pa bi bili potrebni le dve barvi, če bi bile točke razporejene v vrstnem redu $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$; dejansko vedno obstaja vrstni red, ki določa optimalno barvanje. Problem je, da je težko vedeti vnaprej, katera zaporedja bodo vodila do optimalnih barvanj.

Kljub temu pa število barv, ki je uporabljeno pri požrešnem hevrističnem barvanju, ni nikoli večje od $\Delta(G) + 1$, ne glede na vrstni red, po katerem so razporejene točke. Kadar je točka v ravno pred barvanjem, število njenih sosednjih točk, ki so že obarvane, ni večje od njene stopnje $d_G(v)$, in to ni večje od največje stopnje, $\Delta(G)$. Tako bo ena izmed barv $1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1$ vsekakor na voljo za točko v.

Sklepamo torej, da za vsak graf G velja naslednja zgornja meja za kromatično število:

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1. \tag{3.3}$$

Vsak k-kromatičen graf ima torej točko stopnje vsaj $k - 1$. Velja še več: vsak k-kromatičen graf ima vsaj k točk stopnje vsaj $k - 1$.

Trditev 3.4 (Bondy in Murty [3], naloga 14.1.3a)**.** *Naj bo G k-kromatičen graf in naj bo c poljubno k-barvanje grafa G. Tedaj za vsako barvo i obstaja točka barve i, ki je sosednja točkam vseh drugih barv.*

Dokaz. Dokazujemo s protislovjem. Naj bo (G, c) protiprimer trditve, torej, c je k-barvanje k-kromatičnega grafa G, za katerega ni res, da za vsako barvo i obstaja točka barve i, ki je sosednja točkam vseh drugih barv. Obstaja torej taka barva i, da za vsako točko v barve i obstaja taka barva $j(v) \neq i$, da nobena točka sosednja s točko v ni barve j. Naj bo $c' : V(G) \to \{1, \ldots, k\} \setminus \{i\}$ preslikava, definirana s predpisom

$$c'(v) = \begin{cases} c(v); & c(v) \neq i \\ j(v); & \text{sicer} \end{cases}$$

Opazimo, da je $c'(v)$ barvanje grafa G s $k-1$ barvami, kar je protislovje z dejstvom, da je graf G k-kromatičen. □

Posledica 3.5 (Bondy in Murty [3], naloga 14.1.3b)**.** *Vsak k-kromatičen graf ima vsaj k točk stopnje vsaj $k-1$.*

Dokaz. Po trditvi 3.4 vemo, da za poljubno k-barvanje k-kromatičnega grafa G za vsako barvo i obstaja točka barve i, ki je sosednja točkam vseh drugih barv. Vzemimo vsako tako točko. Skupno imamo k takih točk in vsaka od njih ima stopnjo vsaj $k-1$. □

Meja (3.3) za kromatično število ne poda nobene informacije o tem, koliko točk vsake barve obstaja v $(\Delta(G)+1)$–barvanjih. Hajnal in Szemerédi [19] sta podkrepila neenakost $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$ in sta pokazala, da vsak graf G dopušča uravnoteženo $(\Delta(G)+1)$ – barvanje, tj., barvanje, v katerem se velikosti barvnih razredov razlikujejo za kvečjemu ena.

Brooks [4] je pokazal, da v primeru povezanih grafov neenakost $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$ velja z enakostjo samo za polne grafe in lihe cikle.

Zgled 3.6. Oglejmo si zgled za polne grafe in lihe cikle.

1. Za polne grafe velja: $\chi(K_n) = n$ in $\Delta(K_n) = n-1$. Torej $\chi(K_n) > \Delta(K_n)$.

2. Za lihe cikle velja: $\chi(C_{2n+1}) = 3$ in $\Delta(C_{2n+1}) = 2$. Torej $\chi(C_{2n+1}) > \Delta(C_{2n+1})$.

Naslednjo lemo bomo uporabili v dokazu Brooksovega izreka (izreka 3.8).

Lema 3.7 (Chartrand in Kronk [6])**.** *Če je vsako DFS drevo grafa G Hamiltonova pot s korenom v enem od njenih krajišč, potem je graf G cikel, poln graf ali poln dvodelen graf $K_{n,n}$.*

Izrek 3.8 (Brooksov izrek [4])**.** *Naj bo G povezan graf, ki ni ne lih cikel ne poln graf. Potem je $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Dokaz, povzet po Bondyju in Murtyju [3]. Predpostavimo najprej, da graf G ni regularen. Naj bo x točka stopnje δ in T vpeto drevo grafa G, ki ima koren v točki x. Pobarvamo točke z barvami $1, 2, \ldots, \Delta$, v skladu z metodo požrešnega hevrističnega barvanja, tako da na vsakem koraku izberemo list poddrevesa T, ki ga inducirajo točke, ki še niso obarvane, in dodelimo tem listom najmanjšo možno barvo, dokler ne pridemo do konca, do korena x drevesa T. Ko je točka $v \neq x$ tik pred barvanjem, je sosednja v T vsaj eni nepobarvani točki, in je torej sosednja v grafu G kvečjemu $d_G(v)-1 \leq \Delta-1$ obarvanim točkam. Dodeljena ji je torej ena od barv $1, 2, \ldots, \Delta$. Na koncu, ko je točka x pobarvana, ji je tudi dodeljena ena od barv $1, 2, \ldots, \Delta$, ker $d_G(x) = \delta \leq \Delta - 1$. Požrešno hevristično barvanje tako proizvede Δ-barvanje grafa G.

Predpostavimo sedaj, da je G regularen graf. Če ima graf G prererezno točko x, potem je $G = G_1 \cup G_2$, kjer sta G_1 in G_2 povezana in $V(G_1) \cap V(G_2) = \{x\}$. Ker je stopnja točke x v grafu G_i manjša od $\Delta(G)$, nobeden od podgrafov G_i ni regularen, torej $\chi(G_i) \leq \Delta(G_i) = \Delta(G)$, $i = 1, 2$, in $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\} \leq \Delta(G)$. Lahko torej privzamemo, da je graf G neločljiv. Če je vsako *DFS* drevo grafa G Hamiltonova pot s korenom v enem od njenih krajišč, potem iz leme 3.7 in predpostavke izreka zaključimo, da je G bodisi sod cikel bodisi poln dvodelen graf, sledi torej $\chi(G) = 2 \leq \Delta(G)$. Predpostavimo sedaj, da je T DFS drevo grafa G, ki ni pot. Naj bo x točka drevesa T z vsaj dvema "otrokoma", y in z. Ker je G neločljiv, sta tako $G-y$ kot $G-z$ povezana. Tako sta y in z bodisi lista drevesa T ali pa imata ustrezne potomce, ki so povezani s predniki točke x. Iz tega sledi, da je $G' := G - \{y, z\}$ povezan. Oglejmo si DFS drevo T' s korenom x v grafu G'. Z barvanjem točk y in z z barvo 1 in točk drevesa T' z upoštevanjem požrešnega hevrističnega barvanja, kot zgoraj, ki se konča s korenom x, dobimo Δ-barvanje grafa G. $\square$

Trditev 3.9 (S.A. Burr [5]; Bondy in Murty [3], naloga 14.1.4)**.** *Naj bo graf $G = G_1 \cup G_2$. Tedaj velja $\chi(G) \leq k_1 k_2$ natanko tedaj, ko je $\chi(G_i) \leq k_i$, $i = 1, 2$.*

Dokaz. Naj bo $C = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq i \leq k_1, 1 \leq j \leq k_2\}$ množica barv. Očitno je $|C| = k_1 k_2$. Naj bo $c : V(G) \to C$ barvanje grafa G. Naj bo G_i graf, kjer za $i = 1, 2$ velja: $V(G_i) = V(G)$ in $E(G_i) = \{uv \in E(G) : (c(u))_i \neq (c(v))_i\}$.

Tedaj je:

(a) $G = G_1 \cup G_2$, saj za vsako povezavo $uv \in E(G)$ obstaja $i \in \{1, 2\}$, da velja $uv \in E(G_i)$.

Ker je c pravo barvanje grafa G, namreč velja $c(u) \neq c(v)$. Tedaj velja $(c(u))_i \neq (c(v))_i$ za nek $i \in \{1, 2\}$, kar je ekvivalentno pogoju, da je $uv \in E(G_i)$ za nek $i \in \{1, 2\}$.

(b) $\chi(G_i) \leq k_i$ za $i = 1, 2$: za vsak $j \in \{1, \ldots, k_i\}$ je množica $\{u \in V(G) : (c(u))_i = j\}$ neodvisna v grafu G_i. Sledi $\chi(G_i) \leq k_i$.

Pokažimo še implikacijo v drugo smer. Naj bo $\{I_1^i, \ldots, I_{k_i}^i\}$ particija množice $V(G_i)$ na k_i neodvisnih množic v G_i, $i = 1, 2$. Za vse $(i, j) \in \{1, \ldots, k_1\} \times \{1, \ldots, k_2\}$ naj bo $I_{ij} = I_i^1 \cap I_j^2$.

Tedaj je $\{I_{ij} : i = 1, \ldots, k_1, j = 1, \ldots, k_2\}$ particija množice $V(G)$ na $k_1 k_2$ neodvisnih množic grafa G:

(i) Vsaka točka $v \in V(G)$ se pojavi v natanko eni od množic I_i^1 in v natanko eni od množic I_j^2, torej se pojavi tudi v natanko eni od množic $I_i^1 \cap I_j^2 = I_{ij}$.

(ii) Vsaka od množic I_{ij} je neodvisna v grafu G.

Denimo, da množica I_{ij} vsebuje par povezanih točk, recimo $uv \in E(G)$. Potem bi imeli $uv \in E(G_k)$ za nek $k \in \{1, 2\}$ (ker je $G = G_1 \cup G_2$). Brez škode za splošnost lahko predpostavimo $k = 1$. Opazimo, da je $\{u, v\} \subseteq I_i^1$, kar pa je v protislovju z dejstvom, da je I_i^1 neodvisna množica v G_1.

Dokazali smo torej, da obstaja particija množice točk grafa G na $k_1 k_2$ neodvisnih množic. Graf G je torej $k_1 k_2$-obarvljiv, kar smo želeli dokazati. □

Graf je k-degeneriran, če obstaja taka linearna razvrstitev množice točk, $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, da velja: za vsak $i \in \{1, \ldots, n\}$ je $d_{G_i}(v_i) \leq k$, kjer je $G_i = G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$ [30].

Trditev 3.10 (Bondy in Murty [3], naloga 14.1.5a)**.** *Graf G je k-degeneriran, če in samo če ima vsak podgraf točko stopnje največ k.*

Dokaz. Naj bo G k-degeneriran graf. Dokazujemo s protislovjem. Predpostavimo, da obstaja podgraf H, za katerega velja, da nima točke stopnje največ k. Ker je G k-degeneriran graf, obstaja taka razvrstitev točk od v_1 do v_n, da je za vsak $i \in \{1, \ldots, n\}$, stopnja točke v_i v grafu G_i omejena z $d_{G_i}(v_i) \leq k$, kjer je $G_i = G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$.

Naj bo $j = \max\{i : 1 \leq i \leq n, v_i \in V(H)\}$. Definicija indeksa j implicira, da je $H \subseteq G_j$, kar nadalje implicira, da je točka v_j točka podgrafa H stopnje največ k. Dobimo torej: $d_H(v_j) \leq d_{G_j}(v_j) \leq k$, kar pa ni možno, saj je v protislovju s predpostavko.

Pokažimo še implikacijo v drugo smer. Dokazujemo z indukcijo po $n = |V(G)|$. Za $n = 1$ je trditev očitna. Naj bo sedaj $n > 1$. Predpostavimo, da ima vsak podgraf grafa G točko stopnje največ k. Ker je G podgraf samega sebe, bo tudi v grafu G

obstajala točka stopnje največ k. Recimo, da je to točka v_n. Naj bo $G' = G - v_n$. Naj bo H poljuben podgraf grafa G'. Ker je $H \subseteq G$, obstaja v grafu H točka stopnje največ k. Po indukcijski predpostavki je G' k-degeneriran, torej imamo tako zaporedje $v_1, \ldots, v_{n-1}$ točk grafa G', da za vsak $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ velja $d_{G'_i}(v_i) \leq k$, kjer je $G'_i = G'[\{v_1, \ldots, v_i\}]$. Ker je $G'_i = G_i$, iz tega izhaja, da je graf G k-degeneriran. □

Trditev 3.11 (Bondy in Murty [3], naloga 14.1.5b)**.** *Graf G je 1-degeneriran natanko tedaj, ko je gozd.*

Dokaz. Naj bo G 1-degeneriran graf, za katerega velja, da ni gozd (je cikličen). Torej v grafu G obstaja 2-regularen podgraf (ima točke stopnje 2), kar je v protislovju s trditvijo 3.10.

Pokažimo še implikacijo v drugo smer. Vsak gozd vsebuje točko stopnje največ 1. Ker je vsak podgraf gozda tudi gozd, je po trditvi 3.10 vsak gozd 1-degeneriran. □

Trditev 3.12 (Bondy in Murty [3], naloga 14.1.5c)**.** *Vsak k-degeneriran graf je $(k+1)$-obarvljiv.*

Dokaz. Točke lahko tako razvrstimo, da bo imela vsaka točka največ k povezav do točk z manjšim indeksom. Vzemimo točko z najmanjšo stopnjo v grafu, odstranimo iz grafa točko in njene povezave z ostalimi točkami in jo uvrstimo na začetek zaporedja predhodno odstranjenih točk. Ko bomo točke barvali po vrsti, bomo pri posamezni točki dobili največ k različno obarvanih sosedov, ki že imajo določeno barvo. Torej bo vsaj ena izmed $k+1$ barv na voljo za barvanje trenutne točke. Torej $\chi(G) \leq k+1$. □

Posledica 3.13 (Bondy in Murty [3], naloga 14.1.5d)**.** *Unija k-degeneriranega grafa in ℓ-degeneriranega grafa je $(k+1)(\ell+1)$-obarvljiva.*

Dokaz. Iz trditve 3.9 sledi: Za k-degeneriran graf G_1 velja $\chi(G_1) \leq k+1$ in za ℓ-degeneriran graf G_2 bo veljalo $\chi(G_2) \leq \ell+1$. Iz dejstva, da je $\chi(G) \leq k_1 k_2$, če in samo če je $G = G_1 \cup G_2$, za $\chi(G_i) \leq k_i$, za $i = 1, 2$, izhaja, da je unija k-degeneriranega in ℓ-degeneriranega grafa $(k+1)(\ell+1)$-obarvljiva. □

Trditev 3.14 (Bondy in Murty [3], naloga 14.1.8a)**.** *Naj bo G graf, v katerem se katerakoli dva liha cikla sekata. Potem je $\chi(G) \leq 5$.*

Dokaz. Naj bo $G = (V, E)$ graf, v katerem se katerakoli dva cikla sekata. Če G ne bi imel lihega cikla, bi G bil dvodelen graf, torej 2-obarvljiv in bi dobili $\chi(G) \leq 2 \leq 5$. Predpostavimo, da ima G vsaj en lih cikel. Naj bo C najkrajši lih cikel grafa G. Naj bo $G' = G - V(C)$. Ker se lihi cikli paroma sekajo, bomo z odstranitvijo $V(C)$ iz grafa G izbrisali vsaj eno točko vsakega lihega cikla iz grafa G. Sledi, da graf G' nima lihih ciklov; je torej dvodelen.

Katerikoli dvodelen graf je 2-obarvljiv, torej velja $\chi(G') \leq 2$. Ker je C najkrajši lih cikel, je induciran podgraf $G[V(C)]$ izomorfen lihemu ciklu. Posledično je $\chi(G[V(C)]) = \chi(C) = 3$.

Točke grafa G' lahko torej pobarvamo z 2 barvama in točke cikla C s 3 barvami, ki bodo različne od tistih dveh, uporabljenih v grafu G'. Torej

$\chi(G) \leq \chi(G - V(C)) + \chi(G[V(C)]) = \chi(G') + \chi(C) \leq 2 + 3 = 5.$ □

Kneserjev graf $K_{a:b}$ je graf, katerega točke predstavljajo b-elementne podmnožice množice a elementov $\{1, 2, \ldots, a\}$, dve točki Kneserjevega grafa pa sta sosednji natanko tedaj, ko sta pripadajoči množici disjunktni. Petersenov graf je $K_{5:2}$.

Za $G = K_{a:b}$ velja: $\omega(G) = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$. Pokažimo sedaj, da kromatično število ne more biti večje od $a - 2b + 2$.

Trditev 3.15 (Scheinerman in Ullman [33], naloga 3.7)**.** *$\chi(K_{a:b}) \leq a - 2b + 2$, če $a \geq 2b$.*

Dokaz. Pobarvajmo točke Kneserjevega grafa na naslednji način: za vse $F \in V(K_{a:b})$ naj bo:

$$c(F) := \min\{\min(F), a - 2b + 2\}.$$

Na ta način bomo dodelili barvo $c(F) \in \{1, 2, \ldots, a - 2b + 2\}$ vsaki podmnožici $F \in \binom{[a]}{b}$ (družina vseh b-elementnih podmnožic množice $[a] := \{1, 2, \ldots, a\}$; $K_{a:b} = K\binom{[a]}{b}$). Če dve množici F in F' pobarvamo z enako barvo, $c(F) = c(F') = i < a-2b+2$, potem ne moreta biti disjunktni, saj obe množici vsebujeta element i.

Če obe množici velikosti b pobarvamo z barvo $a - 2b + 2$, bosta tako F kot F' vsebovani v množici $\{a-2b+2, \ldots, a\}$, saj je tako minimum množice F kot F' vsebovan v mnnožici $\{a + 2b + 2, \ldots, a\}$, $\min(F) \geq a - 2b + 2$ in podobno za F'. Ker ta množica vsebuje le $2b - 1$ elementov, množici ne bosta disjunktni, saj bi v nasprotnem primeru njuna unija vsebovala $2b$ elementov. Zgornji argument pokaže: $\chi(K_{a:b}) \leq a-2b+2$. □

Lovász [25] je podal globok rezultat o tem, da je zgornja meja iz trditve 3.15 dosežena z enakostjo.

3.3 Barvanje digrafov

Pravo barvanje točk digrafa D je definirano kot barvanje točk njegovega temeljnega grafa G, njegovo kromatično število $\chi(D)$ pa je definirano kot kromatično število $\chi(G)$ grafa G. Zakaj torej študirati barvanja digrafov? Izkaže se, da kromatično število digrafa poda zanimive informacije o njegovih poddigrafih. Naslednji izrek Gallaia [15] in Roya [32] nam pove, da imajo digrafi z visokim kromatičnim številom vedno dolge usmerjene poti.

Digraf je *acikličen*, če nima usmerjenega cikla. *Maksimalen acikličen poddigraf* digrafa $D = (V, A)$ je tak njegov vpet acikličen poddigraf $D' = (V, A')$, da za vse $a \in A \setminus A'$ digraf $D' + a$, definiran kot $(V, A' \cup \{a\})$ ni acikličen.

Izrek 3.16 (Gallai [15] in Roy [32])**.** *Vsak digraf D vsebuje usmerjeno pot s $\chi(D)$ točkami.*

Dokaz. Naj bo k število točk v najdaljši usmerjeni poti digrafa D. Naj bo D' maksimalen acikličen poddigraf digrafa D. Ker je D' poddigraf digrafa D, ima vsaka usmerjena pot v D' največ k točk. Obarvajmo digraf D s k barvami tako, da dodelimo točki v barvo $c(v)$, kjer je $c(v)$ število točk najdaljše usmerjene poti v poddigrafu D' s pričetkom v točki v. Pokažimo, da je to barvanje pravo. Naj bo (u, v) poljubna povezava digrafa D. Če je (u, v) povezava poddigrafa D', naj bo vPw najdaljša usmerjena pot v D' s pričetkom v točki v. Potem $u \notin V(P)$, v nasprotnem primeru bi bil namreč $vPuv$ usmerjen cikel v poddigrafu D'. Tako je $uvPw$ usmerjena u-pot v poddigrafu D', kar pomeni, da $c(u) > c(v)$. Če (u, v) ni povezava poddigrafa D', potem $D' + (u, v)$ vsebuje usmerjen cikel, saj je poddigraf D' maksimalno acikličen, torej D' vsebuje usmerjeno v, u-pot P. Naj bo Q najdaljša usmerjena pot v D' s pričetkom v točki u. Ker je D' acikličen je $V(P) \cap V(Q) = \{u\}$. Torej je PQ usmerjena pot v poddigrafu D' s pričetkom v točki v in posledično $c(v) > c(u)$. V obeh primerih $c(u) \neq c(v)$. □

3.4 Kritični grafi

Ko govorimo o barvanju, je koristno preučiti lastnosti posebnega razreda grafov, ki se imenujejo *barvno kritični grafi*. Pravimo, da je graf G barvno kritičen, če je $\chi(H) < \chi(G)$ za vsak pravi podgraf H grafa G. Tovrstne grafe je najprej raziskoval Dirac [11]. Izraz "barvno kritičen" bomo poenostavili s "kritičen". k-kritičen graf je graf, ki je k-kromatičen in kritičen. Podgraf H grafa G je *minimalno k-kromatičen*, če je

k-kromatičen, noben njegov pravi podgraf pa ni k-kromatičen. Vsak minimalno k-kromatičen podgraf k-kromatičnega grafa je k-kritičen. Torej ima vsak k-kromatičen graf vsaj en k-kritičen podgraf.

Oglejmo si nekaj zgledov za kritične grafe.

Zgled 3.17.

1) Naj bo graf $G = K_2$.

   $\chi(G) = 2$ in $\chi(H) \leq 1$ za vse prave podgrafe H grafa K_2. Sledi: graf K_2 je 2-kritičen.

2) Naj bo $n \geq 1$ in graf $G = C_{2n+1}$.

   $\chi(G) = 3$ in $\chi(H) \leq 2$ za vse prave podgrafe H grafa C_{2n+1}. Sledi: graf C_{2n+1} je 3-kritičen za vse $n \geq 1$.

3) Naj bo graf $G = W_{2n+1}$.

   $\chi(G) = 4$ in $\chi(H) \leq 3$ za vse prave podgrafe H grafa W_{2n+1}. Sledi: graf W_{2n+1} je 4-kritičen za vse $n \geq 1$.

Podani zgledi so k-kritični, ker je $\chi(H) < \chi(G) = k$ za vsak pravi podgraf H grafa G. Če odstranimo poljubno povezavo, se kromatično število zmanjša: $\chi(G) = k$ in $\chi(G - e) = k - 1$.

Izrek 3.18. *Če je graf G k-kritičen, potem $\delta(G) \geq k - 1$.*

Dokaz. S protislovjem. Recimo, da je najmanjša stopnja grafa G strogo manjša od $k - 1$, torej $\delta(G) < k - 1$. Naj bo $v \in V(G)$ točka stopnje $\delta(G)$. Ker je graf G k-kritičen, velja $\chi(G - v) < \chi(G) = k$. Torej obstaja particija grafa $G - v$ na $k - 1$ neodvisnih množic $V_1, V_2, \ldots, V_{k-1}$ (barvnih razredov). Če bi točka v imela soseda v vsaki izmed neodvisnih množic $V_1, V_2, \ldots, V_{k-1}$, bi veljalo $d_G(v) \geq k - 1 > \delta(G)$, kar je protislovje.

Naj bo $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ tak indeks, da točka v ni sosednja nobeni točki v množici V_i. Tedaj je $V_i \cup \{v\}$ neodvisna množica v grafu G in je $\chi(G) \leq k-1$, kar je protislovje. $\square$

Izrek 3.18 implicira, da ima vsak k-kromatičen graf vsaj k točk stopnje vsaj $k-1$, kot smo opazili že v posledici 3.5.

Naj bo S točkovni prerez povezanega grafa G in naj imajo komponente grafa $G-S$ množice točk $V_1, V_2, \ldots, V_t$. Podgrafi $G_i := G[V_i \cup S]$ se imenujejo S-*komponente* grafa G. Pravimo, da se barvanja grafov $G_1, G_2, \ldots, G_t$ *ujemajo* na prerezni kliki S, če je za vsak $v \in S$ točki v dodeljena enaka barva v vsakem od teh barvanj.

Izrek 3.19. *Noben kritičen graf nima prerezne klike.*

Dokaz. S protislovjem. Naj bo G k-kritičen graf. Predpostavimo, da ima graf G prerezno kliko S. Poimenujmo S-komponente grafa G z $G_1, G_2, \ldots, G_t$. Ker je G k-kritičen, je vsak G_i $(k-1)$-obarvljiv. Poleg tega, ker je S klika, dobijo točke v S različne barve v vsakem $(k-1)$-barvanju grafa G_i. Iz tega sledi, da obstajajo taka $(k-1)$-barvanja grafov $G_1, G_2, \ldots, G_t$, ki se ujemajo na S. Ta barvanja lahko združimo, da dobimo $(k-1)$-barvanje grafa G, kar je protislovje. □

Posledica 3.20. *Vsak kritičen graf je neločljiv.*

Po izreku 3.19, če ima k-kritičen graf 2-točkovni prerez $\{u, v\}$, potem točki u in v ne moreta biti sosednji. Rečemo, da je $\{u, v\}$-komponenta G_i grafa G tipa 1, če vsako $(k-1)$-barvanje grafa G_i dodeli enako barvo točkama u in v, in tipa 2, če vsako $(k-1)$-barvanje grafa G_i dodeli različni barvi točkama u in v.

Naj bo G graf in $S \subseteq V(G)$. Graf, dobljen s *krčenjem množice* S, označimo z G/S in definiramo na naslednji način:

- $V(G/S) = V(G-S) \cup \{w\}$, kjer je w nova točka,
- $E(G/S) = E(G-S) \cup \{wx : x \in N_G(S)\}$.

Izrek 3.21. *Naj bo G k-kritičen graf z 2-točkovnim prerezom $\{u, v\}$ in naj bo e nova povezava, ki povezuje točki u in v. Potem:*

1. *$G = G_1 \cup G_2$, kjer je G_i neka $\{u, v\}$-komponenta grafa G tipa i, $i = 1, 2$,*
2. *Tako $H_1 := G_1 + e$ kot $H_2 := G_2/\{u, v\}$ sta k-kritična.*

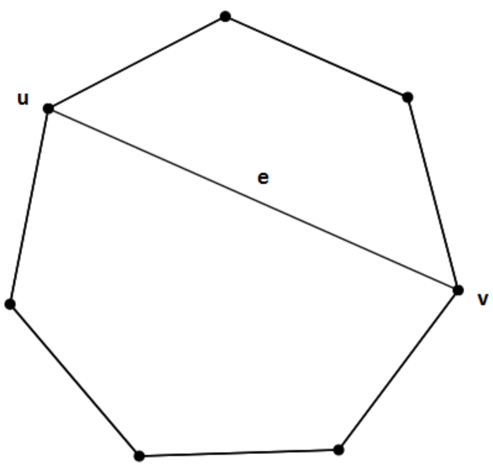
Dokaz.

1. Ker je graf G kritičen, je vsaka $\{u,v\}$-komponenta grafa G $(k-1)$–obarvljiva. Ne morejo obstajati $(k-1)$-barvanja teh $\{u,v\}$-komponent, za katere velja, da se vsa ujemajo na množici $\{u,v\}$, saj bi taka barvanja skupaj dala $(k-1)$–barvanje grafa G. Obstajata torej dve taki $\{u,v\}$-komponenti G_1 in G_2, da se nobeno $(k-1)$–barvanje od G_1 ne ujema z nobenim $(k-1)$–barvanjem grafa G_2. Lahko torej predpostavimo, da je graf G_1 tipa 1 in graf G_2 tipa 2. Ker sta G_1 in G_2 različnega tipa, podgraf $G_1 \cup G_2$ grafa G ni $(k-1)$–obarvljiv. Ker je graf G kritičen, sklepamo, da $G = G_1 \cup G_2$.

2. Ker je graf G_1 tipa 1, je H_1 k-kromatičen. Da je H_1 kritičen, lahko dokažemo tako, da pokažemo, da je za vsako povezavo f grafa H_1 podgraf $H_1 - f$ $(k-1)$-obarvljiv. Očitno je, da če je $f = e$, bo v tem primeru $H_1 - e = G_1$. Naj bo f neka druga povezava grafa H_1. V vsakem $(k-1)$–barvanju grafa $G - f$ dobita točki u in v različni barvi, ker je G_2 podgraf grafa $G - f$. Zožitev takega barvanja točk na $V(G_1)$ je $(k-1)$–barvanje grafa $H_1 - f$. Torej je H_1 k-kritičen. Na podoben način pokažemo, da je H_2 k-kritičen. □

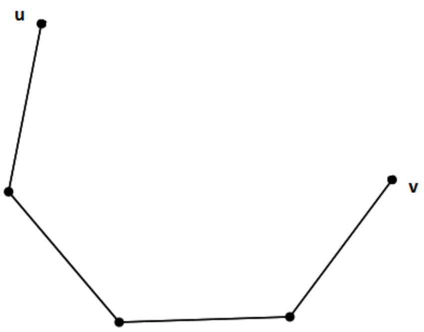
Oglejmo si zgled, ki temelji na izreku 3.21.

Zgled 3.22. Naj bo $k = 3$ in graf $G = C_7$. Naj bosta u in v poljubni točki na razdalji 3 (glej sliko 10). Tedaj je G 3-kritičen graf in $\{u,v\}$ 2-točkovni prerez v G.

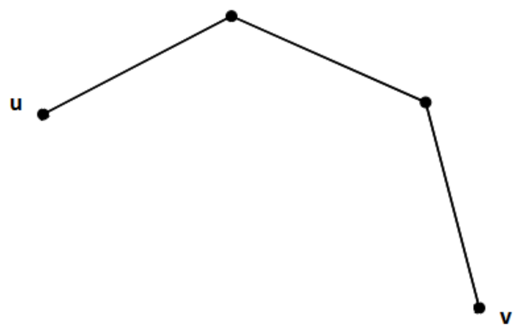


Slika 10: Graf $G = C_7$ s točkama u in v.

Če označimo z G_1 in G_2 $\{u,v\}$-komponenti grafa G, kjer je G_1 izomorfen poti P_5, G_2 pa poti P_4, tedaj opazimo, da je graf G_i tipa i (glej sliki 11 in 12).



Slika 11: Graf G_1.



Slika 12: Graf G_2.

Če sta H_1 in H_2 definirana kot v izreku 3.21, potem je H_1 izomorfen grafu C_5 in H_2 je izomorfen grafu C_3.

Dobljena grafa H_1 in H_2 sta res 3-kritična.

Trditev 3.23 (Bondy in Murty [3], naloga 14.2.7a)**.** *Naj bosta u in v dve točki kritičnega grafa G. Potem velja $N(u) \nsubseteq N(v)$.*

Dokaz. Dokažimo trditev s protislovjem. Naj bo G k–kritičen graf. Predpostavimo, da obstajata dve točki $u, v \in V(G)$, kjer $u \neq v$ in $N(u) \subseteq N(v)$. Ker je G k-kritičen graf ($\chi(G) = k$), bo $\chi(G - u) = k - 1$. Privzemimo, da imamo pravo barvanje grafa $G - u$ s $k - 1$ barvami. Ker velja $N(u) \subseteq N(v)$, lahko to barvanje razširimo do pravega barvanja grafa G s $k - 1$ barvami, in sicer tako, da obarvamo točko u z enako barvo kot točko v. Iz tega izhaja, da $\chi(G) = \chi(G - u)$, kar je v nasprotju z lastnostjo, da je G kritičen graf. $\square$

Trditev 3.24 (Bondy in Murty [3], naloga 14.2.7b). *Ne obstaja k-kritičen graf, ki bi imel natanko $k+1$ točk.*

Dokaz. Dokažimo trditev s protislovjem. Predpostavimo, da obstaja k-kritičen graf G, ki ima natanko $k+1$ točk. Če obstaja točka stopnje, manjše od $k-1$, recimo ji v, jo zbrišemo. Po predpostavki bi lahko namreč pobarvali s $k-1$ barvami preostanek grafa, saj $\chi(G-v) = k-1$. Če vrnemo nazaj odstranjeno točko, bo ta lahko sosednja točkam, obarvanim s kvečjemu $k-2$ barvami. Če je stopnja točke v kvečjemu $k-2$, potem lahko $(k-1)$-barvanje grafa $G-v$ razširimo do $(k-1)$-barvanja grafa G. To je v protislovju s predpostavko, da je G k-kritičen. Lahko torej privzamemo, da je vsaka točka stopnje $k-1$ ali k. Ker ima graf G $k+1$ točk in so vse točke stopnje $k-1$ ali k, iz tega sledi, da so v grafu $\overline{G}$, komplementu grafa G, vse točke stopnje 0 ali 1. Torej graf $\overline{G}$ sestoji iz izoliranih točk in/ali izoliranih povezav. Po trditvi 3.23 velja da ne sme biti izoliranih povezav. Če bi namreč obstajala izolirana povezava v grafu $\overline{G}$, med točkama u in v, bi veljalo $N_G(u) = N_G(v)$, kar je v protislovju s trditvijo 3.23. Torej so vse točke grafa $\overline{G}$ izolirane, kar pomeni, da je G poln graf na $k+1$ točkah in posledično je $\chi(G) = k+1$, protislovje. □

3.5 Grafi velike ožine in velikega kromatičnega števila

Graf, ki vsebuje veliko kliko, ima nujno visoko kromatično število. Po drugi strani pa obstajajo grafi brez trikotnikov s poljubno visokim kromatičnim številom. Erdős [13] je uporabil verjetnostno metodo, da bi pokazal obstoj grafov s poljubno visoko ožino in kromatičnim številom.

Izrek 3.25. *Za vsako pozitivno celo število k obstaja graf z ožino vsaj k in kromatičnim številom vsaj k.*

Definirajmo verjetnostni prostor slučajnih grafov $G_{n,p}$, uporabljen v izreku 3.26. *Končen verjetnostni prostor* $(\Omega, \mathbb{P})$ sestoji iz končne množice Ω, ki se imenuje *vzorčni prostor* in iz *verjetnostne funkcije* $\mathbb{P} : \Omega \to [0,1]$, tako da je $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$. Množico grafov na n točkah, $\mathcal{G}_n$, lahko obravnavamo kot vzorčni prostor končnega verjetnostnega prostora $(\mathcal{G}_n, \mathbb{P})$. Rezultat izbire elementa G tega vzorčnega prostora glede na verjetnostno funkcijo $\mathbb{P}$ imenujemo *naključni graf.* V grafu $G_{n,p}$ je n število točk, p pa predstavlja verjetnost, da je poljubna povezava vsebovana v grafu G. Graf G zgradimo z naključnim povezovanjem točk, oz. tako da se za vsako povezavo naključno odločimo, ali je vsebovana v grafu G ali ne. Realno število p je določeno med številoma 0 in 1. Poljubna povezava bo vključena v graf z verjetnostjo p, neodvisno od vsake druge povezave. Zapis $1-p$ predstavlja verjetnost, da povezava ni izbrana. Verjetnostna funkcija $\mathbb{P}$ je za $N := \binom{n}{2}$ in $m := e(G)$, enaka:

$\mathbb{P}(G) = p^m(1-p)^{N-m}$, za vsak $G \in \mathcal{G}_n$.

Matematično upanje slučajne spremenljivke $X : \Omega \to \mathbb{R}$ končnega verjetnostnega prostora (Ω, p) je enako vsoti produktov vrednosti slučajne spremenljivke ter verjetnosti, da spremenljivka to vrednost zavzame. Torej

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) X(\omega)\,,$$

kjer je $\mathbb{P}$ verjetnostna funkcija.

Matematično upanje je linearno, tj. za slučajni spremenljivki X in Y in $a, b \in \mathbb{R}$ velja:

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y)\,.$$

Vpeljimo izrek, ki nam bo pomagal pri dokazu izreka 3.25.

Izrek 3.26 (Erdős [13]). *Neodvisnostno število slučajnega grafa $G_{n,p}$ je skoraj gotovo kvečjemu $\lceil 2p^{-1} \log n \rceil$.*

V dokazu bomo uporabili t.i. **neenakost Markova:** Naj bo X nenegativna slučajna spremenljivka in t pozitivno realno število. Potem je $\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}$.

Dokaz izreka 3.25. Naj bo $G \in G_{n,p}$ in $t := \lceil 2p^{-1} \log n \rceil$. Po izreku 3.26 skoraj gotovo velja $\alpha(G) \leq t$. Naj bo X število ciklov grafa G dolžine manj kot k. Po linearnosti matematičnega upanja je

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=3}^{k-1} \frac{n_{(i)}}{2i} p^i < \sum_{i=0}^{k-1} (np)^i = \frac{(np)^k - 1}{np - 1},$$

kjer $(n)_i$ označuje padajočo fakulteto števila n, tj.vrednost produkta $n(n-1)\ldots(n-i+1)$. Faktor $\frac{n_{(i)}}{2i}$ predstavlja število ciklov dolžine i v polnem grafu reda n, p^i pa predstavlja verjetnost, da je poljuben od teh ciklov podgraf grafa G.

Iz Markove neenakosti sedaj dobimo:

$$\mathbb{P}(X > n/2) < \frac{\mathbb{E}(X)}{n/2} < \frac{2((np)^k - 1)}{n(np-1)}$$

Če $p := n^{-(k-1)/k}$, potem je $np = n^{\frac{1}{k}}$ in $\mathbb{P}(X > n/2) < \frac{2(n-1)}{n(n^{1/k}-1)}$, kar gre proti 0, ko $n \to \infty$. Z drugimi besedami, graf G skoraj gotovo nima več kot $n/2$ ciklov dolžine manj kot k.

Iz tega sledi, da za dovolj velik n obstaja graf G na n točkah z neodvisnostnim številom največ t in z ne več kot $n/2$ ciklov dolžine manj kot k. Z brisanjem po ene točke iz vsakega cikla dolžine manj kot k dobimo graf G' z vsaj $n/2$ točkami z ožino vsaj k in neodvisnostnim številom največ t. Po neenakosti 3.1,

$\chi(G') \geq \frac{n(G')}{\alpha(G')} \geq \frac{n}{2t} \sim \frac{n^{1/k}}{4\log n}$.

Sedaj zadostuje, da izberemo tako velik n, da bo veljalo $\chi(G') \geq k$. □

Konstrukcija Mycielskega. Opazimo, da zgoraj navedeni dokaz ni konstruktiven: zgolj potrjuje obstoj grafov s poljubno visoko ožino in kromatičnim številom. Rekurzivne konstrukcije tovrstnih grafov so podali Lovász [27] in tudi Nešetřil in Rödl [29]. Opisali bomo enostavnejšo konstrukcijo k-kromatičnih grafov brez trikotnikov, po Mycielskem [28].

Izrek 3.27. *Za vsako pozitivno celo število k obstaja k-kromatičen graf brez trikotnikov.*

Dokaz. (Konstrukcija Mycielskega [28]). Za $k = 1$ in $k = 2$ imata grafa K_1 in K_2 zahtevano lastnost. Nadaljujemo z indukcijo po k. Predpostavimo, da smo že zgradili graf brez trikotnikov G_k s kromatičnim številom $k \geq 2$. Naj bodo $v_1, v_2, \ldots, v_n$ točke grafa G_k. Iz grafa G_k tvorimo graf G_{k+1} takole: dodamo $n+1$ novih točk $u_1, u_2, \ldots, u_n, v$ in nato za $1 \leq i \leq n$, točko u_i povežemo s sosedi točke v_i v grafu G_k pa tudi s točko v. Graf G_{k+1} prav gotovo nima trikotnikov. Kajti, ker je $u_1, u_2, \ldots, u_n$ neodvisna množica grafa G_{k+1}, noben trikotnik ne more vsebovati več kot eno točko u_i; če bi točke $u_i v_j v_k u_i$ tvorile trikotnik v grafu G_{k+1}, potem bi $v_i v_j v_k v_i$ tvorile trikotnik v grafu G_k, kar pa je v nasprotju z našo predpostavko. Sedaj pokažimo, da je G_{k+1} $(k+1)$–kromatičen. Opazimo najprej, da je G_{k+1} $(k+1)$–obarvljiv, ker katerokoli k-barvanje grafa G_k lahko razširimo do $(k+1)$–barvanja grafa G_{k+1}, tako da dodelimo barvo točke v_i točki u_i, $1 \leq i \leq n$, in dodelimo novo barvo točki v. Preostane torej, da pokažemo, da G_{k+1} ni k–obarvljiv.

Predpostavimo, da ima graf G_{k+1} k-barvanje. Zožitev tega barvanja na $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je k-barvanje k-kromatičnega grafa G_k. Po trditvi 3.4 za vsako barvo j obstaja točka v_i barve j, ki je sosednja v grafu G_k točkam vsake druge barve. Ker ima točka u_i natanko iste sosede v grafu G_k kot točka v_i, mora imeti točka u_i tudi barvo j. Zato se vsaka od k barv pojavi na vsaj eni od točk u_i. Ampak nobena barva ni sedaj na voljo za točko v, kar je protislovje. Sklepamo, da je G_{k+1} res $(k+1)$-kromatičen in izrek sledi po indukciji. □

Drugi primeri grafov brez trikotnika s poljubno visokim kromatičnim številom so t.i. premični grafi. *Premični graf* SG_n je graf, čigar množica točk je množica dvoelementnih podmnožic množice $\{1, 2, \ldots, n\}$, kjer obstaja povezava, ki povezuje dva para točk $\{i, j\}$ in $\{k, l\}$, kjer je $i < j$ in $k < l$, če in samo če je $j = k$.

Trditev 3.28 (Erdős in Hajnal [14]; Bondy in Murty [3], naloga 14.3.2)**.** *Za vsak* $n \geq 2$ *je premični graf* SG_n *graf brez trikotnikov s kromatičnim številom* $\lceil \log_2 n \rceil$.

Dokaz. Identificirajmo množico točk grafa SG_n z množico urejenih parov (i, j), kjer $1 \leq i < j \leq n$, graf ima torej $\binom{n}{2}$ točk. Točki (i, j) in (k, l) sta sosednji če in samo če $j = k$ ali $i = l$.

(i) Pokažimo najprej, da $\chi(SG_n) \leq \lceil \log_2 n \rceil$ za vse $n \geq 2$. Neeankost zadošča pokazati za števila n oblike $n = 2^p$ $(p \geq 1)$, saj če je $2^{p-1} < n < 2^p$, tedaj je $\lceil \log_2 n \rceil = p$ in imamo na voljo p barv. Graf SG_n pa je (induciran) podgraf grafa SG_{2^p}. Torej je $\chi(SG_n) \leq \chi(SG_{2^p}) = p$.

Za števila oblike $n = 2^p$ neenakost $\chi(SG_n) \leq \lceil \log_2 n \rceil$ postane $\chi(SG_{2^p}) \leq p$. Uporabimo indukcijo po p. Za $p = 1$ je graf $SG_{2^p} = SG_2$ izomorfen grafu K_1 in velja $\chi(SG_2) = 1 = p$. Vzemimo sedaj nek $p > 1$, naj bo $n = 2^p$ in predpostavimo neenakost $\chi(SG_{2^{p-1}}) \leq p - 1$. Obarvajmo z barvo 1 vse točke oblike (i, j), kjer $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ in $\frac{n}{2} < j \leq n$. Preostale točke grafa SG_n so razdeljene v množici A_1 in A_2, kjer je $A_1 = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq \frac{n}{2}\}$ in $A_2 = \{(i, j) : \frac{n}{2} < i < j \leq n\}$.

Opazimo, da poljubni točki $u \in A_1$ in $v \in A_2$ nista sosednji in da A_1 in A_2 definirata premična grafa, izomorfna grafu $SG_{n/2} = SG_{2^{p-1}}$. Iz tega izhaja, da dobimo pravo barvanje grafa SG_n z $1 + (p - 1) = p$ barvami in torej velja $\chi(SG_{2^p}) \leq p$. S tem je potrjen dokaz indukcijskega koraka in zgornje meje za kromatično število premičnih grafov.

(ii) Pokažimo sedaj, da $\chi(SG_n) \geq \lceil \log_2 n \rceil$. Ker je kromatično število vselej celo število zadošča pokazati, da je $\chi(SG_n) \geq \log_2 n$. Predpostavimo, da so točke grafa SG_n pravilno obarvane s t barvami. Za vsak $i < n$ naj bo S_i množica točk $\{(i, j) : j = i + 1, i + 2, \ldots, n\}$. Trdimo, da množici S_k in S_l ne moreta biti obarvani z enako množico barv, če $k \neq l$. Brez škode za splošnost naj bo $k < l$ in naj bo barva točke (k, l) na primer modra. Modra barva je uporabljena na množici S_k, ampak ne moremo je uporabiti na množici S_l, ker so vse točke iz S_l sosednje (k, l). S tem je dokaz zaključen saj dobimo, da $n - 1$, ki je število množic S_l, ni večje od števila nepraznih podmnožic t barv. Iz tega izhaja, da $n - 1 \leq 2^t - 1$, tj. $n \leq 2^t$, kar implicira, da $\log_2 n \leq t$ in od tod, ker je t celo število, da $\lceil \log_2 n \rceil \leq t$. $\square$

3.6 Popolni grafi

Neenakost $\chi(G) \geq \omega(G)$ vodi do vprašanja, kateri grafi G zadoščajo tej neenakosti z enakostjo. Hitro ugotovimo, da če je H poljuben k-obarvljiv graf in je G disjunktna unija grafa H in grafa K_k, potem $\chi(G) = \omega(G) = k$. Berge [2] je ugotovil, da se takim primerom lahko izognemo z zahtevo, da neenakost $\chi(G) \geq \omega(G)$ ne velja samo za graf G, ampak tudi za vse njegove inducirane podgrafe. Take grafe G je Berge poimenoval "popolne" in ugotovil, da grafi, ki imajo to lastnost, vključujejo veliko osnovnih družin grafov, kot so dvodelni grafi, povezavni grafi dvodelnih grafov, tetivni grafi[1] idr. Graf G je *popoln*, če je $\chi(H) = \omega(H)$ za vsak induciran podgraf H grafa G; sicer je *nepopoln*. Nepopoln graf je *minimalno nepopoln*, če je vsak od njegovih pravih induciranih podgrafov popoln. Graf oktaedra, ki ima 8 ploskev, 12 robov in 6 oglišč, v vsakem oglišču pa se stikajo štirje robovi in štiri ploskve je primer popolnega grafa, medtem ko so lihi cikli dolžine pet ali več, kakor tudi njihovi komplementi, minimalno nepopolni.

Ker so 2-obarvljivi, so dvodelni grafi očitno popolni. Dejstvo, da so njihovi povezavni grafi popolni, je posledica Königovega izreka o barvanju povezav dvodelnih grafov (izrek 4.7).

Oglejmo si zgled popolnega grafa.

Zgled 3.29. Naj bo graf G cikel na štirih točkah, C_4, in H induciran podgraf grafa G. Preverimo, da enakost $\chi(H) = \omega(H)$ velja za vse možnosti. Očitno je H izomorfen enemu izmed grafov v množici $\{C_4, P_3, K_2, 2K_1, K_1\}$.

Če je $H = C_4$, imamo $\chi(H) = \omega(H) = 2$.

Če je $H = P_3$, imamo $\chi(H) = \omega(H) = 2$.

Če je $H = K_2$, imamo $\chi(H) = \omega(H) = 2$.

Če je $H = 2K_1$, imamo $\chi(H) = \omega(H) = 1$.

Če je $H = K_1$, imamo $\chi(H) = \omega(H) = 1$.

Enakost $\chi(H) = \omega(H)$ velja, torej je graf G popoln.

Izrek o popolnih grafih. Berge [2] je ugotovil, da imajo prav vsi popolni grafi iz zgornjih razredov tudi popolne komplemente. Iz izreka Königa [22] in Rada [31] sledi, da je komplement vsakega dvodelnega grafa popoln, Dilworthov izrek [10] pa pomeni, da je komplement primerljivostnega grafa popoln. Na podlagi teh dejstev je Berge [2]

[1] *Tetiven graf* je graf, v katerem ima vsak cikel na štirih ali več točkah tetivo (povezavo med nezaporednima točkama cikla).

postavil domnevo, da je graf popoln, če in samo če je njegov komplement popoln. To domnevo je preveril Lovász [26]; ustrezni izrek se danes imenuje *izrek o popolnih grafih.*

Izrek 3.30 (Izrek o popolnih grafih)**.** *Graf je popoln če in samo če je njegov komplement popoln.*

Zgled 3.31. Naj bo $G = C_7$. Komplement grafa G je $\overline{C_7}$.

Za $G = C_7$ velja: $\chi(G) = 3$ in $\omega(G) = 2$.

Za $\overline{G} = \overline{C_7}$ velja: $\chi(\overline{G}) = 4$ in $\omega(\overline{G}) = 3$.

Graf G ni popoln, saj $\chi(G) > \omega(G)$.

Tudi njegov komplement ni popoln, saj $\chi(\overline{G}) > \omega(\overline{G})$.

Kmalu zatem je A. Hajnal predlagal naslednjo karakterizacijo popolnih grafov. Tudi to je potrdil Lovász [24].

Izrek 3.32. *Graf G je popoln če in samo če vsak induciran podgraf H grafa G izpolnjuje neenakost $|V(H)| \leq \alpha(H)\omega(H)$.*

Spodnja meja (3.1) pravi, da je $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$. Če je graf G popoln, bo veljalo $\chi(H) = \omega(H)$ za vsak induciran podgraf H grafa G. Iz tega sledi: $|V(H)| \leq \alpha(H)\omega(H)$. Potrebnost pogoja iz izreka 3.32 torej sledi neposredno iz definicije.

Opazimo, da je zgornja neenakost invariantna za komplemente, saj $V(\overline{H}) = V(H)$, $\alpha(\overline{H}) = \omega(H)$ in $\omega(\overline{H}) = \alpha(H)$. Izrek 3.32 torej implicira izrek o popolnih grafih (izrek 3.30).

Če neeenakost $|V(G)| \leq \alpha(G)\omega(G)$ ne velja za graf G, potem vemo, da graf G ni popoln.

Zgled 3.33. Naj bo graf $G = C_5$.

Preverimo, ali neenakost iz prejšnjega izreka velja za graf G.

$|V(G)| = 5$, $\alpha(G) = 2$ in $\omega(G) = 2$.

Dobimo: $5 \leq 2 \cdot 2$, torej neenakost iz prejšnjega izreka ne velja. Graf G ni popoln.

Predstavimo sedaj dokaz izreka 3.32, kot ga je podal Gasparian [17]. Ta temelji na osnovnem argumentu o rangu matrik. Potrebujemo naslednjo lastnost minimalno nepopolnih grafov.

Trditev 3.34. *Naj bo S neodvisna množica minimalno nepopolnega grafa G. Potem je $\omega(G-S)=\omega(G)$.*

Dokaz. Enakost $\omega(G-S)=\omega(G)$ je trivialna, če je $S=\emptyset$. Predpostavimo torej, da je $S\neq\emptyset$. Imamo naslednji niz enakosti in neenakosti:

$$\omega(G-S)\leq\omega(G)\leq\chi(G)-1\leq\chi(G-S)=\omega(G-S)\,.$$

Utemeljimo ga:

1. Neenakost $\omega(G-S)\leq\omega(G)$ velja, ker je vsaka klika v grafu $G-S$ tudi klika v grafu G.

2. Neenakost $\omega(G)\leq\chi(G)-1$ velja zaradi pogoja, da je G nepopoln.

3. Neenakost $\chi(G)-1\leq\chi(G-S)$ utemeljimo tako, da opazimo, da če pobaravamo graf $G-S$ s k barvami, lahko pobarvamo graf G s $k+1$ barvami tako, da množico S obaravamo z barvo, ki je nismo uporabili na grafu $G-S$.

4. Enakost $\chi(G-S)=\omega(G-S)$ velja, ker je $G-S$ pravi induciran podgraf grafa G in je torej popoln, saj je G minimalno nepopoln graf.

Ker sta levi in desni člen enaka, enakost velja v celoti (vsepovsod), torej tudi $\omega(G-S)=\omega(G)$. □

Sedaj lahko izpeljemo rezultat o strukturi minimalno nepopolnih grafov. Ta igra ključno vlogo pri dokazu izreka 3.32.

Lema 3.35. *Naj bo G minimalno nepopoln graf z neodvisnostnim številom α in kličnim številom ω. Potem graf G vsebuje takih $\alpha\omega+1$ neodvisnih množic $S_0,S_1,\ldots,S_{\alpha\omega}$ in takih $\alpha\omega+1$ klik $C_0,C_1,\ldots,C_{\alpha\omega}$ da:*
- *vsaka točka grafa G pripada natanko α neodvisnim množicam izmed množic S_i,*
- *vsaka klika C_i ima ω točk,*
- *$C_i\cap S_i=\emptyset$ za $0\leq i\leq\alpha\omega$,*
- *$|C_i\cap S_j|=1$ za $0\leq i\leq\alpha\omega$, $0\leq j\leq\alpha\omega$ in $i\neq j$.*

Dokaz. Naj bo S_0 neodvisna množica z α točkami v grafu G in naj bo $v\in S_0$. Graf $G-v$ je popoln, ker je G minimalno nepopoln. Tako je $\chi(G-v)=\omega(G-v)\leq\omega(G)$. To pomeni, da lahko za vsak $v\in S_0$ množico $V-\{v\}$ razdelimo v družino $\mathcal{S}_v$ ω neodvisnih množic. Če označimo unijo $\bigcup_{v\in S_0}\mathcal{S}_v$ z $\{S_1,S_2,\ldots,S_{\alpha\omega}\}$, opazimo, da je $\{S_0,S_1,\ldots,S_{\alpha\omega}\}$ družina $\alpha\omega+1$ neodvisnih množic grafa G in izpolnjuje zgornjo prvo lastnost. Po trditvi 3.34 je $\omega(G-S_i)=\omega(G)$ za vse $0\leq i\leq\alpha\omega$. Torej obstaja največja klika C_i grafa G, ki je disjunktna z množico S_i. Ker za vsak $i\in\{0,1,\ldots,\alpha\omega\}$ vsaka izmed ω točk v C_i leži v natanko α neodvisnih množic S_j in ker nobeni dve točki v kliki C_i ne moreta pripadati skupni neodvisni množici, od tod sledi $|C_i \cap S_j| = 1$ za $0 \leq i < j \leq \alpha\omega$. □

Podajmo nekaj definicij, potrebnih za dokaz izreka. A^T označuje transponirano matriko matrike A. Naj bo $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_k\}$ poljubna družina podmnožic $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. *Incidenčna matrika* $I(G)$ družine $\mathcal{F}$ je matrika razsežnosti $n \times k$, kjer je element i-te vrstice in j-tega stolpca enak 1, če je $v_i \in F_j$, in 0, sicer.

Sedaj lahko preidemo na dokaz izreka 3.32.

Dokaz izreka 3.32. Naj bo G popoln graf in H poljuben induciran podgraf grafa G. Ker je G popoln, je graf H $\omega(H)$-obarvljiv. Tedaj je $\omega(H) = \chi(H) \geq \frac{|V(H)|}{\alpha(H)}$ in posledično $|V(H)| \leq \alpha(H)\omega(H)$.

Implikacijo v drugo smer dokažemo tako, da pokažemo, da če je G minimalno nepopoln, potem je $|V(G)| \geq \alpha(G)\omega(G) + 1$. Naj bo $n = |V(G)|$, $\omega = \omega(G)$ in $\alpha = \alpha(G)$. Upoštevajmo družine $\{S_i : 0 \leq i \leq \alpha\omega\}$ in $\{C_i : 0 \leq i \leq \alpha\omega\}$ neodvisnih množic in klik, opisanih v lemi 3.35. Naj bosta A in B, $n \times (\alpha\omega + 1)$-incidenčni matriki teh družin. Matrika A ima v stolpcih karakteristične vektorje neodvisnih množic S_i, matrika B pa karakteristične vektorje klik C_i, kjer $i = 0, 1, \ldots, \alpha\omega$. V obeh matrikah so vrstice indeksirane s točkami grafa. Matriki A in B imata torej samo vrednosti 0 in 1.
Za vse $i = 1, \ldots, n$ in $j = 0, 1, \ldots, \alpha\omega$

$$\text{velja } A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{če je } v_i \in S_j \\ 0, & \text{sicer} \end{cases} \text{ in } B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{če je } v_i \in C_j \\ 0, & \text{sicer}\,. \end{cases}$$

Iz tega sledi, da je $A^T B = J - I$, kjer je J kvadratna matrika reda $\alpha\omega + 1$, katere elementi so same 1 in I je identična matrika reda $\alpha\omega + 1$. Potem velja, da so vse vrstice matrike $J - I$ med seboj neodvisne. Njen rang je tako enak $\alpha\omega + 1$. Dobili smo torej $\alpha\omega + 1 = \mathit{rang}(J - I) = \mathit{rang}(A^T B) \leq \min\{\mathit{rang}(A), \mathit{rang}(B)\} \leq n$. Zadnja neenakost sledi iz dejstva, da imata ti dve matriki po n vrstic, torej $n \geq \alpha\omega + 1$. □

Zgled 3.36. Predstavimo lemo 3.35 tako, da za graf G vzamemo minimalno nepopoln graf $\overline{C_7}$. Velja $\alpha(G) = 2$ in $\omega(G) = 3$. Z uporabo postopka, ki je opisan v dokazu leme, dobimo sledečih sedem neodvisnih množic in sedem klik.

$S_0 = 12$, $S_1 = 23$, $S_2 = 45$, $S_3 = 67$, $S_4 = 34$, $S_5 = 56$, $S_6 = 17$
$C_0 = 357$, $C_1 = 146$, $C_2 = 136$, $C_3 = 135$, $C_4 = 257$, $C_5 = 247$,
$C_6 = 246$

(kjer zapišemo 12 za množico $\{1, 2\}$ in tako naprej).

Incidenčni matriki družin neodvisnih množic in klik sta podani na spodnji sliki.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Trasponirana matrika matrike S, S^T, je enaka

$$S^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Po dokazu izreka 3.32, če izračunamo S^TC, dobimo matriko $J - I$:

$$S^TC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Posledica izreka o popolnih grafih in izreka 3.32 je:

Posledica 3.37. *Graf G je popoln če in samo če je za poljuben induciran podgraf H grafa G neodvisnostno število grafa H enako najmanjšemu številu klik, potrebnih za pokritje vseh točk grafa H.*

Zgled 3.38. Naj bo G graf na osmih točkah, podan na sliki 13. Preverimo, ali lastnost iz zgornje posledice izreka o popolnih grafih velja za graf G (G je podgraf samega sebe).

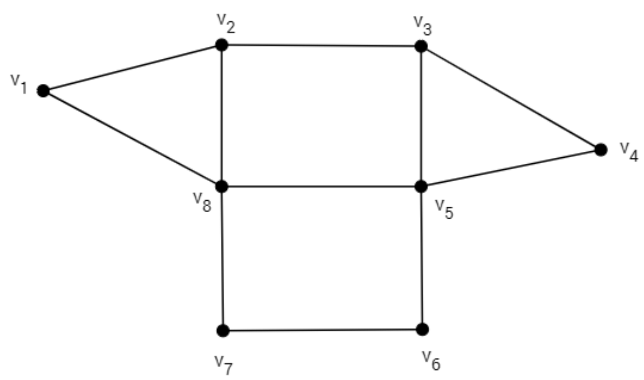
Klike:

- velikosti 0: $\{\}$ (prazna množica)
- velikosti 1: $\{v_1\}$, $\{v_2\}$, $\{v_3\}$, $\{v_4\}$, $\{v_5\}$, $\{v_6\}$, $\{v_7\}$, $\{v_8\}$;
- velikosti 2: $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_4, v_5\}$, $\{v_5, v_6\}$, $\{v_6, v_7\}$, $\{v_7, v_8\}$, $\{v_8, v_1\}$, $\{v_2, v_8\}$, $\{v_3, v_5\}$, $\{v_5, v_8\}$;
- velikosti 3: $\{v_1, v_2, v_8\}$, $\{v_3, v_4, v_5\}$.

Torej je velikost največje klike enaka 3, $\omega(G) = 3$.

Največje neodvisne množice:
$\{v_1, v_3, v_6\}$, $\{v_1, v_3, v_7\}$, $\{v_1, v_4, v_6\}$, $\{v_1, v_4, v_7\}$, $\{v_1, v_5, v_7\}$, $\{v_2, v_4, v_6\}$, $\{v_2, v_4, v_7\}$, $\{v_2, v_5, v_7\}$, $\{v_3, v_6, v_8\}$, $\{v_4, v_6, v_8\}$.

Torej je velikost največje neodvisne množice enaka 3, $\alpha(G) = 3$.



Slika 13: Graf na osmih točkah

Število klik, potrebnih za pokritje množice točk, $V(G)$, je enako 3: $\{v_1, v_2, v_8\}$, $\{v_3, v_4, v_5\}$, $\{v_6, v_7\}$. To pokaže, da 3 zadošča, torej, da je to število največ 3. Ne more pa biti manjše od 3, ker je $\alpha(G) = 3$ očitno spodnja meja, saj morajo biti vse točke v največji neodvisni množici pokrite z različnimi klikami.

Število točk v največji neodvisni množici je torej enako najmanjšemu številu klik, potrebnih za pokritje vseh točk grafa G.

Da bi lahko trdili, da pogoj iz posledice velja, bi bilo ustrezno lastnost preveriti, na podoben način, za vse prave inducirane podgrafe grafa G.

Krepki izrek o popolnih grafih. Če je graf popoln, potem so popolni tudi vsi njegovi inducirani podgrafi. To pomeni, da lahko popolne grafe okarakteriziramo tako, da opišemo vse minimalno nepopolne grafe. Povedali smo, da so lihi cikli dolžine pet ali več minimalno nepopolni, in taki so tudi njihovi komplementi. Berge [2] je domneval, da so to edini minimalno nepopolni grafi; ekvivalentno, da je graf popoln, če in samo če noben njegov induciran podgraf ni izomorfen kakšnemu lihemu ciklu dolžine vsaj pet ali njegovemu komplementu. To domnevo je imenoval *Krepka domneva o popolnih grafih.* Štirideset let kasneje so domnevo dokazali Chudnovsky idr. [9].

Izrek 3.39 (Krepki izrek o popolnih grafih)**.** *Graf je popoln če in samo če noben njegov induciran podgraf ni izomorfen kakšnemu lihemu ciklu dolžine najmanj pet ali njegovemu komplementu.*

Ta izrek je bil velik dosežek, saj je bilo več let veliko truda porabljenega na poskusih dokaza krepkega izreka o popolnih grafih. Poleg tega so Chudnovsky idr. [8] kmalu zatem razvili algoritem polinomske časovne zahtevnosti za problem prepoznavanja popolnih grafov. Prepričajmo se, da so lihi cikli dolžine vsaj pet in njihovi komplementi minimalno nepopolni.

Trditev 3.40 (Bondy in Murty [3], naloga 14.4.2)**.** *Grafa C_{2k+1} in $\overline{C_{2k+1}}$ sta minimalno nepopolna grafa za vsak $k \geq 2$.*

Dokaz. Po definiciji je graf G popoln graf, če je $\chi(H) = \omega(H)$ za vsak induciran podgraf H grafa G.

Vemo, da je $\chi(C_{2k+1}) = 3$ in $\omega(C_{2k+1}) = 2$.

Za poljuben komplement grafa C_{2k+1} velja: $\chi(\overline{C_{2k+1}}) \geq k+1$ in $\omega(\overline{C_{2k+1}}) \leq k$.

Prva neenakost sledi iz spodnje meje $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$. Za komplement grafa $G = C_{2k+1}$ velja: $|V(\overline{C_{2k+1}})| = 2k+1$ in $\alpha(\overline{C_{2k+1}}) = 2$.

Sledi $\chi(\overline{C_{2k+1}}) \geq \frac{2k+1}{2} = \frac{2k}{2} + \frac{1}{2}$. Torej $\chi(\overline{C_{2k+1}}) \geq k + \frac{1}{2}$.

To pomeni, da je kromatično število vsaj $k + \frac{1}{2}$. Ker je kromatično število vedno celo število, sledi $\chi(\overline{C_{2k+1}}) \geq k+1$.

Za drugo neenakost velja, da je $\omega(\overline{C_{2k+1}}) = \alpha(C_{2k+1})$.

Če bi $\alpha(C_{2k+1}) \geq k+1$, potem bi obstajala neodvisna množica S velikosti $k+1$. Brez škode za splošnost $v_1 \in S$. Naj bo $\{\{v_1\}, \{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \ldots, \{v_{2k}, v_{2k+1}\}\}$ particija množice $V(C_{2k+1})$ na $k+1$ klik. Od tod sledi, da $|S \cap C| = 1$, za vsako kliko C.

Množica S vsebuje po eno točko iz vsake od teh $k+1$ klik. Če je $v_1 \in S$, potem $v_2 \notin S$ in torej $v_3 \in S$. Potem $v_4 \notin S$ in podobno velja za ostale točke.

Za vsak $i \in \{1, \ldots, k\}$ potem velja $v_{2i+1} \in S$. Sledi, da je $\{v_1, v_{2k+1}\} \subseteq S$, $\{v_1, v_{2k+1}\} \in E(C_{2k+1})$, kar je protislovje.

Torej je za vsak $k \geq 2$ lih cikel C_{2k+1} nepopoln graf in tudi njegov komplement $\overline{C_{2k+1}}$ je nepopoln. Ker je razred popolnih grafov zaprt za inducirane podgrafe, zadošča dokazati, da so vsi maksimalni pravi inducirani podgrafi popolni. Če zbrišemo eno točko iz cikla, dobimo pot in to je dvodelen graf, torej tudi popoln. Vsak pravi induciran podgraf grafa C_{2k+1} je torej popoln. Torej je C_{2k+1} minimalno nepopoln graf. Po izreku o popolnih grafih (izrek 3.30) je tudi komplement $\overline{C_{2k+1}}$ minimalno nepopoln graf. $\square$

4 Kromatični indeks grafa

V prejšnjem poglavju smo raziskovali točkovno barvanje grafov. Sedaj bomo pozornost usmerili sorodnemu konceptu povezavnega barvanja. V tem poglavju bodo obravnavani multigrafi brez zank. Glavni viri za to poglavje so knjige [3, 36, 37]. *Povezavno k-barvanje* grafa $G = (V, E)$ je preslikava $c : E \to S$, kjer je S množica k barv, z drugimi besedami, je dodelitev k barv povezavam grafa G. Običajno je množica barv enaka $\{1, 2, \ldots, k\}$. Povezavno k-barvanje si lahko predstavljamo kot particijo $\{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$ množice E, kjer E_i označuje (morda prazno) množico povezav, ki jim je dodeljena barva i. Povezavno barvanje je *pravo*, če dobijo sosednje povezave različne barve, torej tako povezavno k-barvanje $\{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$, v katerem je vsaka podmnožica M_i prirejanje. (Ker so zanke same sebi sosednje, imajo le grafi brez zank prava povezavna barvanja.) Ker smo tu osredotočeni samo na prava povezavna barvanja, bomo predpostavili, da so vsi grafi brez zank in uporabljali za izraz "prava povezavna barvanja" kar izraz "povezavna barvanja".

Graf je povezavno k-obarvljiv, če ima povezavno k-barvanje. Če je graf G povezavno k-obarvljiv, je tudi povezavno l-obarvljiv za vsak $l > k$; poleg tega je vsak graf G povezavno m-obarvljiv, kjer je $m = |E(G)|$. *Kromatični indeks grafa G*, $\chi'(G)$, je najmanjše število k, za katerega je graf G povezavno k-obarvljiv, in G je *povezavno k-kromatičen*, če je $\chi'(G) = k$. V povezavnem barvanju morajo biti povezavam, ki so incidenčne s katerikoli točko, dodeljene različne barve. Imamo torej spodnjo mejo

$$\chi'(G) \geq \Delta(G). \tag{4.1}$$

Problemi povezavnega barvanja se pojavljajo v praksi na podoben način kot problemi točkovnega barvanja. Tukaj je tipičen primer.

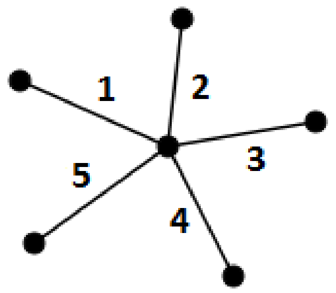
Primer 4.1. Problem razporejanja. Na šoli je m učiteljev $x_1, x_2, \ldots, x_m$ in n razredov $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Z upoštevanjem dejstva, da mora učitelj x_i predavati razredu y_j za p_{ij} obdobij, naredimo načrt za razpored predavanj v minimalnem številu obdobij. Da bi rešili ta problem, bomo predstavili zahteve poučevanja z dvodelnim grafom $H[X, Y]$, kjer je $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, točki x_i in y_j bosta povezani s p_{ij} povezavami. Problem zahteva, da najdemo povezavno barvanje grafa H z najmanj možnimi barvami. To je mogoče rešiti s pomočjo algoritma polinomske časovne zahtevnosti.

Oglejmo si nekaj zgledov za kromatični indeks grafa.

Zgled 4.2. Naj bo $\{1, 2, 3, \ldots\}$ množica barv, ki jih bomo uporabili za barvanje povezav v grafu. Podan bo kromatični indeks za isto množico grafov, pri katerih smo v zgledu 3.3 iskali kromatično število.

- **Poln dvodelen graf z** $1 + 5$ **točkami**: $G = K_{1,5}$.

  Najmanjše število barv, potrebnih za barvanje tega grafa, je enako 5.

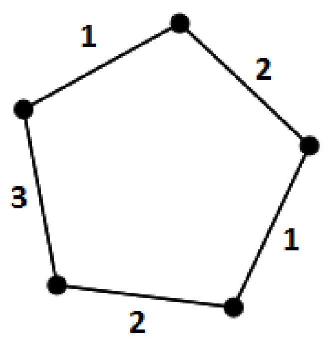


Slika 14: Barvanje povezav polnega dvodelnega grafa z $1 + 5$ točkami, $K_{1,5}$.

  Opazimo, da graf $K_{1,5}$ vsebuje točko stopnje 5, torej po neenakosti (4.1) velja $\chi'(K_{1,5}) \geq 5$.
  Povezavno barvanje grafa s 5 barvami je podano na sliki 14; od tod sledi $\chi'(K_{1,5}) \leq 5$.

- **Cikel na petih točkah**: $G = C_5$

  Najmanjše število barv, potrebnih za barvanje tega grafa, je enako 3.



Slika 15: Barvanje povezav cikla na petih točkah, C_5.

  Ni težko opaziti, da lihega cikla ni mogoče pobarvati z 2 barvama, tj. $\chi'(C_5) \geq 3$.
  Povezavno barvanje grafa s 3 barvami je podano na sliki 15; od tod sledi $\chi'(C_5) \leq 3$.

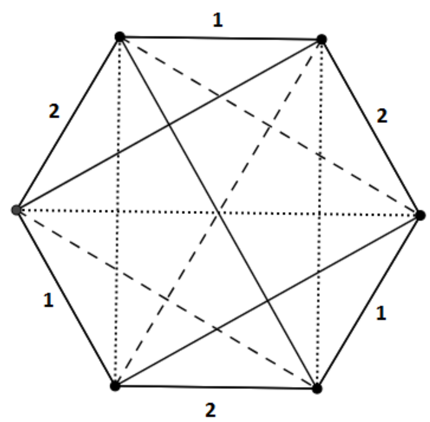
- **Poln graf na šestih točkah**: $G = K_6$

  Graf je sestavljen iz povezav na ciklu in notranjih povezav, ki predstavljajo popolna prirejanja grafa.
  Vsaka točka v grafu ima stopnjo 5.

  Povezave cikla bomo obarvali z dvema barvama.

  Ker imajo povezave v notranjosti grafa skupno krajišče s povezavami na ciklu, bomo za barvanje popolnih prirejanj uporabili tri barve, ki se razlikujejo od tistih uporabljenih na ciklu. Za prikaz barvanja popolnih prirejanj smo uporabili različne tipe črt, ki označujejo barve.

  Najmanjše število barv, potrebnih za barvanje tega grafa, je enako 5.



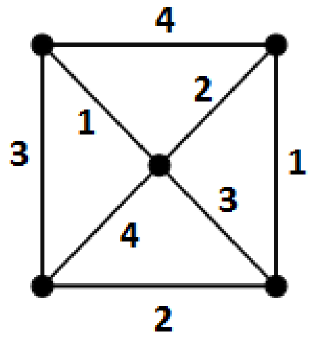
Slika 16: Barvanje povezav polnega grafa na šestih točkah, K_6.

  Opazimo, da graf K_6 vsebuje točke stopnje 5, torej po neenakosti (4.1) velja $\chi'(K_6) \geq 5$.
  Povezavno barvanje grafa s 5 barvami je podano na sliki 16; od tod sledi $\chi'(K_6) \leq 5$.

- **Graf - kolo na petih točkah**: $G = W_4$

  Kot je razvidno na spodnji sliki grafa, najmanjše število barv, potrebnih za barvanje tega grafa, je enako 4.

  Opazimo, da graf W_4 vsebuje točko stopnje 4, torej po neenakosti (4.1) velja $\chi'(W_4) \geq 4$.
  Povezavno barvanje grafa s 4 barvami je podano na sliki 17; od tod sledi $\chi'(W_4) \leq 4$.



Slika 17: Barvanje povezav grafa (kolesa) na petih točkah, W_4.

Trditev 4.3 (Bondy in Murty [3], naloga 17.1.1)**.** *Naj bo G d-regularen multigraf. Tedaj je G povezavno d-obarvljiv, če in samo če lahko njegovo množico povezav razdelimo na popolna prirejanja.*

Dokaz. Naj bo $c : E(G) \to \{1, \ldots, d\}$ barvanje povezav. Tedaj je za vsak $i \in \{1, \ldots, d\}$ množica $M_i = \{e \in E(G) : c(e) = i\}$ prirejanje.

Unija prirejanj je tako enaka množici povezav grafa G, $\bigcup_{i=1}^{d} M_i = E(G)$.

Pokažimo, da je vsak M_i je popolno prirejanje. Če to ne velja, potem obstaja taka točka $v \in E(G)$, da v ni krajišče nobene od povezav v prirejanju M_i. Iz tega izhaja, da se na d povezavah, incidenčnih s točko v, barva i ne pojavi. Pojavi se največ $d-1$ barv in vsaj ena se pojavi vsaj dvakrat. To je v protislovju z dejstvom, da je c barvanje povezav.

Pokažimo še implikacijo v drugo smer. Naj bo $E(G)$ disjunktna unija popolnih prirejanj $M_1, \ldots, M_k$. Tedaj velja

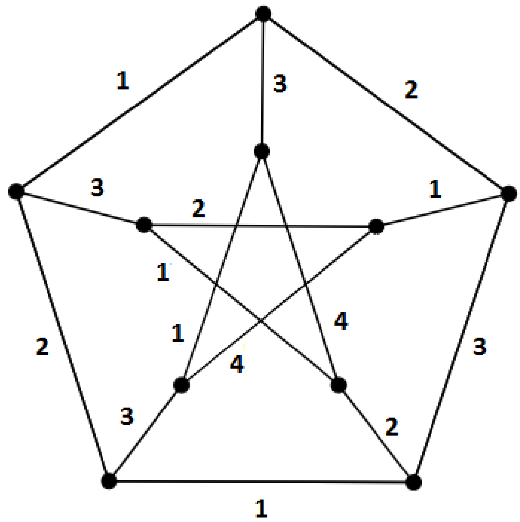
$$|E(G)| = \sum_{i=1}^{k} |M_i| = k \cdot \frac{|V(G)|}{2}.$$

Po lemi o rokovanju (lemi 2.1): $|E(G)| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} d_G(v) = \frac{1}{2} \cdot |V(G)| \cdot d = d \cdot \frac{|V(G)|}{2}$.

Iz zgornjih enakosti izhaja, da je $k = d$. Torej je graf G povezavno d-obarvljiv. $\square$

Trditev 4.4 (Bondy in Murty [3], naloga 17.1.7)**.** *Petersenov graf je povezavno 4-kromatičen.*

Dokaz. 4-barvanje povezav Petersenovega grafa je podano na sliki 18. Od tod sledi, da je Petersenov graf povezavno 4-obarvljiv.



Slika 18: Barvanje povezav Petersenovega grafa.

Dokažimo s protislovjem, da Petersenov graf ni povezavno 3-obarvljiv. Predpostavimo, da obstaja povezavno 3-barvanje Petersenovega grafa. Petersenov graf bomo označili z okrajšavo *Pet*. Naj bo $c : E(Pet) \to \{1, 2, 3\}$ barvanje povezav Petersenovega grafa. Ker je zunanji cikel lihe dolžine, bomo vsako od treh barv na njem tudi uporabili. Naj bo uv povezava na zunanjem ciklu, obarvana z barvo 1. V povezavnem 3-barvanju 3-regularnega grafa, morajo biti povezave, incidenčne z vsako točko, obarvane z vsako izmed barv. Ker z barvo 1 ne moremo pobarvati povezave ux ali vy, kjer sta x in y točki, sosednji točkama u in v na notranjem ciklu in xy ni povezava, se barva 1 pojavi na različnih povezavah notranjega cikla pri točkah x in y. Podoben argument velja za drugi dve barvi, torej mora biti vsaka od treh barv uporabljena dvakrat na notranjem ciklu, ki ima samo pet povezav. To pa je protislovje. □

Trditev 4.5 (Bondy in Murty [3], naloga 17.1.8a)**.** *Vsak Hamiltonov kubičen graf je povezavno* 3*-obarvljiv.*

Dokaz. Naj bo H Hamiltonov kubičen graf. Po lemi o rokovanju (lema 2.1) mora imeti 3-regularen graf sodo število točk, torej mora biti Hamiltonov cikel sode dolžine. Povezave cikla lahko torej obarvamo z dvema barvama. Preostale povezave tvorijo popolno prirejanje grafa in jih obarvamo s tretjo barvo. Hamiltonov graf je torej povezavno 3-obarvljiv. □

Trditev 4.6 (Bondy in Murty [3], naloga 17.1.8b)**.** *Petersenov graf ni Hamiltonov.*

Dokaz. Dokazujemo s protislovjem. Predpostavimo, da ima Petersenov graf Hamiltonov cikel. Ker je graf kubičen, je po trditvi 4.5 povezavno 3-obarvljiv, to pa je v protislovju s trditvijo 4.4, ki pravi, da je Petersenov graf povezavno 4-kromatičen. Torej Petersenov graf ni Hamiltonov. □

4.1 Povezavno barvanje dvodelnih grafov

V naslednjem podpoglavju bomo izpeljali zgornjo mejo za kromatični indeks za nekatere razrede grafov. Pokazali bomo, da če je graf G poljuben enostaven graf, potem je $\chi'(G) \leq \Delta(G)+1$. Dokazi, ki jih bomo predstavili, pokažejo, kako lahko, pod ustreznimi pogoji, povezavno k-barvanje grafa G dobimo z barvanjem povezav druge za drugo.

Predpostavimo, da smo že poiskali povezavno k-barvanje določenega podgrafa H grafa G in opišemo, kako to barvanje razširiti na povezavno k-barvanje grafa G.

Naj bo H vpet podgraf grafa G in naj bo $C := \{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$ množica prirejanj, ki definira povezavno k-barvanje podgrafa H. Rečemo, da je barva i *zastopana* v točki v, če je dodeljena neki povezavi podgrafa H, incidenčni s točko v; sicer pa je na voljo za točko v. Barva je *na voljo* za povezavo v množici $E(G) \setminus E(H)$, če je na voljo na obeh krajiščih povezave. Če torej povezava e ni obarvana, ji lahko dodelimo poljubno barvo, ki je na voljo za e, in barvanje C razširimo v povezavno k-barvanje grafa $H + e$. Naj bosta i in j poljubni različni barvi in naj bo $H_{ij} := (V(H), M_i \cup M_j)$. Ker sta M_i in M_j disjunktni prirejanji, je vsaka komponenta grafa H_{ij} bodisi sod cikel ali pot; komponente grafa H_{ij} , ki so poti, imenujemo ij-poti. Gre za izbor primernih barv i in j in zamenjavo barve na primerno izbrani ij-poti tako, da dobimo novo povezavno k-barvanje, glede na katero je na voljo ena barva za neko povezavo v $E(G) \setminus E(H)$. S pomočjo opisanega pristopa bomo sedaj dokazali Königov izrek.

Izrek 4.7 (Königov izrek [22])**.** *Če je graf G dvodelen, potem je $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Dokaz. Z indukcijo po $m = |E(G)|$. Naj bo $e = uv$ povezava grafa G in $\Delta = \Delta(G)$. Predpostavimo, da ima graf $H = G - e$ povezavno Δ-barvanje $\{M_1, M_2, \ldots, M_\Delta\}$. Če je na voljo neka barva za povezavo e, potem lahko to barvo dodelimo točki e, da dobimo povezavno Δ-barvanje grafa G. Torej lahko predpostavimo da je vsaka od Δ barv zastopana bodisi na točki u ali v. Ker je stopnja točke u v grafu $G - e$ kvečjemu $\Delta - 1$, je vsaj ena barva i na voljo za točko u in zastopana v točki v. Prav tako je vsaj ena barva j na voljo za točko v in zastopana v točki u. Oglejmo si podgraf H_{ij}. Ker ima točka u stopnjo ena v tem podgrafu, je komponenta, ki vsebuje u, na neki

ij-poti P. Ta pot se ne konča v točki v. Kajti, če bi se, bi bila sode dolžine, začenši s povezavo, obarvano z i, in končujoč se s povezavo, obarvano z barvo j, in $P+e$ bi bil cikel lihe dolžine v grafu G, kar je v nasprotju s predpostavko, da je G dvodelen graf. Z zamenjavo barv na poti P dobimo novo povezavno Δ-barvanje podgrafa H, pri katerem je na voljo barva i za obe točki, u in v. Z dodelitvijo barve i povezavi e dobimo povezavno Δ-barvanje grafa G. □

Zgled 4.8. Preverimo enakost $\chi'(G) = \Delta(G)$ iz zgornjega izreka na konkretnem primeru.

Naj bo graf $G = K_{2,2}$.

Kromatični indeks je enak 2, $\chi'(G) = 2$, in $\Delta(G) = 2$.

Enakost iz zgornjega izreka torej velja: $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Iz zgornjega dokaza lahko dobimo algoritem polinomske časovne zahtevnosti za iskanje povezavnega $\Delta(G)$-barvanja dvodelnega grafa G.

4.2 Vizingov izrek

Če G ni dvodelen graf, ne moremo sklepati, da je $\chi'(G) = \Delta(G)$. Pomemben izrek, ki sta ga neodvisno drug od drugega dokazala Vizing [35] in Gupta [18], trdi, da za vsak enostaven graf G velja $\chi'(G) = \Delta(G)$ ali $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Pri dokazovanju Vizingovega izreka z indukcijo po m lahko predpostavimo, da obstaja povezavno $(\Delta + 1)$-barvanje grafa $G - e$, kjer je $e \in E(G)$ in $\Delta = \Delta(G)$. Za dokončanje dokaza je dovolj pokazati, kako je mogoče povezavno $(\Delta+1)$-barvanje od G dobiti iz povezavnega $(\Delta + 1)$-barvanja grafa $G - e$. V nadaljevanju bomo upoštevali bolj splošen problem izpeljave povezavnega k-barvanje grafa G iz povezavnega k-barvanja grafa $G - e$, kjer je k poljubno celo število, večje ali enako Δ.

Lema 4.9. *Naj bo G enostaven graf, w točka grafa G, e povezava grafa G, incidenčna točki w, in k celo število, $k \geq \Delta(G)$. Predpostavimo, da ima $G-e$ povezavno k-barvanje c, glede na katerega ima vsaka točka, sosednja točki w v grafu G vsaj eno razpoložljivo barvo. Potem je G povezavno k-obarvljiv.*

Dokaz. Naj bo c povezavno k-barvanje grafa $G-e$ kot v predpostavki leme. Pri iskanju povezavnega k-barvanja grafa G nam bo v pomoč prišel dvodelen graf $H[X, Y]$, kjer je $X := N_G(w)$ in $Y := \{1, 2, \ldots, k\}$, točki $x \in X$ in $i \in Y$ pa sta sosednji, če je barva

i na voljo v točki x v zožitvi $\tilde{c}$ barvanja c na množico $E(G-w)$. Natančneje, za vse $x \in X \setminus \{u\}$, kjer u označuje drugo krajišče povezave e, opazimo, da je barva povezave xw na voljo v točki x v grafu $G-w$. Graf H torej vsebuje prirejanje

$$M := \{(x, c(xw)) : x \in X \setminus \{u\}\}$$

.

In obratno, vsako prirejanje v grafu H ustreza pravemu barvanju množice $\partial(w)$, ki je združljivo s $\tilde{c}$. Poljubno ujemanje v H, ki pokrije X, ustreza pravemu barvanju množice $\partial(w)$ in s tem dobimo, skupaj s $\tilde{c}$, povezavno k-barvanje grafa G. Predpostavimo lahko torej, da podgraf H nima nobenega takega prirejanja. Naš cilj je spremeniti barvanje c v barvanje c' tako, da ustrezni dvodelni graf H' vsebuje prirejanje, ki pokrije X. Po predpostavki je vsaka točka iz $X \setminus \{u\}$ incidenčna v grafu H z vsaj eno povezavo iz $E(H) \setminus M$, in točka u je incidenčna z vsaj eno tako povezavo, ker

$$d_{G-e}(u) = d_G(u) - 1 \leq \Delta(G) - 1 \leq k - 1.$$

Potem je vsaka točka X incidenčna v grafu H z vsaj eno povezavo iz $E(H) \setminus M$. Označimo z Z množico vseh točk grafa H, ki jih lahko dosežemo iz točke u po M-alternirajočih poteh in naj bo $R := X \cap Z$ in $B := Y \cap Z$. Ker smo predpostavili, da H nima prirejanja, ki pokrije X, lahko s podobnim argumentom, kot v dokazu Hallovega izreka (glej [3], str. 419) pokažemo, da je $N_H(R) = B$ in je B prirejen prek M z $R \setminus \{u\}$, tako da $|B| = |R| - 1$. Ker je vsaj ena barva na voljo za vsako točko v R in $|B| = |R| - 1$, je neka barva $i \in B$ na voljo v dveh točkah x, y iz R, po Dirichletovem principu. Opazimo, da je vsaka barva v B zastopana v točki v, ker je B prirejen prek M z $R \setminus \{u\}$. Barva i je torej zastopana na točki v. Po drugi strani pa, ker je stopnja točke w v grafu $G - e$ kvečjemu $k - 1$, je neka barva j na voljo v točki w. Opazimo, da $j \notin B$, ker je vsaka barva v B zastopana v točki w. Tako je j zastopana v vsaki točki množice R, torej tudi na obeh x in y. Vrnimo se sedaj na graf $G-e$. Po zgornjih opažanjih je vsaka od točk w, x in y krajišče neke ij-poti v grafu $G-e$. Obravnavajmo ij-pot tako, da začnemo na w. Očitno je, da se ta pot ne more zaključiti na obeh točkah x in y. Predpostavimo, da se pot, ki začne na v, ne konča v točki y, in naj bo z končna točka ij-poti P, ki se začne v točki y. Z izmenjavo barv i in j na P dobimo novo barvanje c' grafa $G - e$. Naj bo $H'[X, Y]$ dvodelni graf, ki pripada barvanju c'. Edina razlika med množicama H in H' se pojavi pri y in z (če $z \in X$). Poleg tega je, ker točka w ne leži na P, prirejanje M še vedno prirejanje v H'. Upoštevajmo alternirajočo uy-pot Q v H. Če z leži na Q, potem $z \in R$ in alternirajoča pot uQz je še vedno M-alternirajoča pot v H', saj se konča s povezavo iz M.

Ker $j \notin B$, se je pot P prej končala na točki z, na povezavi barve j in zdaj se konča na povezavi barve i. Glede na barvanje c' je barva j sedaj na voljo v točki z

in $Q' := uQzj$ je M-naraščajoča pot v H'. Po drugi strani pa, če z ne leži na Q, potem je $Q' := uQyj$ M-naraščajoča pot v H'. Naj bo $M' := M\Delta E(Q')$. Potem je M' prirejanje v H', ki zajema vse točke v X, in to prirejanje ustreza pravemu barvanju množice $\partial(w)$. Če združimo to barvanje z zožitvijo barvanja c' na množico $E(G-w)$, dobimo pravo povezavno k-barvanje grafa G. □

Zgornji dokaz implicira obstoj algoritma polinomske časovne zahtevnosti za iskanje povezavnega k-barvanja enostavnega grafa G, s podanim povezavnim k-barvanjem grafa $G-e$, ki izpolnjuje prepostavko leme 4.9. Ker je hipoteza leme 4.9 izpolnjena, ko je $k = \Delta(G) + 1$, Vizingov izrek sledi neposredno po indukciji na $m = |E(G)|$. Poleg tega je povezavno $(\Delta + 1)$-barvanje poljubnega enostavnega grafa G mogoče najti z dodajanjem po ene povezave v polinomskem času. Dokazali smo torej naslednji izrek.

Izrek 4.10 (Vizingov izrek [18, 35])**.** *Za poljuben enostaven graf G velja $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Vizing [35] je izrek 4.10 posplošil na multigrafe brez zank.

Izrek 4.11. *Za poljuben graf G velja $\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$.*

Zgled 4.12. Za grafe, ki niso enostavni, neenakost $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ ne velja.

Naj bo k naravno število in G graf, dobljen iz polnega grafa K_3, tako da vsako povezavo zamenjamo s k večkratnimi povezavami.

Potem je $\chi'(G) = 3k$, saj imata poljubni dve povezavi skupno krajišče in $\Delta(G) = 2k$. Neenakost $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ postane $3k \leq 2k + 1$. To je res samo, ko je $k = 1$. Za $k > 1$ neenakost ne velja.

Opazimo, da je $\mu(G) = k$. Zgled torej pokaže, da je meja v izreku 4.11 najboljša možna, saj sta za graf G obe strani neenakosti enaki $3k$.

Če se vrnemo na enostavne grafe, izrek 4.10 pravi, da je kromatični indeks enostavnega grafa G enak $\Delta(G)$ ali $\Delta(G) + 1$. Enostavnim grafom G, pravimo, da so *razreda 1*, ostali pa so *razreda 2*. Problem odločanja, kateremu razredu pripada dan graf, je *NP*-težek (Holyer [20] in Leven in Galil [23]). Zato je koristno imeti preproste kriterije, ki za dan graf povejo, ali je v razredu 1 ali v razredu 2.

Trditev 4.13 (Bondy in Murty [3], naloga 17.2.13)**.** *Naj bo G sebi-komplementaren graf. Tedaj velja, da je G razreda 2, če je regularen.*

Dokaz. Naj bo graf G regularen, $d = \Delta(G)$, in sebi-komplementaren. Komplement grafa G in graf G sta izomorfna, $\overline{G} \cong G$.

Naj bo $n = |V(G)|$.

Po lemi o rokovanju (lemi 2.1) velja: $|E(G)|\ \frac{|V(G)|}{2} \cdot d = |E(\overline{G})| = \binom{n}{2} - |E(G)|$.

Iz tega izhaja: $|E(G)| = \frac{1}{2} \cdot \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$. Iz veze $\frac{n(n-1)}{4} = \frac{n}{2} \cdot d$ dobimo d, in sicer $d = \frac{n-1}{2}$. Sledi, da je n liho število.

Graf G torej nima popolnega prirejanja.

Po trditvi 4.3 velja, da je $\chi'(G) > d$ in graf G je torej razreda 2. □

Opomba 4.14. A.P. Wojda in M. Zwonek sta postavila domnevo [38], da velja implikacija v drugo smer.

4.3 Seznamska barvanja povezav

Naj bo G graf in naj bo L funkcija, ki dodeli vsaki točki v grafa G množico $L(v)$ pozitivnih celih števil, ki jo imenujemo *seznam* točke v. Barvanje $c : V(G) \to \mathbb{N}$, kjer je $c(v) \in L(v)$ za vsak $v \in V(G)$, se imenuje *seznamsko barvanje grafa G* glede na L ali L-barvanje in rečemo, da je graf G L-obarvljiv, če ima L-barvanje. Če je $L(v) = \{1, 2, \ldots, k\}$ za vsak $v \in V(G)$, je L-barvanje ravno k-barvanje. Če je G dvodelen graf in $L(v) = \{1, 2\}$ za vse točke v, potem ima graf G L-barvanje, ki dodeli barvo 1 vsaki točki v enem delu in barvo 2 vsem točkam v drugem delu.

Graf G je k-izbirljiv, če dopušča L-barvanje za vsako izbiro barv L, za katero velja, da je $|L(v)| \geq k$, $\forall\ v \in V(G)$. Najmanjše število k, za katero je graf G k-izbirljiv, imenujemo *seznamsko kromatično število* grafa G in ga označimo s $\chi_L(G)$ [34]. Pri seznamskem barvanju povezav so povezave obarvane tako, da vsaka od njih dobi barvo iz svojega seznama, pri čemer morata biti poljubni dve sosednji povezavi različno obarvani.

Graf G je *povezavno k-izbirljiv*, če dopušča L-barvanje povezav za vsako izbiro barv L, za katero velja, da je $|L(e)| \geq k$, $\forall\ e \in E(G)$. Najmanjše število k, za katerega je graf G povezavno k-izbirljiv, imenujemo *seznamski kromatični indeks* grafa G in ga označimo z $\chi'_L(G)$.

Velja: $\chi_L(G) \geq \chi(G)$ za katerikoli graf G. Podobno $\chi'_L(G) \geq \chi'(G)$.

Domneva 4.15 (Domneva o seznamskem barvanju povezav)**.** *Za vsak graf brez zank G, velja $\chi'_L(G) = \chi'(G)$.*

Galvinov izrek. Galvin [16] je pokazal, da domneva velja za dvodelne grafe. Njegov dokaz temelji na povezavi med jedri in seznamskimi barvanji, opisani v naslednjem izreku.

Izrek 4.16. *Naj bo G graf in D poljubna usmeritev grafa G, katere vsi inducirani poddigrafi imajo jedro. Za $v \in V(G)$ naj bo $L(v)$ poljuben seznam vsaj $d_D^+(v) + 1$ barv. Potem graf G dopušča L-barvanje.*

Ker barvanje povezav grafa pomeni isto kot barvanje točk njegovega povezavnega grafa, je ključni korak v dokazu Galvinovega izreka pokazati, da so povezavni grafi dvodelnih grafov lahko usmerjeni na tak način, da (i) najvišja izhodna stopnja ni previsoka, in (ii) vsak induciran poddigraf ima jedro.

Predstavimo dokaz Galvinovega izreka za enostavne dvodelne grafe. Naj bo $G := G[X, Y]$ tak graf. V povezavnem grafu $L(G)$ obstaja klika K_v, za vsako točko v grafa G, in točke v K_v ustrezajo povezavam grafa G, ki so incidenčne točki v. Vsaka povezava xy grafa G vodi do točke grafa $L(G)$, ki pripada natanko dvema izmed teh klik, in sicer K_x in K_y. Pravimo, da je K_v X-klika, če $v \in X$, in je Y-klika, če $v \in Y$. Obstaja drugačen, priročnejši, način za obravnavo povezavnega grafa $L(G)$. Ker je vsaka povezava grafa G par xy, je množica točk grafa $L(G)$ podmnožica kartezičnega produkta $X \times Y$. Pri risanju $L(G)$ lahko postavimo njegove točke na ustrezne točke $m \times n$ mreže, kjer je $m = |X|$ in $n = |Y|$, vrstice v mreži so označene z X in stolpci z Y. Poljubni dve točki, ki ležita v isti vrstici ali stolpcu mreže, sta sosednji v $L(G)$ in množice točk v isti vrstici ali stolpcu so klike v $L(G)$, in sicer njegove X-klike in Y-klike.

Izrek 4.17. *Naj bo $G = G[X, Y]$ enostaven dvodelen graf in naj bo D usmeritev njegovega povezavnega grafa $L(G)$, v katerem vsaka X-klika in vsaka Y-klika inducira tranzitiven turnir. Potem ima D jedro.*

Dokaz. Po indukciji na $|E(G)|$. Primer $|E(G)| \leq 1$ je trivialen. Za $v \in V(G)$ označimo s T_v tranzitiven turnir v D, ki pripada točki v, in za $x \in X$ označimo s t_x ponor turnirja T_x. Naj bo $K := \{t_x : x \in X\}$. Vsaka točka grafa $D - K$ leži v enem od turnirjev T_x in tako ima povezavo do neke točke v K. Torej, če točke množice K ležijo v različnih Y-klikah, potem je K jedro digrafa D. Predpostavimo, da Y-klika T_y vsebuje dve točki K. Ena od teh, recimo t_x, ni izvorna točka s_y turnirja T_y, tako $s_y \to t_x$. Naj bo $D' := D - s_y$. Potem je D' usmeritev povezavnega grafa $L(G - e)$, kjer je e povezava grafa G, ki pripada točki s_y grafa $L(G)$. Poleg tega vsaka klika digrafa D' inducira tranzitiven turnir. Po indukciji ima D' jedro K'. Pokažimo, da je K' tudi jedro digrafa D. Za to zadošča preveriti, da ima s_y povezavo do neke točke v K'. Če $t_x \in K'$, potem $s_y \to t_x$. Po drugi strani, če $t_x \notin K'$, potem je $t_x \to v$ za nek $v \in K'$. Ker je t_x ponor svoje X-klike, mora v ležati v Y-kliki $T_y \setminus \{s_y\}$. Ampak, ker je s_y izvor turnirja T_y, ima povezavo do točke v. Sledi, da je K' res jedro digrafa D. □

Izrek 4.18. *Vsak enostaven dvodelen graf G je povezavno $\Delta(G)$–izbirljiv.*

Dokaz. Naj bo $G := G[X, Y]$ enostaven dvodelen graf z največjo stopnjo k in naj bo $c : E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ povezavno k-barvanje grafa G. Barvanje c inducira k-barvanje grafa $L(G)$. Usmerimo vsako povezavo grafa $L(G)$ tako, da povežemo dve točki iz poljubne X-klike od nižje do višje barve, in vsaki dve točki iz poljubne Y-klike od višje do nižje barve. Ta usmeritev D izpolnjuje predpostavke iz izreka 4.17; prav tako vsak induciran poddigraf digrafa D izpolnjuje te predpostavke. Poleg tega je $\Delta^+(D) = k - 1$. Po izreku 4.16 je $L(G)$ seznamsko k-obarvljiv, torej je graf G seznamsko povezavno k-obarvljiv. □

Galvin [16] je pokazal, da če je $G[X, Y]$ poljuben (ne nujno enostaven) dvodelen graf, potem je povezavno $\Delta(G)$–izbirljiv.

5 Zaključek

V magistrskem delu smo najprej predstavili osnovne pojme teorije grafov, nato pa smo se poglobili v analizo dveh ključnih konceptov s področja kromatične teorije grafov: kromatičnega števila in kromatičnega indeksa grafa. Upoštevajoč, da morata biti dve poljubni sosednji točki grafa različno obarvani, smo iskali najmanjše število barv, ki jih potrebujemo za barvanje točk v grafu; iskali smo torej kromatično število grafa, $\chi(G)$. Barvali smo tudi povezave grafov in ob tem računali kromatični indeks $\chi'(G)$ grafa G, najmanjše število barv, potrebnih za barvanje povezav grafa G, pri čemer sosednji povezavi nista pobarvani z enako barvo.

Ugotovili smo, da ni težko pobarvati grafa tako, da je pogoj izpolnjen, težje je najti najmanjše število barv, s katerimi lahko pobarvamo graf. Grafe z dovolj majhnim številom točk sicer lahko z nekaj truda obarvamo optimalno, za barvanje večjih grafov pa moramo uporabiti hevristične metode, kot je, na primer, požrešna metoda. Izpeljali smo zgornje in spodnje meje za kromatično število in kromatični indeks grafa ter jih ponazorili z zgledi. V zvezi s tem omenimo Brooksov izrek, ki pravi, da v primeru povezanih grafov zadostuje $\Delta(G)$ barv za barvanje točk grafa, pri čemer je $\Delta(G)$ največja stopnja grafa G; to ne velja, le če je G poln graf ali lih cikel. Eden pomembnejših rezultatov s področja barvanja povezav pa je Vizingov izrek, ki pravi, da za barvanje povezav enostavnega grafa vselej zadošča največ ena barva več, kot je največja stopnja grafa, kar je očitna spodnja meja za kromatični indeks.

Med pomembne rezultate kromatične teorije grafov sodita tudi Königov izrek o povezavnih barvanjih dvodelnih grafov in Galvinov izrek o seznamskih povezavnih barvanjih dvodelnih grafov. Königov izrek pravi, da v primeru, če je graf G dvodelen, je $\chi'(G) = \Delta(G)$. Galvin je pokazal, da domneva o seznamskem barvanju povezav, ki pravi, da za vsak multigraf brez zank G velja $\chi'_L(G) = \chi'(G)$, velja za dvodelne grafe. V dokazu se je Galvin osredotočil na povezavo med jedri in seznamskimi barvanji. Ker barvanje povezav grafa pomeni isto kot barvanje točk njegovega povezavnega grafa, je bil ključni korak v dokazu pokazati, da so povezavni grafi dvodelnih grafov lahko usmerjeni tako, da najvišja izhodna stopnja ni previsoka in da ima vsak induciran poddigraf jedro.

Videli smo, da imajo digrafi z visokim kromatičnim številom vedno dolge usmerjene poti. Preučili smo lastnosti barvno kritičnih grafov in med drugim videli, da ne obstaja

k-kritičen graf, ki bi imel natanko $k+1$ točk.

Analizirali smo primere grafov brez trikotnikov s poljubno visokim kromatičnim številom, in sicer konstrukcijo Mycielskega, premične grafe SG_n in Erdősev pristop na osnovi verjetnostne metode. V nasprotju s tovrstnimi grafi, za katere je razlika med kromatičnim in kličnim številom poljubno velika, smo obravnavali popolne grafe, za katere je kromatično število enako kličnemu.

Vsaka od zgoraj naštetih lastnosti je zahtevala poglobljeno razumevanje lastnosti in strukture obravnavanih grafov. Bralca, ki bi ga zanimalo kaj več o kromatični teoriji grafov in sorodnih področjih, napotimo na knjige [1, 7, 21, 33].

6 Literatura in viri

[1] L.W. Beineke in R.J. Wilson, (urednika), *Topics in Chromatic Graph Theory.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 156, Cambridge University Press, Cambridge, 2015. *(Citirano na strani 50.)*

[2] C. Berge, Some classes of perfect graphs, v: *Six Papers in Graph Theory*, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1963, 1–21. *(Citirano na straneh 29 in 35.)*

[3] J.A. Bondy in U.S.R. Murty, *Graph Theory.* Volume 244 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2008. *(Citirano na straneh 1, 3, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 24, 25, 28, 35, 37, 40, 41, 42, 44 in 45.)*

[4] R.L. Brooks, On colouring the nodes of a network. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 37 (1941) 194–197. *(Citirano na strani 15.)*

[5] S.A. Burr, Subtrees of directed graphs and hypergraphs, v: *Proceedings of the Eleventh Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, 28, 1980, 227–239. *(Citirano na strani 16.)*

[6] G. Chartrand in H.V. Kronk, Randomly traceable graphs. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 16 (1968) 696–700. *(Citirano na strani 15.)*

[7] G. Chartrand in P. Zhang, *Chromatic Graph Theory.* CRC Press, Boca Raton, 2009. *(Citirano na strani 50.)*

[8] M. Chudnovsky, G. Cornuéjols, X. Liu, P. Seymour in K. Vušković, Recognizing Berge graphs. *Combinatorica* 25 (2005) 143–186. *(Citirano na strani 35.)*

[9] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour in R. Thomas, The strong perfect graph theorem. *Annals of Mathematics (2)* 164 (2006) 51–229. *(Citirano na strani 35.)*

[10] R.P. Dilworth, A decomposition theorem for partially ordered sets. *Annals of Mathematics, Second Series* 51 (1950) 161–166. *(Citirano na strani 29.)*

[11] G.A. Dirac, Note on the colouring of graphs. *Mathematische Zeitschrift* 54 (1951) 347–353. *(Citirano na strani 20.)*

[12] *Dirichletov princip*, `http://www.fmf.uni-lj.si/~petkovsek/Seminar2009/Dirichlet.pdf`. (Datum ogleda: 5. 3. 2017.) *(Citirano na strani 6.)*

[13] P. Erdős, Graph theory and probability. *II. Canadian Journal of Mathematics* 13 (1961) 346–352. *(Citirano na straneh 25 in 26.)*

[14] P. Erdős in A. Hajnal, Ramsey-type theorems. *Discrete Applied Mathematics* 25 (1989) 37–52. *(Citirano na strani 28.)*

[15] T. Gallai, On directed paths and circuits, v: *In Theory of Graphs*, Academic Press, New York, 1968, 115–118. *(Citirano na strani 20.)*

[16] F. Galvin, The list chromatic index of a bipartite multigraph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 63 (1995) 153–158. *(Citirano na straneh 47 in 48.)*

[17] G.S. Gasparian, Minimal imperfect graphs: a simple approach. *Combinatorica* 16 (1996) 209–212. *(Citirano na strani 30.)*

[18] R.P. Gupta, The chromatic index and the degree of a graph. *Notices of the American Mathematical Society* 13 (1966) Abstract 66T-429. *(Citirano na straneh 43 in 45.)*

[19] A. Hajnal in E. Szemerédi, Proof of a conjecture of P. Erdős. V: *In Combinatorial Theory and its Applications (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969), North-Holland, Amsterdam*, II, 1970, 601–623. *(Citirano na strani 15.)*

[20] I. Holyer, The NP-completeness of edge-coloring. *SIAM Journal on Computing* 10 (1981) 718–720. *(Citirano na strani 45.)*

[21] T.R. Jensen in B. Toft, *Graph Coloring Problems*. Wiley Interscience, New York, 1995. *(Citirano na strani 50.)*

[22] D. König, Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre. *Mathematische Annalen* 77 (1916) 453–465. *(Citirano na straneh 29 in 42.)*

[23] D. Leven in Z. Galil, NP completeness of finding the chromatic index of regular graphs. *Journal of Algorithms* 4 (1983) 35–44. *(Citirano na strani 45.)*

[24] L. Lovász, A characterization of perfect graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 13 (1972) 95–98. *(Citirano na strani 30.)*

[25] L. Lovász, Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy. *J. Combinatorial Theory Ser. A* 25 (1978) 319–324. *(Citirano na strani 19.)*

[26] L. Lovász, Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. *Discrete Math.* 2 (1972) 253–267. *(Citirano na strani 30.)*

[27] L. Lovász, On chromatic number of finite set-systems. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 19 (1968) 59–67. *(Citirano na strani 27.)*

[28] J. Mycielski, Sur le coloriage des graphs. *Colloquium Mathematicae* 3 (1955) 161–162. *(Citirano na strani 27.)*

[29] J. Nešetřil in V. Rödl, A short proof of the existence of highly chromatic hypergraphs without short cycles. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 27 (1979) 225–227. *(Citirano na strani 27.)*

[30] M. Polajnar, *Usmerjeni grafi (digrafi)*, `http://www.fmf.uni-lj.si/ skreko/Pouk/ds2/Zapiski/Polajnar-DS2-2.pdf`. (Datum ogleda: 6. 11. 2016.) *(Citirano na strani 17.)*

[31] R. Rado, Bemerkungen zur Kombinatorik im Anschluß an Untersuchungen von Herrn D. König. *Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft* 32 (1933) 60–75. *(Citirano na strani 29.)*

[32] B. Roy, Nombre chromatique et plus longs chemins d'un graphe. *Rev. Française Informat. Recherche Opérationnelle* 1 (1967) 129–132. *(Citirano na strani 20.)*

[33] E.R. Scheinerman in D.H. Ullman, *Fractional Graph Theory*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1997. *(Citirano na straneh 10, 19 in 50.)*

[34] R. Škrekovski, *Teorija barvanj grafov*, Oddelek za matematiko, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, Slovenija, 2010. `http://www.fmf.uni-lj.si/ skreko/Gradiva/BG-skripta.pdf` *(Citirano na strani 46.)*

[35] V.G. Vizing, On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskret. Analiz No.* 3 (1964) 25–30. *(Citirano na straneh 43 in 45.)*

[36] D.B. West, *Introduction to Graph Theory*, Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001. *(Citirano na straneh 3, 10 in 37.)*

[37] R.J. Wilson in J.J. Watkins, *Uvod v teorijo grafov.* DMFA - Založništvo, Ljubljana, 1997. *(Citirano na straneh 3, 10 in 37.)*

[38] A.P. Wojda in M. Zwonek, Coloring edges of self-complementary graphs. *Discrete Applied Mathematics* 79 (1997) 279–284. *(Citirano na strani 46.)*