Univerza na Primorskem

Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

Marko Tuta

Izrek o dualnosti v jeziku hipergrafov

Zaključna naloga

Koper, junij 2010

Mentor: doc. dr. Martin Milanič

Kazalo

Slike

Tabele

Zahvala

Iskreno se zahvaljujem mentorju doc. dr. Martinu Milaniču, da je nastajajoči nalogi posvetil svoj čas in strokovnost in da mi je na jasen način razsvetlil vse moje dvome glede vsebine in oblike naloge ter da mi je pomagal pri iskanju literature in virov. Zahvaljujem se tudi doc. dr. Štefku Miklaviču za nasvete glede oblikovanja naloge.

Uvod

Teorija dualnosti je v linearnem programiranju zelo uporabno orodje tako v praktičnih kot teoretičnih problemih. Kar pa je še najpomembnejše na tem področju, je izrek o dualnosti, o katerem bomo na dolgo in široko govorili v tej nalogi. Osredotočili se bomo na dualnost pri problemih pokritij in prirejanj v hipergrafih in pogledali, kakšno vlogo odigra pri tem izrek o dualnosti.
Vsakič ko lahko določen problem preoblikujemo v linearni program, nam izrek o dualnosti omogoča, da zastavljeni problem zapišemo v ekvivalentni obliki. Ta je včasih bolj enostavna in v takem primeru lahko pridemo do željenega rezultata po krajši poti. Izrek nam tudi omogoča, da na problem pogledamo z drugega zornega kota, kar nas potem pripelje do novih vprašanj in izzivov.

Pri obravnavi linearnega programa je pomembno, kakšne vrste so spremenljivke. V mnogih primerih imamo dodatni pogoj, da so spremenljivke celoštevilske. Imenujemo jih celoštevilski linearni programi. To se npr. zgodi, ko skušamo rešiti probleme iz realnega sveta. Spremenljivke z vrednostmi 0/1 uporabimo za modeliranje odločitev tipa DA/NE; nenegativne celoštevilske spremenljivke pa npr. uporabimo za količino določenih izdelkov. Izkazalo se je, da izrek o dualnosti velja tudi za določene celoštevilske linearne programe, kar je spodbudilo težnjo po razvoju splošnih metod v celoštevilskem linearnem programiranju, ki bi medsebojno povezovale raznorazne rezultate o minimaks izrekih v kombinatoriki. Kljub temu da minimaks izreki v kombinatoriki zajemajo nekatere najglobje kombinatorične izreke, pa to področje še ni dobro raziskano. V tej nalogi bomo predstavili nekatere rezultate o dualnosti v celoštevilskem programiranju. Pri tem se bomo osredotočili na problem prirejanj in pokritij v hipergrafih. Sledili bomo preglednemu članku Lázsla Lovásza [9].

- V 1.poglavju bomo spoznali, kaj so hipergrafi, kako je definirano linearno programiranje in katere so njegove lastnosti, obrazložili bomo koncepte teorije dualnosti in končno še spoznali prirejanja in pokritja, ki jih bomo potem povezali s pojmom hipergrafov.

- V 2.poglavju se bomo ukvarjali s pokritji in prirejanji v hipergrafih. Osredotočili se bomo na enakost $\nu = \tau$ (moč maksimalnega prirejanja je enaka moči minimalnega pokritja). Iskanje vrednosti ν in τ je v splošnem zahtevna naloga. Kadar pa sta ta parametra enaka, $\nu = \tau$, lahko uporabimo teorijo dualnosti in to skupno vrednost $\tau = \nu$ poiščemo s pomočjo linearnega programiranja.
- V 3. in hkrati zadnjem poglavju pa bomo govorili o dveh zelo znanih izrekih v teoriji grafov (Kőnigov[1] in Mengerjev izrek). Obravnavali ju bomo v jeziku hipergrafov s pomočjo orodij, ki jih bomo spoznali v prvem in drugem poglavju.

[1] V rabi je tudi pisava "Königov izrek". Izrek se včasih imenuje tudi "König-Egerváryjev izrek".

Poglavje 1

Osnovne definicije in glavni koncepti

1.1 Hipergrafi

Definicija 1. ***Hipergraf H*** *je končna neprazna množica končnih nepraznih množic. Elemente množice H imenujemo* ***povezave*** *(ali hiperpovezave). Množica $V(H)$ pa je unija vseh povezav hipergrafa, torej*

$$V(H) = \bigcup H\,.$$

Elemente množice $V(H)$ imenujemo ***vozlišča****. Vsaka povezava $E \in H$ lahko nastopi tudi večkrat (v tem primeru je H multimnožica).*

Neposredno iz definicije hipergrafa je razvidno, da hipergraf nima izoliranih vozlišč (tj. vozlišč, ki ne bi bila vsebovana v nobeni povezavi).
V primeru ko za vsako povezavo $E' \in H$ velja $|E'| = 2$, je H graf. Pišemo: $H = G = (V, E)$, kjer je $V = V(H)$ in $E = H$.

Definicija 2. ***Podhipergraf*** *H' hipergrafa H je hipergraf, za katerega velja $H' \subseteq H$.*

Osnovne operacije na hipergrafih

1. *Odstraniti povezavo* $E \in E(H)$ pomeni nadomestiti H s podhipergrafom $H - \{E\}$.

2. *Odstraniti vozlišče* $v \in V(H)$ pomeni odstraniti vse povezave, ki to vozlišče vsebujejo .

3. Naj bo k nenegativno celo število. *Pomnožiti vozlišče* $v \in V(H)$ s k pomeni, da vsako povezavo $E \in H$, ki vsebuje v, nadomestimo s k povezavami oblike $E \setminus \{v\} \cup \{v_i\}$, $i = 1, \ldots, k$. Če je $k = 0$, je ta operacija identična operaciji odstranitve vozlišča v.

Definicija 3. *Dan je hipergraf H. Incidenčna matrika hipergrafa $A(H)$ je matrika velikosti $|V(H)| \times |H|$, za katero velja:*

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{če vozlišče } i \text{ pripada povezavi } j; \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$$

Stolpci incidenčne matrike so torej karakteristični vektorji povezav hipergrafa.

Opombe:

- Strogo gledano, incidenčna matrika ni enolično določena s hipergrafom, ampak šele z linearno ureditvijo vozlišč/povezav. Vendar pa to za nas ne bo predstavljalo problema; lahko izberemo poljubno (ampak fiksno) ureditev.

- Za razliko od incidenčne matrike grafa, ki ima v vsakem stolpcu natanko dve enici, ima lahko incidenčna matrika hipergrafa v vsakem stolpcu poljubno (pozitivno) število enic.

- Incidenčna matrika hipergrafa H ne bo nikoli imela niti stolpcev s samimi ničlami (saj nobena povezava ni prazna množica) niti vrstic s samimi ničlami (saj hipergraf nima izoliranih vozlišč).

- Če odstranimo povezavo $E \in H$, bi to pomenilo, da v incidenčni matriki odstranimo stolpec pripadajoče povezave. Če se zgodi, da z odstranitvijo povezav pridemo do ničelne vrstice, pomeni, da je postalo pripadajoče vozlišče izolirano, torej moramo odstraniti tudi to vrstico.

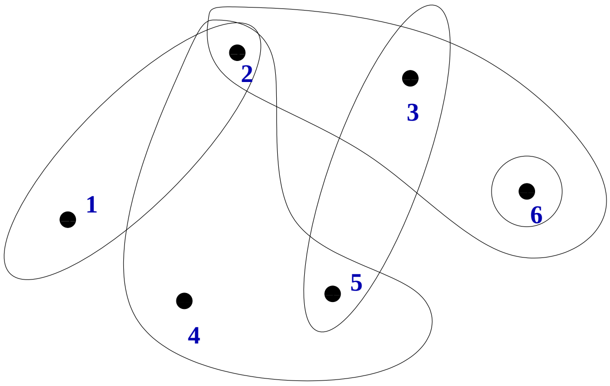
- Če odstranimo vozlišče $v \in V(H)$, potem bi morali v incidenčni matriki odstraniti tako pripadajočo vrstico kot tudi vse stolpce, ki imajo v tej vrstici 1.

Zgled:

Hipergraf je podan z naslednjo množico povezav

$$H = \{\{\underbrace{1,2}_{E_1}\}, \{\underbrace{2,3,6}_{E_2}\}, \{\underbrace{2,4,5}_{E_3}\}, \{\underbrace{3,5}_{E_4}\}, \{\underbrace{6}_{E_5}\}\}.$$

Torej je $V(H) = \{1,2,3,4,5,6\}$.

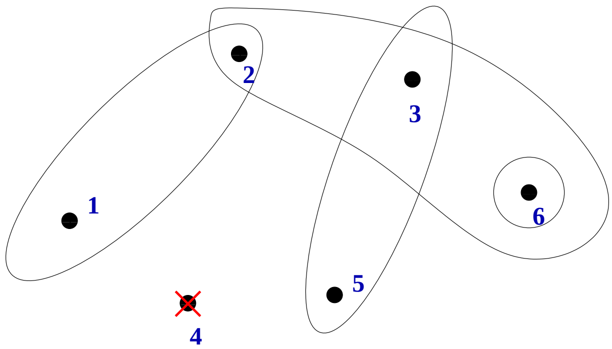


Slika 1.1: Skica hipergrafa

Zapišimo še incidenčno matriko $A(H)$ velikosti 6×5:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Odstranimo povezavo E_3. Tedaj v incidenčni matriki $A(H)$ odstranimo tretji stolpec, ki predstavlja to povezavo in v četrti vrstici dobimo same ničle, kar pomeni, da postane vozlišče 4 izolirano. Poglejmo še grafični prikaz:

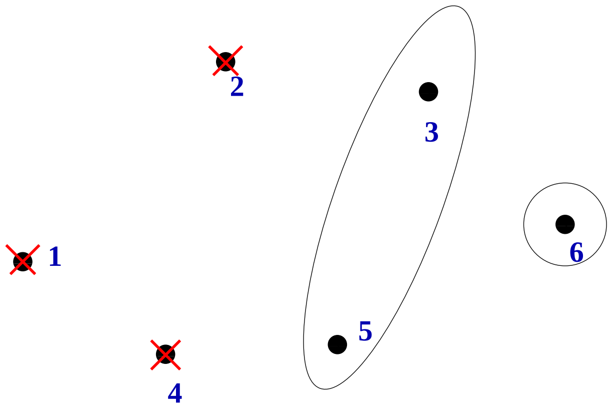


Slika 1.2: Odstranitev povezave E_3

Pripadajoča incidenčna matrika pa je:

$$
\begin{array}{c}
 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_5 \\ v_6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_4 & E_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Če pa odstranimo vozlišče 2, moramo v incidenčni matriki $A(H)$ odstraniti drugo vrstico in prve tri stolpce, saj imajo v tej vrstici 1. Odstraniti pa moramo še prvo in četrto vrstico, saj sta postali vozlišči 1 in 4 izolirani. Dobljeni hipergraf je torej:



Slika 1.3: Odstranitev vozlišča 2

in pripadajoča incidenčna matrika:

$$
\begin{array}{c}
 \\ v_3 \\ v_5 \\ v_6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} E_4 & E_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 \\
1 & 0 \\
0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

1.2 Linearno programiranje

Linearno programiranje je čudovito in nadvse uporabno orodje pri reševanju optimizacijskih problemov. Izraz *programiranje* sicer ni povezan z današnjim modernim izrazom za računalniško programiranje. V petdesetih letih so začeli ta termin uporabljati v vojaškem okolju, kot npr. za načrtovanja v vojski. Postopoma pa so izraz začeli uporabljati za matematične probleme, ki se ukvarjajo z minimizacijo oziroma maksimizacijo linearne funkcije, kjer moramo upoštevati določene linearne omejitve. S tem dosežemo optimalno vrednost v danem matematičnem modelu. Linearno programiranje se je razvilo do take mere, da se ga danes poslužujemo v matematiki, v teoretičnem računalništvu (postalo je eden osnovnih konceptov za razvoj algoritmov), v gospodarstvu in industriji (za učinkovito porabo virov, oblikovanje tržnih in vojaških strategij, planiranje proizvodnje ipd.) in še na veliko drugih področjih.

Matematično ozadje

Ko imamo opravka s problemi optimizacije, večkrat zaidemo na področje *matematičnega programiranja (angl. mathematical programming)*, ki zajema vse naloge oblike:

$$
\begin{array}{rrcl}
\max / \min & f(x) & & \\
 & & & \\
\textit{pri pogojih (p. p.)} & g_i(x) & \leq & 0,\ \text{za vse } i \in I_- \,, \\
 & g_i(x) & = & 0,\ \text{za vse } i \in I_0 \,, \\
 & g_i(x) & \geq & 0,\ \text{za vse } i \in I_+ \,,
\end{array}
$$

kjer so I_-, I_0, I_+ paroma disjunktne končne množice (brez škode za splošnost lahko postavimo $I_- \cup I_0 \cup I_+ = \{1, \ldots, m\}$) in kjer so funkcije $f, g_1, \ldots, g_m : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Množica vseh dopustnih rešitev D je množica vseh tistih x-ov, ki zadoščajo vsem pogojem določenim s funkcijami g_i, torej:

$D = \{x \in \Omega : g_i(x) \leq 0$ za vse $i \in I_-$, $g_i(x) = 0$ za vse $i \in I_0$, $g_i(x) \geq 0$ za vse $i \in I_+\}$

Definicija 4. *Linearno programiranje (oznaka: LP) je matematično programiranje, kjer so funkcije $f, g_1, \ldots, g_m$ linearne. O linearnem programiranju govorimo, ko hočemo maksimizirati/minimizirati linearno kriterijsko funkcijo in imamo podano vrsto linearnih enačb/neenačb, ki so pogoji, ki jih moramo upoštevati pri iskanju optimalne vrednosti naše funkcije.*
Če ima linearni program še dodatni pogoj $x \in \mathbb{Z}^n$, potem mu pravimo ***celoštevilski linearni program*** *(oznaka: CLP).*

Primer LP:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ p.p. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

kjer velja: $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ ($\mathbb{R}^{m,n}$ označuje množico matrik velikosti $m \times n$ nad obsegom realnih števil), $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$.

Matrika A in vektorja b in c sta podana; iščemo vektor x, ki bo minimiziral kriterijsko funkcijo $c^T x$, kjer moramo upoštevati pogoj $Ax \leq b$ in pogoj nenegativnosti $x \geq 0$ (neenakost vektorjev, npr. $u \geq v$, pomeni neenakost po komponentah: $u_i \geq v_i$ za vse i) .

Dve posebni obliki linearnih programov sta še posebej pomembni:

- Standardna oblika LP:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ p.\,p. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- Kanonična oblika LP:

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ p.\,p. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Vse navedene oblike linearnih programov so med seboj ekvivalentne. S pomočjo naslednjih splošnih pretvorb lahko LP v poljubni od teh oblik pretvorimo v poljubno drugo obliko.

Splošne pretvorbe:

- spremenimo min v max oziroma max v min, tako da negiramo kriterijsko funkcijo ;
- zamenjamo $\leq$ v $\geq$, tako da neenakost pomnožimo z (-1) ;
- spremenimo enačaj v neenačaj:

$$A = B \Leftrightarrow A \leq B \wedge A \geq B\,;$$

- spremenimo neenačaj v enačaj:

$$A \leq B \Leftrightarrow A + a = B, a \geq 0\,;$$

pri tem vpeljemo dopolnilno spremenljivko a (*angl. slack variable*), ki je nenegativna.

Splošne pretvorbe so povsem uporabne, ko se na primer soočamo z računalniškim programom, ki lahko sprejema samo vnos linearnega programa v standardni obliki. Z zgornjimi pravili lahko LP poljubne oblike spremenimo v standardno in ga nato vnesemo v računalnik. Prehajanje med različnimi oblikami linearnih programov ima tudi teoretično uporabo.

Terminologija

- Vsak vektor x, ki izpolnjuje pogoje linearnega programa, imenujemo **dopustna rešitev**. Množico dopustnih rešitev, ki jo označujemo z D, je podana posredno:

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n | \; x \text{ izpolnjuje pogoje}\}\,.$$

- Če linearni program nima nobene dopustne rešitve, torej, če velja $D = \emptyset$, pravimo, da **ni dopusten** ali da je **protisloven**. To pogosto ni neposredno razvidno iz opisa naloge.

- Če obstaja dopustna rešitev x^* z lastnostjo

$$c^T x^* \leq c^T x \quad \forall x \in D\,,$$

pravimo, da je x^* **optimalna rešitev**. To velja v primeru, ko gre za problem minimizacije; za problem maksimizacije pa obrnemo neenakost. Običajno iščemo optimalno rešitev naloge, lahko pa se zgodi, da nas zanima le **optimalna vrednost**, t.j. $f(x^*)$.

- Če obstaja zaporedje $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ dopustnih rešitev, da velja $\lim_{k\to\infty} c^T x_k = -\infty$, pravimo, da je LP **neomejen**. (Ta definicija velja za probleme minimizacije; za probleme maksimizacije pa $-\infty$ zamenjamo s $+\infty$.)

Zgodovina in pomen linearnega programiranja

Linearno programiranje je še mlado področje matematike z razmeroma kratko zgodovino, kljub temu pa sega danes na mnogo področij.
Najprej je treba poudariti, da se v jedru teorije linearnega programiranja

skriva reševanje sistemov linearnih neenačb. Pred letom 1947 ni bilo veliko napisanega o tem, saj niso imeli tako razvitih računalnikov, da bi lahko natančneje raziskovali to področje, in so že enostavni problemi zahtevali veliko dela. J. Fourier je npr. leta 1826 objavil članek, v katerem je razložil metodo za reševanje linearnega sistema neenačb. S tem so se ukvarjali tudi Motzkin, Poussin, Farkas, Minkowski in drugi.
Leta 1939 je V. Kantorovich napisal članek, kjer je predstavil ožji razred linearnih programov in algoritme za njihovo reševanje. Zaradi tedanjih političnih razmer v Sovjetski zvezi pa je Kantorovichov rezultat ostal neopažen.
Čeprav je nekaj matematikov že raziskovalo to področje pred letom 1947, štejemo šele leto 1947 za pravi začetek linearnega programiranja. Takrat je namreč G.B. Dantzig zasnoval in razvil simpleksno metodo za reševanje linearnih programov pri U.S.Air Force v Pentagonu. Zaradi tega imamo Dantziga za "očeta" linearnega programiranja, ki je po letu 1947 doživelo hiter in velik vzpon. Za potrebe vojske je želel Dantzig realen problem zapisati v obliki linearnega programa. Sprva ni uporabljal kriterijske funkcije, saj je optimalno rešitev iskal s pomočjo velikega števila kriterijev, ki so omejili število možnih rešitev. Leta 1947 pa je sestavil model, kjer je uporabil kriterijsko funkcijo. Istega leta je srečal Koopmansa na univerzi v Chicagu in mu predstavil svoje delo. To srečanje je bilo pomembno za nadaljnji razvoj linearnega programiranja. Dantzig se je leta 1947 srečal tudi z von Neumannom v Princetonu. Dantzig mu je razložil problem logistike v vojski in podal algebraično in geometrijsko ozadje problema. Von Neumann je bil s tem zadovoljen in je Dantzigu razložil teorijo in dualnost linearnega programiranja. Istega leta je von Neumann zapisal izrek o krepki dualnosti. Leta 1948 je Dantzig srečal tudi Alberta Tuckerja, ki je s Haroldom Kuhnom in Davidom Galeom raziskoval teorijo dualnosti v nelinearnem programiranju.
Razvoj linearnega programiranja je postajal vse hitrejši, saj sta se računalniška oprema in tehnologija hitro razvijali in omogočili hiter vzpon tega področja. Vsem je postalo jasno, da bo linearno programiranje našlo uporabo na različnih področjih. Geometrija konveksnih množic, problemi kombinatorične narave in teorija matričnih iger so le nekatera področja matematike, ki so bila sicer že prej poznana, linearno programiranje pa je omogočilo nov pristop k raziskavam na teh področjih. Hkrati pa se je pojavila težnja po iskanju drugih učinkovitih algoritmov, ki bi optimalno rešili linearne programe. Tako je leta 1979 L. Khachiyan razvil elipsoidni postopek, leta 1984 pa R. Karmarkar metodo notranje točke. Tako elipsoidni postopek kot metoda notranje točke imata teoretično prednost pred simpleksnim postopkom, saj tudi v najslabšem primeru potrebujeta le polinomsko mnogo korakov. Prvo komercialno programsko opremo za reševanje linearnih programov je napisal W. Orchard-Hays leta 1954. Leta 1975 sta Koopmans in

Kantorovich prejela Nobelovo nagrado za ekonomijo za svoje prispevke pri optimizacijskih problemih. Med nagrajenci pa ni bilo Dantziga, kar je bilo veliko presenečenje. Koopmansa je to tako pretreslo, da je dal v čast Dantzigu tretjino denarne nagrade inštitutu IIASA (International Institute for Applied Systems Analysis), kjer sta skupaj sodelovala.
Za več informacij glede zgodovine in razvoja LP glej [16].

Teorija dualnosti

Teorija dualnosti je zelo uporabna na področju linearnega programiranja. Recimo, da imamo poljubni linearni program. Potem lahko zapišemo njegov dual, ki nam včasih olajša reševanje LP. Dualni problem skriva v sebi še veliko drugih (teoretičnih) prednosti, ki pa jih v tej nalogi ne bomo obravnavali. Poglejmo si najprej, kako je definiran dual linearnega programa v kanonični obliki:

$$\begin{array}{lccll} \max & c^T x & \longleftarrow & \min & b^T y \\ p.\,p. & Ax \leq b & \overrightarrow{dual} & p.\,p. & A^T y \geq c \\ & x \geq 0 & & & y \geq 0 \end{array} \tag{1.1}$$

pri čemer so $A \in \mathbb{R}^{m,n}, b \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$.

Opomba

Dualna naloga dualne naloge je enakovredna začetni nalogi. V (1.1) imamo namreč puščici v obe smeri.

Če hočemo torej zapisati dual poljubnega linearnega programa, je dovolj, da ga prevedemo v kanonično obliko in potem sestavimo dual kot na zgornjem primeru. Obstaja pa še druga pot.
Če imamo dano začetno nalogo, kjer iščemo **maksimum** kriterijske funkcije, potem se lahko poslužujemo spodnje tabele, da prevedemo poljubni LP v njegov dual, ne da bi ga morali prej prevesti v kanonično obliko. V tabeli so navedena pravila za prevedbe v dualno nalogo:

Začetna naloga		Dualna naloga	
tip naloge	maksimum	minimum	tip naloge
pogoji	$\leq b$ $= b$	$y \geq 0$ $y \in \mathbb{R}^m$	spremenljivke
spremenljivke	$x \geq 0$ $x \in \mathbb{R}^m$	$\geq c$ $= c$	pogoji

Tabela 1.1: Pravila za prevedbe

Zgled (z uporabo zgornjih pravil):

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ p.\,p. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \overrightarrow{dual} \quad \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ p.\,p. & A^T y \geq c \\ & y \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

V primeru, da v začetnem LP iščemo **minimum** kriterijske funkcije, potem ga moramo prevesti v iskanje maksimuma in uporabiti pravila zgornje tabele. Lahko pa pravila zgornje tabele uporabimo tudi direktno, tako da imamo začetni LP za "dualnega"(tj. tabelo beremo z desne proti levi).
Dualnost je zelo uporabna, ko imamo veliko spremenljivk in malo pogojev. Delo si lahko olajšamo tako, da zapišemo dualno nalogo. Tako dobimo več pogojev in manj spremenljivk in na ta način zmanjšamo dimenzijo prostora, v katerem rešujemo problem.

Da bi bolje razumeli povezavo med LP in njegovim dualom, si sedaj poglejmo čudovito plat teorije dualnosti, ki jo nam razkrivata t.i. **šibka in krepka dualnost**. V ta namen si oglejmo naslednji primer linearnega programa v kanonični obliki:

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + x_2 - x_3 \\ p.p. & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 0 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \tag{1.2}$$

Izkaže se, da je optimalna rešitev te naloge $x^* = [\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, 0]$, optimalna vrednost pa je 5.25.

Dualna naloga se glasi:

$$
\begin{array}{ll}
\max & 3y_1 + 4y_3 \\
p.p. & y_1 + y_2 + y_3 \geq 3 \\
 & 2y_1 - 2y_2 + y_3 \geq 1 \\
 & 3y_2 \geq -1 \\
 & y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{array}
\tag{1.3}
$$

Optimalna rešitev dualne naloge je $y^* = [\frac{7}{4}, \frac{5}{4}, 0]$, optimalna vrednost pa je 5.25.
Če primerjamo rezultate, opazimo, da velja zveza $c^T x^* = b^T y^*$ (optimalni vrednosti sta enaki). To bi pomenilo, da če iščemo optimalno vrednost linearnega programa (1.2) in imamo manj dela z računanjem dualne naloge (1.3), potem je bolje, da to storimo, ker bomo dobili isti rezultat. Krepka dualnost nam pove ravno to, da če izračunamo vrednosti kriterijske funkcije začetne in dualne naloge v optimalnih rešitvah, bosta vrednosti enaki (glej spodnji izrek).

Trditev 1 (Šibka dualnost)**.** *Naj bo P linearni program v kanonični obliki in D njegov dual. Potem vrednost $b^T y$ za vsako dopustno rešitev y dualne naloge D določi zgornjo mejo za maksimum kriterijske funkcije v P. Naj bo x dopustna rešitev začetne naloge, y pa dopustna rešitev dualne naloge. Velja torej:*

$$c^T x \leq b^T y \,.$$

Govorimo o *šibki dualnosti*, ker nam trditev zagotovi samo neko zgornjo mejo za maksimum kriterijske funkcije v začetni nalogi, ne pa tudi, da imamo enakost optimalnih vrednosti. O tem govori krepka dualnost.

Izrek 1 (Izrek o dualnosti - krepka dualnost)**.** *Naj ima začetna naloga optimalno rešitev x^*. Potem ima tudi dualna naloga optimalno rešitev, ki jo označimo z y^* in velja:*

$$c^T x^* = b^T y^*$$

Krepka dualnost nam pove, da če ima začetna naloga optimalno rešitev, potem jo ima tudi dualna naloga, optimalni vrednosti obeh nalog pa sta enaki (t.i. dualni razmik je enak 0).

Začetni linearni program ima lahko naslednje tri možnosti: ima optimalno rešitev, je brez dopustne rešitve, je neomejen. Isto velja za njegov dual. To nas privede do devet možnosti, šibka in krepka dualnost pa nam povesta, kateri so možni pari, ki so v spodnji tabeli označeni z besedo DA. V tabeli so na levem stolpcu naštete vse tri možne lastnosti začetne naloge, v zgornji vrstici pa lastnosti dualne naloge:

	optim.	brez dop.	neom.
optim.	DA	NE	NE
brez dop.	NE	DA	DA
neom.	NE	DA	NE

Tabela 1.2: Vse možnosti za primalni in dualni LP

Poglavje 2

Pokritja in prirejanja v hipergrafih

Kot smo že povedali v uvodu, se bomo v tej nalogi osredotočili na dualnost pri problemih pokritij in prirejanj v hipergrafih. V ta namen definirajmo najprej oba pojma.

2.1 Prirejanja in pokritja

Definicija 5. *Naj bo H hipergraf in naj bo $M \subseteq H$. M je **prirejanje** (angl. matching), če noben par povezav iz M nima skupnega vozlišča.*

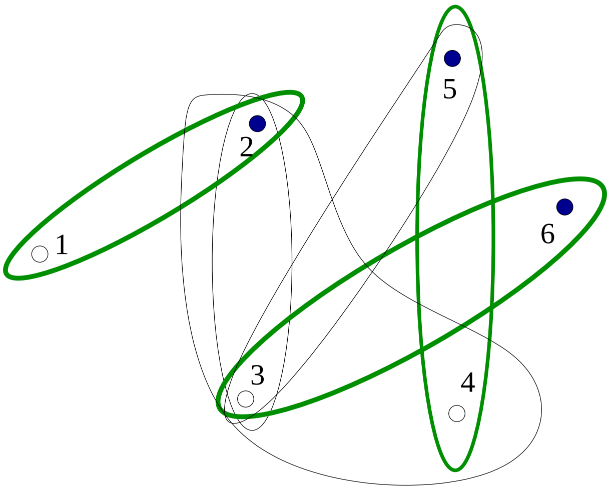
Definicija 6. *Naj bo H hipergraf in naj bo M prirejanje hipergrafa H. M je **maksimalno prirejanje**, če je največje možne moči. Moč maksimalnega prirejanja označimo z $\nu(H)$. Vsako drugo prirejanje v danem hipergrafu bo torej kvečjemu moči maksimalnega prirejanja.*

Definicija 7. *Naj bo H hipergraf in $V(H)$ množica vozlišč hipergrafa H. $C \subseteq V(H)$ je **pokritje** (angl. cover), če ima vsaka povezava iz H vsaj eno vozlišče v C.*

Definicija 8. *Naj bo H hipergraf. **Minimalno pokritje** je pokritje hipergrafa H najmanjše možne moči. Moč minimalnega pokritja označimo s $\tau(H)$. Moč vsakega drugega pokritja v danem hipergrafu bo torej večja ali enaka moči minimalnega pokritja.*

Zgled:

Naj bo $H = \{\{1,2\},\{2,3\},\{2,3,4\},\{3,5\},\{4,5\},\{3,6\}\}$ hipergraf. Na sliki sta označena maksimalno prirejanje M (odebeljene povezave) in minimalno pokritje C (pobarvana vozlišča).



Slika 2.1: Maksimalno prirejanje in minimalno pokritje hipergrafa H

Pri obravnavi hipergrafa H nas bodo zanimala maksimalna prirejanja in minimalna pokritja. V ta namen uvedimo še nekaj pojmov.

Definicija 9. *Naj bo H hipergraf. Definirajmo **k-prirejanje** (angl. k-matching) kot funkcijo $m : H \to \{0, 1, \ldots\}$, za katero velja:*

$$\sum_{E \ni x} m(E) \leq k \quad (\forall x \in V(H))$$

Očitno moremo 1-prirejanja identificirati s prirejanji.

Definicija 10. *Naj bo H hipergraf. Definirajmo **k-pokritje** (angl. k-cover) kot funkcijo $t : V(H) \to \{0, 1, \ldots\}$, za katero velja:*

$$\sum_{x \in E} t(x) \geq k \quad (\forall E \in H)$$

Očitno moremo 1-pokritja identificirati s pokritji.

Definicija 11. *Naj bo H hipergraf. Definirajmo **deljeno prirejanje** (angl. fractional matching) kot funkcijo $m : H \to \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+$ označuje množico $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$), za katero velja:*

$$\sum_{E \ni x} m(E) \leq 1 \quad (\forall x \in V(H))$$

Opomba:

Opazimo, da je zaloga vrednosti poljubnega deljenega prirejanja vsebovana v intervalu $[0, 1]$, saj če bi imela katera od povezav vrednost > 1, potem pogoji, ki definirajo deljeno prirejanje, ne bi bili izpolnjeni.

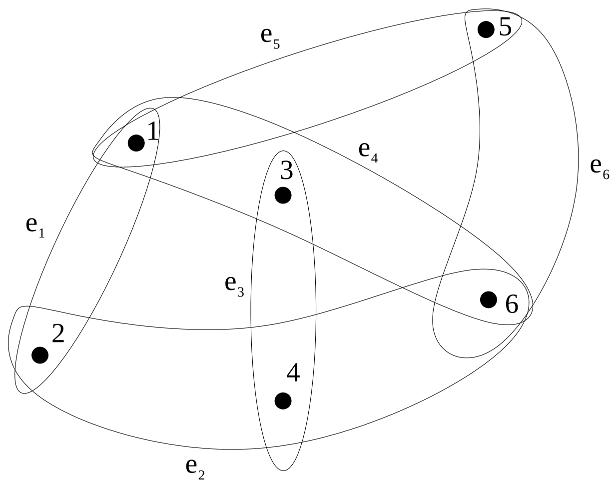
Vsako deljeno prirejanje imamo za dopustno rešitev ustreznega linearnega programa, vrednost deljenega prirejanja pa je vrednost kriterijske funkcije tega linearnega programa, ovrednotene v tem deljenem prirejanju. Podobno lahko definiramo tudi vrednost deljenega pokritja.

Definicija 12. *Naj bo H hipergraf. Definirajmo **deljeno pokritje** (angl. fractional cover) kot funkcijo $t : V(H) \to \mathbb{R}_+$, za katero velja:*

$$\sum_{x \in E} t(x) \geq 1 \quad (\forall E \in H)$$

Zgled:

Naj bo dan naslednji hipergraf:



Slika 2.2: Hipergraf na šestih vozliščih

Poiščimo kakšno deljeno prirejanje in potem še deljeno pokritje zgornjega hipergrafa. Vzemimo naslednje deljeno prirejanje:

$$m(e_1) = \frac{1}{2},\ m(e_2) = 0,\ m(e_3) = \frac{2}{3},\ m(e_4) = \frac{1}{3},\ m(e_5) = \frac{1}{6},\ m(e_6) = \frac{2}{3}$$

Po definiciji deljenega prirejanja, vidimo, da res velja zveza:

$$\sum_{E \ni x} m(E) \leq 1 \quad (\forall x \in V(H))$$

Če torej izberemo poljubno vozlišče hipergrafa, pogledamo vse vrednosti deljenega prirejanja na povezavah, ki to vozlišče vsebujejo, in te vrednosti seštejemo, potem bo vsota ≤ 1.
Poglejmo še primer deljenega pokritja:

$$t(1) = 1,\ t(2) = \frac{1}{2},\ t(3) = 1,\ t(4) = \frac{2}{3},\ t(5) = \frac{5}{6},\ t(6) = 1.$$

Velja zveza:

$$\sum_{x \in E} t(x) \geq 1 \quad (\forall E \in H),$$

če torej seštejemo vrednosti vozlišč v poljubni povezavi, bo vsota ≥ 1. Pri k-prirejanjih in k-pokritjih imamo lahko podoben zgled, namesto pogojev ≤ 1 in ≥ 1 bi morali zadostiti pogojem tipa $\leq k$ oziroma $\geq k$.
Kot vidimo, iskanje poljubnega k-prirejanja, k-pokritja, deljenega prirejanja in deljenega pokritja v splošnem ni zahtevna naloga. Problem nastopi, ko hočemo poiskati maksimalna prirejanja oziroma minimalna pokritja. V nadaljevanju bomo predstavili zveze, ki obstajajo med prirejanji, pokritji, deljenimi prirejanji in deljenimi pokritji, in pogledali, če si lahko na kak način olajšamo reševanje tovrstnih problemov.

Z $||m||$ bomo označevali 1-normo (deljenega prirejanja, k-prirejanja m) $||m||_1 = \sum_{E \in H} |m(E)|$ (podobno tudi za pokritja t). Ker je $m(E) \geq 0$, bomo lahko absolutno vrednost izpustili. Označimo z $\nu_k(H)$ maksimum vrednosti

$$||m|| = \sum_{E \in H} m(E)$$

po vseh k-prirejanjih in označimo z $\tau_k(H)$ minimum vrednosti

$$||t|| = \sum_{x \in V(H)} t(x)$$

po vseh k-pokritjih. Če m teče po vseh deljenih prirejanjih, označimo maksimum $||m||$ z $\nu^*(H)$. Če t teče po vseh deljenih pokritjih, označimo minimum $||t||$ z $\tau^*(H)$. Po izreku o dualnosti velja naslednja enakost:

$$\nu^*(H) = \max \sum_{E \in H} m(E) = \min \sum_{x \in V(H)} t(x) = \tau^*(H) \tag{2.1}$$

Res! Prepričajmo se v to s pomočjo incidenčne matrike A hipergrafa H. Zapis **1** označuje vektor samih enic ustrezne dimenzije. (Zaradi enostavnosti bomo v nadaljevanju izpustili argument H in pisali kar ν namesto $\nu(H)$, τ

namesto $\tau(H)$, ipd.) V spodnji shemi smo najprej zapisali LP za iskanje ν^*, ga zapisali v matrični obliki, sestavili dual in ga končno pretvorili spet v LP, ki predstavlja iskanje τ^*:

$$
\begin{array}{llcl}
\min & \sum_{x\in V} t(x) & & \\
 & & & \min \quad \mathbf{1}^T t \\
p.\,p. & \sum_{x\in E} t(x) \geq 1 \quad \forall E \in H & \longrightarrow & p.\,p. \quad A^T t \geq \mathbf{1} \\
 & & & \qquad t \geq 0 \\
 & t(x) \geq 0 & & \\
 & \quad \uparrow \mathit{dual} & & \quad \downarrow \mathit{dual} \\
\max & \sum_{E\in H} m(E) & & \\
 & & & \max \quad \mathbf{1}^T m \\
p.\,p. & \sum_{E\ni x} m(E) \leq 1 \quad \forall x \in V & \longleftarrow & p.\,p. \quad Am \leq \mathbf{1} \\
 & & & \qquad m \geq 0 \\
 & m(E) \geq 0 & &
\end{array}
$$

Slika 2.3: Shema za dokaz enakosti $\nu^* = \tau^*$

Po izreku o dualnosti je torej res $\nu^* = \tau^*$.

Trditev 2. *Za vsak k velja:*

$$\nu \leq \frac{\nu_k}{k} \leq \nu^* = \tau^* \leq \frac{\tau_k}{k} \leq \tau$$

Dokaz. Enakost v trditvi 2 sledi iz (2.1). Dokazati moramo levo stran in desno stran enačaja.

Leva stran: $\nu \underbrace{\leq}_{(a)} \frac{\nu_k}{k} \underbrace{\leq}_{(b)} \nu^*$

(a) Najprej preoblikujmo zvezo:

$$\nu \leq \frac{\nu_k}{k} \Leftrightarrow \nu_k \geq k \cdot \nu$$

Spomnimo se, da

$$\nu_k = \max\{||m|| : m \text{ je } k\text{-prirejanje}\} \geq k \cdot \nu\,.$$

Torej zadošča poiskati tako k-prirejanje m, da bo

$$||m|| \geq k \cdot \nu\,.$$

Naj bo m prirejanje, za katerega velja $||m|| = \nu$. Naša naloga je torej poiskati tako k-prirejanje m', da bo veljalo

$$||m'|| = k \cdot \nu\,.$$

V ta namen definirajmo:

$$m'(E) := k \cdot m(E) \quad \forall E \in H\,.$$

Najprej preverimo, ali je m' res k-prirejanje:

$$\sum_{E \ni x} m'(E) = \sum_{E \ni x} k \cdot m(E) = k \sum_{E \ni x} m(E) \leq k \cdot 1 = k\,.$$

Sledi:

$$||m'|| = \sum_{E \in H} m'(E) = \sum_{E \in H} k \cdot m(E) = k \sum_{E \in H} m(E) = k \cdot ||m|| = k \cdot \nu\,.$$

(b) Dokazati moramo, da velja $\frac{\nu_k}{k} \leq \nu^*$, kjer je

$$\nu^* = \max\{||m|| : m \text{ je deljeno prirejanje}\}\,.$$

Naj bo m tako k-prirejanje, da velja $||m|| = \nu_k$. Poiskati moramo deljeno prirejanje m'', tako da bo veljalo:

$$||m''|| = \frac{\nu_k}{k}\,.$$

V ta namen definirajmo:

$$m''(E) := \frac{1}{k} \cdot m(E) \quad \forall E \in H\,.$$

Podobno kot v točki (a) moramo najprej preveriti, ali je m'' res deljeno prirejanje.
Dobimo:

$$\sum_{E \ni x} m''(E) = \sum_{E \ni x} \frac{1}{k} \cdot m(E) = \frac{1}{k} \sum_{E \ni x} m(E) = \frac{1}{k} \cdot ||m|| \leq 1$$

Iz tega sledi, da je m'' deljeno prirejanje in

$$||m''|| = \sum_{E \in H} m''(E) = \sum_{E \in H} \frac{1}{k} \cdot m(E) = \frac{1}{k} \sum_{E \in H} m(E) = \frac{\nu_k}{k}.$$

Pogoji nenegativnosti v obeh dokazih sledijo že iz tega, da je $k \geq 0$ in $m(E) \geq 0$.

Podobno dokažemo tudi desno stran zveze v trditvi 2, $\tau^* \underbrace{\leq}_{(d)} \frac{\tau_k}{k} \underbrace{\leq}_{(c)} \tau$

(c) Vemo, da

$$\tau_k = \min\{||t|| : t \text{ je } k\text{-pokritje}\} \leq k \cdot \tau\,.$$

To seveda velja, če obstaja k-pokritje t, da bomo imeli

$$||t|| \leq k \cdot \tau$$

Naj bo t pokritje in $||t|| = \tau$. Definirajmo t':

$$t'(x) = k \cdot t(x) \quad \forall x \in v(H)\,.$$

Ali je $t'(x)$ zares k-pokritje? Da, saj velja

$$\sum_{x \in E} t'(x) = \sum_{x \in E} k \cdot t(x) = k \sum_{x \in E} t(x) \geq k \cdot 1 = k\,.$$

Končno:

$$||t'|| = \sum_{x \in V(H)} t'(x) = \sum_{x \in V(H)} k \cdot t(x) = k \sum_{x \in V(H)} = k \cdot \tau\,.$$

(d) Nazadnje moramo še dokazati, da $\tau^* \leq \frac{\tau_k}{k}$. Naj bo t tako k-pokritje, da je $||t|| = \tau_k$. Poiskati moramo deljeno pokritje t'', tako da bo veljalo:

$$||t''|| = \frac{\tau_k}{k}.$$

Definirajmo:

$$t''(x) = \frac{1}{k} \cdot t(x) \quad \forall x \in V(H)\,.$$

Velja:

$$\sum_{x \in E} t''(x) = \sum_{x \in E} \frac{1}{k} \cdot t(x) = \frac{1}{k} \sum_{x \in E} t(x) \geq 1\,.$$

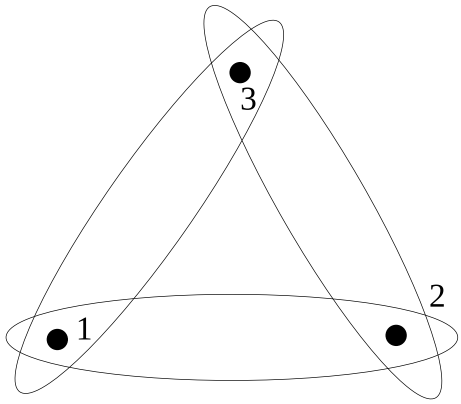
Še več:

$$||t''|| = \sum_{x \in V(H)} t''(x) = \sum_{x \in V(H)} \frac{1}{k} \cdot t(x) = \frac{1}{k} \sum_{x \in V(H)} t(x) = \frac{\tau_k}{k}\,.$$

$\square$

2.2 Kaj nam pomeni enakost $\nu = \tau$

Začnimo s preprostim primerom, ki nas bo privedel do strogih neenakosti v trditvi 2. Naj bo $H = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$.



Slika 2.4: Primer preprostega (hiper)grafa na treh vozliščih

Dobimo naslednje:

- $\nu = 1$, saj ne obstajata dve povezavi, ki ne bi imeli skupnega vozlišča
- $\tau = 2$, ker moramo imeti v pokritju dve vozlišči, tako da bo vsaka povezava vsebovala vsaj eno vozlišče iz pokritja
- $\nu^* \geq \frac{3}{2}$, če vzamemo $m(\{1, 2\}) = \frac{1}{2}$, $m(\{2, 3\}) = \frac{1}{2}$ in $m(\{1, 3\}) = \frac{1}{2}$
- $\tau^* \leq \frac{3}{2}$, če vzamemo $t(1) = \frac{1}{2}$, $t(2) = \frac{1}{2}$ in $t(3) = \frac{1}{2}$

Zapišimo v vrsto te rešitve in dobimo že znano obliko neenačb (2):

$$\nu \leq \nu^* = \tau^* \leq \tau \tag{2.2}$$

Videli smo, da lahko vrednosti ν^* in τ^* izračunamo s pomočjo linearnega programa, ki je v splošnem rešljiv v polinomskem času. Iskanje vrednosti ν in τ pa moremo izraziti s pomočjo dveh celoštevilskih linearnih programov (CLP). Reševanje CLP pa je bolj zahtevno, saj gre za NP-težek problem.[7]

Torej bi bilo idealno, da bi v verigi neenakosti (2.2) veljale enakosti, tako da bi namesto CLP za iskanje ν in τ reševali zgolj LP za iskanje ν^* in τ^*. Na ta način bi z reševanjem manj zahtevne naloge prišli do skupne vrednosti $\nu = \nu^* = \tau^* = \tau$. Zato se bomo osredotočili na vprašanje, v katerih primerih velja enakost

$$\nu(H) = \tau(H)$$

in si bomo pogledali nekaj izrekov, ki podajajo delne odgovore na to vprašanje.

Dokazov ne bomo navajali, z izjemo izreka 6; podali pa bomo reference na ustrezne članke. Nekatere od teh izrekov bomo uporabili tudi v naslednjem poglavju, ko bomo obravnavali Mengerjev in Kőnigov izrek.

Izrek 2 ([10])**.** *Naj bo H hipergraf. Če za vsak hipergraf H', ki ga dobimo tako, da iz hipergrafa H odstranimo poljubno število vozlišč, velja $\nu(H') = \tau^*(H')$, potem velja tudi $\nu(H) = \tau(H)$.*

Izrek 3 ([10])**.** *Naj bo H hipergraf. Če za vsak podhipergraf $H' \subseteq H$ velja $\tau(H') = \tau^*(H')$, potem velja $\nu(H) = \tau(H)$.*

Berge je v [2] prišel še do šibkejših pogojev, ki omogočajo enak zaključek kot v izreku 3:

Izrek 4. *Naj bo H hipergraf. Če za vsak hipergraf $H' \subseteq H$ velja $\tau_2(H') = 2\tau(H')$, potem velja $\nu(H) = \tau(H)$.*

Podoben zaključek imamo tudi v naslednjem izreku:

Izrek 5 ([11])**.** *Naj bo H hipergraf. Če za vsak hipergraf H', ki ga dobimo tako, da pomnožimo vozlišča v H, velja $\nu_2(H') = 2\nu(H')$, potem velja $\nu(H) = \tau(H)$.*

Spomnimo se, da lahko pridemo do τ^* z linearnim programom. Če pa hočemo izračunati ν_k, moramo to storiti preko celoštevilskega linearnega programa. Naslednji izrek nam podaja zadostni pogoj za to, da lahko optimalno vrednost teh CLP, za $k \in \{1, 2, 3\}$, izračunamo s pomočjo LP:

Izrek 6. *Naj bo $k = 1, 2$ ali 3. Naj bo H hipergraf, za katerega velja, da je $k \cdot \tau^*(H')$ celo število za vsak $H' \subseteq H$. Potem velja $\nu_k(H) = k \cdot \tau^*(H)$.*

Dokaz. Dokaz bomo izpeljali za vsak k posebej. Zaenkrat naj bo $k \in \{1, 2, 3\}$ poljuben.
Naj bo H *minimalni protiprimer* (tj. tak protiprimer, da izrek velja za vsak njegov podhipergraf) in naj bo m optimalno deljeno prirejanje (tj. deljeno prirejanje z optimalno vrednostjo, kar pomeni, da ne moremo dobiti deljenega prirejanja m', za katerega bi veljalo $||m'||_1 > ||m||_1$). Poglejmo zvezo (2). Vidimo, da velja $\nu_k(H) \leq k \cdot \tau^*(H)$. Ker je H protiprimer, velja:

$$\nu_k(H) < k \cdot \tau^*(H)\,. \tag{2.3}$$

Naj bo $E \in H$ poljubna povezava. Označimo z $H - \{E\}$ hipergraf brez povezave E. Ta je pravi podhipergraf hipergrafa H in torej zadošča predpostavki:

$$\forall H' \subseteq H - \{E\} : k\tau^*(H') \in \mathbb{Z}$$

Ker je H minimalni protiprimer, sledi

$$\nu_k(H - \{E\}) = k \cdot \tau^*(H - \{E\}) \tag{2.4}$$

za poljubni $E \in H$.
Iz (2.3) in (2.4) dobimo naslednjo zvezo:

$$k\tau^*(H) \geq \nu_k(H) + 1 \geq \nu_k(H - \{E\}) + 1 = k\tau^*(H - \{E\}) + 1\,. \tag{2.5}$$

Razlaga:
v (2.5) imamo dva neenačaja in enačaj na koncu:

- 1. neenakost: neposredno iz definicij za τ^* in ν_k sledi, da sta to celi števili in k je vsekakor celo število $(1, 2$ ali $3)$, torej bo v najslabšem primeru, ko bosta to dve zaporedni celi števili, veljalo $k\tau^*(H) = \nu_k(H)+1$, sicer pa bo veljala neenakost ;
- 2. neenakost: če odvzamemo hipergrafu H povezavo E, bo gotovo veljalo $\nu_k(H) \geq \nu_k(H - \{E\})$;
- enačaj na koncu sledi iz (2.4) .

Iz (2.5) izrazimo $\tau^*(H - \{E\})$:

$$\tau^*(H - \{E\}) \leq \tau^*(H) - \frac{1}{k}.$$

Po definiciji za ν^* vemo, da $||m'|| \leq \nu^*(H - \{E\})$. Ker lahko iskanje ν^* pretvorimo v LP, lahko dobimo dual τ^*, ki bo imel isto optimalno vrednost, torej $\nu^*(H - \{E\}) = \tau^*(H - \{E\})$. Iz teh podatkov in iz dejstva, da je $m' = m|_{H-\{E\}}$ (opomba: zapis $m|_H$ pomeni, da prirejanje m zožimo na povezave hipergrafa H) deljeno prirejanje podhipergrafa $H - \{E\}$, mora veljati

$$||m'|| = ||m|| - m(E) \leq \tau^*(H - \{E\}) \leq \tau^*(H) - \frac{1}{k}.$$

Ker velja $||m|| \leq \tau^*(H)$, lahko preoblikujemo zgornjo ugotovitev:

$$m(E) \geq ||m|| - \tau^*(H) + \frac{1}{k} = \frac{1}{k},$$

kar pomeni, da je $m(E) \geq \frac{1}{k}$.

(i) Naj bo $k = 1$. Vemo, da je $\nu_1(H)$ maksimum vrednosti

$$||m|| = \sum_{E \in H} m(E)$$

po vseh 1-prirejanjih, kar pomeni, da velja

$$||m|| \leq \nu_1(H) \leq \nu^*(H), \tag{2.6}$$

upoštevamo, da $\nu^*(H) = ||m|| = \tau^*(H)$ in torej v (2.6) povsod veljajo enakosti. S tem je dokazan izrek za $k = 1$.

(ii) Naj bo x poljubno vozlišče stopnje $\geq k$ (stopnja vozlišča je število povezav, ki to vozlišče vsebujejo). Stopnjo vozlišča x označimo z $deg(x)$. Ker hočemo, da je izpolnjen pogoj $\sum_{E \ni x} m(E) \leq 1$, nam ostane samo možnost, da je stopnja vozlišča x enaka k in da $m(E) = \frac{1}{k}$ za vse povezave, ki vsebujejo x. Pri tem opazimo, da ima vsaka povezava $E \in H$ vozlišče stopnje ≥ 2, saj če bi veljalo, da:

$$\exists E \in H, \forall x \in E : deg(x) = 1,$$

in bi odstranili povezavo E, potem bi veljalo:

$$\nu_k(H - \{E\}) = \nu_k(H) - k$$

in

$$k\tau^*(H - \{E\}) = k\tau^*(H) - k$$

in bi bil podhipergraf $H - \{E\}$ manjši protiprimer, kar nas privede do protislovja s predpostavko, da je H minimalni protiprimer.
Če je torej $k = 2$, potem je $m(E) = \frac{1}{2}$ za vse $E \in H$ in je dokaz končan.

(iii) Naj bo $k = 3$.
Za dokaz tega primera bomo potrebovali naslednjo lemo:

Lema 1. *Naj bo H poljubni hipergraf in $E_0 \in H$. Potem lahko H zapišemo kot $H = H_1 \cup H_2$, kjer ima H_1 optimalno deljeno prirejanje m_1 z naslednjimi lastnostmi:*

(a) $E_0 \in H_1$;

(b) *Naj bo $H_1 = H_1' \cup H_1''$, kjer je $H_1', H_1'' \neq \emptyset$. Potem obstaja tako vozlišče $x \in V(H_1') \cap V(H_1'')$, za katerega velja $\sum_{E \ni x} m_1(E) = 1$;*

(c) *Za vsako deljeno prirejanje m_2 v H_2 je $m_1 \cup m_2$ optimalno deljeno prirejanje v H, kjer je $(m_1 \cup m_2)(x) = \max\{m_1(x), m_2(x)\}$.*

Dokaz leme. Izberimo deljeno prirejanje $H_1 \subseteq H$ in maksimalno deljeno prirejanje m_0 hipergrafa H, tako, da $m_1 = m_0|_{H_1}$ izpolnjuje prva dva pogoja leme. Primer bi lahko bil $H_1 = \{E_0\}$, saj:

- po točki (a) velja $E_0 \in H_1$ in
- po točki (b) izrazimo H_1 kot unijo $H_1' \cup H_1''$, kjer $H_1' = H_1'' = \{E_0\}$; seveda obstaja tak $x \in V(H_1') \cap V(H_1'')$, tj. tak $x \in E_0$, da velja $\sum_{E \ni x} m_1(E) = 1$.

Izbrati pa moramo tak H_1, da bo maksimalni med vsemi podhipergrafi, kjer m_0 izpolnjuje prvi točki leme. Definirajmo še $H_2 = H - H_1$. Sledi:

$$\sum_{F \ni x} m_0(F) < 1 \quad \forall E \in H_2,\, \forall x \in E \cap V(H_1),$$

saj če ne bi veljal strogi neenačaj, bi lahko povezavo E dodali H_1.
Naj bo m_2 poljubno optimalno deljeno prirejanje hipergrafa H_2. Pokazati hočemo, da je $m_1 \cup m_2$ deljeno prirejanje. Naj bo ε dovolj majhno pozitivno število; definirajmo:

$$m'(F) := \begin{cases} m_0(F), & \text{če}\, F \in H_1\,; \\ \varepsilon m_2(F) + (1-\varepsilon) m_0(F), & \text{če}\, F \in H_2\,. \end{cases}$$

Ker imamo $\sum_{F \ni x} m_0(F) < 1$ za vse x, je m' deljeno prirejanje, če je le ε dovolj majhen. Torej:

$$\sum_{E \in H_2} m_2(E) \leq \sum_{E \in H_2} m_0(E)$$

oziroma

$$||m'|| \leq ||m_0||.$$

Ker pa smo predpostavili, da je deljeno prirejanje m_2 optimalno, velja tudi nasprotna neenakost v zgornjem izrazu. Kar pomeni, da je $||m'|| = ||m_0||$. Ker smo si na začetku dokaza izbrali tak m_0, da je maksimalen, je tudi m' optimalno deljeno prirejanje. Videli smo, da če je m' deljeno prirejanje za $\varepsilon = 1$, potem je tudi $m_1 \cup m_2$ deljeno prirejanje. Predpostavimo, da obstaja tak $0 < \varepsilon < 1$, za katerega je m' deljeno prirejanje. Naj bo ε_0 največji tak ε. Po predpostavki leme mora obstajati tak $x \in V(H_1') \cap V(H_1'')$, da velja:

$$\sum_{F \ni x} m'(F) = 1\,.$$

Iz tega sledi, da če nadomestimo m_0 z m', lahko razširimo podhipergraf H_1. Tu pridemo do protislovja, saj $m_1 \cup m_2$ ne bi bilo več deljeno prirejanje, ker bi bila njegova vrednost > 1. Torej tak ε_0 ne obstaja.
V lemi je zapisano, da je $m_1 \cup m_2$ *optimalno* deljeno prirejanje, kar pa ni težko videti, saj če sledimo definicijam:

$$||m_1 \cup m_2|| = ||m_1|| + ||m_2|| \geq ||m|H_1|| + ||m|H_2|| = ||m_0||$$

□

Poglejmo še nekaj definicij, ki nam bodo služile pri dokazu izreka za primer $k = 3$.

Definicija 13. *$G' = (V', E')$ je **induciran** podgraf grafa $G = (V, E)$, če velja:*

a) $V' \subseteq V$

b) $E' = \{uv | uv \in E, u, v \in V'\}$

Definicija 14. ***Presečni graf*** *$L(H)$ hipergrafa H je graf, ki ima za vozlišča povezave e hipergrafa H in dve vozlišči e_i in e_j, $i \neq j$, sta v $L(H)$ povezani, če imata v originalnem hipergrafu skupno vozlišče.*

Definicija 15. *Matrika A, ki ima za elemente le števili 0 ali 1, je **uravnotežena**, če nima nobene podmatrike A', ki bi bila incidenčna matrika nekega lihega cikla (tj. cikla z liho mnogo vozlišči).*

Definicija 16. *Hipergraf H je **uravnotežen**, če je njegova incidenčna matrika uravnotežena.*

Pokažimo, da v hipergrafu H obstaja vozlišče stopnje 3. Predpostavimo, da to ne velja, torej da ne obstaja vozlišče stopnje 3. Poglejmo si, zakaj lahko trdimo, da graf $L(H)$ premore lihi cikel. Naj bo $L(H)$ presečni graf hipergrafa H. Graf $L(H)$ ne more biti dvodelen (opomba: pojem dvodelnosti je obrazložen v tretjem poglavju), saj če bi bil, potem bi bil H uravnotežen po izreku v [2] in enakost $\nu_k(H) = k\tau^*(H)$ bi sledila iz enakosti $\nu(H) = \tau(H)$, ki velja za uravnotežene hipergrafe [14]. To pomeni, da v $L(H)$ obstaja cikel lihe dolžine kot induciran podgraf $C = (E_1, \ldots, E_{2p+1})$. Ker je ta cikel induciran podgraf, ne sme imeti povezav med dvema nezaporednima vozliščema. Naj bo $H' = \{E_1, \ldots, E_{2p+1}\}$. Spomnimo se, da je

$$\tau^*(H) = \min \sum_{x \in V(H)} t(x)\,,$$

kjer t teče po vseh deljenih pokritjih. V našem primeru je $\tau^*(H') = \frac{1}{2}|V(C)|$ in torej

$$3\tau^*(H') = \frac{3}{2}|V(C)| = \frac{3}{2}(2p+1) = 3p + \frac{3}{2}.$$

Tu pa imamo protislovje, saj bi moralo po predpostavki veljati $3\tau^*(H') \in \mathbb{Z}$. Iz tega sledi, da ima H vozlišče stopnje 3, ki ga označimo z v_0. Naj bo E_0 poljubna povezava, ki vsebuje vozlišče v_0. Potem vemo, da $m(E_0) = \frac{1}{3}$, če hočemo, da velja $\sum_{E \ni x} m(E) \leq 1$.
Upoštevajmo podhipergrafa H_1 in H_2, katerih obstoj nam zagotavlja zgornja lema: $H = H_1 \cup H_2$. Deljeno prirejanje m_1 hipergrafa H_1 zavzame vrednosti $\frac{1}{3}$ ali $\frac{2}{3}$. Definirajmo sedaj naslednja podhipergrafa:

$$H_1' := \left\{ E : m_1(E) = \frac{1}{3} \text{ ali } \frac{2}{3} \right\}\,,\; H_1'' := H_1 - H_1'\,.$$

Potem vemo, da $E_0 \in H_1'$ (glej zgoraj), kar pomeni, da je $H_1' \neq \emptyset$. Če potem tudi $H_1'' \neq \emptyset$, velja po drugi točki leme, da $\exists x \in V(H_1') \cap V(H_1'')$, za katerega velja

$$\sum_{E \ni x} m_1(E) = 1\,.$$

Poglejmo sedaj, kako pridemo do protislovja. Naj bodo $E_1 \in H_1', E_2 \in H_1''$ in $x \in E_1 \cap E_2$. Če je x stopnje 3, smo že videli, da $m_1(E_2) = \frac{1}{3}$. Če pa je x stopnje 2, velja:

$$m_1(E_2) = 1 - m_1(E_1) \in \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}\,,$$

saj $E_1 \in H_1'$ in $m_1(E_1)$ zavzame vrednost $\frac{1}{3}$ ali $\frac{2}{3}$, ker $E_1 \in H_1'$. V obeh primerih, ko je x stopnje 2 ali 3, imamo protislovje, saj $E_2 \in H_1''$.
Vsekakor m_1 zavzame le vrednosti $\frac{1}{3}$ in $\frac{2}{3}$. Ker je H minimalni protiprimer, ima H_2 optimalno deljeno prirejanje m_2, ki lahko zavzame vrednosti $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ ali 1; $m_1 \cup m_2$ je optimalno deljeno prirejanje z vrednostmi $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1$ (po tretji točki leme).
Prišli smo do protislovja in s tem dokazali $\nu_3(H) = 3\tau^*(H)$.

□

Poglavje 3

Mengerjev in Kőnigov izrek kot dualnost v hipergrafih

Mengerjev in Kőnigov izrek sta zelo pomembna dosežka na področju teorije grafov. Odprla sta številne poti za nova raziskovanja na tem področju. Tako Mengerjev kot Kőnigov izrek lahko dokažemo s pomočjo izrekov o dualnosti v hipergrafih.

(a) Osredotočimo se najprej na Kőnigov izrek.

Definicija 17. *Naj bo $G = (V, E)$ graf. G je **dvodelen**, če lahko množico vozlišč zapišemo kot $V = A \cup B$, kjer sta A in B disjunktni množici, in velja, da ima poljubna povezava grafa G eno krajišče v množici A, drugo pa v množici B.*

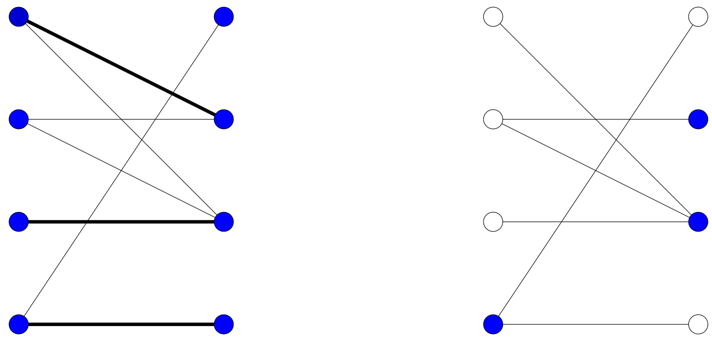
Prirejanja, maksimalna prirejanja, pokritja in minimalna pokritja v dvodelnih grafih definiramo na enak način kot v hipergrafih.

Izrek 7 (Kőnigov izrek)**.** *Naj bo G dvodelen graf. Za vsako maksimalno prirejanje M in minimalno pokritje C velja*

$$|M| = |C| .$$

Izrek pravi, da to velja za dvodelne grafe. V splošnem to ni res (glej primer na začetku podpoglavja 2.2).

Zgled:



(a) Maksimalno prirejanje

(b) Minimalno pokritje

Slika 3.1: Primer maksimalnega prirejanja in minimalnega pokritja v dvodelnem grafu

Opomba:
V dvodelnih grafih lahko hitro najdemo maksimalno prirejanje in minimalno pokritje. V splošnih grafih se da maksimalno prirejanje najti v polinskem času, minimalno pokritje pa je težek problem.

Navedimo še izrek in lemo, ki nam bosta služila pri dokazu Kőnigovega izreka.

Izrek 8. *Naj bo G dvodelni graf. Potem lahko vsako 2-pokritje zapišemo kot vsoto dveh 1-pokritij.*

Dokaz. Naj bo $G = (A \cup B, E)$ dvodelni graf. Naj bo t poljubno 2-pokritje grafa G. Definirajmo naslednje podmnožice množic A in B:

$$A_i = \begin{cases} \{v \in A |\, t(v) = i\}, & \textit{za}\ \text{i=0,1}\,; \\ \{v \in A |\, t(v) \geq 2\}, & \textit{za}\ \text{i=2}\,. \end{cases}$$

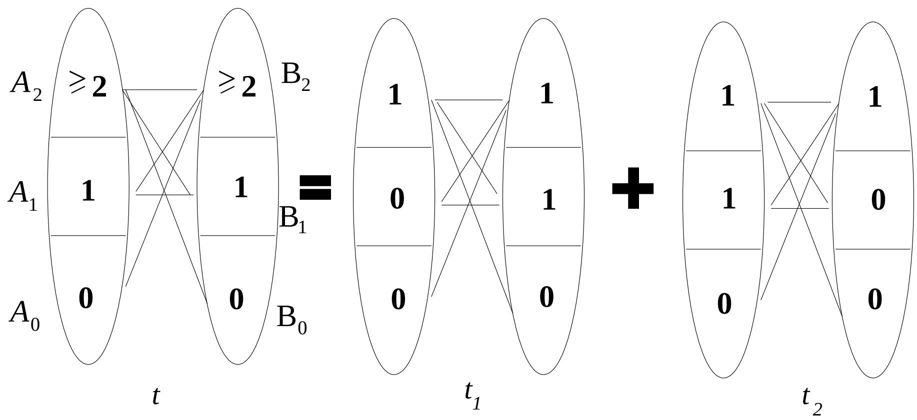
$$B_i = \begin{cases} \{v \in B |\, t(v) = i\}, & \textit{za}\ \text{i=0,1}\,; \\ \{v \in B |\, t(v) \geq 2\}, & \textit{za}\ \text{i=2}\,. \end{cases}$$

Najti moramo taki 1-pokritji t_1 in t_2, da bo veljalo $t = t_1 + t_2$. Grafično rešitev prikazuje Slika 3.2, kar bi matematično zapisali:

$$t_1(v) = \begin{cases} 0, & \textit{če}\ v \in A_0 \cup B_0 \cup A_1\,; \\ t(v) - 1, & \textit{če}\ v \in A_2 \cup B_2\,; \\ 1, & \textit{če}\ v \in B_1\,. \end{cases}$$

in

$$t_2(v) = \begin{cases} 0, & \textit{če } v \in A_0 \cup B_0 \cup B_1\,; \\ 1, & \textit{če } v \in A_1 \cup A_2 \cup B_2\,. \end{cases}$$



Slika 3.2: Skica dokaza

□

Lema 2. *Naj bo H hipergraf. Če lahko vsako k-pokritje t zapišemo kot vsoto 1-pokritij $t_1, \ldots, t_k$:*

$$t(x) = t_1(x) + \ldots + t_k(x) \quad \forall x \in V(H)\,,$$

potem je

$$\tau_k(H) = k \cdot \tau(H).$$

Z drugimi besedami: $\tau_k(H) = k \cdot \tau(H)$ je posledica dejstva, da lahko k-pokritja zapišemo kot vsoto 1-pokritij.

Dokaz. Dokazati moramo enakost $\tau_k = k \cdot \tau$, kar pomeni, da moramo dokazati le $\tau \leq \frac{1}{k} \cdot \tau_k$, saj že vemo, da velja $\tau \geq \frac{1}{k} \cdot \tau_k$.
V ta namen naj bo t^* optimalno k-pokritje. Po predpostavki ga lahko zapišemo kot vsoto $t_1 + \ldots + t_k$, kjer so t_i, $i = 1, \ldots, k$, 1-pokritja. Vemo:

$$\tau_k = ||t^*|| = \sum_{x \in V(H)} t^*(x) = \sum_{x \in V(H)} \sum_{i=1}^{k} t_i(x).$$

Naj bo $j \in \{1, \ldots, k\}$ tak indeks, za katerega velja

$$||t_j|| \leq ||t_i||$$

za vse i. Iz tega sledi:

$$k \cdot ||t_j|| = \sum_{j=1}^{k} ||t_j|| \leq \sum_{i=1}^{k} ||t_i|| = \sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in V(H)} t_i(x) =$$

$$\sum_{x \in V(H)} \sum_{i=1}^{k} t_i(x) = \sum_{x \in V(H)} t^*(x) = ||t^*|| = \tau_k$$

Končno lahko zaključimo:

$$k||t_j|| \leq \tau_k$$

oziroma

$$\tau \leq \frac{1}{k} \cdot \tau_k \, .$$

□

Dokaz Kőnigovega izreka. Naj bo G dvodelni graf. Izrek 8 nam pove, da lahko vsako 2-pokritje grafa G zapišemo kot vsoto dveh 1-pokritij. Lema 2 nam potem zagotovi enakost:

$$\tau_2(G) = 2\tau(G) \, .$$

Podgraf G' dvodelnega grafa G pa je seveda spet dvodelni. Uporabimo lahko izrek 4 in pridemo do zaželjenega rezultata

$$\nu(G) = \tau(G) \, .$$

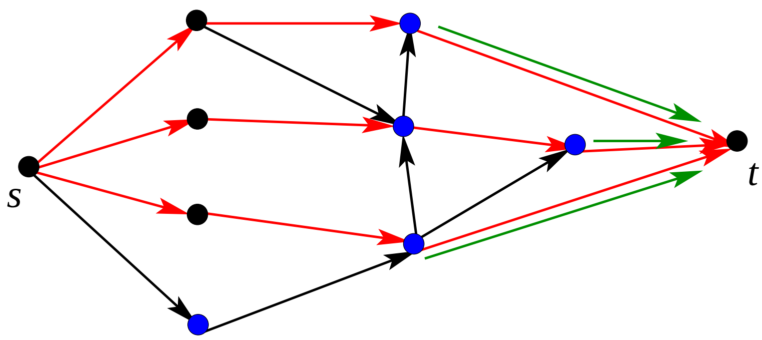
□

(b) Poglejmo si Mengerjev izrek in kako ga lahko interpretiramo v jeziku hipergrafov.

Izrek 9 (Mengerjev izrek)**.** *Naj bo G povezan graf, s in t pa poljubni vozlišči tega grafa. Potem je najmanjše število povezav, ki **ločijo** s in t (tj. če odstranimo te povezave iz $E(G)$, potem ne bo obstajala več nobena pot od vozlišča s do vozlišča t), enaka največjemu številu disjunktnih poti od s do t.*

Skica dokaza Mengerjevega izreka. (prirejeno po [15])

Osredotočimo se najprej na digrafe (grafe z usmerjenimi povezavami). Naj bo D digraf, s in t pa poljubni vozlišči tega digrafa. Zato da bomo bolje razumeli dokaz izreka, si bomo pomagali s skico (Slika 3.3). Naj bo P poljubna množica treh po povezavah paroma disjunktnih (s, t)-poti (na skici: poti pobarvane rdeče). Naj bo Q množica vseh vozlišč digrafa D, ki jih lahko dosežemo iz vozlišča s s kakšno potjo, ki je disjunktna s potmi iz P (na skici: vozlišča pobarvana modro). Množica R pa vsebuje vsa ostala vozlišča. Potem mora biti vozlišče t v množici R, saj če bi bilo v množici Q, potem bi obstajala še ena (s, t)-pot, ki bi bila disjunktna vsem ostalim. To pa ni mogoče, saj P vsebuje največje število paroma disjunktnih (s, t)-poti.



Slika 3.3: Skica digrafa D

Naj bo S množica usmerjenih povezav, ki gredo iz nekega vozlišča $q \in Q$ v vozlišče $r \in R$ (na skici: zelene povezave). Vsaka taka povezava mora ležati na kakšni poti iz P, kot kaže skica. Zakaj? Ker bi sicer obstajala pot iz s v r, ki bi bila disjunktna s potmi iz P in bi moralo vozlišče r biti v množici Q in ne v R. S podobnim razmislekom pridemo do zaklјčka, da nobena usmerjena povezava iz vozlišča v R v vozlišče v Q ne more ležati na poti iz P. Končno vidimo, da je število usmerjenih povezav v S (zelene povezave) enako številu poti v P (poti v rdeči barvi). Množica S je ravno množica treh usmerjenih povezav, ki ločijo s in t.

Ta dokaz smo izpeljali na konkretnem primeru in ga lahko posplošimo na poljubne digrafe. To pa velja tudi v grafih, saj so grafi poseben primer digrafov, ko imajo povezave, ki imajo smer na obe strani in lahko izpeljemo razmislek na enak način.

□

Podobno kot Kőnigov izrek bomo sedaj pogledali tudi Mengerjev izrek v jeziku hipergrafov.
V ta namen naj bo G povezan graf in s oziroma t dve poljubni vozlišči. Naj bo vsaka (s, t)-pot v grafu G predstavljena kot povezava hipergrafa H. V tako definiranem hipergrafu velja $\nu(H) = \tau(H)$. To pa je ravno Mengerjev izrek, saj je ν največje število disjunktnih poti med danima vozliščema, τ pa najmanjše število povezav, ki ločijo dve vozlišči.

Zaključek

Spoznali smo svet linearnega programiranja, dualnosti, prirejanj in pokritij s pomočjo hipergrafov. Odkrili smo povezave med temi področji optimizacije. S pomočjo hipergrafov smo se prepričali, da je teorija dualnosti čudovito orodje v svetu linearnega programiranja. V ospredju smo imeli prirejanja in pokritja hipergrafov in kako nam v tem primeru pomaga izrek o dualnosti. Osredotočili smo se na enakost $\nu = \tau$ in kako lahko pridemo do nje, kar je še danes zelo raziskovano vprašanje. Spoznali smo nekatere hipergrafe, kjer lahko dosežemo tole enakost in izvedeli, kakšno vlogo igra pri tem dualnost. Nazadnje pa smo preko hipergrafov pogledali Kőnigov in Mengerjev izrek.

Poleg teh dveh izrekov je še veliko drugih minimaks izrekov v teoriji grafov, ki jih lahko interpretiramo s pomočjo pokritij in prirejanj v hipergrafih. Navedeli bomo le nekaj primerov, obstaja pa jih še veliko več.

1. Edmondsov izrek [4]: Naj bo G graf in $S \subseteq V(G)$. Pot P v grafu G imenujemo glavna pot, če sta krajšči poti v množici S, ostala vozlišča poti pa ležijo izven te množice. Množice povezav glavnih poti lahko predstavimo kot hipergraf H. Potem lahko vsako k-pokritje hipergrafa zapišemo kot vsota 2-pokritja in $(k-2)$-pokritja. Za tak hipergraf velja potem $\nu(H) = \tau(H)$.

2. Fulkersonov izrek [6]: Naj bo G digraf in naj bo a vozlišče v G, ki bo igralo vlogo *korena*. Množice povezav vpetih usmerjenih dreves, ki imajo koren v vozlišču a (tj. vse povezave izhajajo iz vozlišča a), lahko predstavimo kot povezave hipergrafa H. Potem vsako k-pokritje v H lahko zapišemo kot vsoto 1-pokritij. V takem hipergrafu velja $\nu_2(H) = \tau_2(H)$.

3. Tutteov izrek o 1-faktorjih [8]: Naj bo G graf z $2n$ vozlišči. Naj bo k najmanjše tako število povezav, da bo vpeti podgraf, ki ga sestavimo z izbranimi povezavami, imel komponente le sodih moči. Potem je največje število prerezov, ki razdelijo G na dva liha dela in ki vsebujejo

vsako povezavo največ dvakrat, enako $2k$.
Tutteov izrek o 1-faktorjih sledi iz primera, ko je $k = n$.

Literatura

[1] D. Bertsimas, J.N. Tsitsiklis, Introduction to linear optimization, Athena Scientific, Belmont, Massachussetts, 1997, 139-150 .

[2] C. Berge, Balanced hypergraphs and some applications to graph theory, poglavje v *A Survey of Combinatorial Theory*, J.N. Srivastava, North Holland, Amsterdam, 1973, 15-23 .

[3] V. Chvátal, Linear programming, W.H. Freeman and Company, New York, 1983, 3-9 .

[4] J. Edmonds, Submodular functions, matroids, and certain polyhedra, v *Combinatorial structures Application*, Gordon and Breach, London, 1970, 69-87 .

[5] D.R. Fulkerson, Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra, *Mathematical Programming 1*, 1971, 168-194 .

[6] D.R. Fulkerson, Packing weighted directed cuts in rooted direct graphs, *Mathematical Programming 6*, 1974, 1-13 .

[7] M.R. Garey, D.S. Johnson, Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness, *CA, Freeman* .

[8] L. Lovász, 2-matchings and 2-covers of hypergraphs, *Acta Mathematica 26*, 1975, 433-444 .

[9] L. Lovász, Certain duality principles in integer programming, *Annals of Discrete Mathematics 1*, 1977, 363-374 .

[10] L. Lovász, Minimax theorems for hypergraphs, *Hypergraph Seminar,Lecture Notes in Math.411*, 1974, 111-126 .

[11] L. Lovász, On two minimax theorems in graph theory, *Journal of Combinatorial Theory 21*, 1976, 96-103 .

[12] C. Lucchesi, D.H. Younger, A minimax theorem for directed graphs, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1978, 369-374 .

[13] J. Matoušek, B. Gärtner, Understanding and using linear programming, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007, 7-8, 81-84 .

[14] A. Schrijver, Combinatorial Optimization - Polyhedra and efficiency, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2003, 1439-1440 .

[15] R.J. Wilson, J.J. Watkins, Graphs - An Introductory Approach, John Wiley & Sons, Inc., 1990, 210-215 .

[16] http://www.fmf.uni-lj.si/∼ juvan/Racunalnistvo3/gradivo/zgodovinaLP.pdf .