UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Zaključna naloga

Domneva Erdősa, Faberja in Lovásza

(The Erdős-Faber-Lovász Conjecture)

Ime in priimek: Kenny Štorgel
Študijski program: Matematika
Mentor: izr. prof. dr. Martin Milanič

Koper, september 2017

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Kenny ŠTORGEL

Naslov zaključne naloge: Domneva Erdősa, Faberja in Lovásza

Kraj: Koper

Leto: 2017

Število listov: 41 Število slik: 4 Število tabel: 1

Število referenc: 16

Mentor: izr. prof. dr. Martin Milanič

Ključne besede: kromatično število grafa, domneva Erdősa, Faberja in Lovásza, domneva Alona, Saksa in Seymourja, linearen hipergraf

Math. Subj. Class. (2010): 05C15, 05C72, 05C65

Izvleček:
Glavna tema naloge je opis in predstavitev domneve Erdősa, Faberja in Lovásza. Med drugim v nalogi spoznamo različne vrste in oblike grafov in metod, uporabljenih za raziskovanje pravilnosti domneve. Glavni predmet domneve so grafi, ki jih lahko zapišemo kot unijo n polnih grafov na n točkah, tako da nobena dva polna grafa nimata več kot ene skupne točke. V povezavi z njimi nas zanima, kolikšno je kromatično število takih grafov, natančneje, ali je enako n. Uporabimo različne konstrukcije in metode, ena izmed takih je celoštevilski linearen program, s katerim lahko opišemo kromatično število poljubnega grafa. Za različne vrste grafov, ki nam pomagajo pri raziskovanju domneve, spoznamo tudi konstrukcije, ki iz grafa, ki zadošča eni obliki domneve, izdela graf, ki zadošča drugi obliki domneve. S pomočjo teh konstrukcij lahko pokažemo, da so različne oblike domneve paroma ekvivalentne. Torej lahko rezultat, ki ga pridobimo s pomočjo ene vrste grafa, prenesemo in pridobimo rezultat glede druge vrste grafa in od tam nadaljujemo raziskave v drugi smeri. Glavna ugotovitev, ki jo spoznamo, je, da potrebujemo vsaj n barv za barvanje grafov, ki jih preučujemo, in da je vsak graf, ki zadošča pogojem domneve, zagotovo moč pobarvati z $\lceil \frac{3}{2}n - 2 \rceil$ barvami. V nekaterih posebnih primerih je domneva že dokazana, vprašanje pa ostaja, ali domneva velja v splošnem.

Key words documentation

Name and SURNAME: Kenny ŠTORGEL

Title of final project paper: The Erdős-Faber-Lovász Conjecture

Place: Koper

Year: 2017

Number of pages: 41 Number of figures: 4 Number of tables: 1

Number of references: 16

Mentor: Assoc. Prof. Martin Milanič, PhD

Keywords: chromatic number of a graph, Erdős-Faber-Lovász conjecture, Alon-Saks-Seymour conjecture, linear hypergraph

Math. Subj. Class. (2010): 05C15, 05C72, 05C65

Abstract:
The main topic of this final project paper is to describe and present the Erdős-Faber-Lovász (EFL) conjecture. In the paper we present different types of graphs and methods used for researching the conjecture. The main object studied by the conjecture are graphs that can be written as a union of n complete graphs, each on n vertices, such that no two of them share more than one vertex. In relation to such graphs we want to know what is their chromatic number, in particular, whether it equals n. We use different constructions and methods, such as integer linear programming, to find their chromatic number. With an integer linear program we can describe the chromatic number of any graph. We also describe some constructions of graphs used to study the conjecture from graphs that describe some other conjectures, which we show to be equivalent to the EFL conjecture. With that we can transfer a result on one type of graphs to a result about other graphs, which then satisfy some equivalent conjecture. The main result that we present is that for any graph satisfying the EFL conjecture we need at least n colors to properly color its vertices, and that the vertices of every such graph are $\lceil \frac{3}{2}n - 2 \rceil$-colorable. The conjecture has been proven for some special cases, but the question remains if the conjecture is true in general.

Zahvala

Iskreno se zahvaljujem mentorju izr. prof. dr. Martinu Milaniču za vso pomoč, nasvete in razlage pri izdelavi zaključne naloge.
Zahvaljujem se tudi preostalim profesorjem na UP FAMNIT, ki so bili v veliko pomoč skozi vsa tri leta izobraževanja.
Posebna zahvala pa gre tudi moji družini in soštudentom, tako iz smeri matematika, kot tudi iz smeri matematika v ekonomiji in financah, ki so mi stali ob strani in me podpirali skozi vsa tri leta študija.

Kazalo vsebine

Kazalo tabel

Kazalo slik

Seznam kratic

EFL	Erdős, Faber, Lovász
npr.	na primer
t.i.	tako imenovani
tj.	to je

1 Uvod

V zaključni nalogi bomo preučili domnevo Erdősa, Faberja in Lovásza, ali kakor jo pogosto navajajo v literaturi, EFL domnevo. Domneva izhaja iz leta 1972, ko so jo prvič formulirali madžarska matematika Paul Erdős in László Lovász ter ameriški matematik Vance Faber. EFL domneva je kombinatorična in tudi grafovsko teoretična, zanimiva je torej tako za kombinatorike kot tudi za tiste, ki se ukvarjajo s teorijo grafov, oziroma natančneje s proučevanjem barvanj grafov. Zanimiva pa je tudi zato, ker tako sama domneva kot tudi tehnike, uporabljene za dokazovanje delnih rezultatov, povezanih z domnevo, povezujejo teorijo in koncepte z različnih področij matematike, kot so teorija grafov, teorija hipergrafov in teorija linearnega programiranja. Domneva se glasi takole: "Vsak graf, ki ga lahko zapišemo kot unijo n polnih grafov na n točkah tako, da nobena dva od polnih grafov nimata skupne več kot ene točke, je moč pobarvati z n barvami." Ta domneva, ki jo lahko opišemo tudi s pomočjo prirejanj hipergrafov, je še vedno odprta.

V nalogi si bomo ogledali različne diskretne strukture, potrebne za različne oblike formulacij EFL domneve, in pokazali ekvivalenco med formulacijami v poglavju 2. V poglavju 3 bomo obravnavali racionalno obliko EFL domneve, ki sta jo leta 1992 dokazala Kahn in Seymour [9]. Nato si bomo v poglavju 4 ogledali nekaj delnih rezultatov za določitev zgornje meje za barvanje točk grafa iz domneve, kot sta rezultat Horáka in Tuze, da $n^{3/2}$ barv zadošča [6], in izboljšan rezultat Changa in Lawlerja [3]. V poglavju 5 bomo nato predstavili dvodelni analog domneve, tako imenovano domnevo Alona, Saksa in Seymourja, ki pa sta jo leta 2012 ovrgla Huang in Sudakov [7]. Kot bomo videli, je slednja povezana z EFL domnevo. Pred tem bomo predstavili še nekaj delnih rezultatov, povezanih z dvodelnim analogom domneve.

1.1 Osnovne definicije in oznake

Naj bo G graf. Z $V(G)$, ali krajše V, kadar bo graf razviden iz koteksta, bomo označevali množico vozlišč grafa G, z $E(G)$, ali krajše E, pa množico povezav grafa G. Graf G se lahko potem zapiše kot $G = (V, E)$, saj je graf natančno določen z množicama vozlišč in povezav. Vozliščem grafa bomo rekli tudi točke grafa. V nadaljevanju bomo besedo graf uporabljali zgolj za končne, enostavne in neusmerjene grafe. Končen graf je graf, katerega množici vozlišč in povezav sta končni množici. Graf je enostaven takrat, ko nima vzporednih povezav in zank. Graf je neusmerjen, če nobena njegova povezava nima usmeritve.

Definicija 1.1. *Komplement* grafa G je graf, ki ga označujemo z $\overline{G}$ in je definiran na množici točk $V(\overline{G}) := V(G)$ in množici povezav $E(\overline{G}) := \{\{u, v\} \mid u, v \in V(\overline{G}),\ u \neq v$ in $\{u, v\} \notin E(G)\}$.

Z oznako $[k]$ bomo označevali množico prvih k naravnih števil.

Definicija 1.2. Naj bo k pozitivno celo število. *Pravo k-barvanje* grafa G je taka funkcija $c : V(G) \to [k]$, da če je $\{u, v\} \in E(G)$ za točki $u, v \in V(G)$, potem velja $c(u) \neq c(v)$.

Definicija 1.3. *Kromatično število* grafa G, z oznako $\chi(G)$, je najmanjše pozitivno celo število k, za katerega obstaja pravo k-barvanje grafa G.

Definicija 1.4. Naj bo k pozitivno celo število. *Pravo k-barvanje povezav* grafa G je taka funkcija $c : E(G) \to [k]$, da če sta $e, f \in E(G)$, $e \neq f$ in velja $e \cap f \neq \emptyset$, potem velja $c(e) \neq c(f)$.

Definicija 1.5. *Kromatični indeks* grafa G, z oznako $\chi'(G)$, je najmanjše število k, za katerega obstaja pravo k-barvanje povezav grafa G.

Oglejmo si še pojem hipergrafa, ki je posplošitev pojma grafa. Poljuben hipergraf bomo označevali s $\mathcal{H}$.

Definicija 1.6 (Berge [1])**.** *Hipergraf* $\mathcal{H}$ je par $(V(\mathcal{H}), E(\mathcal{H}))$, kjer je $V(\mathcal{H}) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ končna množica in $E(\mathcal{H}) = (E_1, \ldots, E_m)$ družina nepraznih podmnožic množice $V(\mathcal{H})$, za katero velja $\cup_{i=1}^{m} E_i = V(\mathcal{H})$. Elementom množice $V(\mathcal{H})$ pravimo točke hipergrafa $\mathcal{H}$, množicam $E_i, \ldots, E_m$ pa pravimo povezave hipergrafa $\mathcal{H}$.

Definicija 1.7. Hipergraf $\mathcal{H}$ je *linearen*, če imata vsaki dve različni povezavi iz $E(\mathcal{H})$ največ eno točko v preseku.

Definicija 1.8. Hipergraf $\mathcal{H}$ je *n-uniformen*, če imajo vse njegove povezave enako število točk, in sicer n.

Opazimo lahko, da je graf G 2-uniformen hipergraf, saj je vsaka izmed njegovih povezav sestavljena iz natanko dveh točk. Od tod sledi, da so hipergrafi res posplošitev pojma grafov.

Definicija 1.9. Hipergraf $\mathcal{H}$ je *enostaven*, če nima povezav, ki vsebujejo natanko eno točko.

2 Ekvivalentne formulacije EFL domneve

Domnevo Erdősa, Faberja in Lovásza je moč formulirati na različne načine. Med njimi je formulacija domneve s pomočjo hipergrafov, za kar obstaja več različnih oblik zapisa domneve, formulacija domneve s pomočjo dvodelnih grafov in tudi formulacija domneve v jeziku presečnih predstavitev grafov, kot sta jo zapisala Klein in Magraf. V tem poglavju bomo pokazali, da so vse formulacije ekvivalentne. To nam omogoča možnosti, da se raziskovanja problema lotimo na najrazličnejše načine. Oglejmo si najprej EFL domnevo zastavljeno v najbolj osnovni obliki, s pomočjo množic.

Domneva 2.1 (glej npr. Romero in Sánchez-Arroyo [13]). *Naj bo* $|A_i| = n$, $1 \leq i \leq n$. *Naj velja* $|A_i \cap A_j| \leq 1$, *kjer je* $1 \leq i < j \leq n$. *Potem lahko elemente iz unije* $\cup_{i=1}^{n} A_i$ *pobarvamo z* n *barvami tako, da ima vsaka izmed množic elemente vseh barv.*

Da bi lahko zgornjo obliko domneve prepisali v jezik teorije grafov, moramo najprej definirati pojem polnega grafa.

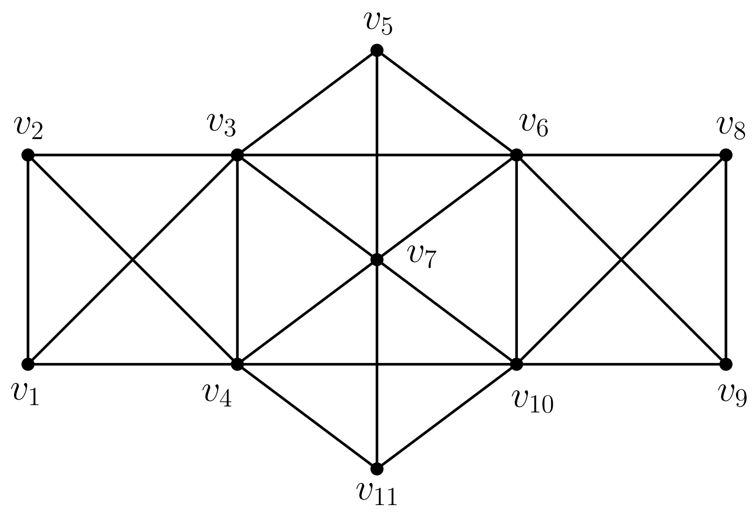
Definicija 2.2. *Poln graf* je graf G, v katerem sta vsaki dve različni točki $u, v \in V(G)$ sosednji. Oznaka za poln graf na n točkah je K_n.

Opazimo lahko, da če množice A_k iz zgoraj zapisane domneve zamenjamo z množicami točk polnih grafov $V(K_n)$, dobimo tako imenovano grafično obliko EFL domneve. Polne grafe K_n bomo označevali kar z $K_{(i)}$, kjer je i indeks, ki označuje enega izmed polnih grafov.

Domneva 2.3 (Erdősa, Faberja in Lovásza, glej npr. [8,13]). *Naj bo* G *graf, sestavljen iz unije* n *polnih grafov na* n *točkah,* $G = \cup_{i=1}^{n} K_{(i)}$. *Naj velja* $|V(K_{(i)}) \cap V(K_{(j)})| \leq 1$, $1 \leq i < j \leq n$. *Potem je* $\chi(G) \leq n$.

Primer grafa, ki zadošča EFL domnevi, je prikazan na sliki 1. Graf je unija 4 polnih grafov na 4 točkah, kjer je $V(K_{(1)}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $V(K_{(2)}) = \{v_3, v_5, v_6, v_7\}$, $V(K_{(3)}) = \{v_6, v_8, v_9, v_{10}\}$ in $V(K_{(4)}) = \{v_4, v_7, v_{10}, v_{11}\}$.

Sedaj ko imamo dva različna zapisa domneve Erdősa, Faberja in Lovásza, pokažimo, da sta res popolnoma ekvivalentna.



Slika 1: Graf, ki zadošča predpostavkam EFL domneve za $n = 4$.

Lema 2.4. *Domneva 2.1 velja natanko takrat, ko velja domneva 2.3.*

Dokaz. Najprej pokažimo, da če velja domneva 2.1, potem velja domneva 2.3. Naj velja domneva 2.1. Naj bo G poljuben graf, ki zadošča pogojem domneve 2.3. Definirajmo množice $A_i = V(K_{(i)})$, za vsak $i \in \{1, \ldots, n\}$. Velja, da je za $1 \leq i < j \leq n$ izpolnjen pogoj $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ natanko tedaj, ko je $V(K_{(i)}) \cap V(K_{(j)}) \neq \emptyset$. Dva različna polna grafa, pa imata v preseku največ eno točko, torej imata dve različni množici prav tako v preseku največ en element. Množice $A_1, \ldots, A_n$ torej zadoščajo predpostavkam domneve 2.1. Po predpostavki lahko njihove elemente pobarvamo z n barvami tako, da ima vsaka izmed množic elemente vseh barv, oziroma, da nobena dva elementa, ki pripadata isti množici, nimata iste barve. Pokažimo, da tako barvanje zadošča pravemu barvanju točk grafa G. S protislovjem, denimo, da obstajata dve povezani točki u, v v G, ki imata enako barvo. Ker sta točki povezani, sledi, da obstaja tak indeks $i \in \{1, \ldots, n\}$, da sta u, v elementa množice A_i. Dobili smo protislovje s predpostavko. Od tod sledi, da tako barvanje zadošča pravemu barvanje točk grafa G z n barvami.

Pokažimo sedaj, da velja implikacija tudi v obratno smer. Naj velja domneva 2.3 in naj bodo $A_1, \ldots, A_n$ take množice, vsaka s po n elementi, da za poljubni dve različni množici A_i,A_j, $1 \leq i < j \leq n$ velja, da je v njunem preseku največ en element. Skonstruirajmo sedaj graf G tako, da za točke polnega grafa $K_{(i)} \cong K_n$ v G vzamemo elemente množice A_i za vsak $i \in \{1, \ldots, n\}$. Za dva poljubna različna grafa $K_{(i)}$ in $K_{(j)}$ velja, da imata neprazen presek natanko tedaj, ko imata množici A_i in A_j neprazen presek. Ponovno, v preseku dveh poljubnih različnih množic je največ en element. Posledično je v preseku poljubnih dveh različnih polnih grafov največ ena točka. Graf G je po konstrukciji sestavljen iz n polnih grafov na n točkah, kjer je v preseku poljubnih dveh polnih grafov največ ena točka. Torej graf G zadošča pogojem EFL domneve. To

pomeni, da obstaja pravo barvanje točk grafa G z n barvami. Pokažimo sedaj, da imajo s takšnim barvanjem množice A_i elemente vseh barv. Ponovno s protislovjem: denimo, da obstaja taka množica A_i, da sta dva različna elementa v njej pobarvana z enako barvo. Naj bosta to elementa u in v. Ker u in v pripadata isti množici A_i, to pomeni, da sta u in v tudi dve točki, ki pripadata istemu polnemu grafu $K_{(i)}$. Ker smo začeli s pravim barvanjem grafa G, sledi, da nobeni dve točki, ki pripadata istemu polnemu grafu nimata enake barve, torej smo dobili protislovje s predpostavko, da imata dve različni točki, ki pripadata isti množici enako barvo.
Če združimo obe implikaciji, sledi, da sta zapisa domneve ekvivalentna. □

Definirajmo sedaj induciran podgraf H grafa G, ki zadošča predpostavkam EFL domneve. Podgraf H je definiran z $V(H) := \{v \in V(G) \mid \exists i, j, i \neq j$, da velja $v \in K_{(i)} \cap K_{(j)}\}$ in z $E(H) = \{\{u, v\} \mid u, v \in V(H)$ in $\{u, v\} \in E(G)\}$.

Trditev 2.5. *Naj bo G graf, ki zadošča predpostavkam EFL domneve. Naj bo H njegov induciran podgraf, kot smo ga definirali zgoraj. Če obstaja pravo n-barvanje grafa H, potem obstaja pravo n-barvanje grafa G.*

Dokaz. Naj obstaja pravo barvanje točk grafa H, definiranega zgoraj. Pokažimo sedaj, da obstaja njegova razširitev na pravo barvanje točk grafa G. Po definiciji grafa H opazimo, da moramo pobarvati samo točke, ki pripadajo natanko enemu izmed polnih grafov $K_{(i)}$ za nek $1 \leq i \leq n$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da želimo pobarvati točke, ki pripadajo zgolj polnemu grafu $K_{(1)}$. Denimo, da smo s pravim barvanjem grafa H pobarvali $1 \leq k \leq n$ točk polnega grafa $K_{(1)}$. Pobarvati moramo torej še $n - k$ njegovih točk in izmed n barv smo jih porabili k za pravo barvanje grafa H, torej nam ostane $n - k$ barv. Iz tega sledi, da lahko vsaki od nepobarvanih točk priredimo natanko eno od neuporabljenih barv, pri čemer različnim točkam priredimo različne barve. Imamo torej pravo barvanje grafa $K_{(1)}$. Ker take točke pripadajo zgolj enemu izmed polnih grafov, lahko nepobarvane točke vsakega izmed njih pobarvamo neodvisno od barvanja nepobarvanih točk preostalih polnih grafov, ki sestavljajo G. □

Grafovska oblika domneve je bolj znana kot domneva Erdősa, Faberja in Lovásza in tudi uporabljena za izpeljavo različnih drugih oblik domneve, ki jih bomo spoznali v nadaljevanju. Najprej si bomo ogledali različne ekvivalentne domneve, zapisane v jeziku hipergrafov, sledila bo predstavitev domneve s pomočjo dvodelnih grafov, na koncu pa si bomo ogledali, kako sta domnevo formulirala Klein in Margraf s pomočjo presečnega števila grafa.

2.1 EFL domneva v jeziku hipergrafov

Spomnimo se definicije linearnosti hipergrafov. S pomočjo linearnosti lahko zastavimo več različnih domnev, ki so vse ekvivalentne EFL domnevi, kar bomo v nadaljevanju tega poglavja tudi pokazali. Za začetek pa potrebujemo nekaj pomembnih definicij, ki nam bodo pomagale pri zapisih in pri dokazovanju ekvivalenc.

Definicija 2.6. Naj bo B neprazna množica barv. *Barvanje točk* hipergrafa $\mathcal{H}$ je taka funkcija $c : V(\mathcal{H}) \to B$, ki vsaki točki hipergrafa priredi barvo $b \in B$.

Definicija 2.7. Povezava v hipergrafu $\mathcal{H}$ je *monokromatična*, če imajo vse točke v njej enako barvo. Barvanje točk hipergrafa $\mathcal{H}$ je *šibko*, če nobena njegova povezava velikosti vsaj dva ni monokromatična.

Definicija 2.8. Povezava v hipergrafu $\mathcal{H}$ je *heterokromatična*, ko ima vsaka točka v njej drugačno barvo. Barvanje točk hipergrafa $\mathcal{H}$ je *krepko*, če je vsaka njegova povezava heterokromatična.

Definiciji šibkega in krepkega barvanja točk sta ekvivalentni v primeru 2-uniformnih hipergrafov, tj. grafov.

Definicija 2.9. *Kromatično število hipegrafa* $\chi(\mathcal{H})$ je najmanjše naravno število k, za katerega obstaja krepko barvanje njegovih točk $c : V(\mathcal{H}) \to [k]$.

Sedaj si lahko ogledamo naslednjo domnevo v hipergrafih (glej npr. [8, 13]), ki se nanaša na krepko barvanje točk hipergrafa.

Domneva 2.10. *Naj bo $\mathcal{H}$ linearen n-uniformen hipergraf z natanko n povezavami. Potem je $\chi(\mathcal{H}) \leq n$.*

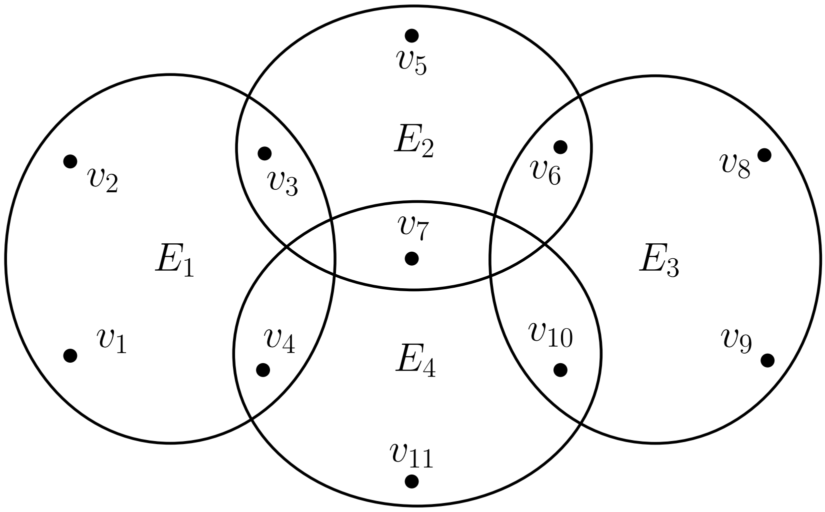
Preden dokažemo ekvivalenco med domnevama, si oglejmo postopek konstrukcije hipergrafa iz grafa, ki zadošča predpostavkam EFL domneve.

Naj bo G poljuben graf, ki zadošča predpostavkam EFL domneve. Torej $G = \cup_{i=1}^{n} K_{(i)}$, kjer je $|V(K_{(i)})| = n$ za vsak $1 \leq i \leq n$ in $|V(K_{(i)}) \cap V(K_{(j)})| \leq 1$ za vse $1 \leq i < j \leq n$. Sedaj množico točk hipergrafa $\mathcal{H}$ opišemo kot $V(\mathcal{H}) := V(G)$, družino njegovih povezav pa z $E(\mathcal{H}) := (E_1, \ldots, E_n)$, kjer velja $E_i := V(K_{(i)})$. Iz konstrukcije sledi, da je število povezav hipergrafa enako n in tudi, da je velikost vsake povezave E_i enaka n. Slika 2 prikazuje hipergraf, ki ga dobimo, ko konstrukcijo uporabimo na grafu iz slike 1.

Trditev 2.11. *Hipergraf $\mathcal{H}$, dobljen po zgornji konstrukciji, je linearen.*

Dokaz. Dokazujemo s protislovjem. Naj bo $i \neq j$ in predpostavimo, da velja $|E_i \cap E_j| \geq 2$. Iz tega sledi, da obstajata taki različni točki $u, v \in V(\mathcal{H})$, da velja $u,v \in E_i$ in $u,v \in E_j$. Po definiciji povezav hipegrafa $\mathcal{H}$ sledi, da je $u \in V(K_{(i)})$ in $u \in V(K_{(j)})$, torej velja $u \in V(K_{(i)} \cap K_{(j)})$. Hkrati pa velja, da je tudi $v \in V(K_{(i)})$ in $v \in V(K_{(j)})$, torej velja $v \in V(K_{(i)} \cap K_{(j)})$. Iz tega sledi, da je $|V(K_{(i)}) \cap V(K_{(j)})| \geq 2$ v grafu G. Dobili smo protislovje s predpostavko iz konstrukcije, da za graf G velja $|V(K_{(i)}) \cap V(K_{(j)})| \leq 1$. Torej velja, da je za vse $i \neq j$, $|E_i \cap E_j| \leq 1$, torej je $\mathcal{H}$ linearen hipergraf z n povezavami velikosti n. □

Hipergraf, ki ga dobimo po konstrukciji, torej zadošča pogojem prejšnje domneve. Oglejmo si sedaj še obratno konstrukcijo, ki nam iz hipergrafa porodi graf, ki zadošča pogojem EFL domneve.



Slika 2: Hipergraf, dobljen po konstrukciji iz grafa na sliki 1.

Naj bo $\mathcal{H}$ linearen hipergraf, z natanko n povezavami, vsaka velikosti n, definiran z družino povezav $E(\mathcal{H}) = (E_1, \ldots, E_m)$ in množico točk $V(\mathcal{H})$. Za množico točk grafa G vzamemo kar množico točk hipergrafa $\mathcal{H}$, $V(G) := V(\mathcal{H})$, in definiramo za vsak $1 \leq i \leq n$, $V(K_{(i)}) := E_i$, kjer so $K_{(i)}$ polni grafi na n točkah. Za graf G potem definiramo, $G := \cup_{i=1}^{n} K_{(i)}$. Opazimo lahko, da med vsemi točkami, ki pripadajo isti povezavi hipergrafa, dobimo v grafu G vse možne povezave. Ker ima vsaka povezava velikost n, to pomeni, da dobimo iz vsake povezave hipergrafa natanko poln graf K_n.

Trditev 2.12. *Graf G iz zgornje konstrukcije zadošča predpostavkam EFL domneve.*

Dokaz. Dokazujemo s protislovjem. Predpostavimo, da obstajata taka indeksa $1 \leq i < j \leq n$, da velja $|V(K_{(i)}) \cap V(K_{(j)})| \geq 2$. Iz tega sledi, da obstajata točki $u, v \in$

$V(K_{(i)}) \cap V(K_{(j)})$, torej $u, v \in V(K_{(i)})$ in $u, v \in V(K_{(j)})$. Po zgornji konstrukciji sledi, da sta $u, v \in E_i$ in $u, v \in E_j$, torej sta tudi v preseku $E_i \cap E_j$, kar je protislovje s predpostavko, da je hipergraf $\mathcal{H}$ linearen. Torej velja, da imata dva poljubna različna polna grafa, ki sestavljata graf G, v preseku največ eno točko. Graf G torej zadošča predpostavkam EFL domneve. □

Obe konstrukciji bomo sedaj uporabili za dokaz naslednje leme, ki združuje obe domnevi.

Lema 2.13. *EFL domneva velja natanko takrat, ko velja domneva 2.10.*

Dokaz. Pokažimo najprej, da velja implikacija, ki pravi, da če velja EFL domneva, potem velja domneva 2.10. Naj za vsak graf G, ki zadošča predpostavkam EFL domneve velja, da je $\chi(G) \leq n$. Naj bo $\mathcal{H}$ poljuben linearen n-uniformen hipergraf z n povezavami. Uporabimo konstrukcijo grafa G iz n-uniformnega hipergrafa z n povezavami, kot smo jo opisali zgoraj. Po trditvi 2.12 sledi, da graf G zadošča pogojem EFL domneve. Iz tega sledi, da obstaja pravo n-barvanje njegovih točk. Vzemimo tako barvanje in pokažimo, da zadostuje tudi pogojem krepkega barvanja točk hipergrafa $\mathcal{H}$. S protislovjem, denimo, da to ni res. Torej obstajata različni točki $u, v \in E_i$ za nek $1 \leq i \leq n$ v hipergrafu $\mathcal{H}$, ki imata enako barvo. Po konstrukciji, ker velja $u, v \in E_i$ sledi, da velja tudi $u, v \in K_{(i)}$. Ker pa smo vzeli pravo barvanje točk grafa G, to pomeni, da nobeni dve točki, ki pripadata istemu polnemu grafu, nimata enake barve. Prišli smo do protislovja. Pravo barvanje točk grafa G z n barvami torej ustreza krepkemu barvanju točk hipergrafa $\mathcal{H}$ z n barvami in je posledično $\chi(\mathcal{H}) \leq n$.

Pokažimo sedaj implikacijo še v obratno smer. Naj za vsak linearen n-uniformen hipergraf z n povezavami velja, da je $\chi(\mathcal{H}) \leq n$. Naj bo G poljuben graf, ki zadošča predpostavkam EFL domneve. Uporabimo konstrukcijo grafa G iz hipergrafa $\mathcal{H}$ in pokažimo, da krepko barvanje točk hipergrafa $\mathcal{H}$ zadošča pravemu barvanju točk grafa G. S protislovjem: predpostavimo, da obstajata taki točki $u, v \in V(G)$, da sta u in v povezani in imata enako barvo. Ker sta točki povezani, velja, da pripadata istemu polnemu grafu $K_{(i)}$ za nek $i \in [n]$. Po konstrukciji torej pripadata tudi isti povezavi E_i. Ker smo vzeli krepko barvanje točk hipergrafa $\mathcal{H}$, to pomeni, da nobeni dve točki, ki pripadata isti povezavi, nimata enake barve, kar je protislovje s predpostavko, da obstajata povezani točki v grafu G z enako barvo.
Ker velja implikacija v obe smeri, zakjučimo, da sta domnevi ekvivalentni. □

Dokazali smo, da sta domnevi ekvivalentni, torej nam dokaz ene samodejno poda tudi dokaz druge. Sedaj pa si oglejmo še eno domnevo v jeziku hipergrafov in njeno povezavo s prejšnjima domnevama. Pred tem pa potrebujemo še nekaj definicij.

Definicija 2.14. *Stopnja točke* u v hipergrafu $\mathcal{H}$, z oznako $deg(u)$, je število povezav, ki vsebujejo točko u.

Definicija 2.15. Hipergraf $\mathcal{H}$ je n*-regularen* natanko tedaj, ko ima vsaka točka stopnjo n.

Definicija 2.16. Naj bo $\mathcal{H}$ hipergraf z družino povezav $E_1, \ldots, E_m$ in naj bo B množica barv. *Pravo barvanje povezav* hipergrafa $\mathcal{H}$ je taka funkcija $c : \{1, \ldots, m\} \to B$, da velja: če je $i \neq j$ in je $E_i \cap E_j \neq \emptyset$, potem velja $c(i) \neq c(j)$.
Kromatični indeks hipergrafa $\chi'(\mathcal{H})$ je najmanjše naravno število k, za katerega obstaja pravo barvanje njegovih povezav s k barvami.

S prirejanjem barv indeksni množici $\{1, \ldots, m\}$ smo priredili barvo tudi pripadajočim povezavam $E_1, \ldots, E_m$.

Domneva 2.17 (Berge [2])**.** *Naj bo $\mathcal{H}$ linearen hipergraf na n točkah, kjer je stopnja vsake točke n. Potem je $\chi'(\mathcal{H}) \leq n$.*

Podobno kot pri EFL domnevi (glej trditev 2.5) tudi tukaj zadošča pokazati, da je pri pogoju, da je $\mathcal{H}$ enostaven linearen hipergraf na n točkah, $\chi'(\mathcal{H}) \leq n$. S pogojem enostavnosti hipergrafa se tako znebimo povezav velikosti ena.

Domneva 2.18 (glej npr. Kahn [8])**.** *Naj bo $\mathcal{H}$ enostaven linearen hipergraf na n točkah. Potem velja, da je $\chi'(\mathcal{H}) \leq n$.*

Lema 2.19. *Domneva 2.17 velja natanko takrat, ko velja domneva 2.18.*

Dokaz. Predpostavimo, da velja domneva 2.17. Naj bo $\mathcal{H}$ poljuben enostaven linearen hipergraf na n točkah. Iz dejstva, da je hipergraf $\mathcal{H}$ enostaven in linearen, sledi, da ima vsaka točka v njem stopnjo največ $n - 1$. Dodajmo sedaj vsaki točki hipergrafa $\mathcal{H}$ toliko povezav velikosti 1, da bo imela vsaka točka stopnjo natanko n. Ker smo dodajali samo povezave velikosti 1, je linearnost hipergrafa, po dodanih vseh dodatnih povezavah, ohranjena. Dobljeni hipergraf, recimo mu $\mathcal{H}'$, zadošča pogojem domneve 2.17, torej velja $\chi'(\mathcal{H}') \leq n$. Vzemimo pravo n-barvanje povezav hipergrafa $\mathcal{H}'$. Ker z odstranitvijo dodanih povezav v hipergrafu $\mathcal{H}'$ ne spremenimo barvanja povezav, to pomeni, da lahko tudi povezave v hipergrafu $\mathcal{H}'$ pobarvamo z n barvami, torej velja domneva 2.18.
Poglejmo si še implikacijo v drugo smer. Predpostavimo, da velja domneva 2.18 in naj bo $\mathcal{H}$ poljuben linearen hipergraf na n točkah, kjer je stopnja vsake točke natanko n. Ker je $\mathcal{H}$ linearen, sledi, da je vsaka točka v njem vsebovana v vsaj eni povezavi velikosti 1, saj je lahko vsebovana v največ $n - 1$ povezavah velikosti vsaj 2. Odstranimo sedaj iz hipergrafa $\mathcal{H}$ vse povezave velikosti 1. Dobljen hipergraf zadošča pogojem domneve

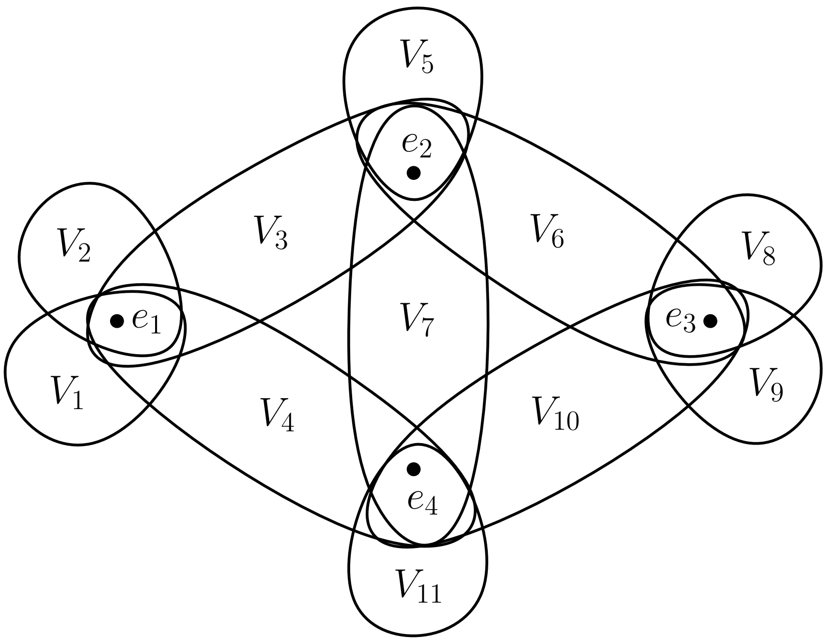
2.18. Obstaja torej pravo n-barvanje njegovih povezav. Sedaj dodajmo vse odstranjene povezave nazaj. Pri vsaki točki $v \in V(\mathcal{H})$ smo za barvanje povezav porabili natanko $n-k$ barv, kjer je k število povezav velikosti 1, ki točko v vsebujejo. S preostalimi k barvami lahko poljubno pobarvamo vse izmed preostalih povezav, ki vsebujejo točko v in so velikosti 1. Na ta način dobimo pravo n-barvanje povezav hipergrafa $\mathcal{H}$, torej velja $\chi'(\mathcal{H}) \leq n$.
S tem smo pokazali, da je domneva 2.17 ekvivalentna domnevi 2.18. □

Kot bomo videli pozneje, je domneva 2.17 ekvivalentna domnevi 2.10, ki je po lemi 2.13 ekvivalentna EFL domnevi. Iz tega pa bo sledilo, da je tudi domneva 2.18 ekvivalentna EFL domnevi.

Domneva 2.20 (glej npr. Romero in Sánchez-Arroyo [13]). *Naj bo $\mathcal{H}$ linearen hipergraf na n točkah, brez podvojenih povezav. Potem velja naslednje: $\chi'(\mathcal{H}) \leq n$.*

Lema 2.21. *Domneva 2.20 velja natanko takrat, ko velja domneva 2.1.*

Dokaz leme 2.21 lahko najdemo v poglavju 2 članka z naslovom "*Packing Nearly-Disjoint Sets*", avtorja P.D. Seymour [15]. V članku avtor uporabi ekvivalentno obliko domneve 2.20, vendar opisano s pomočjo množic. Po lemi 2.4 sledi, da je domneva 2.20 ekvivalentna EFL domnevi.



Slika 3: Dualen hipergraf, dobljen po konstrukciji iz hipergrafa na sliki 2.

Definicija 2.22 (Berge [1])**.** Naj bo $\mathcal{H}$ hipergraf z množico točk $V(\mathcal{H}) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ in družino povezav $E_1, \ldots, E_m$. *Dualni hipergraf* hipergrafa $\mathcal{H}$, z oznako $\mathcal{H}^*$, je hipergraf z množico točk $V(\mathcal{H}^*) := \{e_1, \ldots, e_m\}$ in družino povezav $E(\mathcal{H}^*) := (V_1, \ldots, V_n)$, kjer velja $V_i = \{e_j \mid v_i \in E_j\}$.

Rezultat konstrukcije dualnega hipergrafa, uporabljene na hipergrafu iz slike 2, lahko vidimo na sliki 3. Z uporabo konstrukcije dualnega hipergrafa na hipergrafu s slike 3, ponovno dobimo hipergraf na sliki 2.
Za dokaz ekvivalence med domnevama 2.10 in 2.17 bomo uporabili naslednjo lemo 2.23.

Lema 2.23. *Naj bo $\mathcal{H}$ hipergraf. Potem velja naslednje:*

1) $\mathcal{H} = (\mathcal{H}^*)^*$.

2) $\mathcal{H}$ *ima natanko* n *povezav natanko tedaj, ko ima* $\mathcal{H}^*$ *natanko* n *točk.*

3) $\mathcal{H}$ *je* n *uniformen natanko tedaj, ko je* $\mathcal{H}^*$ n*-regularen.*

4) $\mathcal{H}$ *je linearen natanko tedaj, ko je* $\mathcal{H}^*$ *linearen.*

5) $\chi(\mathcal{H}) = \chi'(\mathcal{H}^*)$.

Točke 1), 2) in 3) sledijo direktno iz konstrukcije. Pokazali pa bomo točki 4) in 5).

Dokaz točke 4) leme 2.23. Naj bo $\mathcal{H}$ poljuben linearen hipergraf na množici točk $\{v_1, \ldots, v_n\}$ in družini povezav $E_1, \ldots, E_m$. Predpostavimo, da obstajata taka indeksa $1 \leq i < j \leq n$, da imata povezavi V_i in V_j dualnega hipergrafa $\mathcal{H}^*$, v preseku več kot eno točko. Iz tega sledi, da obstajata taki povezavi hipergrafa $\mathcal{H}$, denimo E_k in E_ℓ, za neka indeksa $1 \leq k < \ell \leq m$, da velja $e_k \in V_i \cap V_j$ in $e_\ell \in V_i \cap V_j$. Torej po konstrukciji velja $v_i, v_j \in E_k$ in $v_i, v_j \in E_\ell$. Poleg tega je $v_i \neq v_j$, saj velja $i < j$. Posledično velja, da je $|E_k \cap E_\ell| \geq 2$, vendar je $\mathcal{H}$ linearen, kar je protislovje. Iz tega sledi, da je dualni hipergraf $\mathcal{H}^*$ tudi linearen.
Po točki 1) iz leme velja, da je $\mathcal{H} = (\mathcal{H}^*)^*$. Po že dokazanem sledi, da če je $\mathcal{H}^*$ linearen hipergraf, potem je tudi $(\mathcal{H}^*)^*$ linearen hipergraf, torej je $\mathcal{H}$ linearen. □

Dokaz točke 5) leme 2.23. Naj bo $\mathcal{H}$ poljuben hipergraf in naj bo $\mathcal{H}^*$ njegov dualni hipergraf. Naj bo $\chi(\mathcal{H})$ kromatično število hipergrafa $\mathcal{H}$. Vzemimo poljubno krepko barvanje točk hipergrafa $\mathcal{H}$ s $\chi(\mathcal{H})$ barvami. Za vsako točko $v_i \in V(\mathcal{H})$ velja, točka v_i je pobarvana z neko barvo natanko tedaj, ko je tudi povezava V_i hipergrafa $\mathcal{H}^*$ pobarvana z enako barvo. Pokažimo, da tako barvanje zadostuje pogoju barvanja povezav dualnega hipergrafa $\mathcal{H}^*$. S protislovjem: denimo, da obstajata taki povezavi V_i in V_j hipergrafa $\mathcal{H}^*$, da velja $i < j$, $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ in da sta V_i in V_j pobarvani z enako barvo. Iz tega sledi, da obstaja tak $e_k \in V(\mathcal{H}^*)$, da je $e_k \in V_i \cap V_j$, kar pa pomeni, da sta točki v_i in v_j hipergrafa $\mathcal{H}$ vsebovani v povezavi E_k hipergrafa $\mathcal{H}$ in pobarvani z enako barvo. To je protislovje s predpostavko, da smo začeli s krepkim barvanjem točk hipergrafa $\mathcal{H}$. Iz tega sledi, da je $\chi'(\mathcal{H}^*) \leq \chi(\mathcal{H})$. Povsem analogno sledi tudi dokaz v drugo smer, od koder sledi, da je $\chi(\mathcal{H}) \leq \chi'(\mathcal{H}^*)$. Iz obeh rezultatov skupaj sledi, da je $\chi(\mathcal{H}) = \chi'(\mathcal{H}^*)$. □

Pokazati moramo samo še, da sta domnevi res ekvivalentni.

Lema 2.24. *Domneva 2.10 velja natanko takrat, ko velja domneva 2.17.*

Dokaz. Pokažimo, da če velja domneva 2.10, potem velja tudi domneva 2.17. Naj velja domneva 2.10 in naj bo $\mathcal{H}$ poljuben hipergraf, ki zadošča predpostavkam domneve 2.17. Po točkah 2), 3) in 4) leme 2.23 vemo, da njegov dualni hipergraf $\mathcal{H}^*$ zadošča predpostavkam domneve 2.10. Posledično zanj velja, da je $\chi(\mathcal{H}^*) \leq n$. Sedaj, po točkah 1) in 5) leme 2.23 velja, da je tudi $\chi'(\mathcal{H}) = \chi'((\mathcal{H}^*)^*) = \chi(\mathcal{H}^*) \leq n$. Iz tega sledi, da velja tudi domneva 2.17.

Pokažimo še implikacijo v obratni smeri. Naj velja domneva 2.17 in naj bo $\mathcal{H}$ poljuben hipergraf, ki zadošča predpostavkam domneve 2.10. Enako kot prej, po točkah 2), 3) in 4) leme 2.23 vemo, da njegov dualni hipergraf $\mathcal{H}^*$ zadošča predpostavkam leme 2.17. Posledično zanj velja, da je $\chi'(\mathcal{H}^*) \leq n$. Sedaj, po točki 5) leme 2.23 velja, da je tudi $\chi(\mathcal{H}) \leq n$. Iz tega sledi, da velja tudi domneva 2.10. □

Domnevi 2.10 in 2.17 sta torej ekvivalentni. Z uporabo leme 2.13 pa sledi, da je domneva 2.17 ekvivalentna EFL domnevi. Različni zapisi domneve s pomočjo hipergrafov so uporabni predvsem zaradi koncepta dualnosti, kar bomo v poglavju 3 o racionalni obliki EFL domneve tudi uporabili v dokazu le-te.

2.2 EFL domneva v jeziku dvodelnih grafov

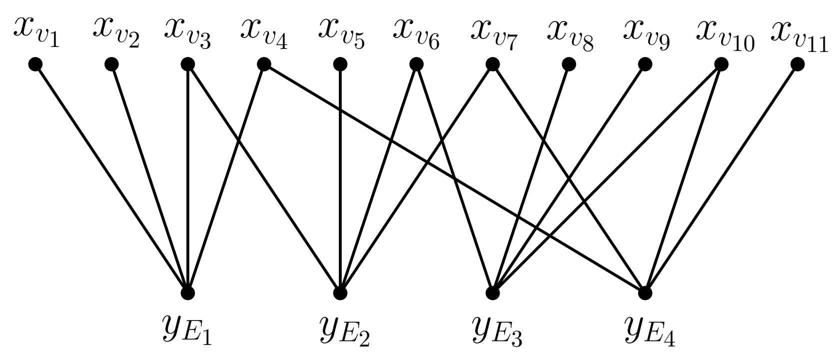
V povezavi z EFL domnevo smo do sedaj spoznali nekaj različnih zapisov. Med njimi tudi domnevo, ki govori o barvanju točk linearnega hipergrafa. S pomočjo slednje bomo spoznali še eno domnevo, ki govori o dvodelnih grafih. Preden si jo bolj natančno ogledamo, pa moramo definirati nekaj osnovnih pojmov, ki so potrebni za razumevanje nadaljnjega besedila.

Definicija 2.25. Naj bo G graf. *Neodvisna množica grafa G* je podmnožica množice njegovih točk $V(G)$, za katero velja, da nobeni dve točki v njej nista sosednji.

Pojem dvodelnega grafa je definiran na naslednji način.

Definicija 2.26. Graf je *dvodelen*, če je njegovo množico točk moč razdeliti na dve neodvisni množici. Dvodelne grafe bomo označevali z B (angleško bipartite graph), poljubni neodvisni množici v particiji $V(B)$ pa z X in Y.

Oglejmo si sedaj, kako lahko poljuben hipergraf $\mathcal{H}$, z množico točk $\{v_1, \ldots, v_n\}$ in družino povezav $E_1, \ldots, E_m$, predstavimo z dvodelnim grafom B. Za dvodelno predstavitev hipergrafa $\mathcal{H}$ bomo uporabili oznako $B(\mathcal{H})$. Konstrukcija grafa $B(\mathcal{H})$, kar lahko vidimo na sliki 4, je sledeča. Neodvisno množico X definiramo kot $X := \{x_{v_i} \mid v_i \in V(\mathcal{H})\}$ (točke zgoraj na sliki 4). Za vsako točko hipergrafa imamo torej eno njej pripadajočo točko v X. Neodvisno množico Y pa definiramo kot $Y := \{y_{E_j} \mid 1 \leq j \leq m\}$, kjer so E_j povezave hipergrafa $\mathcal{H}$ (točke spodaj na sliki 4). Na ta način smo množico točk dvodelnega grafa $B(\mathcal{H})$ razdelili na dve neodvisni množici X in Y. Povezave med obema množicama pa določimo na naslednji način: za vsak par točk $\{x_{v_i}, y_{E_j}\}$ velja, da sta povezani v grafu B natanko takrat, ko velja $v_i \in E_j$ v hipergrafu $\mathcal{H}$.



Slika 4: Dvodelni graf, dobljen po konstrukciji iz hipergrafa na sliki 2.

Hitro lahko opazimo, da če naredimo dualni hipergraf $\mathcal{H}^*$ hipergrafa $\mathcal{H}$ po konstrukciji iz podpoglavja 2.1, je njegova dvodelna predstavitev $B(\mathcal{H}^*)$ izomorfna dvodelni predstavitvi $B(\mathcal{H})$, le vlogi neodvisnih množic X in Y se zamenjata (glej npr. [13]). Iz te ugotovitve hitro sledi ugotovitev, ki smo jo v podpoglavju 2.1 že dokazali, da je dualni hipergraf linearnega hipergrafa tudi sam linearen. Oglejmo si še enkrat dokaz, tokrat s pomočjo njihovih dvodelnih predstavitev, ki je enostavnejši.

Alternativen dokaz točke 4) v lemi 2.23. Pogoj, da je hipergraf $\mathcal{H}$ linearen, je ekvivalenten pogoju, da v njegovi dvodelni predstavitvi $B(\mathcal{H})$ ni ciklov dolžine 4. V dvodelni predstavitvi cikel dolžine 4 namreč pomeni, da sta dve točki iz neodvisne množice X povezani z istima točkama neodvisne množice Y, kar po konstrukciji pomeni, da hkrati pripadata dvema različnima povezavama v $\mathcal{H}$. Ker sta dvodelni predstavitvi izomorfni, velja, da v $B(\mathcal{H}^*)$ tudi ni ciklov dolžine 4, torej je tudi hipergraf $\mathcal{H}^*$ linearen. □

V povezavi z grafi obstaja posebna vrsta barvanja njegovih povezav, ki se imenuje hibridno barvanje povezav, oziroma, če želimo natančno opredeliti, s koliko barvami pobarvamo povezave, temu rečemo tudi hibridno k-barvanje povezav grafa. Ponovno se bomo za notacijo sklicevali na članek Romera in Sánchez-Arroya [13].

Definicija 2.27. Naj bo G poljuben graf. Naj bo X neodvisna množica točk grafa G. *Hibridno k-barvanje povezav* grafa G, glede na množico X, je taka funkcija $c : E(G) \to [k]$, da velja:

(i) Za vsako točko $v \in X$ je množica povezav, ki vsebujejo v, monokromatična (če je $v \in e$ in $v \in f$, potem je $c(e) = c(f)$),

(ii) za vsako točko $u \in V(G) \backslash X$ je množica povezav, ki vsebujejo u, heterokromatična (če je $u \in e'$, $u \in f'$ in $e' \neq f'$, potem je $c(e') \neq c(f')$).

Najmanjšemu številu k, za katerega obstaja hibridno k-barvanje povezav grafa G pravimo *hibridni kromatični indeks* grafa in ga označimo s $\chi'(G, X)$.

Naj bo G poljuben graf in $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ poljubna neodvisna množica grafa G. Pokažimo sedaj, da vedno obstaja hibridno k-barvanje povezav grafa G, glede na množico X. Poiskali bomo tako barvanje, ki zadošča pogojem (i) in (ii) v definiciji 2.27. Za vsako točko x_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, pobarvamo vse povezave, ki vsebujejo točko x_i, z barvo i. S tem smo zadostili pogoju (i) iz definicije. Hkrati velja, da če ima točka $y \in V(G) \setminus X$ sosede v množici X, potem je vsaka izmed povezav $\{y, x_i\}$ pobarvana z drugačno barvo, kar zadostuje pogoju (ii) iz definicije. Vsako izmed preostalih povezav pobarvamo z neko novo barvo v poljubnem vrstnem redu. Na ta način zadostimo pogoju (ii) za vsako točko grafa, ki ni vsebovana v množici X. Ker je bil graf G poljuben, prav tako pa tudi neodvisna množica grafa X, sledi, da je hibridno k-barvanje povezav grafa G, glede na neodvisno množico X, dobro definirano.

Poglejmo si sedaj lemo, ki povezuje kromatično število hipergrafa in hibridni kromatični indeks njegove dvodelne predstavitve.

Lema 2.28 (Romero in Sánchez-Arroyo [13])**.** *Naj bo $\mathcal{H}$ linearen hipergraf, naj bo $B(\mathcal{H})$ njegova dvodelna predstavitev in naj bo k naravno število. Potem velja, $\chi(\mathcal{H}) \leq k$ natanko takrat, ko je $\chi'(B(\mathcal{H}), X) \leq k$, kjer velja $X := \{x_{v_i} \mid v_i \in V(\mathcal{H})\}$.*

Dokaz. Pokažimo najprej, če je $\mathcal{H}$ linearen hipergraf in velja $\chi(\mathcal{H}) \leq k$, za neko naravno število k, potem je $\chi'(B(\mathcal{H}), X) \leq k$. Naj bo $\mathcal{H}$ linearen hipergraf in naj velja $\chi(\mathcal{H}) \leq k$. To pomeni, da obstaja tako k-barvanje njegovih točk, da je vsaka njegova povezava heterokromatična. Vzemimo tako barvanje in za njegovo dvodelno predstavitev $B(\mathcal{H})$ določimo, da ima vsaka povezava $f \in E(B(\mathcal{H}))$ enako barvo kot točka iz neodvisne množice X, ki je krajišče povezave f. S takim barvanjem povezav smo zagotovili pravilnost prvega pogoja iz definicije hibridnega barvanja povezav dvodelnega grafa $B(\mathcal{H})$. Pokažimo sedaj, da barvanje zadostuje tudi drugemu pogoju. S protislovjem, predpostavimo, da obstaja točka $y_{E_i} \in Y$, za katero množica povezav, incidenčnih s točko y_{E_i}, ni heterokromatična. Torej obstajata taki točki $x_{v_p}, x_{v_q} \in X$, $1 \leq p < q \leq |X|$, za kateri sta povezavi $\{x_{v_p}, y_{E_i}\}$ in $\{x_{v_q}, y_{E_i}\}$ pobarvani z enako barvo. Torej sta tudi točki v_p in v_q v hipergrafu $\mathcal{H}$ pobarvani z enako barvo in pripadata skupni povezavi, namreč e. To je protislovje s predpostavko, da je vsaka povezava hipergrafa $\mathcal{H}$ heterokromatična. Torej obstaja hibridno k-barvanje povezav grafa $B(\mathcal{H})$, torej velja $\chi'(B(\mathcal{H}), X) \leq k$.

Pokažimo implikacijo še v obratno smer. Naj bo $B(\mathcal{H})$ dvodelna predstavitev linearnega hipergrafa $\mathcal{H}$. Naj velja, da je $\chi'(B(\mathcal{H}), X) \leq k$. Iz tega sledi, da obstaja hibridno k-barvanje povezav grafa $B(\mathcal{H})$. Torej po lastnosti (i) iz definicije velja, da je za vsako točko $v \in V(\mathcal{H})$ množica povezav, ki vsebujejo x_v, monokromatična. Pobarvajmo sedaj vsako točko $v \in V(\mathcal{H})$ z barvo, ki pripada poljubni povezavi grafa $B(\mathcal{H})$, ki vsebujejo točko x_v. Pokažimo, da je dobljeno barvanje točk hipergrafa $\mathcal{H}$, s k barvami, krepko barvanje množice njegovih točk. S protislovjem, predpostavimo, da ni. Torej obstaja taka povezava hipergrafa $\mathcal{H}$, ki ni heterokromatična. Naj bo to povezava E_i in naj bosta v_p, v_q različni točki v njej, pobarvani z enako barvo. Po konstrukciji dvodelne predstavitve hipergrafa $\mathcal{H}$ sledi, da sta točki x_{v_p}, x_{v_q} v grafu $B(\mathcal{H})$ povezani s točko y_{E_i}, torej sta tudi povezavi $\{x_{v_p}, y_{E_i}\}$ in $\{x_{v_q}, y_{E_i}\}$ pobarvani z enako barvo, kar je protislovje z lastnostjo (ii) iz definicije hibridnega barvanja povezav grafa. Zaključimo, da je dobljeno barvanje krepko k-barvanje množice točk hipergrafa $\mathcal{H}$, torej je $\chi(\mathcal{H}) \leq k$. □

Domneva 2.29. *Naj bo G enostaven dvodelen graf brez 4-ciklov, z neodvisnima množicama X in Y, kjer je $|Y| = n$ in je stopnja vsake točke $v \in Y$ enaka n. Potem je $\chi'(G, X) \leq n$.*

Hitro lahko opazimo, da dvodelna predstavitev linearnega hipergrafa $\mathcal{H}$ z n povezavami velikosti n ustreza pogojem iz domneve 2.29, ki pa je po lemi 2.28 ekvivalentna domnevi 2.10 in posledično tudi EFL domnevi.

2.3 Formulacija Kleina in Margrafa

Kot zadnjo bomo spoznali obliko EFL domneve, kot sta jo zapisala Klein in Margraf v članku [10]. Njuna oblika domneve govori o presečnem grafu hipergrafa in povezuje tako grafe kot hipergrafe. Poglejmo si najprej, kaj je presečni graf danega hipergrafa.

Definicija 2.30 (glej npr. Klein in Margraf [10], Romero in Sánchez-Arroyo [13])**.** Naj bo $\mathcal{H}$ enostaven hipergraf z družino povezav $E_1, \ldots, E_m$. *Presečni graf* hipergrafa $\mathcal{H}$, ki ga bomo označevali z $G_{\mathcal{H}}$, je graf, definiran z množico točk $V(G_{\mathcal{H}}) := \{e_1, \ldots, e_m\}$ in z množico povezav $E(G_{\mathcal{H}}) := \{\{e_i, e_j\} \mid i \neq j \text{ in } E_i \cap E_j \neq \emptyset\}$.

Lema 2.31. *Naj bo $\mathcal{H}$ enostaven hipergraf in $G_{\mathcal{H}}$ njegov presečni graf. Potem je $\chi'(\mathcal{H}) = \chi(G_{\mathcal{H}})$.*

Dokaz. Vzemimo enostaven hipergraf $\mathcal{H}$. Vzemimo poljubno pravo barvanje množice njegovih povezav in pokažimo, da takšno barvanje zadošča pogojem pravega barvanja točk njegovega presečnega grafa. S protislovjem, denimo, da obstajata taki različni točki $e_i, e_j \in V(G_{\mathcal{H}})$, ki imata enako barvo in sta povezani v $G_{\mathcal{H}}$. Po definiciji presečnega grafa, sledi, da imata povezavi E_i, E_j hipergrafa $\mathcal{H}$ neprazen presek. Začeli pa smo s pravim barvanjem povezav hipergrafa $\mathcal{H}$, torej smo dobili protislovje. Iz tega sledi, da vsako pravo barvanje povezav hipergrafa $\mathcal{H}$ zadošča pravemu barvanju točk njegovega presečnega grafa, torej je $\chi(G_{\mathcal{H}}) \leq \chi'(\mathcal{H})$.
Vzemimo sedaj poljubno pravo barvanje grafa $G_{\mathcal{H}}$ in pokažimo, da zadošča pogojem pravega barvanja povezav hipergrafa $\mathcal{H}$. S protislovjem, denimo, da obstajata taka indeksa $i \neq j$, da imata povezavi E_i, E_j hipergrafa $\mathcal{H}$ neprazen presek in sta pobarvani z enako barvo. Ker imata povezavi neprazen presek, sledi, da sta točki $e_i, e_j \in V(G_{\mathcal{H}})$ sosednji in imata enako barvo. To je protislovje s predpostavko, da smo začeli s pravim barvanjem točk presečnega grafa $G_{\mathcal{H}}$. Velja torej $\chi'(\mathcal{H}) \leq \chi(G_{\mathcal{H}})$.
Če oba rezultata združimo, dobimo, da velja $\chi'(\mathcal{H}) = \chi(G_{\mathcal{H}})$. □

Več na temo presečnih grafov je na voljo v knjigi z naslovom *"Topics in Intersection Graph Theory"*, ki sta jo napisala avtorja Terry A. McKee in F.R. McMorris [11].

Definicija 2.32. Naj bosta G in H grafa. Graf G je *izomorfen* grafu H natanko takrat, ko obstaja taka bijekcija $f : V(G) \to V(H)$, da za poljubni dve točki $u, v \in V(G)$ velja: $\{u, v\} \in E(G)$ natanko tedaj, ko je $\{f(u), f(v)\} \in E(H)$.

Na podlagi definicije izomorfizma lahko linearno presečno število definiramo na sledeč način.

Definicija 2.33 (Klein in Margraf [10], Romero in Sánchez-Arroyo [13])**.** Za poljuben graf G je *linearno presečno število* grafa G, z oznako $v(G)$, najmanjše pozitivno celo število k, za katerega obstaja tak enostaven linearen hipergraf $\mathcal{H}$ s k točkami, da je njegov presečni graf $G_{\mathcal{H}}$ izomorfen grafu G.

Lema 2.34. *Vsak graf G je izomorfen presečnemu grafu nekega enostavnega linearnega hipergrafa.*

Dokaz. Naj bo G poljuben graf. Skonstruirajmo sedaj enostaven linearen hipergraf $\mathcal{H}$, katerega presečni graf $G_{\mathcal{H}}$ je izomorfen grafu G. Za vsak $v \in V(G)$ priredimo dve novi točki v_1, v_2 tako, da za $u \neq v$ velja $\{u_1, u_2\} \cap \{v_1, v_2\} = \emptyset$. Potem lahko množico točk hipergrafa definiramo kot $V(\mathcal{H}) := E(G) \cup (\cup_{v \in V(G)}\{v_1, v_2\})$. Za vsak $v \in V(G)$ nato definiramo povezavo hipergrafa $\mathcal{H}$ kot: $E_v := \{e \in E(G) \mid v \in e\} \cup \{v_1, v_2\}$. Torej vsaki povezavi, ki jo dobimo, dodamo dve novi točki, ki sta vsebovani le v tisti povezavi. Pokažimo sedaj, da tako definiran hipergraf $\mathcal{H}$ zadošča naslednjim trem pogojem.

1) Graf G je izomorfen grafu $G_{\mathcal{H}}$.

2) Hipergraf $\mathcal{H}$ je enostaven.

3) Hipergraf $\mathcal{H}$ je linearen.

Za dokaz prve točke vzemimo poljubni točki $u, v \in V(G)$. Po zgornji konstrukciji velja, da je $\{u, v\} \in E(G)$ natanko takrat, ko obstaja taka povezava $e \in E(G)$, da je $e \in E_u \cap E_v$. To pa velja natanko takrat, ko je $E_u \cap E_v \neq \emptyset$. To pa po konstrukciji presečnega grafa velja natanko takrat, ko je $\{u, v\} \in E(G_{\mathcal{H}})$. Grafa G in $G_{\mathcal{H}}$ sta torej izomorfna.

Točka 2) sledi direktno iz konstrukcije. Hipergraf $\mathcal{H}$ zadošča pogoju enostavnega hipergrafa, saj vsaki točki grafa G priredimo povezavo v hipergrafu $\mathcal{H}$, ki vsebuje vsaj dve novi točki, ki smo ju dodali.

Točka 3) sledi iz enostavnosti grafa G. Po konstrukciji hipergrafa $\mathcal{H}$ imata dve poljubni različni povezavi E_u, E_v hipergrafa $\mathcal{H}$ neprazen presek natanko tedaj, ko obstaja taka povezava $e \in E(G)$, da je $e = \{u, v\}$. Denimo, da obstaja taka povezava $f \in E(G)$, $f \neq e$, da velja $f \in E_u \cap E_v$. Iz tega sledi, da je $f = \{u, v\}$, kar je protislovje s tem, da je graf G enostaven. Sledi, da za poljubni različni povezavi E_u, E_v hipergrafa $\mathcal{H}$ velja, da je $|E_u \cap E_v| \leq 1$, torej je hipergraf $\mathcal{H}$ linearen.

Ker je bil G poljuben graf, sledi, da je vsak graf presečni graf nekega enostavnega linearnega hipergrafa. □

Direktna posledica leme 2.34 je, da vedno obstaja linearno presečno število $v(G)$. Sedaj lahko nadaljujemo na domnevo in lemo, ki povezujeta EFL domnevo in linearno presečno število grafa, pa si oglejmo še eno obliko domneve.

Domneva 2.35 (Klein in Margraf [10])**.** *Za vsak graf G velja $\chi(G) \leq v(G)$.*

Lema 2.36. *Domneva 2.18 velja natanko takrat, ko za vsak graf G velja $\chi(G) \leq v(G)$.*

Dokaz (povzet po članku Kleina in Margrafa [10]). Dokažimo, da velja naslednje: če velja EFL domneva, potem za vsak graf G velja $\chi(G) \leq v(G)$. Predpostavimo, da EFL domneva velja in vzemimo poljuben graf G. Uporabimo lemo 2.34 in vzemimo poljuben enostaven linearen hipergraf $\mathcal{H}$, za katerega je $G_{\mathcal{H}}$ izomorfen grafu G. Ker smo predpostavili, da velja EFL domneva, velja tudi domneva 2.18, torej za hipergraf $\mathcal{H}$ velja, da je $\chi'(\mathcal{H}) \leq |V(\mathcal{H})|$, vendar pa po lemi 2.31 velja $\chi'(\mathcal{H}) = \chi(G_{\mathcal{H}})$. Ker pa sta $G_{\mathcal{H}}$ in G izomorfna, sledi, da je $\chi(G_{\mathcal{H}}) = \chi(G)$. Ker velja to za vsak enostaven linearen hipergraf, za katerega je njegov presečni graf izomorfen grafu G, to velja tudi za tistega z najmanjšim številom točk izmed njih, torej velja $\chi(G) \leq v(G)$.

Pokažimo sedaj implikacijo še v obratno smer. Naj za vsak graf G velja, da je $\chi(G) \leq v(G)$. Naj bo $\mathcal{H}$ poljuben enostaven linearen hipergraf. Naj bo $G = G_{\mathcal{H}}$. Tedaj je $v(G) \leq |V(\mathcal{H})|$. Po predpostavki vemo, da je $\chi(G) \leq v(G)$, ker je $G = G_{\mathcal{H}}$, pa velja tudi $\chi(G) = \chi(G_{\mathcal{H}})$. Po lemi 2.31 pa velja, da je $\chi(G_{\mathcal{H}}) = \chi'(\mathcal{H})$. Dobili smo naslednje: $\chi'(\mathcal{H}) = \chi(G_{\mathcal{H}}) = \chi(G) \leq v(G) \leq |V(\mathcal{H})|$. Iz tega sledi, da velja domneva 2.18, torej velja tudi EFL domneva. □

V povezavi s to domnevo sta Klein in Margraf podala še en izrek, ki ga tukaj ne bomo dokazali, najde pa se ga lahko v članku [10]. Potrebujemo ga za dokaz posledice, ki jo bomo navedli pozneje.

Izrek 2.37 (Klein in Margraf [10])**.** *Naj bo G graf in $\overline{G}$ njegov komplement. Potem velja $|V(G)| \leq v(G) + v(\overline{G})$ in $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq v(G) + v(\overline{G})$.*

Posledica 2.38 (Klein in Margraf [10])**.** *Za vsak graf G velja, da G ali $\overline{G}$ zadošča domnevi 2.35.*

Dokaz. Naj bo G poljuben graf in $\overline{G}$ njegov komplement. Pokazati želimo, da vsaj eden izmed grafov G ali $\overline{G}$ zadošča domnevi 2.35, torej velja $\chi(G) \leq v(G)$ ali $\chi(\overline{G}) \leq v(\overline{G})$. Predpostavimo, da nobeden od njiju ne zadošča domnevi. Potem velja $\chi(G) > v(G)$ in $\chi(\overline{G}) > v(\overline{G})$, iz tega pa sledi, da je $\chi(G) + \chi(\overline{G}) > v(G) + v(\overline{G})$, kar je v protislovju s prejšnim izrekom. Torej velja, da vsaj eden izmed G ali $\overline{G}$ zadošča domnevi 2.35, torej tudi EFL domnevi. □

S tem smo zaključili poglavje o različnih oblikah domneve Erdősa, Faberja in Lovásza. Spoznali smo šest različnih ekvivalentnih domnev, ki vključujejo različne koncepte iz teorije grafov. Ravno ta raznovrstnost nam omogoča različne pristope k reševanju EFL domneve. Vendar pa to niso vse oblike, ki obstajajo. V naslednjem poglavju bomo med drugim spoznali še en način, kako lahko EFL domnevo predstavimo z nekoliko drugačnimi matematičnimi koncepti.

Kot povzetek lahko navedemo izrek, ki smo ga po delih dokazali skozi celotno poglavje.

Izrek 2.39. *Naslednje domneve so ekvivalentne:*

1. *Domneva 2.3 Erdősa, Faberja in Lovásza:*
   Naj bo G graf, sestavljen iz unije n polnih grafov na n točkah, $G = \cup_{i=1}^{n} K_{(i)}$. Naj velja $|V(K_{(i)}) \cap V(K_{(j)})| \leq 1$, $1 \leq i < j \leq n$. Potem je $\chi(G) \leq n$.

2. *Domneva 2.10 o krepkem barvanju točk linearnih hipergrafov z n povezavami:*
   Naj bo $\mathcal{H}$ linearen n-uniformen hipergraf z natanko n povezavami. Potem je $\chi(\mathcal{H}) \leq n$.

3. *Domneva 2.17 o barvanju povezav n-regularnih linearnih hipergrafov na n točkah:*
   Naj bo $\mathcal{H}$ linearen hipergraf na n točkah, kjer je stopnja vsake točke n. Potem je $\chi'(\mathcal{H}) \leq n$.

4. *Domneva 2.18 o barvanju povezav enostavnih linearnih hipergrafov na n točkah:*
   Naj bo $\mathcal{H}$ enostaven linearen hipergraf na n točkah. Potem velja, da je $\chi'(\mathcal{H}) \leq n$.

5. *Domneva 2.20 o barvanju povezav linearnih hipergrafov na n točkah:*
   Naj bo $\mathcal{H}$ linearen hipergraf na n točkah, brez podvojenih povezav. Potem velja naslednje: $\chi'(\mathcal{H}) \leq n$.

6. *Domneva 2.29 o hibridnem barvanju povezav dvodelnih grafov:*
   Naj bo G enostaven dvodelen graf brez 4-ciklov, z neodvisnima množicama X in Y, kjer je $|Y| = n$ in je stopnja vsake točke $v \in Y$ enaka n. Potem je $\chi'(G, X) \leq n$.

7. *Domneva 2.35 Kleina in Margrafa o linearnem presečnem številu:*
   Za vsak graf G velja $\chi(G) \leq v(G)$.

3 Racionalna oblika EFL domneve

V tem poglavju si bomo ogledali domnevo Erdősa, Faberja in Lovásza v racionalni obliki, ki jo lahko opišemo s pomočjo linernega programa. Najprej si bomo ogledali racionalno obliko domneve in njeno povezavo z EFL domnevo in jo nato dokazali s pomočjo dokaza, ki sta ga objavila Kahn in Seymour [9].

V tem poglavju bomo obravnavali družino povezav $E(\mathcal{H})$ danega hipergrafa $\mathcal{H}$ kot multimnožico. Oznaki $E_i \in E(\mathcal{H})$ in $S \subseteq E(\mathcal{H})$ bosta interpretirani na naraven način.

Za zapis racionalne oblike najprej potrebujemo še eno domnevo, za katero bomo pokazali, da je ekvivalentna EFL domnevi. Naslednja domneva govori o hipergrafih in prirejanjih v njih.

Definicija 3.1. Naj bo $\mathcal{H}$ hipergraf. Podmnožici $S \subseteq E(\mathcal{H})$ pravimo *prirejanje*, če za poljubni različni povezavi $E_i, E_j \in S$ velja $E_i \cap E_j = \emptyset$.

Domneva 3.2 (Kahn in Seymour [9])**.** *Množico povezav poljubnega linearnega hipergrafa lahko razdelimo na $|V(\mathcal{H})|$ prirejanj.*

Lema 3.3. *EFL domneva velja natanko takrat, ko velja domneva 3.2.*

Od prej vemo, da lahko EFL domnevo ekvivalentno zapišemo kot domnevo 2.20. Naj bo $\mathcal{H}$ linearen hipergraf na n točkah. Potem je kromatični indeks hipergrafa $\chi'(\mathcal{H}) \leq n$. Dovolj je pokazati, da je slednji zapis domneve ekvivalenten zgornji domnevi.

Dokaz leme 3.3. Naj velja domneva 2.20. Naj bo $\mathcal{H}$ poljuben linearen hipergraf na n točkah in naj velja $\chi'(\mathcal{H}) \leq n$. Iz tega sledi, da obstaja tako pravo barvanje povezav hipergrafa $\mathcal{H}$ z n barvami, da nobeni dve povezavi s skupno točko nista pobarvani z isto barvo. Vzemimo množice povezav $M_i = \{E_j \in E(\mathcal{H}) \mid E_j$ je pobarvana z barvo $i\}$, kjer je $1 \leq i \leq n$. Množice M_i predstavljajo razdelitev povezav hipergrafa $\mathcal{H}$ na n prirejanj, kjer je $n = |V(\mathcal{H})|$.
Pokažimo sedaj, če velja domneva 3.2, potem velja domneva 2.20. Naj bo $\mathcal{H}$ linearen hipergraf na n točkah. Naj velja, da lahko množico povezav hipergrafa $\mathcal{H}$ razdelimo na $n = |V(\mathcal{H})|$ prirejanj. Naj bosta E_j, E_k različni povezavi, ki pripadata istemu prirejanju. Iz tega sledi, da je presek povezav E_j in E_k prazen. Torej ju lahko pri pravem barvanju povezav hipergrafa $\mathcal{H}$ pobarvamo z enako barvo. Če pobarvamo

vsako povezavo nekega prirejanja z enako barvo, potem ker imamo n prirejanj, smo dobili pravo barvanje povezav hipergrafa $\mathcal{H}$ z n barvami, torej velja $\chi'(\mathcal{H}) \leq n$. □

Sedaj ko smo dokazali ekvivalentnost, lahko prirejanja po povezavah v hipergrafih uporabimo za izrazitev racionalne oblike EFL domneve na naslednji način.

Izrek 3.4 (Racionalna oblika EFL domneve [13])**.** *Naj bo $\mathcal{M}$ množica vseh prirejanj linearnega hipergrafa $\mathcal{H}$ in naj $\mathbb{R}_+$ označuje množico nenegativnih realnih števil. Potem obstaja taka funkcija $g : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$, da velja naslednje:*

(i)

$$\sum_{M \in \mathcal{M}} g(M) \leq |V(\mathcal{H})|$$

in

(ii)

$$\sum_{E_i \in M \in \mathcal{M}} g(M) \geq 1, \forall E_i \in E(\mathcal{H})$$

Izrek 3.4 je ekvivalenten naslednji trditvi: za linearen hipergraf $\mathcal{H}$ in množico vseh njegovih prirejanj $\mathcal{M}$ ima linearni program s kriterijsko funkcijo:

(i)

$$\min \sum_{M \in \mathcal{M}} g(M),$$

pri pogojih:

(ii)

$$\sum_{E_i \in M \in \mathcal{M}} g(M) \geq 1, \forall E_i \in E(\mathcal{H}),$$

dopustno rešitev z vrednostjo kriterijske funkcije (i) manj ali enako $|V(\mathcal{H})|$.

Optimalna vrednost zgornjega linearnega programa predstavlja tako imenovano **racionalno kromatično število** hipergrafa, ki ga označujemo s $\chi'_f(\mathcal{H})$, kjer f izhaja iz angleške besede *fractional*. Funkcija g, ki v tem primeru prireja uteži povezavam, pa se imenuje **racionalno barvanje** povezav hipergrafa $\mathcal{H}$. Pri tem funkcija g predstavlja delež barve, ki ga določimo posameznemu prirejanju, kjer je ta delež nenegativno realno število, torej lahko tudi 0. S pogoji linearnega programa v (ii) zagotovimo, da je za vsako povezavo vsota količine barv iz posameznih prirejanj katerim povezava pripada, večja ali enaka 1. To pomeni, da smo povezavo v celoti pobarvali in dobimo, da je f pravo racionalno barvanje povezav hipergrafa $\mathcal{H}$.

Če v izreku 3.4 vzamemo linearen hipergraf $\mathcal{H}$, katerega stopnje točk so največ $|V(\mathcal{H})|$, in za funkcijo g določimo, da slika iz množice vseh prirejanj $\mathcal{M}$ hipergrafa $\mathcal{H}$ v množico $\{0,1\}$, torej $g : \mathcal{M} \to \{0,1\}$, dobimo EFL domnevo zapisano v obliki celoštevilskega linearnega programa.

Za vsak linearen program vemo, da obstaja tudi njegov dual. Sedaj bomo zapisali dual racionalne oblike EFL domneve, ki ga bomo pozneje tudi dokazali. Torej zaradi izreka o dualnosti dobimo izrek, ki je ekvivalenten izreku 3.4. Z oznakami sledimo članku [9].

Izrek 3.5. *Naj bo $\mathcal{H}$ linearen hipergraf in naj bo $p : E(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}_+$ funkcija, ki zadošča pogojem:*

$$\sum_{E_i \in M} p(E_i) \leq 1$$

za vsako prirejanje M. Potem je

$$\sum_{E_i \in E(\mathcal{H})} p(E_i) \leq |V(\mathcal{H})|.$$

Več na temo linearnih programov in izreka o dualnosti linearnega programa se lahko najde v knjigi z naslovom "*Linear Programming*", avtorja Vaška Chvátala [4].

Preden se lotimo dokaza izreka, kar bo zaradi dualnosti pokazalo resničnost racionalne oblike EFL domneve, si oglejmo Motzkinovo lemo [9] in rezultat povezan z njo, ki ga bomo v dokazu uprabili.

Lema 3.6 (Motzkinova lema [12])**.** *Naj bo G tak enostaven dvodelen graf z neodvisnima množicama X in Y, da velja $X \cup Y = V(G)$, $X \neq \emptyset$ in nobena točka iz X ni povezana z vsako točko iz Y. Potem obstajata taki točki $x \in X$ in $y \in Y$, da x ni povezan z y in $|Y|d(y) \leq |X|d(x)$.*

Rezultat povezan z Motzkinovo lemo se nanaša na dodeljevanje uteži točkam, ki se nahajajo v neodvisni množici Y, in ga lahko zato zapišemo v naslednji obliki, kjer $v \sim u$ pomeni, da sta točki v in u sosednji v grafu.

Izrek 3.7 (Kahn in Seymour [9])**.** *Naj bo G tak enostaven dvodelen graf z neodvisnima množicama X in Y, da je $X \cup Y = V(G)$, $X \neq \emptyset$ in naj bo $f : Y \to \mathbb{R}_+$ taka funkcija, da nobena točka v X ni povezana z vsako točko $y \in Y$, za katero je $f(y) \neq 0$. Potem obstajata taki nesosednji točki $x \in X$ in $y \in Y$, da velja $f(y) \neq 0$ in da velja naslednje:*

$$d(y) \sum_{z \in Y} f(z) \leq |X| \sum (f(z) \mid z \in Y, z \sim x).$$

S pomočjo zgornjega izreka lahko sedaj dokažemo racionalno obliko EFL domneve tako, da bomo uporabili tako izrek o racionalni obliki domneve kot tudi dualni izrek.

Dokaz izreka 3.5 (in posledično racionalne oblike EFL domneve) [9]. Naj bo $\mathcal{H}$ linearen hipergraf. Želimo pokazati, da je $\chi_f(\mathcal{H}) \leq |V(\mathcal{H})|$ oziroma, da za vsako optimalno rešitev $p : E(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}_+$ dualnega linearnega programa velja

$$\sum_{E_i \in E(\mathcal{H})} p(E_i) \leq |V(\mathcal{H})|.$$

Brez škode za splošnost lahko iz hipergrafa $\mathcal{H}$ zbrišemo vse povezave, za katere je $p(E_i) = 0$. Zaradi dualnosti vemo, da obstaja taka funkcija $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_+$, da veljajo naslednje lastnosti:

(i)

$$\sum_{M \in \mathcal{M}} f(M) = \sum_{E_i \in E(\mathcal{H})} p(E_i),$$

(ii)

$$\sum_{E_i \in M \in \mathcal{M}} f(M) \geq 1, \forall E_i \in E(\mathcal{H}),$$

(iii)

$$\sum_{E_i \in M} p(E_i) = 1, \forall M \in \mathcal{M}, f(M) \neq 0.$$

Lahko sklepamo, da v (ii) velja enakost za vsako povezavo E_i, saj velja, da je $p(E_i) \neq 0$ za vsako povezavo E_i. Skladno z notacijo v članku [9] označimo z $\cup M$ unijo vseh točk, ki pripadajo neki povezavi v M. Dokaz sedaj ločimo na dva dela.
V prvem delu dokaza predpostavimo, da je v taka točka hipergrafa $\mathcal{H}$, da za vsako tako prirejanje M, da je $f(M) \neq 0$, obstaja taka povezava $E_i \in M$, da je $v \in E_i$, torej

$v \in \cup M$ za vsako tako prirejanje M. Potem dobimo iz lastnosti (i) naslednje:

$$\begin{aligned}
\sum_{E_i \in E(\mathcal{H})} p(E_i) &= \sum_{M \in \mathcal{M}} f(M) \\
&= \sum (f(M) \mid M \in \mathcal{M}, v \in \cup M) \\
&= \sum \left(\sum (f(M) \mid M \in \mathcal{M}, E_i \in M) \mid E_i \in E(\mathcal{H}), v \in E_i \right) \\
&= \sum (1 \mid E_i \in E(\mathcal{H}), v \in E_i) \\
&\leq \sum ((|E_i| - 1) \mid E_i \in E(\mathcal{H}), v \in E_i) \\
&= \sum \left(\sum (1 \mid E_i \in E(\mathcal{H}), \{u, v\} \subset E_i) \mid u \in V(\mathcal{H}) \setminus \{v\} \right) \\
&\leq \sum_{u \in V(\mathcal{H}) \setminus \{v\}} 1 \\
&\leq |V(\mathcal{H})|.
\end{aligned}$$

Dobili smo točno to, kar smo želeli pokazati. Sedaj pa za drugi del dokaza privzamemo, da točka v, kot jo imamo zgoraj, ne obstaja. Za dokaz tega dela bomo uporabili izrek 3.7 na dvodelnem grafu z neodvisnima množicama $V(\mathcal{H})$ in $\mathcal{M}$, kjer za njegove povezave velja, da je točka $v \in V(\mathcal{H})$ povezana z $M \in \mathcal{M}$ natanko tedaj, ko je $v \in \cup M$. Iz tega sledi, da obstaja taka točka $v \in V(\mathcal{H})$ in tako prirejanje $N \in \mathcal{M}$, da velja $v \notin \cup N$, $f(N) \neq 0$ in da velja naslednje:

$$| \cup N| \sum_{M \in \mathcal{M}} f(M) \leq |V(\mathcal{H})| \sum (f(M) \mid M \in \mathcal{M}, v \in \cup M).$$

Od prej že vemo, da velja naslednja enakost:

$$\sum (f(M) \mid M \in \mathcal{M}, v \in \cup M) = \sum (1 \mid E_i \in E(\mathcal{H}), v \in E_i).$$

Ker je $f(N) \neq 0$, sledi iz lastnosti (iii), da je $\sum_{E_i \in N} p(E_i) = 1$. Posledično, za vsako povezavo E_i, ki vsebuje v, $N \cup \{E_i\}$ ni prirejanje, saj velja $v \notin \cup N$. Iz tega pa potem sledi, da lahko zgornji izraz omejimo, in sicer velja:

$$\begin{aligned}
\sum (1 \mid E_i \in E(\mathcal{H}), v \in E_i) &\leq \sum \left(\sum (1 \mid E_i \in E(\mathcal{H}), \{u, v\} \subset E_i) \mid u \in \cup N \right) \\
&\leq \sum_{u \in \cup N} 1 \\
&= | \cup N|
\end{aligned}$$

Če združimo dobljen rezultat z začetnim izrazom dobimo naslednji rezultat:

$$\begin{aligned}
| \cup N| \sum_{M \in \mathcal{M}} f(M) &\leq |V(\mathcal{H})| \sum (1 \mid E_i \in E(\mathcal{H}), v \in E_i) \\
&\leq |V(\mathcal{H})| \cdot | \cup N|
\end{aligned}$$

Iz tega iz lastnosti (i) direktno sledi, da je

$$\sum_{M \in \mathcal{M}} f(M) = \sum_{E_i \in E(\mathcal{H})} p(E_i) \leq |V(\mathcal{H})|. \qquad \square$$

S tem dokazom smo pokazali, da za racionalno barvanje povezav poljubnega linearnega hipergrafa vedno zadošča $|V(\mathcal{H})|$ barv. To tudi pomeni, da za racionalno barvanje točk poljubnega grafa G, ki zadošča predpostavkam EFL domneve, potrebujemo največ $n = |V(G)|$ barv. To lahko opazimo iz poglavja 2 in konstrukcije hipergrafa iz grafa, ki zadošča predpostavkam EFL domneve, in iz lastnosti dualnega hipergrafa, kar nam omogoča preveriti, da racionalno barvanje povezav hipergrafa zadošča pogoju racionalnega barvanja točk dualnega hipergrafa in posledično tudi racionalnemu barvanju točk grafa G, iz katerega smo hipergraf $\mathcal{H}$ in njegov dualni hipergraf izdelali. Za racionalno kromatično število grafov velja izrek, da je $\chi_f(G) \leq \chi(G)$ za vsak graf G. Iz tega sledi, da je kromatično število grafa, ki zadošča predpostavkam EFL domneve, zagotovo večje ali enako od njegovega racionalnega kromatičnega števila.

V povezavi z racionalno obliko EFL domneve si lahko ogledamo še dva zanimiva izreka. Oba govorita o enostavnih presečnih hipergrafih [9], ki jih bomo sedaj definirali.

Definicija 3.8. Hipergraf je **presečen**, če velja $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ za vsaki dve povezavi $E_i, E_j \in E(\mathcal{H})$. Presečen hipergraf je enostaven, če velja dodaten pogoj, da za vsako povezavo $E_i \in E(\mathcal{H})$ velja $|E_i| \geq 2$.

S pomočjo te definicije lahko sedaj izreka zapišemo v podobni obliki, kot smo zapisali racionalno obliko EFL domneve, torej z linearnih programom.

Izrek 3.9. *Naj bo $\mathcal{H}$ enostaven presečen hipergraf in naj bo $q : E(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}_+$ taka funkcija, da velja naslednje:*

$$\sum (q(E_i) \mid E_i \in E(\mathcal{H}), \{u, v\} \subset E_i) \leq 1$$

za vsaki dve različni točki $u, v \in V(\mathcal{H})$. Potem velja

$$\sum_{E_i \in E(\mathcal{H})} q(E_i) \leq |V(\mathcal{H})|.$$

Izrek 3.5, ki je dualen racionalni obliki EFL domneve, in izrek 3.9 imata skupno posplošeno obliko [9], ki jo bomo sedaj navedli.

Izrek 3.10. *Naj bo $\mathcal{H}$ enostaven hipergraf in naj bosta $p, q : E(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}^+$ funkciji, za kateri velja naslednje:*

(i)

$$\sum_{E_i \in M} p(E_i) \leq 1$$

za vsako prirejanje M,

(ii)

$$\sum (q(E_i) \mid E_i \in E(\mathcal{H}), \{u, v\} \subset E_i) \leq 1$$

za vsaki dve različni točki $u, v \in V(\mathcal{H})$.

Potem velja

$$\sum_{E_i \in E(\mathcal{H})} p(E_i) q(E_i) \leq |V(\mathcal{H})|.$$

Izrek 3.10 implicira izrek 3.9 v primeru, ko za funkcijo p vzamemo konstantno funkcijo enako 1. Izrek 3.5 pa implicira v primeru, ko za funkcijo q vzamemo konstantno funkcijo enako 1. Dokaz tega izreka je podoben zgornjemu dokazu racionalne oblike EFL domneve z izjemo, da smo v dokazu racionalne oblike za funkcijo q izbrali konstantno funkcijo 1.

Pokazali smo enega izmed izrekov, povezanih z EFL domnevo, ki govori o racionalnem barvanju, ki je snov novejšega področja teorije grafov, ki se imenuje racionalna teorija grafov. Več o racionalni teoriji grafov je na voljo v knjigi z naslovom "*Fractional Graph Theory*", avtorjev Scheinermana in Ullmana [14].
V naslednjem poglavju si bomo ogledali nekaj pomembnih delnih rezultatov, ki postavljajo zgornjo mejo za minimalno število barv, potrebnih za pravo barvanje točk grafa G, ki zadošča predpostavkam EFL domneve.

4 Delni rezultati o EFL domnevi

Do sedaj smo spoznali različne formulacije EFL domneve, pri vsaki pa se gre za iskanje rešitve, kjer iščemo minimalno število barv, potrebnih, da zadostimo pogojem različnih formulacij domneve, ki so ekvivalentne, kot smo spoznali v prejšnjih poglavjih. V nadaljevanju poglavja si bomo ogledali dva izmed pomembnih rezultatov glede zgornje meje za potrebno število barv. Očitno je, da potrebujemo najmanj n barv, saj imamo graf, ki je sestavljen iz n polnih grafov K_n, polni grafi pa imajo kromatično število enako n. Prvi izmed prej omenjenih rezultatov je rezultat Horáka in Tuze, drugi pa rezultat Changa in Lawlerja. V nadaljevanju si bomo ogledali vsakega posebej in podali tudi njuna dokaza.

4.1 Rezultat Horáka in Tuze

Spomnimo se EFL domneve, kot smo jo spoznali v predhodnih poglavjih. Domneva pravi, da je vsak graf, ki ga lahko zapišemo kot unijo n polnih grafov na n točkah, tako da nobena dva od polnih grafov nimata skupne več kot ene točke, moč pobarvati z n barvami. Z drugimi besedami, ima kromatično število $\chi(G) = n$. Horák in Tuza sta izpeljala mejo za asimptotski maksimum kromatičnega števila grafa za primer, ko za preseke polnih grafov K_n nimamo omejitev.

Preden si ogledamo njun rezultat, si oglejmo izrek, ki sta ga dokazala in katerega posledica je rezultat povezan z EFL domnevo. Drugi del izreka ni striktno pomemben za dokaz rezultata, ki je povezan z EFL domnevo, zato bo izpuščen, najde pa se ga lahko v članku [6].

Izrek 4.1 (Horák in Tuze [6]). *Naj bo G graf, ki ga lahko zapišemo kot unijo k polnih grafov, kjer ima vsak izmed njih kvečjemu n točk. Potem je $\chi(G) \leq nk^{1/2}$. Še več, če gresta k in n čez vse meje, tako da velja $k = o(n^2)$, potem obstaja zaporedje grafov G_k s kromatičnim številom $\chi(G_k) \geq (1 - o(1))nk^{1/2}$.*

Zgornji izrek se nanaša na unijo k polnih grafov z n točkami, v EFL domnevi pa imamo unijo n polnih grafov z n točkami. Torej če k v zgornjem izreku zamenjamo z n in hkrati določimo, da ima vsak poln graf natanko n točk, dobimo rezultat Horáka in Tuze, ki je poseben primer prejšnjega izreka.

Posledica 4.2. *Kromatično število poljubnega grafa, ki ga lahko zapišemo kot unijo n polnih grafov K_n, je največ $n^{3/2}$.*

V nadaljevanju si bomo ogledali dokaz izreka za poljubno število polnih grafov, kot sta ga dokazala Horák in Tuza [6], njun rezultat glede EFL domneve pa je posledica prvega izreka.

Dokaz izreka 4.1. Naj bo G graf, ki ga lahko zapišemo kot unijo k polnih grafov, vsak z največ n točkami. Za G velja, da ima največ $\frac{1}{2}k(n^2 - n)$ povezav. Ta meja se doseže, če nobena dva polna grafa nimata skupne povezave, hkrati pa imajo vsi polni grafi natanko n točk. Iz tega sledi, da je število točk stopnje vsaj $nk^{1/2}$ v poljubnem induciranem podgrafu G' od G manj od $nk^{1/2}$, od koder sledi, da za vsak induciran podgraf G' grafa G obstaja točka v njem s stopnjo manjšo od $nk^{1/2}$. Posledično je kromatično število $\chi(G) \leq nk^{1/2}$. □

4.2 Rezultat Changa in Lawlerja

W. I. Chang in E. L. Lawler sta v primerjavi s prejšnjim rezultatom, ki pravi, da $n^{3/2}$ barv zadošča za pravo barvanje poljubnega grafa, ki zadošča pogojem iz EFL domneve, dokazala boljši rezultat, ki pravi, da zadošča $\lceil \frac{3}{2}n - 2 \rceil$ barv za barvanje točk, ki ležijo v preseku vsaj dveh polnih grafov [3]. V drugem poglavju smo v trditvi 2.5 pokazali, da zadošča pokazati, da lahko podgraf danega grafa, sestavljen iz točk v presekih polnih grafov, pobarvamo z n barvami, da bi lahko tudi celoten graf pobarvali z n barvami.

Rezultat je bil dokazan s pomočjo oblike domneve, ki se nanaša na barvanje povezav enostavnega linearnega hipergrafa z n točkami. Dokaz naslednjega izreka nam tako zagotovi, da res zadošča $\lceil \frac{3}{2}n - 2 \rceil$ barv. Rezultat je zanimiv za $n > 2$. Za $n = 1$ dobimo število $\lceil -\frac{1}{2} \rceil = 0$, kar nam pove, da ni nobene točke v preseku in zato ne potrebujemo barv za barvanje točk v preseku, vendar še vedno potrebujemo eno barvo za barvanje grafa K_1. Za $n = 2$ pa dobimo $\lceil 3 - 2 \rceil = 1$, kar pomeni, da za pravo barvanje točk v preseku potrebujemo največ eno barvo. Pri $n = 2$ lahko dobimo graf, ki je unija dveh disjunktnih kopij polnega grafa K_2, ali pa graf, ki je pot na treh točkah. Torej je v preseku največ ena točka. Če na podgrafu, ki je sestavljen zgolj iz točk, ki ležijo v preseku vsaj dveh polnih grafov K_n, uporabimo konstrukcijo povezavnega hipergrafa, kot smo to naredili v poglavju 2, dobimo rezultat Changa in Lawlerja [3] za enostavne linearne hipergrafe, kar pomeni, da rezultat velja tudi za n-uniformne linearne hipergrafe. Zanje smo pokazali, da je EFL domneva podana s pomočjo n-uniformnih linearnih hipergrafov (domneva 2.10) ekvivalentna EFL domnevi. Dokaz izreka bo povzet po članku [3].

Izrek 4.3 (Chang in Lawler [3]). *Naj bo $\mathcal{H}$ enostaven linearen hipergraf na n točkah. Potem je kromatični indeks hipergrafa $\mathcal{H}$ omejen navzgor kot:* $\chi'(\mathcal{H}) \leq \lceil \frac{3}{2}n - 2 \rceil$.

Dokaz. Naj bo $\mathcal{H}$ enostaven linearen hipergraf na n točkah. Naj bo $E(\mathcal{H})$ množica njegovih povezav. Najprej razvrstimo povezave danega hipergrafa $\mathcal{H}$ v nenaraščajoče zaporedje glede na velikost povezav. Predpostavimo za prvi primer, da v nekem trenutku barvamo eno izmed povezav $e \in E$ velikosti $k \geq 3$. Ker imamo nenaraščajoče zaporedje po velikosti povezav, sledi, da smo do te povezave pobarvali samo povezave velikosti vsaj k. Ker je naš hipergraf enostaven in linearen, sledi, da za poljubni dve različni točki u, v hipergrafa $\mathcal{H}$ velja, da obstaja največ ena povezava, ki vsebuje tako u in v, hkrati pa $\mathcal{H}$ nima povezav velikosti ena. Iz tega potem sledi, da je med pobarvanimi povezavami največ $\lfloor (n-k)/(k-1) \rfloor$ takih, ki lahko imajo neprazen presek s povezavo e v vsaki od k točk vsebovanih v e. V primeru da velja neenakost $k(n-k)/(k-1) < \lceil \frac{3}{2}n - 2 \rceil$ dobimo, da vedno obstaja barva, ki je še nismo uporabili. Za $k \geq 3$ je neenakosti zadoščeno, torej kadarkoli barvamo povezavo velikosti vsaj 3, imamo vedno na voljo vsaj eno barvo, s katero jo lahko pobarvamo.
Za drugi primer si oglejmo, kaj se zgodi, če imamo povezavo velikosti natanko 2. Spomnimo se, ker je $\mathcal{H}$ enostaven, nima povezav velikost ena. Naj bo e povezava $\{u, v\}$ velikosti 2. V primeru, da imamo izmed $\lceil \frac{3}{2}n - 2 \rceil$ barv na voljo barvo, ki ni bila uporabljena za nobeno pobarvano povezavo, ki vsebuje ali u ali v, določimo neuporabljeno barvo povezavi $\{u, v\}$ in barvamo naprej. V nasprotnem primeru pa bomo pokazali, da vedno obstaja točka w, za katero velja naslednje.

$\{u, w\}$ in $\{v, w\}$ sta povezavi hipergrafa $\mathcal{H}$, ki sta že pobarvani, barva povezave $\{u, w\}$ ni uporabljena za nobeno pobarvano povezavo, ki vsebuje točko v, in barva povezave $\{v, w\}$ ni uporabljena za nobeno pobarvano povezavo, ki vsebuje točko u.

Najprej si lahko ogledamo nekaj lastnosti glede točk u, v, w in povezav med njimi. Opazimo lahko, da imamo vsaj $n/2$ neuporabljenih barv za povezave, ki vsebujejo u, in za povezave, ki vsebujejo v. Ker je $\mathcal{H}$ enostaven linearen hipergraf, sledi, da ima vsaka točka največ $n-1$ povezav. Vemo, da povezava $\{u, v\}$ ni pobarvana, torej je največ $n-2$ barv uporabljenih za barvanje povezav, ki vsebujejo u. Od vseh barv, ki jih imamo na razpolago, odštejmo največje možno število do sedaj uporabljenih barv in dobimo: $(\lceil \frac{3}{2}n - 2 \rceil) - (n-2) = \lceil \frac{1}{2}n \rceil \geq \frac{1}{2}n$. Torej obstaja vsaj $n/2$ neuporabljenih barv za povezave, ki vsebujejo u. Povsem analogno lahko naredimo za povezave, ki vsebujejo v. Hkrati opazimo, da mora biti množica vsaj $n/2$ barv, ki niso uporabljene za povezave, ki vsebujejo u, disjunktna od množice vsaj $n/2$ barv, ki niso uporabljene za povezave, ki vsebujejo v. V nasprotnem bi obstajala barva, s katero bi lahko pobarvali povezavo $\{u, v\}$, predpostavili pa smo, da taka barva ne obstaja. Opazimo lahko tudi, da je največ $n-1$ izmed njih takih barv, da je neka povezava, ki vsebuje w, pobarvana z njo. Enak argument kot prej, saj je lahko vsaka točka vsebovana v največ $n-1$ povezavah. Od tukaj lahko opazimo, da zagotovo obstaja barva, ki ni uporabljena za nobeno povezavo, ki vsebuje w, in nobeno povezavo ene izmed točk u ali v. Brez škode za splošnost si lahko izberemo točko u. Naj c predstavlja tako barvo. Vemo, da je barva povezave $\{u, w\}$ neuporabljena na nobeni povezavi, ki vsebuje točko v, prav tako pa c ni uporabljena za točki u in w, torej lahko s c pobarvamo povezavo $\{u, w\}$ in s prvotno barvo povezave $\{u, w\}$ pobarvamo povezavo, za katero smo iskali barvo, $\{u, v\}$.

Vse, kar nam preostane, je preveriti, da taka točka w res obstaja. Naj bosta
$A = \{c \mid c$ je barva neke povezave velikosti 2, ki vsebuje u, in ni barva nobene povezave velikosti vsaj 3, ki vsebuje $v\}$ in
$B = \{c \mid c$ je barva neke povezave velikosti 2, ki vsebuje v, in ni barva nobene povezave velikosti vsaj 3, ki vsebuje $u\}$.

Vemo, da če imamo barvo, ki je barva povezave, ki vsebuje ali u ali v, ni pa v $A \cup B$, potem je to barva povezave velikosti vsaj 3, ki je sosednja eni izmed točk u ali v. Ker je $\mathcal{H}$ enostaven linearen hipergraf, sledi, da je število povezav velikosti vsaj 3, ki vsebujejo točko u, največ $(n - |A| - 2)/2$, za točko v pa največ $(n - |B| - 2)/2$. Po začetni predpostavki vemo, da ne obstaja nobena barva, ki ne pripadala kakšni izmed povezav, ki vsebujejo ali u ali v. Iz tega sledi naslednji rezultat:

$$\tfrac{3}{2}n - \tfrac{5}{2} \leq \lceil \tfrac{3}{2}n - 2 \rceil \leq |A \cup B| + (n - |A| - 2)/2 + (n - |B| - 2)/2$$

Ekvivalentno, če preuredimo in uporabimo lastnosti iz teorije množic, dobimo sledečo neenakost:

$$n - 1 \leq |A \setminus B| + |B \setminus A|,$$

kjer $|A \setminus B|$ predstavlja število povezav oblike $\{u, w\}$, katerih barve niso uporabljene pri nobeni povezavi, ki vsebuje v, $|B \setminus A|$ pa predstavlja število povezav oblike $\{v, w\}$, katerih barve niso uporabljene pri nobeni povezavi, ki vsebuje u. Ker imamo n točk v našem hipergrafu in je vsota velikosti obeh množic vsaj $n-1$, po Dirichletovem načelu sledi, da točka w, ki smo jo iskali, res obstaja. □

S tem dokazom smo pokazali, da $\lceil \frac{3}{2}n - 2 \rceil$ barv res zadošča za pravilno barvanje povezav enostavnega linearnega hipergrafa na n točkah. To pa po ekvivalencah dokazanih v poglavju 2 pomeni, da $\lceil \frac{3}{2}n - 2 \rceil$ barv zadošča za pravo barvanje točk grafa, ki ga lahko zapišemo kot unijo n polnih grafov K_n, kjer imata dva različna polna grafa v preseku največ eno točko. Torej za kromatično število iz EFL domneve velja

$n \leq \chi(G) \leq \lceil \frac{3}{2}n - 2 \rceil$.

Spoznali smo dva različna rezultata, ki zagotavljata zgornjo mejo za kromatično število grafa G iz EFL domneve. Če ju primerjamo, rezultat Horáka in Tuze pravi, da je kromatično število grafa G navzgor omejeno z $n^{3/2}$, rezultat Changa in Lawlerja pa, da je kromatično število grafa G navzgor omejeno s $\lceil \frac{3}{2}n - 2 \rceil$. Opazimo lahko, da je za velika števila n rezultat Changa in Lawlerja veliko boljši od rezultata Horáka in Tuze. V spodnji tabeli lahko vidimo, da je tudi za majhne n-je rezultat Changa in Lawlerja bolj natančen, vendar je razlika veliko manjša. Pozorni moramo biti le na to, da je meja Changa in Lawlerja namenjena barvanju točk, ki ležijo v preseku vsaj dveh povezav. Graf na dveh točkah takih točk nima. Torej, po trditvi 2.5 velja, da lahko vse točke grafa pobarvamo z dvema barvama.

n	meja Horáka in Tuze ($\lfloor n^{3/2} \rfloor$)	meja Changa in Lawlerja ($\lceil \frac{3}{2}n - 2 \rceil$)
1	1	0
2	2	1
3	5	3
4	8	4
5	11	6
6	14	7
7	18	9
8	22	10
9	27	12
10	31	13

Tabela 1: Primerjava meje Horáka in Tuze z mejo Changa in Lawlerja.

5 Dvodelni analog EFL domneve

To poglavje je v celoti namenjeno dvodelnemu analogu EFL domneve, tako imenovani domnevi Alona, Saksa in Seymourja, in nekaj rezultatom povezanih s to domnevo, ki pa je, kot bomo pozneje spoznali, ovržena. Na začetku si bomo ogledali izrek Grahama in Pollaka, ki ga lahko posplošimo v dvodelni analog EFL domneve, in njegov enostaven algebraičen dokaz. Sledila bo predstavitev domneve Alona, Saksa in Seymourja in njegova povezava z EFL domnevo. Na koncu si bomo pa ogledali protiprimer in konstrukcijo Huanga in Sudakova [7], ki domnevo Alona, Saksa in Seymourja ovrže.

Začnimo z izrekom Grahama in Pollaka, ki govori o particiji povezav polnega grafa na množice povezav disjunktnih polnih dvodelnh grafov. Obe vrsti grafov smo spoznali v poglavju 2, le da smo tam definirali dvodelne grafe v splošnem. Polni dvodelni grafi pa so dvodelni grafi, kjer za vsaki dve točki $u \in X$ in $v \in Y$, kjer sta X in Y neodvisni množici dvodelnega grafa, velja, da obstaja povezava med njima.

Izrek 5.1 (Graham in Pollak [5])**.** *Če poln graf K_n razdelimo na m povezavno disjunktnih polnih dvodelnih grafov, potem je $m \geq n-1$.*

Predstavili bomo Tverbergov dokaz zgornjega izreka.

Tverberg dokaz [16]. Dokaz bo potekal s protislovjem. Za lažje oznake bomo z G označili poln graf K_n, torej velja $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$. Predpostavimo, da je $m \leq n-2$. Naj bo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor, ki vsaki točki $1 \leq k \leq n$ priredi spremenljivko x_k. Definirajmo sedaj množice $V_i := A_i \cup B_i \subset V(G)$, $i \in \{1, \dots, m\}$, tako, da velja $V_i = V(G_i)$, kjer je G_i poln dvodelen graf z neodvisnima množicama A_i in B_i. Naj velja tudi, da povezave polnih dvodelnih grafov G_i tvorijo povezavno disjunktno particijo množice povezav grafa G. Sedaj lahko definiramo polinoma $p_i(x) := \sum\{x_j \mid j \in A_i\}$ in $q_i(x) := \sum\{x_j \mid j \in B_i\}$. Polinom $p_i(x)$ predstavlja ravno vse točke neodvisne množice A_i grafa G_i, polinom $q_i(x)$ pa predstavlja vse točke neodvisne množice B_i grafa G_i. Če polinoma zmnožimo, dobimo polinom, ki predstavlja natanko vse povezave polnega dvodelnega grafa G_i. Ker grafi G_i tvorijo povezavno disjunktno dekompozicijo množice povezav grafa G, dobimo naslednje:

$$r(x) := \sum_{1 \leq i \leq m} p_i(x) \cdot q_i(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

Oglejmo si naslednji sistem homogenih linearnih enačb:

$$p_1(x) = \ldots = p_m(x) = x_1 + \ldots + x_n = 0.$$

Ker je $m \leq n-2$, imamo sistem največ $n-1$ enačb z n neznankami, iz česar sledi, da obstaja netrivialna rešitev danega sistema. Označimo poljubno tako rešitev z vektorjem $a = (a_1, \ldots, a_n)$ in poračunajmo:

$$\begin{aligned} 0 &< a_i^2 + \ldots + a_n^2 \\ &= (a_1 + \ldots + a_n)^2 - 2 \cdot r(a) \\ &= 0 - 2 \cdot \sum_{1 \leq i \leq m} p_i(a) \cdot q_i(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Drugi enačaj velja, ker je a rešitev enačbe $x_1 + \ldots + x_n = 0$, zadnji enačaj pa, ker je a rešitev sistema $p_1(x) = \ldots = p_m(x) = 0$. Dobili smo torej $0 < 0$ kar je protislovje, torej je predpostavka, da je $m \leq n-2$, napačna. Od tod sledi, da je $m \geq n-1$. □

Kot zanimivost lahko povemo, da ni znanega še nobenega popolnoma kombinatoričnega dokaza tega izreka, ampak so vsi do sedaj znani dokazi algebraični. Sedaj bomo pokazali še, da množico povezav polnega grafa K_n lahko vedno razdelimo na disjunktno unijo povezav $n-1$ polnih dvodelnih grafov.

Lema 5.2. *Množico povezav polnega grafa na n točkah lahko razdelimo na disjunktno unijo povezav $n-1$ polnih dvodelnih grafov.*

Dokaz. Uporabimo naslednjo preprosto konstrukcijo. Povezave polnega grafa K_n lahko zapišemo v naslednji obliki $E(K_n) = \{\{i,j\} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. Iz takega zapisa, lahko hitro ločimo povezave na $n-1$ disjunktnih množic. Označimo z $E_i := \{\{i,j\} \mid i < j \leq n\}$ za vsak $1 \leq i \leq n-1$. Opazimo lahko, da so množice E_i paroma disjunktne. Vsaka množica E_i predstavlja en graf izmed posebne družine grafov, ki se imenuje zvezde, kjer je točka i center zvezde, ki je definirana z množico povezav E_i in množico točk $V_i := \{k \mid i \leq k \leq n\}$. Za zvezde pa vemo, da so polni dvodelni grafi, za katere ena neodvisna množica vsebuje samo eno točko, in sicer njen center. □

Oglejmo si sedaj posplošitev izreka Grahama in Pollaka, imenovano tudi domneva Alona, Saksa in Seymourja ali dvodelni analog EFL domneve (glej npr. [7, 13]).

Domneva 5.3 (Alon, Saks in Seymour [13])**.** *Naj bo G graf, katerega množico povezav $E(G)$ je moč razdeliti na n povezavno disjunktnih polnih dvodelnih grafov. Potem je $\chi(G) \leq n+1$.*

Ime dvodelni analog EFL domneve izhaja ravno iz razloga, da če v EFL domnevi zamenjamo graf, ki je unija n povezavno disjunktnih polnih grafov na n točkah, z grafom, ki je unija n povezavno disjunktnih polnih dvodelnih grafov, dobimo ravno domnevo Alona, Saksa in Seymourja, s tem da $\chi(G) \leq n$ zamenjamo z $\chi(G) \leq n+1$. Raazlika v zgornji meji je posledica opazke, da s pomočjo izreka Grahama in Pollaka vemo, da domneva velja za polne grafe K_n, saj jih ni moč razdeliti na unijo manj kot $n-1$ povezavno disjunktnih polnih dvodelnih grafov. Vemo pa tudi, da je $\chi(K_n) = n$ in ne manj kot n.

Preden začnemo s protiprimerom, ki dokazuje neresničnost dvodelnega analoga EFL domneve, moramo definirati število, ki nam bo pomagalo pri dokazu in sestavi protiprimera, ter nekaj drugih pojmov, ki jih bomo kasneje potrebovali. Večinoma bomo sledili notaciji iz članka Huanga in Sudakova [7].

Z $bp(G)$ bomo označevali najmanjše število polnih dvodelnih grafov, potrebnih za razdelitev množice povezav grafa G na disjunktno unijo njihovih povezav. Po izreku 5.1 in lemi 5.2 lahko opazimo, da je $bp(K_n) = n-1$. S pomočjo tega števila lahko domnevo Alona, Saksa in Seymourja prepišemo tako, da zahtevamo, da je $bp(G) \geq \chi(G) - 1$ [7]. Potrebovali bomo še definicijo n-dimenzionalne kocke in nekaj oznak povezanih z njo.

Definicija 5.4. *n-dimenzionalna kocka* je graf z oznako Q_n, z množico točk $V(Q_n) := \{0,1\}^n$ in množico povezav $E(Q_n) := \{\{u,v\} \mid u,v \in V(Q_n)$ in velja, da se u in v razlikujeta v natanko eni koordinati$\}$.

Definicija 5.5. *k-dimenzionalen podgraf* grafa Q_n je graf z množico točk, ki je podmnožica točk grafa Q_n, za katero velja, da so za vse točke v njej vrednosti $n-k$ istih koordinat fiksne.

V nadaljevanju bomo za množico $Q_n \setminus \{0^n, 1^n\}$ uporabili oznako Q_n^-, kjer 1^n predstavlja edini element množice $\{1\}^n$ in 0^n predstavlja edini element množice $\{0\}^n$. Poglejmo si še eno pomembno definicijo, ki jo bomo potrebovali za konstrukcijo protiprimera.

Naj bo G graf. Graf, ki ga dobimo tako, da vsako točko v grafa G zamenjamo z neodvisno množico točk I_v velikosti k in vsako povezavo $\{u,v\} \in E(G)$ zamenjamo z množico povezav polnega dvodelnega grafa definiranega z neodvisnima množicama I_u in I_v, bomo imenovali *k-razširitev* grafa G [7]. Sedaj lahko začnemo s konstrukcijo protiprimera.

Celotna konstrukcija, ki sledi, je izvzeta iz članka [7] in je konstrukcija, kot sta jo izdelala Huang in Sudakov za dokaz neresničnosti domneve Alona, Saksa in Seymourja. Naj bo n pozitivno celo število in naj bo H graf, definiran na naslednji način. Množica točk grafa H je $V(H) := \{(x_1, \ldots, x_7) \mid x_i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Definiramo funkcijo $\phi : V(H) \times V(H) \to \{0,1\}^7$ tako, da je $\phi(x,y) := (\delta(x_1,y_1), \ldots, \delta(x_7,y_7)) \in V(Q_7)$, kjer za vsak $1 \leq i \leq 7$ velja:

$$\delta(x_i, y_i) := \begin{cases} 1; & \text{če velja} \quad x_i \neq y_i, \\ 0; & \text{sicer.} \end{cases}$$

Naj bo množica $S \subset V(Q_7)$ definirana na naslednji način:

$$S := V(Q_7) \setminus ((\{1^4\} \times V(Q_3^-)) \cup \{0^7\} \cup \{\{0,0,0,0,1,1,1\}\}).$$

Povezave grafa H lahko potem definiramo kot $E(H) := \{\{x,y\} \mid \phi(x,y) \in S\}$.

Pokazali bomo, da družina tako definiranih grafov H zadošča neenakosti iz naslednjega izreka. To bo pomenilo, da zanje domneva Alona, Saksa in Seymourja ne velja.

Izrek 5.6 (Huang in Sudakov [7])**.** *Obstajajo grafi G s poljubno velikim številom $bp(G)$, za katere velja $\chi(G) \geq c \cdot (bp(G))^{6/5}$, za neko določeno konstanto c.*

Opazimo lahko, da če je $bp(G)$ dovolj velik in velja zgornji izrek, potem za tak graf G ne more veljati domneva, da je $bp(G) \geq \chi(G) - 1$. Poglejmo si sedaj naslednji rezultat.

Lema 5.7 (Huang in Sudakov [7])**.** *Množico S (iz zgornje konstrukcije grafa H) je moč razdeliti na disjunktno unijo množic S_i, kjer je $1 \leq i \leq 30$, kjer vsaka množica S_i predstavlja podgraf grafa Q_7, ki je izomorfen 2-dimenzionalni kocki.*

Dokaz leme je daljši in zahteva razčlenitev na več primerov. Ideja dokaza je, da množico S razdelimo na tri disjunktne podmnožice S', S'' in S''', za katere nato pokažemo, da so sestavljene iz disjunktne unije 2-dimenzionalnih kock. S tem lahko množico S zapišemo kot $S = \cup(S_i \mid 1 \leq i \leq 30)$. Celoten dokaz lahko najdemo v članku [7], poglavje 2, lema 2.1.

Sedaj bomo z uporabo leme 5.7 definirali podgrafe H_i grafa H, in sicer na sledeč način. Za vsak $1 \leq i \leq 30$ definiramo $V(H_i) := V(H)$, za množice povezav pa velja $E(H_i) := \{\{x,y\} \mid x, y \in V(H_i) \text{ in } \phi(x,y) \in S_i\}$. Ker so množice S_i disjunktne, velja, da so grafi H_i povezavno disjunktni grafi, unija katerih je celoten graf H. Za vsakega od podgrafov H_i bomo sedaj pokazali, da zadošča pogoju $bp(H_i) \leq n^5$.

Lema 5.8 (Huang in Sudakov [7])**.** *Za zgoraj definirane podgrafe H_i grafa H, velja, da zadoščajo pogoju $bp(H_i) \leq n^5$.*

Dokaz. Iz leme 5.7, ker množice S_i predstavljajo 2-dimenzionalne kocke, velja, da za vsako množico S_i obstaja taka množica indeksov fiksnih koordinat, ki jo bomo označevali s $T = \{t_1, \ldots, t_5\} \subset \{1, \ldots, 7\}$ in da obstajajo taki $a_1, \ldots, a_5 \in \{0, 1\}$, kjer $a_1, \ldots, a_5$ ne smejo biti vsi nič, saj vemo, da množica S ne vsebuje vektorja 0^7, da lahko množice S_i zapišemo na naslednji način: $S_i = \{(x_1, \ldots, x_7) \mid x_{t_j} = a_j$ za vsak $1 \leq j \leq 5\}$. Sedaj lahko definiramo tak graf $\widehat{H_i}$, da je graf H_i n^2-razširitev grafa $\widehat{H_i}$. To naredimo na naslednji način: za množico točk določimo $V(\widehat{H_i}) := \{1, \ldots, n\}^5$, za množico povezav pa velja $E(\widehat{H_i}) := \{\{\widehat{x}, \widehat{y}\} \mid \widehat{x}, \widehat{y} \in V(\widehat{H_i})$ in $\sigma(\widehat{x}, \widehat{y}) = (a_1, \ldots, a_5)\}$, kjer velja $\sigma : V(\widehat{H_i}) \times V(\widehat{H_i}) \to \{0, 1\}^5$ tako, da je $\sigma(x, y) := (\delta(x_1, y_1), \ldots, \delta(x_5, y_5)) \in V(Q_5)$. Opazimo lahko, da je $|V(\widehat{H_i})| = n^5$. Uporabili bomo še dve lastnosti števila *bp*, ki ju ne bomo dokazovali, in sicer velja $bp(H_i) \leq bp(\widehat{H_i})$ in velja tudi $bp(H) \leq |V(H)| - 1$ za vsak graf, kar je direktna posledica leme 5.2. S pomočjo tega lahko zaključimo, da je $bp(H_i) \leq bp(\widehat{H_i}) \leq |V(\widehat{H_i})| - 1 \leq |V(\widehat{H_i})| = n^5$ za vsak $1 \leq i \leq 30$. □

Preden nadaljujemo, se spomnimo definiciji dveh oznak za velikostni red funkcij, in sicer $O(n)$ in $\Omega(n)$.

Definicija 5.9. Naj bo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija. Potem velja:

1. $f(n)$ je reda $O(g(n))$, označimo z $f(n) = O(g(n))$, če $\exists c \geq 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, da $\forall n \geq n_0$ velja $f(n) \leq c \cdot g(n)$.

2. $f(n)$ je reda $\Omega(g(n))$, označimo z $f(n) = \Omega(g(n))$, če $\exists c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, da $\forall n \geq n_0$ velja $f(n) \geq c \cdot g(n)$.

S pomočjo prejšnjega dokaza in leme 5.7 lahko pridemo do naslednje ugotovitve.

Posledica 5.10 (Huang in Sudakov [7])**.**

$$bp(H) \leq bp(\cup_{i=1}^{30} H_i) \leq \sum_{i=1}^{30} bp(H_i) \leq 30 \cdot n^5,$$

kar je v asimptotskem pogledu $O(n^5)$.

Pokazali smo torej, da je $bp(H) = O(n^5)$. Za dokončanje dokaza potrebujemo še eno lemo.

Lema 5.11 (Huang in Sudakov [7])**.** *Kromatično število grafa H je reda $\Omega(n^6)$.*

Za dokaz bomo uporabili eno izmed lastnosti kromatičnega števila grafa, $\chi(G) \geq |V(G)|/\alpha(G)$, kjer je $\alpha(G)$ velikost največje neodvisne množice v grafu G. V našem primeru je $|V(H)|$ kar n^7. Ker želimo, da je $\chi(H)$ vsaj $\Omega(n^6)$, moramo pokazati, da je $\alpha(H) = O(n)$. Dokaz, ki bo sledil, je enak dokazu iz članka [7], vendar vsebuje dodatna pojasnila.

Dokaz leme 5.11. Naj bo I poljubna neodvisna množica grafa H. Naj bo T množica indeksov definirana kot $T = \{i_1, \dots, i_t\} \subset \{1, \dots, 7\}$, kjer je $t = |T|$. Za vsako množico T lahko definiramo naravno projekcijo množic, z oznako p_T, ki slika elemente množice $\{1, \dots, n\}^7$ v elemente množice $\{1, \dots, n\}^t$. Za T_1 bomo definirali množico $\{1, 2, 3, 4\}$, za T_2 pa množico $\{5, 6, 7\}$.

Poglejmo si sedaj poseben primer, ko velja $|p_{T_1}(I)| = 1$. V tem primeru za poljubna dva različna elementa $x, y \in I$ velja, da imata prve 4 koordinate enake. Ker vemo, da je I neodvisna množica, iz konstrukcije grafa H sledi, da velja $\phi(x, y) \notin S$, torej velja $\phi(x, y) = 0^7$ ali $\phi(x, y) = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$. Ker sta x, y dva različna elementa, je možen samo drugi primer. Iz tega pa sledi, da imata vse zadnje tri koordinate različne. Možnih različnih elementov, ki se ujemajo v prvih 4 koordinatah in imajo vse zadnje koordinate različne, je največ n, saj imamo natanko n možnosti za izbiro ene izmed zadnjih treh koordinat. Posledično je $|I| = |p_{T_2}(I)| \leq n$.

Poglejmo si sedaj drugi primer, ko velja $|p_{T_1}(I)| > 1$. Vzemimo dva različna elementa $x, y \in I$, za katera velja $p_{T_1}(x) \neq p_{T_1}(y)$. Če se x in y ujemata v vsaj eni od prvih štirih koordinat, potem, ker sta nesosednja, velja $\phi(x, y) \notin S$, torej sta ponovno edini možnosti, da je $\phi(x, y) = 0^7$ ali $\phi(x, y) = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$, torej se ujemata v vseh prvih štirih koordinatah, kar je protislovje s predpostavko, da velja $p_{T_1}(x) \neq p_{T_1}(y)$. Torej se morata razlikovati v vseh prvih štirih koordinatah in ponovno dobimo $|I| = |p_{T_1}(I)| \leq n$. Če velja, da za vsak element $x' \in p_{T_1}(I)$ velja $|p_{T_1}^{-1}(x) \cap I| \leq 3$, sledi, da je $|I| \leq 3 \cdot |p_{T_1}(I)|$, kar pa je asimptotsko enako $O(n)$.

Če to ne velja, potem obstajajo taki paroma različni elementi $\widehat{x_1}, \widehat{x_2}, \widehat{x_3}, \widehat{x_4}$, da je $p_{T_1}(\widehat{x_i}) = \widehat{x}$ za vsak $1 \leq i \leq 4$ in nek $\widehat{x} \in \{1, \dots, n\}^4$. Ker se vsi ujemajo v prvih štirih koordinatah, smo že prej opazili, da se morajo nujno razlikovati v vseh zadnjih treh koordinatah. Ker velja $|p_{T_1}(I)| > 1$, vemo, da znotraj množice I obstaja tak element, označili ga bomo z z, da velja $p_{T_1}(z) \neq \widehat{x}$ in da se $p_{T_1}(z)$ in $\widehat{x}$ razlikujeta v vseh štirih koordinatah. Iz konstrukcije grafa H vemo, da so sosednje vse točke, ki se razlikujejo v vseh koordinatah, kar nam pove, da se morajo vektorji $\widehat{x_1}, \widehat{x_2}, \widehat{x_3}, \widehat{x_4}$ z vektorjem z ujemati v vsaj eni koordinati. Ker imamo 4 take točke in samo 3 koordinate, na katerih se lahko ujemajo, to pomeni, da se vsaj dve izmed njih med sabo ujemata na vsaj eni od zadnjih treh koordinat, kar pa je protislovje s tem, da imajo vse štiri od njih vse zadnje tri koordinate različne. Torej smo dobili protislovje s predpostavko, da take štiri različne točke obstajajo. To zaključi dokaz in vidimo, da je $|I| \leq O(n)$ ne glede na izbiro neodvisne množice, torej velja $\alpha(H) = O(n)$. □

Sedaj lahko uporabimo posledico 5.10 in lemo 5.11 in dobimo, da za graf H velja, da obstaja tak $c' \geq 0$, da za vse dovolj velike n velja, $\chi(H) \geq c'n^6$. Tedaj je $c'(bp(H))^{6/5} \leq 30^{6/5}c'n^6 \leq 30^{6/5}\chi(H)$. Torej graf H zadošča izreku 5.6 za konstanto $c = \frac{c'}{30^{6/5}}$ in s tem dobimo protislovje s predpostavko domneve Alona, Saksa in Seymourja, da je $\chi(H) \leq bp(H) + 1 = O(n^5) + 1$. Vidimo, da za dovolj veliko število n domneva ne velja. S tem smo končali protiprimer za dokaz neresničnosti dvodelnega analoga EFL domneve, kot sta ga zapisala Huang in Sudakov v članku [7]. Vse skupaj lahko sedaj povzamemo z naslednjim izrekom.

Izrek 5.12. *Domneva 5.3 (domneva Alona, Saksa in Seymourja) je napačna.*

6 Zaključek

V zaključni nalogi smo obravnavali domnevo Erdősa, Faberja in Lovásza. Spoznali smo, da lahko domnevo zapišemo v več različnih oblikah in s pomočjo različnih struktur in pojmov iz teorije grafov in hipergrafov, pa tudi s pomočjo celoštevilskega linearnega programa. Ob vseh oblikah, ki smo jih spoznali, pa obstaja še več različnih formulacij domneve, med katerimi so najbolj uporabljene za raziskovanje ravno domneve, ki se nanašajo na barvanje linearnih hipergrafov. Vsako od njih smo predstavili in pokazali, da so si med seboj ekvivalentne. S tem je na voljo več možnosti oziroma smeri za nadaljevanje raziskav o EFL domnevi in tudi o rezultatih, povezanih z njo. Med take rezultate sodi dvodelni analog EFL domneve, domneva Alona, Saksa in Seymourja, kot smo jo spoznali v poglavju 5. Slednja, ki se sicer nanaša na dvodelne grafe, je bila ovržena, vendar se je z njeno postavitvijo odprlo več različnih vprašanj na podobno temo (glej npr. [7]).
Med rezultate povezane z EFL domnevo sodi tudi racionalna oblika domneve. Kljub temu, da je racionalna teorija grafov relativno mlada veja teorije grafov, nam odpira nova vprašanja in poglede na najrazličnejše lastnosti grafov. Med njimi je tudi barvanje grafov. Kot smo opazili v poglavju 3, ko smo spoznali racionalno obliko EFL domneve, se da kromatično število vsakega grafa navzdol omejiti s pomočjo linearnega programa. Ob iskanju minimuma izpeljanega linearnega programa, ki zadošča danemu grafu, pridemo do spodnje meje za kromatično število grafa, kar sledi iz lasnosti, da je racionalno kromatično število grafa vedno manjše ali kvečjemu enako kromatičnemu številu grafa. Glede rezultatov, ki so neposredno povezani s samo domnevo, o kateri naloga govori, pa smo spoznali dva pomembna napredka v smeri dokaza domneve. In sicer sta to rezultat Horáka in Tuze, ki pravi, da za vsak graf, ki zadošča predpostavkam EFL domneve, zadošča $n^{3/2}$ barv, in rezultat Changa in Lawlerja, ki pravi, da zadošča $\lceil \frac{3}{2}n - 2 \rceil$ barv. Oba rezultata nam omejita število barv, ki jih potrebujemo za pravo barvanje grafa, ki zadošča predpostavkam EFL domneve. Vprašanje, ki je še vedno odprto, pa je, ali za barvanje poljubnega grafa, katerega množico povezav lahko zapišemo kot disjunktno unijo n polnih grafov na n točkah, velja, da ga lahko pobarvamo z n barvami tako, da nobeni dve sosednji točki nimata skupne barve. Radoveden bralec bo v članku [13] našel nekaj dodatnih rezultatov in vprašanj povezanih z EFL domnevo.

7 Literatura

[1] C.Berge, *Hypergraphs*, North-Holland Mathematical library, Volume 45, 1989. *(Citirano na straneh 2 in 11.)*

[2] C. Berge, Motivations and history of some of my conjectures. *Discrete Mathematics* 165/166 (1997) 61–70. *(Citirano na strani 9.)*

[3] W.I. Chang in E.L. Lawler, Edge coloring of hypergraphs and a conjecture of Erdős, Faber, Lovász. *Combinatorica* 8(3) (1988) 293–295. *(Citirano na straneh 1, 28 in 29.)*

[4] V.Chvátal, *Linear Programming*, W.H. Freeman and Company, First Edition, 1983. *(Citirano na strani 22.)*

[5] R.L. Graham, H.O. Pollak, On embedding graphs in squashed cubes, v: Y. Alavi, D.R. Lick, A.T. White, *Graph Theory and Applications*, Springer, Berlin, 1972, 99–110. *(Citirano na strani 32.)*

[6] P. Horák in Z. Tuza, A coloring problem related to the Erdős-Faber-Lovász conjecture. *J. Combin. Theory Ser. B* 50(2) (1990) 321–322. *(Citirano na straneh 1, 27 in 28.)*

[7] H. Huang in B. Sudakov, A counterexample to the Alon-Saks-Seymour cnjecture and related problems. *Combinatorica* 32(2) (2012) 205–219. *(Citirano na straneh 1, 32, 33, 34, 35, 36, 38 in 39.)*

[8] J. Kahn, Recent results on some not-so-recent hypergraph matching and covering problems, v: P. Frankl, *Extremal problems for finite sets, Volume 3*, Janos Bolyai Math. Soc., 1994, 305–353. *(Citirano na straneh 3, 6 in 9.)*

[9] J. Kahn in P.D. Seymour, A fractional version of the Erdős-Faber-Lovász conjecture. *Combinatorica* 12(2) (1992) 155–160. *(Citirano na straneh 1, 20, 22, 23 in 25.)*

[10] H. Klein in M. Margraf, A remark on the conjecture of Erdős, Faber and Lovász. *J. Geom.* 88(1-2) (2008) 116–119. *(Citirano na straneh 15, 16, 17 in 18.)*

[11] T.A. McKee in F.R. McMorris, *Topics in Intersection Graph Theory.* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1999. *(Citirano na strani 16.)*

[12] T.S. Motzkin, The lines and planes connecting the points of a finite set. *Trans. Amer. Math. Soc.* 70 (1951) 451–469. *(Citirano na strani 22.)*

[13] D. Romero in A. Sánchez-Arroyo, Advances on the Erdős-Faber-Lovász conjecture. V: G. Grimmett, C. McDiarmid, *Combinatorics, Complexity, and Chance: A Tribute to Dominic Welsh*, Oxford University Press, 2007, 272–284. *(Citirano na straneh 3, 6, 10, 13, 14, 16, 21, 33 in 39.)*

[14] E.R. Scheinerman in D.H. Ullman, *Fractional Graph Theory.* John Wiley and Sons, Inc., New York, 1997. *(Citirano na strani 26.)*

[15] P.D. Seymour, Packing Nearly-Disjoint Sets. *Combinatorica* 2(1) (1982) 91–97. *(Citirano na strani 10.)*

[16] H. Tverberg, On the decomposition of K_n into complete bipartite graphs. *J. Graph Theory* 6(4) (1982) 493–494. *(Citirano na strani 32.)*