

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE KOPER

Matematične znanosti, 2. stopnja

Anže Germovšek

Ciklično 4-povezavno povezani kubični
grafi
Magistrsko delo

Mentor: doc. dr. Klavdija Kutnar

Koper, 2011

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in priimek: Anže Germovšek
Naslov magistrskega dela: Ciklično 4-povezavno povezani kubični grafi
Kraj: Koper
Leto: 2011
Število listov: 58 Število slik: 49 Število tabel: 0
Število prilog: 0 Št. strani prilog: 0
Število referenc: 26
Mentor: doc. dr. Klavdija Kutnar
UDK: 519.17(043.2)
Ključne besede: kubični grafi, ciklična k -povezavna povezanost, fulereni
Math. Subj. Class. (2000): 05C40, 92E10

Izveček

V magistrskem delu bomo spoznali osnove teorije grafov in se osredotočili na ciklično 4-povezavno povezanost kubičnih grafov ter odstranljive povezave v takšnih grafih. Spoznali bomo zanimivo trditev, ki pove, da lahko vsak tak graf reda več ali enako 12 pridobimo iz kocke oziroma polnega grafa K_4 . Na koncu bomo pogledali še poseben primer takšnih grafov in sicer fulerene, ki se jih v zadnjem času veliko raziskuje.

Key words documentation

Name and surname:	Anže Germovšek				
Title of Master's degree:	Cyclically 4-edge-connected cubic graphs				
Place:	Koper				
Year:	2011				
Number of pages:	58	Number of figures:	49	Number of tables:	0
Number of additions:	0	Number of addition pages:	0		
Number of references:	26				
Mentor:	assist. prof. Klavdija Kutnar				
UDC:	519.17(043.2)				
Key words:	cubic graphs, cyclical k -edge-connectivity, fullerene graphs				
Math. Subj. Class. (2000):	05C40, 92E10				

Abstract

In this thesis basic concepts in graph theory with particular attention given to cyclically 4-edge-connected cubic graphs and removable edges in such graphs are considered. It is proved that any cyclically 4-edge-connected cubic graph of order ≥ 12 can be obtained from the cube or the complete graph K_4 , and that fullerenes form a special family of such graphs.

Kazalo vsebine

1	Uvod	1
2	Osnovni pojmi	3
2.1	Primeri grafov	13
2.2	Operacije na grafih	16
3	Odstranljive povezave v ciklično 4-povezavno povezanih kubičnih grafih	18
4	Fulereni	37
4.1	Zgodovina fulerenov	37
4.2	Zgledi fulerenov	38
4.3	Nanocевke	39
4.4	Osnovne lastnosti fulerenov	41
4.5	Ciklična povezavna povezanost fulerenov	42
5	Zaključek	48

Kazalo slik

2.1	Prikaz zank, vzporednih povezav, enostavnih/neenostavnih grafov.	4
2.2	Nekaj podgrafov grafa na sliki 2.1 (a).	4
2.3	r -regularni grafi.	5
2.4	Sprehod $uvwxyz$ v grafu.	6
2.5	Most.	7
2.6	Graf.	7
2.7	Drevo s 6 točkami in 5 povezavami.	10
2.8	Grafi.	11
2.9	Točke, povezave in lice ravninskega grafa.	12
2.10	Ena sama točka, brez povezav z enim neskončnim licem, torej velja $V(G) = 1, E(G) = 0, F(G) = 1$	12
2.11	Dodajanje nove točke in povezave do nje.	13
2.12	Dodajanje povezave med obstoječima točkama.	13
2.13	Polni grafi.	13
2.14	Prazni grafi.	14
2.15	Cikli.	14
2.16	Poti.	14
2.17	Dvodelni grafi.	14
2.18	Polni dvodelni grafi.	15
2.19	Kocke.	16
2.20	Grafi pravih teles.	16
2.21	Unija grafov.	17
2.22	Graf in njegov komplement.	17

3.1	Primer $(3, 4)$ –grafa in dveh grafov, ki nista $(3, 4)$ –grafa.	19
3.2	\tilde{Q}_3	20
3.3	Odstranljiva povezava.	20
3.4	Odstranljiva in neodstranljiva povezava.	20
3.5	Ciklični prerez moči 6.	21
3.6	$(3, 4)$ –graf reda manj kot 10.	22
3.7	Graf.	23
3.8	$c - 4$ –prezezi $(3, 4)$ –grafa G	23
3.9	Prikaz leme 3.10.	25
3.10	Možne alternative grafa H	26
3.11	Različne strukture grafa G_2	27
3.12	Dva minimalna $c - 5$ –prezeza in en $c - 5$ –prerez, ki ni minimalni.	30
3.13	Kako iz dodekaedra naredimo kocko s pomočjo operacije odstranjevanja povezav.	32
3.13	Kako iz dodekaedra naredimo kocko s pomočjo operacije odstranjevanja povezav.	33
3.13	Kako iz dodekaedra naredimo kocko s pomočjo operacije odstranjevanja povezav.	34
3.14	B_{10} in \tilde{B}_{10}	34
3.15	Neizomorfna dvojna jadra.	34
3.16	Viking ladja.	35
4.1	Fuleren $h = 0$ - Dodekaeder.	38
4.2	Fulereni za $h = 2, 3, 4, 5, 6, 7$	39
4.3	Primeri Fulerenov.	40
4.4	Nanocevka.	41
4.5	Nanocevka, ki jo sestavljata dva pokrova s po šestimi petkotniki in k plasti, kjer vsaka plast vsebuje 5 šestkotnikov.	43
4.6	Lokalna struktura.	43
4.7	Cikla C' in C'' in povezave, ki ju povezujejo.	45
4.8	Primer $k' = 3$	45
4.9	Primer $k' = 4$	46
4.10	Primer $r = 0$	47
4.11	Primer $r = 2$	47

Zahvala

Najlepše se zahvaljujem vsem, ki so mi na kakršenkoli način pomagali pri nastanku mojega magistrskega dela. Posebno lepo bi se rad zahvalil mentorci doc. dr. Klavdiji Kutnar za vse koristne napotke ter predloge pri pripravi magistrskega dela. Prav tako gre posebna zahvala mojemu dekletu Jolandi Debevec za vso podporo in potrpežljivost, ki mi jo je nudila.

Magistrsko delo posvečam svojim staršem in mojemu dekletu Jolandi Debevec.

Poglavje 1

Uvod

V magistrskem delu bomo spoznali osnove teorije grafov in se osredotočili na ciklično povezavno povezanost kubičnih grafov ter odstranljive povezave v takšnih grafih. Na koncu se bomo osredotočili na posebno družino takšnih grafov in sicer fullerene, ki se jim zaradi vsesplošne uporabe in zanimivih kemijskih in fizikalnih lastnosti v zadnjem času posveča veliko različnih skupin raziskovalcev iz vseh področij.

Najprej se bomo v drugem poglavju spoznali z osnovnimi pojmi teorije grafov. Seznanili se bomo z nekaj osnovnimi definicijami ter trditvami, nato pa znanje podkrepili še z nazornimi primeri, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju magistrskega dela. Tako bomo pridobili znanje o tem, kaj je graf, zanka v grafu, kaj je podgraf grafa, stopnja točke, kaj so r –regularni grafi in s tem spoznali tudi kaj pomeni kubičen graf. Prav tako bomo spoznali zanimivo in znano lemo o rokovanju (glej trditev 2.9), sprehod v grafu, sled, obhod, cikel grafa, most in obseg grafa. S tem bomo spoznali osnovne pojme in pridobili zadostno znanje, da si bomo lahko ogledali povezanost grafov, prereze in spoznali drevesa. Nato bomo spoznali ravninske grafe, zanimiv in znan Eulerjev izrek (glej izrek 2.36), ki pove relacijo med številom točk, številom povezav in številom lic v ravninskem grafu. V tem poglavju bomo navedli tudi različne primere grafov, kot so polni in prazni grafi, cikli, poti, dvodelni grafi, polni dvodelni grafi, kocke ter poliedri. Nato bomo navedli še nekaj operacij na grafih kot sta unija in komplement grafa.

V tretjem poglavju bomo spoznali ciklično k –povezavno povezanost kubičnih grafov, operacijo odstranjevanja povezave, ciklični prerez. Zapisali bomo tudi različne pomožne leme, s katerimi si lahko pomagamo dokazati zanimiv izrek, ki pove najmanj koliko je odstranljivih povezav v cikličnem 4–povezavno povezanem kubičnem grafu z vsaj 12 točkami (glej izrek 3.3). Sam dokaz bomo zaradi obsežnosti izpustili. Prav tako bomo spoznali minimalni $c - k$ –prerez ter nasprotno operacijo od operacije odstranjevanja povezav in sicer H –operacijo. Nato si bomo pogledali bistveni izrek članka, ki ga bomo proučevali v tem poglavju

in sicer bomo spoznali, da ciklično 4-povezavno povezani kubični graf lahko pridobimo iz kocke oziroma polnega grafa K_4 z večkratno uporabo H -operacije (glej izrek 3.18). V nadaljevanju si bomo pogledali več zanimivih definicij in sicer, kaj je dvojno jadro in viking ladja. Pogledali si bomo tudi zanimiv primer, kako iz dodekaedra naredimo kocko z večkratno uporabo operacije odstranjevanja povezav.

V četrtem poglavju se bomo osredotočili na posebno družino takih grafov - fulerene, ki so 3-povezavno povezani ravninski kubični grafi, ki imajo petkotna in šestkotna lica. Spoznali bomo malo njihove zgodovine ter navedli nekaj zgledov. Nato bomo spoznali ciklične fulerene, nanocevke, pogledali osnovne lastnosti fulerenov ter preučili njihovo ciklično povezavno povezanost. Dokazali bomo, da je vsak fuleren ciklično 4-povezavno povezan (glej trditev 4.6), poleg tega bomo dokazali, da je vsak fuleren v resnici ciklično 5-povezavno povezan (glej trditev 4.7).

Poglavje 2

Osnovni pojmi

V tem poglavju bomo spoznali definicije, trditve in nekatere primere, ki smo jih pridobili iz naslednjih virov: [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 21].

Definicija 2.1 (Graf). Naj bo V poljubna neprazna množica in E poljubna družina dvoelementarnih podmnožic množice V . Paru $G = (V, E)$ pravimo graf na množici točk $V = V(G)$ z množico povezav $E = E(G)$. Element $e = \{u, v\} \in E$ krajše zapišemo $e = uv$.

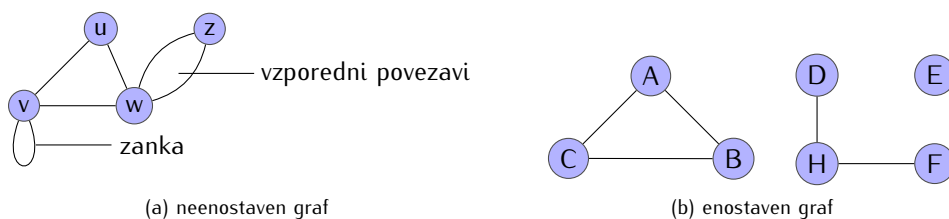
Množico točk grafa G bomo označevali tudi z $V(G)$, množico povezav pa z $E(G)$.

Definicija 2.2 (Incidenčna povezava). Naj bosta u in v točki grafa $G = (V, E)$. Če je $e = uv \in E$ povezava grafa, rečemo, da sta točki u in v sosednji. Povezava $e = uv$ gre skozi točki u in v (je **incidenčna** s točkama u in v , je **sosednja** točkama u in v). Točki u in v sta **krajišči** povezave e (sta **incidenčni** povezavi e , **ležita** na povezavi e).

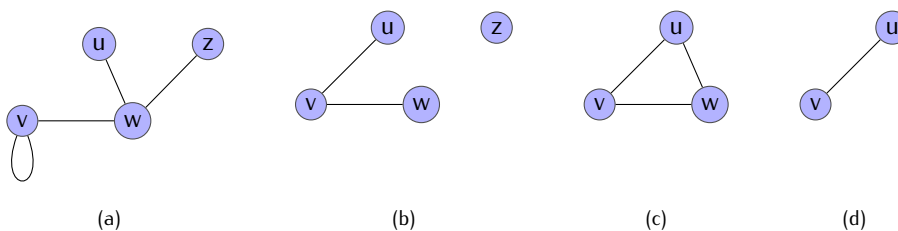
Definicija 2.3 (Vzporedna povezava, zanka, enostavni graf). Dve ali več povezav, ki povezujejo isti par točk, imenujemo **vzporedne povezave**. Povezava, ki povezuje neko točko samo s seboj, je **zanka**. Graf brez zank in večkratnih povezav imenujemo **enostavni graf**. (Glej sliko 2.1)

Definicija 2.4 (Podgraf grafa). Naj bo G graf z množico točk V in povezavami E in G' graf z množico točk V' in povezavami E' . Če je V' podmnožica množice V in če je vsaka povezava iz E' tudi v E , potem je G' **podgraf** grafa G . Podgraf G' grafa G je **pravi podgraf**, če ni enak grafu G .

Definicija 2.5 (Stopnja točke). Naj bo G graf, v pa točka grafa G . **Stopnja** (ali **valenca**) točke v je število povezav, ki vsebujejo v . Stopnjo točke v označimo z **deg(v)**. Dogovorimo se, da naj vsaka zanka prispeva 2 k stopnji točke.



Slika 2.1: Prikaz zank, vzporednih povezav, enostavnih/neenostavnih grafov.



Slika 2.2: Nekaj podgrafov grafa na sliki 2.1 (a).

Definicija 2.6 (Maksimalna stopnja točke). *Maksimalna stopnja točke grafa G , ki jo označimo z $\Delta(G)$, je definirana kot:*

$$\Delta(G) = \max\{\deg(v); v \in V(G)\}.$$

Definicija 2.7 (Minimalna stopnja točke). *Minimalna stopnja točke grafa G , ki jo označimo z $\delta(G)$, je definirana kot:*

$$\delta(G) = \min\{\deg(v); v \in V(G)\}.$$

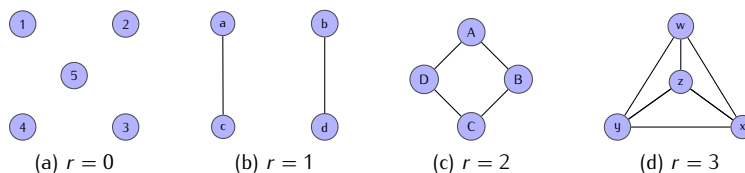
Primer Graf na sliki 2.1 (b) ima naslednje stopnje točk:

$$\deg(A) = 2, \deg(B) = 2, \deg(C) = 2, \deg(D) = 1, \deg(E) = 0, \deg(F) = 1, \deg(H) = 2.$$

Po dogovoru ima graf na sliki 2.1 (a) naslednje stopnje točk:

$$\deg(v) = 4, \deg(u) = 2, \deg(w) = 4, \deg(z) = 2.$$

Definicija 2.8 (r -regularen graf). *Graf je **regularen**, če imajo vse točke enako stopnjo. V primeru, da imajo vse točke grafa stopnjo r , pravimo, da je graf regularen stopnje r ali r -regularen graf. V primeru, ko je $r = 3$, govorimo o kubičnem grafu. Kubični grafi se imenujejo tudi trivalentni grafi.*



Slika 2.3: r -regularni grafi.

Trditve 2.9 (Lema o rokovanju). *Za vsak graf G velja:*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Dokaz: Uporabili bomo tako imenovano računovodsko pravilo. Naj bo M množica vseh urejenih parov $(u, e) \in V(G) \times E(G)$, za katere je u krajišče povezave e . Preštejmo elemente množice M . Po eni strani velja

$$|M| = \sum_{u \in V(G)} \deg(u),$$

po drugi strani pa

$$|M| = \sum_{e \in E(G)} 2 = 2 \cdot |E(G)|.$$

□

Posledica 2.10. *V vsakem grafu je vsota vseh stopenj točk grafa sodo število.*

Posledica 2.11. *V vsakem grafu je sodo mnogo točk lihe stopnje.*

Dokaz: Levo stran enačbe iz trditve 2.9 razpišemo v

$$\sum_{\substack{i=1 \\ \deg(v_i) \text{ je liho}}^n \deg(v_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ \deg(v_i) \text{ je sodo}}^n \deg(v_i) = \sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2 \cdot m$$

S primerjanjem parnosti izrazov v levi in desni strani enačbe, ugotovimo, da je $\sum_{\substack{i=1 \\ \deg(v_i) \text{ je liho}}^n \deg(v_i)$ sodo število in zato mora biti v tej vsoti sodo mnogo členov.

□

Posledica 2.12. *Za r -regularen graf na n točkah velja:*

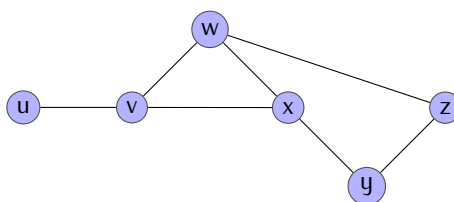
$$|E| = \frac{1}{2}nr,$$

kjer je $|E|$ število povezav grafa.

Definicija 2.13 (Sprehod). *Sprehod dolžine k v grafu G je zaporedje k povezav grafa G oblike*

$$uv, vw, wx, \dots, yz.$$

Tak sprehod označimo z $uvw\dots yz$ in ga poimenujemo **sprehod** med točkama u in z .



Slika 2.4: Sprehod $uvwxyz$ v grafu.

Definicija 2.14 (Enostavni sprehod ali sled). Če so vse povezave sprehoda različne, potem sprehod poimenujemo **enostavni sprehod** ali **sled**.

Definicija 2.15 (Enostavna pot). Če so v enostavnem sprehodu vse točke različne, potem sprehod poimenujemo **enostavna pot**.

Definicija 2.16 (Sklenjen sprehod ali obhod). **Sklenjen sprehod** ali **obhod** v grafu G je zaporedje povezav grafa G oblike:

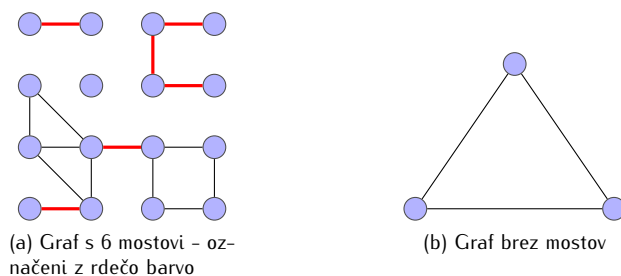
$$uv, vw, wx, \dots, yz, zu.$$

Če so vse povezave obhoda različne, obhod poimenujemo **enostavni obhod** ali **sklenjena sled**. Če so v obhodu vse povezave in vse točke različne, potem ga poimenujemo **cikel**.

Definicija 2.17 (Dolžina cikla). **Dolžina cikla** je število povezav v ciklu. Cikel dolžine n imenujemo n -cikel. Cikel dolžine tri poimenujemo **tricikel**.

Definicija 2.18 (Povezan/nepovezan graf). Graf G je **povezan**, če obstaja pot med poljubnim parom točk, sicer je **nepovezan**. Nepovezan graf sestoji iz nekaj povezanih podgrafov, ki jih imenujemo (povezane) **komponente** grafa.

Definicija 2.19 (Most). Povezava e grafa G je **prerezna povezava** ali **most**, če z odstranitvijo te povezave dobimo graf z več komponentami, kot jih je imel prvotni graf G .

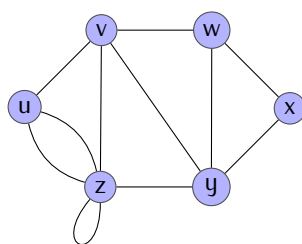


Slika 2.5: Most.

Pojasnilo k definiciji 2.19: Po odstranitvi mostu postane graf nepovezan. Enakovredno velja, da je povezava most, če in samo če ne pripada kakšnemu ciklu v grafu. Glej sliko: 2.5.

Primer Pogledali si bomo osnovne definicije sprehoda, poti in obhoda na primeru grafa prikazanega na sliki 2.6:

- $uvwxywvzzy$ je sprehod dolžine 9 med točkama u in y , v katerem se dvakrat pojavi povezava vw , točke v, w, y in z pa tudi vsaka po dvakrat.
- Sprehod $vzzywxy$ je enostaven sprehod, ki pa ni pot. V sprehodu $vwxyz$ se niti točka in niti povezava ne ponovi, zato je pot.
- V grafu obstaja obhod $uvwyzvu$, ki je sklenjena sled in ni cikel, saj se točka v pojavi dvakrat. Poleg tega obstajajo sklenjene sledi zz , $vwxyv$ in $vwxyzv$, ki pa so obenem tudi cikli. Najdemo dva tricikla in sicer $vwyv$ in $wxyw$.



Slika 2.6: Graf.

Definicija 2.20 (Notranji obseg grafa). **Notranji obseg** grafa je dolžina njegovega najkrajšega cikla. Če graf ne vsebuje ciklov (če je acikličen graf), je njegov notranji obseg po definiciji enak neskončnosti.

Definicija 2.21 (Zunanji obseg grafa). **Zunanji obseg** grafa je dolžina njegovega najdaljšega cikla.

Izrek 2.22. Povezan regularen graf sode stopnje nima mostu.

Dokaz: Predpostavimo nasprotno. Naj bo G povezan regularen graf stopnje $2h$, ki ima most b . Potem ima graf $G - b$ (t.j. graf, ki ga dobimo iz grafa G z odstranitvijo povezave b) dve komponenti K_1 in K_2 z natanko eno točko lihe stopnje. To pa je v nasprotju s posledico 2.11.

□

Opomba: Iz dokaza izreka 2.22 očitno sledi, da graf, ki ima vse točke sode stopnje, nima mostu.

Definicija 2.23 (Drevo). *Drevo je graf, v katerem sta poljubni dve točki povezani z natanko eno enostavno potjo.*

Trditev 2.24. *Za graf G so ekvivalentne naslednje trditve:*

1. G je drevo,
2. G je povezan, ampak z odstranitvijo poljubne povezave postane nepovezan,
3. G je povezan in $|E(G)| = |V(G)| - 1$,
4. G ne vsebuje cikla in $|E(G)| = |V(G)| - 1$,
5. G je povezan in ne vsebuje cikla.

Dokaz: Dokaz poteka z indukcijo na število točk. Trditev očitno drži za vse grafe na dveh točkah (takšna grafa sta samo dva, K_2 in njegov komplement). Denimo, da trditev drži za vse grafe na manj kot n točkah. Dokažimo, da tedaj velja tudi za graf G na n točkah.

(1) \Rightarrow (2): Denimo, da je G drevo. Tedaj je povezan po definiciji. Naj bo $e = uv$ poljubna povezava grafa G . Tedaj je (u, v) edina pot med točkama u in v . To pa pomeni, da v grafu $G - e$ ni nobene poti med točkama u in v , kar pomeni, da G ni povezan.

(2) \Rightarrow (3): Predpostavimo, da je G povezan, odstranitev poljubne povezave pa ga razbije. Dokazujemo enakost $|E(G)| = |V(G)| - 1$. Izberimo povezavo e . Tedaj je $G - e$ unija povezanih komponent X in Y (premisli, da sta povezani komponenti dve in ne morda tri ali več). Grafa X in Y sta povezana, če pa odstanimo kakšno povezavo, razpadeta (saj v nasprotnem primeru, ne bi ob odstranitvi te iste povezave razpadel niti graf G). Uporabimo indukcijo in dobimo $|E(X)| = |V(X)| - 1$ in $|E(Y)| = |V(Y)| - 1$. Tedaj

$$|E(G)| = |E(X)| + |E(Y)| + 1 = (|V(X)| - 1) + (|V(Y)| - 1) + 1 = |V(G)| - 1.$$

(3) \Rightarrow (4): Predpostavimo, da je G povezan in da zadošča pogoju $|E(G)| = |V(G)| - 1$. Dokazujemo, da G nima ciklov. Pa recimo, da obstaja cikel C . Za vsak $v \in V(G)$ poiščemo prvo povezavo e_v na kaki

najkrajši poti med v in C . Premislek pokaže, da je $e_v \neq e_u$ za poljubni različni točki $u, v \in V(G) \setminus V(C)$. Zato je

$$|E(G)| \geq |E(C)| \cup \{e_v : v \in V(G) \setminus V(C)\} = |V(G)|,$$

kar je protislovje.

(4) \Rightarrow (5): Predpostavljamo, da je G brez ciklov in da velja $|E(G)| = |V(G)| - 1$. Dokazati moramo, da je G povezan. Naj bodo X_1, \dots, X_k komponente povezanosti in denimo, da je $k \geq 2$. Vsak izmed grafov X_i zadošča (5), zato po indukcijski predpostavki X_i zadošča tudi (4). Tedaj pa je $|E(X_i)| = |V(X_i)| - 1$. Po drugi strani:

$$|E(G)| = \sum_{i=1}^k |E(X_i)| = \sum_{i=1}^k (|V(X_i)| - 1) = |V(G)| - k.$$

Ker je $|E(G)| = |V(G)| - 1$, sledi, da je $k = 1$, in G je povezan.

(5) \Rightarrow (1): Predpostavljamo, da je G povezan in brez ciklov. Dokazujemo, da obstaja med poljubnima točkama natanko ena pot. Zaradi povezanosti obstaja vsaj ena pot. Če bi bili dve, bi dobili cikel - protislovje. □

Definicija 2.25 (List). *List grafa je točka stopnje 1.*

Posledica 2.26. *Drevo z vsaj dvema točkama vsebuje vsaj dva lista.*

Dokaz: Naj bo G drevo, v katerem ima vsaj $|V(G)| - 1$ točk stopnje vsaj 2 (označimo množico teh točk z U). Preostala točka ima stopnjo vsaj 1, saj bi sicer tvorila komponentno za povezanost. Tedaj je:

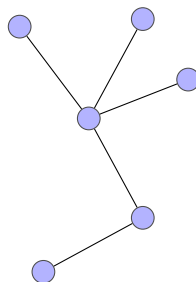
$$|E(G)| \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{v \in U} \deg(v) + 1 \right) \geq \frac{1}{2} ((|V(G)| - 1) \cdot 2 + 1) = |V(G)| - \frac{1}{2}.$$

Pri tem smo pri prvi neenakosti uporabili lemo o rokovanju. Sedaj pa iz trditve 2.24 sledi, da G ni drevo, kar je protislovje. □

Definicija 2.27 (Gozd). *Graf G , ki ne vsebuje nobenega cikla, imenujemo gozd. Povezan gozd je drevo.*

Trditev 2.28. *Minimalna stopnja točke v gozdu je 1 (= $\delta(G)$).*

Dokaz: Direktn dokaz s pomočjo posledice trditve 2.26. □



Slika 2.7: Drevo s 6 točkami in 5 povezavami.

Definicija 2.29 (Povezanost po povezavah). *Povezanost po povezavah* $\lambda(G)$ povezanega grafa G je najmanjše število povezav, brez katerih postane graf G nepovezan. Če je $\lambda(G) \geq k$, je graf G **po povezavah k -povezan**.

Definicija 2.30 (Prerez). Množica povezav P povezanega grafa G je **prerez**, če je graf, ki ga dobimo iz grafa G tako, da odstranimo povezave iz P , nepovezan. Prerez P je **minimalen**, če v primeru, da iz grafa G ne odstranimo vseh povezav prereza P graf ostane povezan. Minimalen prerez, ki vsebuje k povezav imenujemo **k -prerez**.

Očitno je most povezava, ki je 1-prerez grafa.

Definicija polnih grafov, ki jih omenjamo v naslednji definiciji, je navedena v razdelku 2.1.

Definicija 2.31 (Povezanost po točkah). *Povezanost* (ali *povezanost po točkah*) $\kappa(G)$ povezanega grafa G (ki ni polni graf) je najmanjše število točk, brez katerih graf postane nepovezan. Če je $\kappa(G) \geq k$, rečemo da je graf **k -povezan** (ali **po točkah k -povezan**).

Definicija 2.32 (Točkovni prerez). Množica točk S povezanega grafa G je **točkovni prerez**, če je graf, ki ga dobimo iz grafa G tako, da odstranimo točke iz S , nepovezan. Točkovni prerez S je **minimalen**, če v primeru, da iz grafa G ne odstranimo vseh točk točkovnega prereza S graf ostane povezan.

Definicija 2.33 (Prerezna točka). *Prerezna točka* je točka, brez katere graf postane nepovezan.

Izrek 2.34. Za vsak povezan graf G velja:

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G),$$

kjer je $\delta(G)$ najmanjša stopnja točke v grafu G .

Dokaz: Če ima točka v stopnjo $\delta(G)$, potem graf G razpade, če odstranimo vse povezave, na katerih leži točka v . Sledi, da $\lambda(G)$ ne more biti večje od $\delta(G)$.

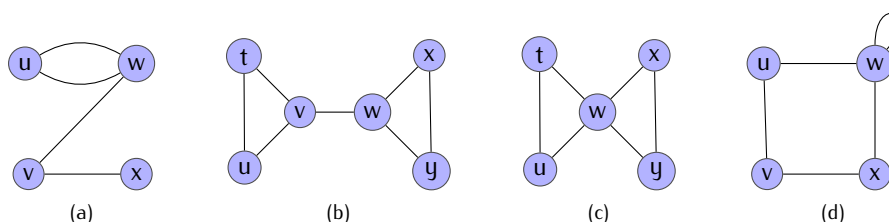
Pokazati moramo še, da velja $\kappa(G) \leq \lambda(G)$. Naj bo G graf, ki po odstranitvi λ povezav razpade na dve povezani komponenti G_1 in G_2 . Teh λ povezav lahko odstranimo tudi tako, da odstranimo največ λ točk, saj moramo odstraniti po eno krajišče vsake od λ povezav. Od tod sledi, da je najmanjše število točk, po odstranitvi katerih graf razpade, manjše ali enako λ - torej $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

□

Različni prerezi grafa imajo lahko različno mnogo povezav. Povezanost po povezavah $\lambda(G)$ grafa G je najmanjše število povezav v prerezu grafa G . Natančneje povedano, v množici vseh prerezov grafa G izberemo tistega (tiste), ki imajo najmanjšo moč. Moč takega prereza je enaka $\lambda(G)$.

Primer Oglejmo si grafe na sliki 2.8. Graf (a) lahko razdelimo na dve komponenti, tako da odstranimo eno od povezav vw ali vx . Tudi graf (b) razpade po odstranitvi ene povezave - povezave vw . Graf (c) ostane povezan, če odstranimo katerokoli povezavo, toda če odstranimo dve (na primer uw in vw), dobimo nepovezan graf. Tudi graf (d) razpade z odstranitvijo dveh povezav (uw in wx).

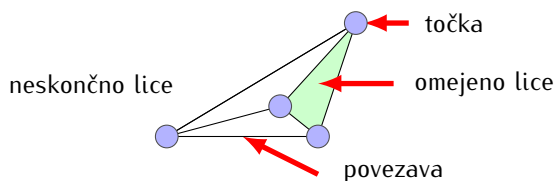
Mostovi sta povezavi vw in vx v grafu (a) in povezava vw v grafu (b). Tako vidimo, da sta grafa v primeru (a) in (b), po povezavah 1-povezana, grafa (c) in (d) pa sta po povezavah 2-povezana. Torej so vsi štirje grafi po povezavah 1-povezani, grafa (c) in (d) sta tudi po povezavah 2-povezana in nista po povezavah 3-povezana.



Slika 2.8: Grafi.

Primer Ponovno si oglejmo grafe na sliki 2.8. Grafa (a) in (b) postaneta nepovezana, če odstranimo eno točko (v ali w). Tudi graf (c) razpade, če odstranimo eno točko (točko w). Graf (d) pa ne razpade, če odstranimo eno samo točko. Če pa odstranimo dve nesosednji točki (na primer v in w), dobimo nepovezan graf. V grafu (b) sta prerezni točki v in w . V grafu (c) pa je prerezna točka w . Povezanost po točkah grafov (a), (b) in (c) je torej enaka 1, povezanost grafa (d) pa je enaka 2. Drugače povedano, vsi štirje grafi so (po točkah) 1-povezani, graf (d) je tudi 2-povezan, ni pa 3-povezan.

Definicija 2.35 (Ravninski graf). *Ravninski graf je graf, ki se ga da narisati v ravnini brez sekanja povezav. Povezave ravninskega grafa razdelijo ravnino na več delov, ki jih imenujemo lica. Eno lice je vedno neskončno, ostala pa so omejena.*



Slika 2.9: Točke, povezave in lice ravninskega grafa.

V nadaljevanju bomo napisali Eulerjevo formulo, ki opisuje odnos med številom povezav, točk in lic povezanega ravninskega grafa.

Izrek 2.36 (Eulerjeva formula). *Naj bo G povezan ravninski graf. Potem je*

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2,$$

kjer je $V(G)$ množica točk, $E(G)$ množica povezav in $F(G)$ množica lic grafa G .

Dokaz: Najprej bomo dokazali, da Eulerjeva formula velja za graf z eno točko in ji potem dodajali nove točke in povezave. Začetni graf z eno točko (glej sliko 2.10) ima 1 točko in 1 lice (neskončno) ter 0 povezav, zato je $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 1 - 0 + 1 = 2$ in za ta graf velja Eulerjeva formula.

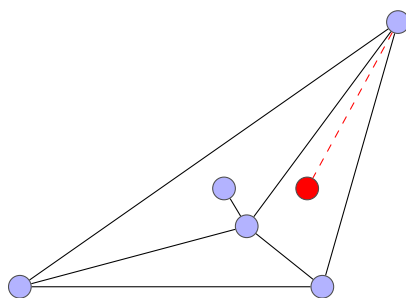
V vsakem naslednjem koraku pa se odločimo za eno od naslednjih dveh možnosti:

- Dodamo novo točko in povezavo od te točke do neke obstoječe točke (glej sliko 2.11). Pri tem se število točk in povezav povečata za 1, število lic pa se ne spremeni, zato tudi vrednost izraza $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)|$ ostane nespremenjena.
- Dodamo novo povezavo med dve obstoječi točki (glej sliko 2.12 (a)) ali pa dodamo zanko (glej sliko 2.12 (b)). Pri tem se poveča število povezav in lic za 1, število točk se pa ne spremeni. Zato tudi v tem primeru vrednost izraza $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)|$ ostane nespremenjena.

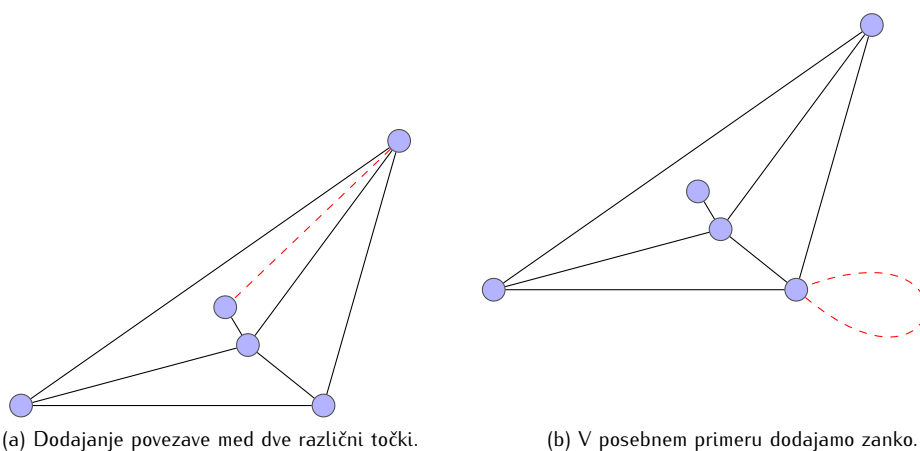
□



Slika 2.10: Ena sama točka, brez povezav z enim neskončnim licem, torej velja $V(G) = 1, E(G) = 0, F(G) = 1$.



Slika 2.11: Dodajanje nove točke in povezave do nje.



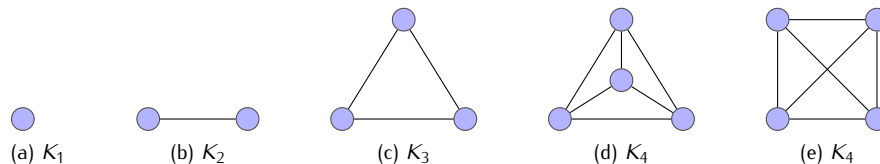
(a) Dodajanje povezave med dve različni točki.

(b) V posebnem primeru dodajamo zanko.

Slika 2.12: Dodajanje povezave med obstoječima točkama.

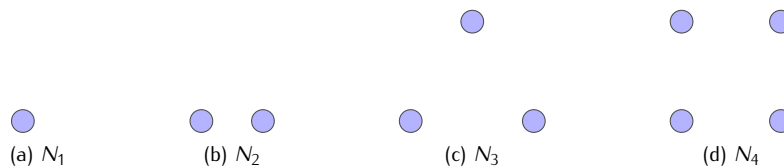
2.1 Primeri grafov

Polni graf je graf, v katerem je vsak par različnih točk povezan z natanko eno povezavo. Polni graf na n točkah označimo s K_n . **Povezanost** $\kappa(G)$ polnega grafa K_n je $n - 1$. Graf K_n je regularen stopnje $n - 1$, zato ima po tretji posledici leme o rokovanju $\frac{1}{2}n(n - 1)$ povezav.



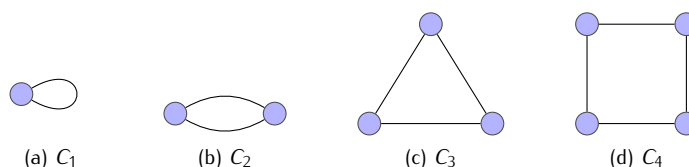
Slika 2.13: Polni grafi.

Prazni graf je graf brez povezav. Prazni graf na n točkah označimo z N_n . Prazni graf N_n je regularen stopnje 0.



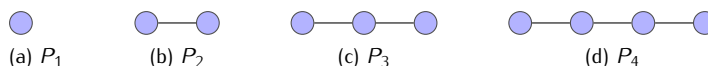
Slika 2.14: Prazni grafi.

Cikel je graf, ki ga sestavlja en sam cikel. Cikel z n točkami označimo z C_n . Graf C_n je regularen stopnje 2 in ima n povezav.



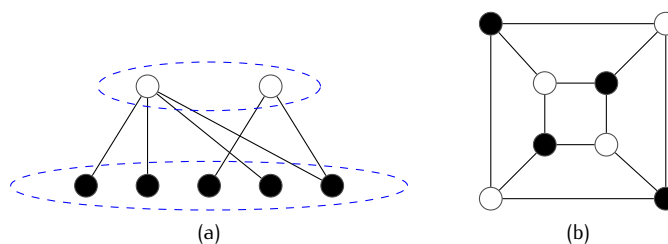
Slika 2.15: Cikli.

Pot je graf, ki ga sestavlja ena sama pot. Pot na n točkah označimo s P_n . Pot P_n ima $n - 1$ povezav in jo lahko dobimo iz cikla C_n z odstranitvijo katerekoli povezave.



Slika 2.16: Poti.

Dvodelni graf je graf, pri katerem lahko množico točk razbijemo na podmnožici A in B , tako da vsaka povezava grafa G povezuje po eno točko iz podmnožice A z eno točko iz podmnožice B . Točke podmnožic A in B lahko razločimo na primer tako, da pobarvamo prve s črno, druge pa z belo barvo. Potem vsaka povezava povezuje po eno črno in eno belo točko. Ti grafi so zelo pomembni v praksi.



Slika 2.17: Dvodelni grafi.

Definicija 2.37 (Izomorfizem grafov). *Bijektivno preslikavo, ki slika iz množice točk grafa G v množico točk grafa H*

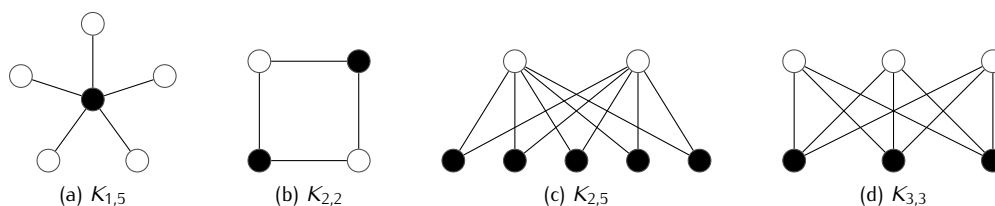
$$f : V(G) \rightarrow V(H)$$

imenujemo **izomorfizem grafov** natanko tedaj, ko za vsak par točk $u, v \in V(G)$ velja

$$u \sim_G v \Leftrightarrow f(u) \sim_H f(v).$$

Če med grafoma G in H obstaja izomorfizem, pravimo da sta si izomorfna in pišemo $G \cong H$.

Polni dvodelni graf je dvodelni graf, v katerem je vsaka črna točka povezana z vsako belo točko z natanko eno povezavo. Polni dvodelni graf z r črnimi in s belimi točkami označimo s $K_{r,s}$. Polni dvodelni graf $K_{1,s}$ imenujemo **zvezda**. Graf $K_{r,s}$ ima $r + s$ točk (r točk stopnje s in s točk stopnje r) in rs povezav. Vedno velja $K_{r,s} \cong K_{s,r}$

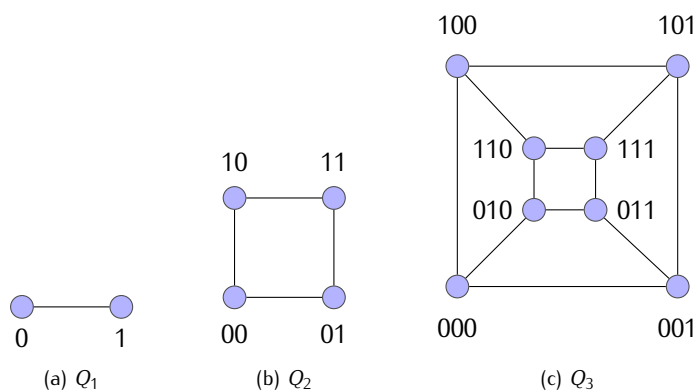


Slika 2.18: Polni dvodelni grafi.

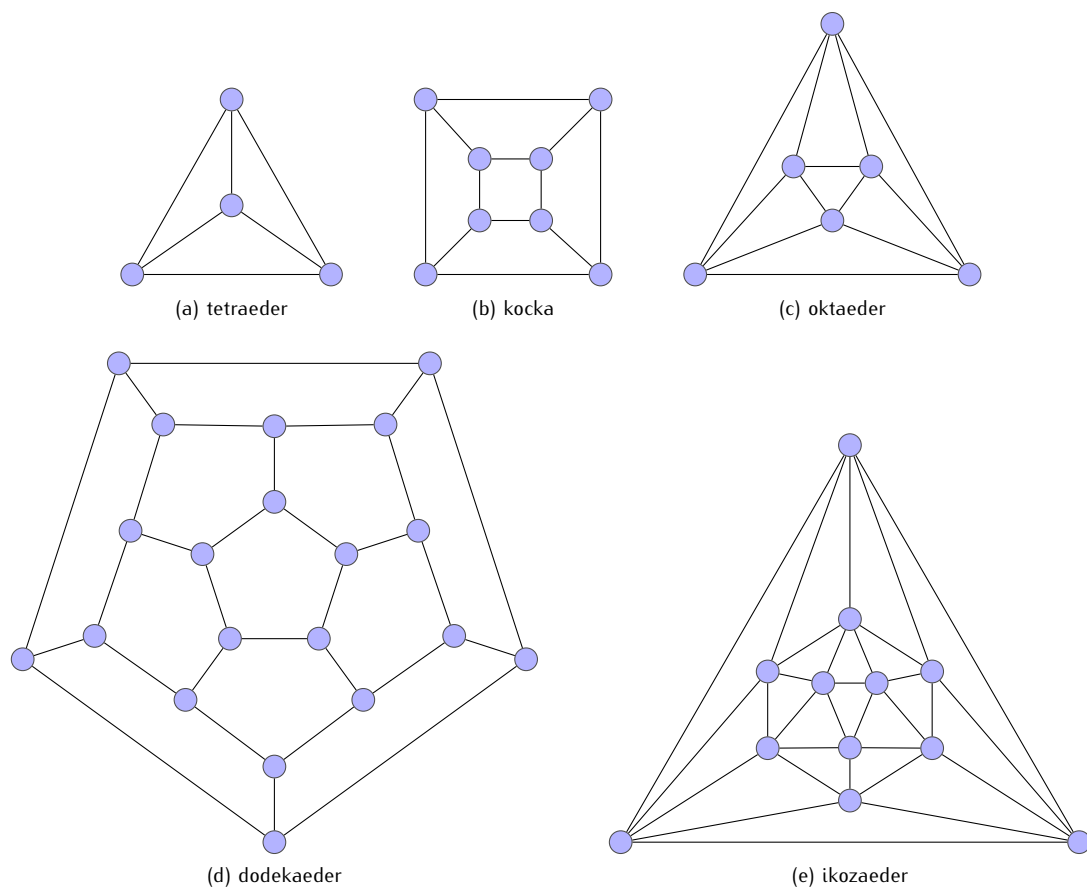
Kocke so dvodelni grafi, ki so pomembni predvsem v teoriji kodiranja. Lahko jih konstruiramo tako, da vzamemo za točke vse besede nad abecedo $\{0,1\}$ (zaporedja ničel in enic) dane dolžine in povežemo dve besedi, če se besedi razlikujeta na natanko enem mestu. Tako dobljeni graf iz besed dolžine k imenujemo k -**kocka** ali k -**dimenzionalna kocka** in ga označimo s Q_k . Graf Q_k ima 2^k točk in je regularen stopnje k . Z uporabe tretje posledice leme o rokovanju izračunamo, da je število povezav k -kocke enako $k \cdot 2^{k-1}$.

Polieder je telo omejeno s končnim številom ploskev, ploskve se stikajo v ravnih robovih, robovi pa se stikajo v ogliščih. Platonska telesa imenujemo telesa, ki so pravilni poliedri, pri katerih se v vsakem oglišču stika enako število robov in enako število mejnih ploskev, ki so med seboj skladni in pravilni večkotniki. **Platonski graf** dobimo s projekcijo platonskega telesa na ravnino, glej sliko 2.20. Polieder si lahko predstavljamo kot ravninski graf, pri katerem so:

- oglišča - točke,
- robovi - povezave,
- ploskve - lica.



Slika 2.19: Kocke.



Slika 2.20: Grafi pravih teles.

2.2 Operacije na grafih

Obstaja kar nekaj operacij, s pomočjo katerih iz danega grafa konstruiramo nove grafe. V nadaljevanju bomo predstavili nekaj osnovnih operacij, ki jih izvajamo na grafih in jih bomo potrebovali v nadaljevanju.

Definicija 2.38 (Unija grafov). *Unija grafov G_1 in G_2 je graf G , za katerega velja $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ in $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$.*

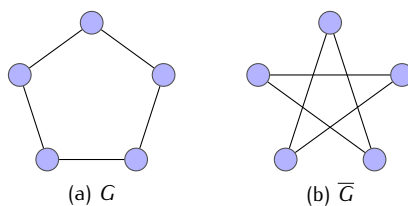
Primer Ničelni graf N_n je unija n ničelnih grafov N_1 .



Slika 2.21: Unija grafov.

Definicija 2.39 (Komplement grafa). *Komplement grafa G je graf \bar{G} , ki ga dobimo iz grafa G tako, da ohranimo točke ($V(G) = V(\bar{G})$), povezave $E(\bar{G})$ grafa \bar{G} pa so ravno tiste povezave, ki jih ni v grafu G .*

Primer Polni graf K_n je komplement ničelnega grafa N_n .



Slika 2.22: Graf in njegov komplement.

Poglavje 3

Odstranljive povezave v ciklično

4–povezavno povezanih kubičnih grafi

V tem poglavju, ki je povzeto iz članka [1], bomo prišli s pomočjo pomožnih lem in trditev do zanimivih ugotovitev in sicer bomo napisali koliko je odstranljivih povezav v t.i. ciklično 4–povezavno povezanih kubičnih grafi ter navedli izrek, ki pove, da lahko vsak ciklično 4–povezavno povezan kubični graf dobimo iz kocke oziroma polnega grafa K_4 .

Definicija 3.1 (Ciklično k –povezavno povezan graf). *Graf G je ciklično k –povezavno povezan, če graf G ne more biti razdeljen na dve komponenti, tako da vsaka vsebuje cikel, z odstranjevanjem manj kot k povezav.*

Če je graf G ciklično k –povezavno povezan, je tudi ciklično m –povezavno povezan, za vse $1 \leq m \leq k$. Z $\sigma(G)$ označimo ciklično povezavno povezanost grafa G , ki predstavlja največji $k \in \mathbb{N}$ tako, da je graf G ciklično k –povezavno povezan.

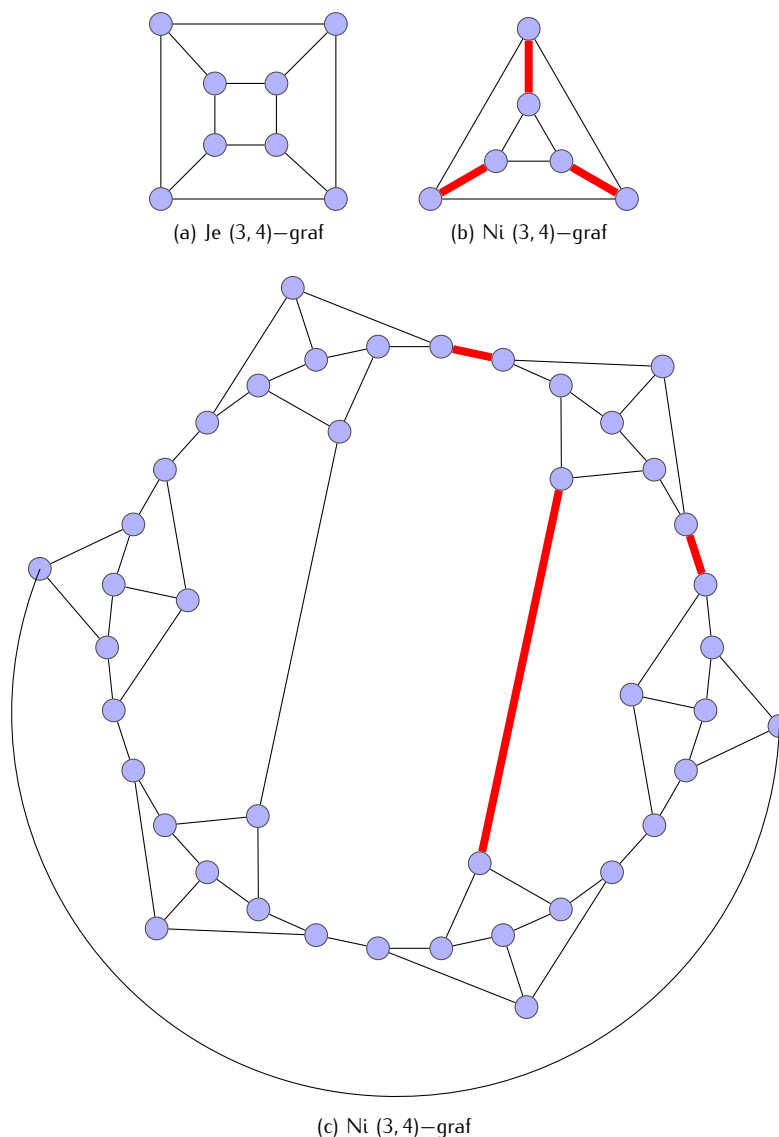
Primer [Kubičen ciklično 4–povezavno povezan graf] Naj bo G 3–povezavno povezan kubičen graf. Če v G ne obstaja množica E manj kot štirih takih povezav, da ima $G - E$ najmanj dve povezanostni komponenti, ki vsebujeta cikle, pravimo, da je G ciklično 4–povezavno povezan.

Okrajšave: Odslej bomo kubične ciklično 4–povezavno povezane grafe imenovali $(3, 4)$ –**grafi**. Z Q_3 bomo označili tridimenzionalno kocko, z \tilde{Q}_3 pa ukrivljeno kocko (t.j. graf na sliki 3.2).

Primer Pogledali si bomo primere na sliki 3.1.

- Graf Q_3 na sliki (a) je $(3, 4)$ –graf. Vidimo, da ne obstaja množica treh povezav, ki bi po odstranitvi graf razdelil na dve povezanostni komponenti, ki vsebujeta cikle.

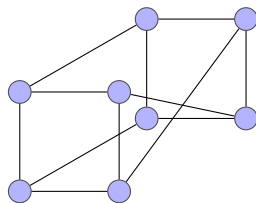
- Grafa na slikah (b) in (c) nista $(3,4)$ –grafa. Obstaja namreč množica treh povezav (na obeh grafih označene z rdečo barvo), po odstranitvi katerih graf razpade na dve povezanostni komponenti, ki vsebujeta cikle.



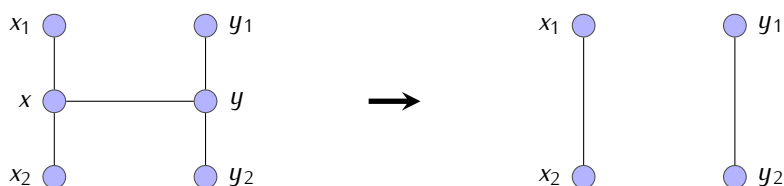
Slika 3.1: Primer $(3,4)$ –grafa in dveh grafov, ki nista $(3,4)$ –grafa.

Definicija 3.2 (Odstranljiva povezava). Naj bo G $(3,4)$ –graf. Povezava e grafa G je odstranljiva, če je graf G' , ki ga dobimo iz grafa G tako, da iz grafa G odstranimo povezavo e in supresiramo dobljeni točki stopnje 2 (to je, 2–pot uvw , kjer je v stopnje 2, nadomestimo s povezavo uw), še vedno $(3,4)$ –graf.

Primer Na sliki 3.3 je prikazana operacija odstranjevanja povezave, ki nastopa v definiciji 3.2.

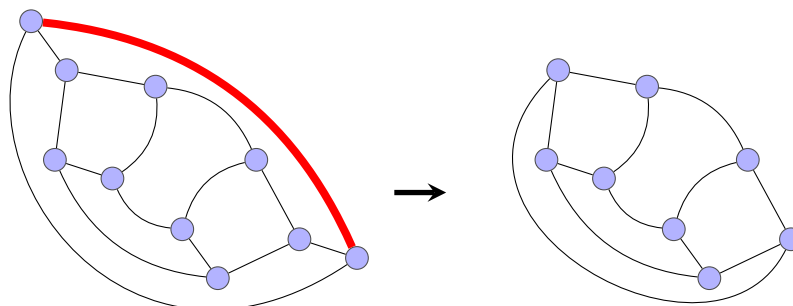


Slika 3.2: \tilde{Q}_3 .



Slika 3.3: Odstranljiva povezava.

Primer Rdeča povezava na levem grafu na sliki 3.4 je odstranljiva. Po odstranitvi te povezave dobimo graf na desni strani slike 3.4. Po odstranitvi katerikoli povezave v tem grafu, pa dobimo graf, ki ni $(3, 4)$ -graf.



Slika 3.4: Odstranljiva in neodstranljiva povezava.

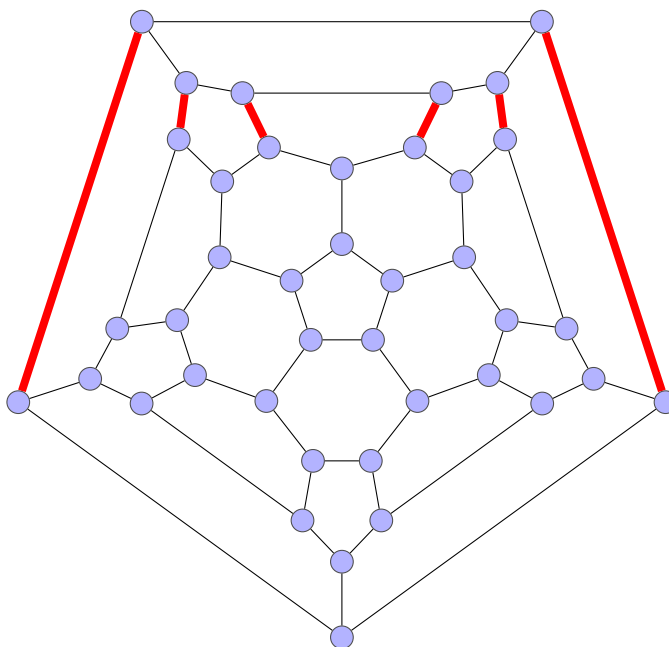
V nadaljevanju si bomo pogledali izrek 3.3, ki je ključen izrek članka [1]. Ta izrek se dokaže z uporabo lastnosti, ki jih bomo spoznali v nadaljevanju tega poglavja, samega dokaza pa zaradi obsežnosti ne bomo naredili.

Izrek 3.3. Naj bo G $(3, 4)$ -graf z vsaj 12 točkami. Potem G premore vsaj $\frac{1}{5}(|E(G)| + 12)$ odstranljivih povezav.

Definicija 3.4 (Ciklični kubičen prerez). Naj bo G kubičen graf in C podmnožica množice povezav grafa G . Če ima $G - C$ vsaj dve povezani komponenti, ki vsebujeta cikle, C imenujemo ciklični kubičen prerez

(oziroma krajše, c -prerez). Če je ciklični kubičen prerez C minimalen (t.j. nobena prava podmnožica prereza C ni ciklični kubičen prerez) in vsebuje k povezav, pravimo, da je C $c-k$ -prerez.

Pravimo, da je $c-k$ -prerez trivialen, če je ena izmed dobljenih povezanih komponent natanko k -cikel.



Slika 3.5: Ciklični prerez moči 6.

Lema 3.5. Naj bo G $(3, 4)$ -graf. Potem velja:

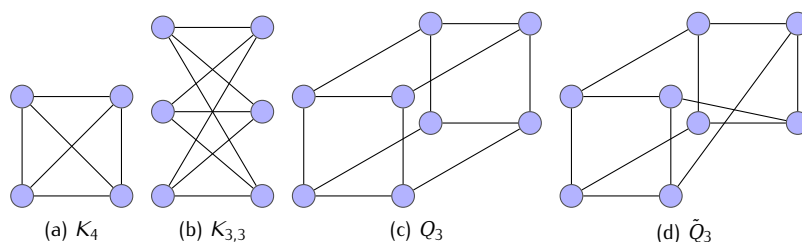
- $E_v = \{uv \mid u \in N(v)\}$, kjer je $v \in V(G)$, so edini prerezi v G z manj kot štirimi povezavami.
- Če $G \neq K_4$, G ne vsebuje triciklov.

Dokaz:

- Naj bo E prerez treh povezav in naj bosta G_1 in G_2 povezani komponenti v $G - E$. Potem vsaka povezava v E povezuje točko v G_1 s točko v G_2 . Ker je G $(3, 4)$ -graf je vsaj ena izmed komponent (recimo G_1) aciklična, torej gozd, zato po trditvi 2.24 velja $|E(G_1)| \leq |V(G_1)| - 1$. Torej je $2(|V(G_1)| - 1) \geq 2|E(G_1)| = 3|V(G_1)| - |E|$, iz česar sledi, da je $|V(G_1)| \leq |E| - 2 = 1$ in zato $|V(G_1)| = 1$.
- Sledi iz (a), saj povezave, ki so incidentne triciklu v kubičnem grafu, tvorijo 3-prerez in posledično graf, ki vsebuje tricikel in ni K_4 , G ni $(3, 4)$ -graf.

□

Iz leme 3.5 jasno sledi, da so edini $(3, 4)$ -grafi z manj kot 10 točkami K_4 , $K_{3,3}$ in dva grafa na 8 točkah, kocka in ukrivljena kocka. Glej sliko 3.6.



Slika 3.6: $(3, 4)$ –grafi reda manj kot 10.

Lema 3.6. Naj bo G $(3, 4)$ –graf. Potem velja:

- 4 –prerez E grafa G je $c - 4$ –prerez ali pa je $E = \{xu, yu, zv, wv\}$, kjer je $uv \in E(G)$.
- Vsak $c - 4$ –prerez grafa G sestoji iz neodvisnih povezav.
- Z odstranitvijo poljubnega $c - 4$ –prezesa dobimo nepovezan graf z natanko dvema komponentama, ki sta 2 –povezani.

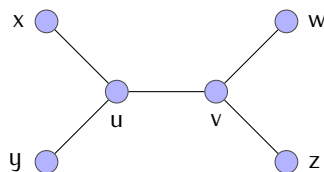
Dokaz:

- Recimo, da je E 4 –prerez, ki ni $c - 4$ –prerez. Potem je vsaj ena od dobljenih komponent grafa $G - E$, označimo jo z G_1 , aciklična in zato je $2(|V(G_1)| - 1) \geq 2|E(G_1)| = 3|V(G_1)| - 4$. Iz tega sledi, da je $|V(G_1)| \leq 2$. V tem primeru dobimo graf na sliki 3.7. To dokazuje (a).
- Očitno $c - 4$ –prerez ne more vsebovati treh povezav, ki so incidenčne isti točki. Če vsebuje dve povezavi, ki sta incidenčni isti točki, ju lahko zamenjamo s tretjo povezavo, ki je incidenčna te točki. Vendar, potem nam to da $c - 3$ –prerez, kar je v protislovju z lemo 3.5 (a).
- Če iz grafa odstranimo $c - 4$ –prerez, zaradi minimalnosti sledi, da ima dobljeni graf natanko dve povezani komponenti. Če ena izmed komponent ni 2 –povezana, vsebuje povezavo, ki je most. Vendar potem pa se lahko bralec hitro prepriča sam, da je ta most vsebovan v cikličnem prerezu, ki sestoji z manj kot 4 povezav, to pa je v protislovju z lemo 3.5.

□

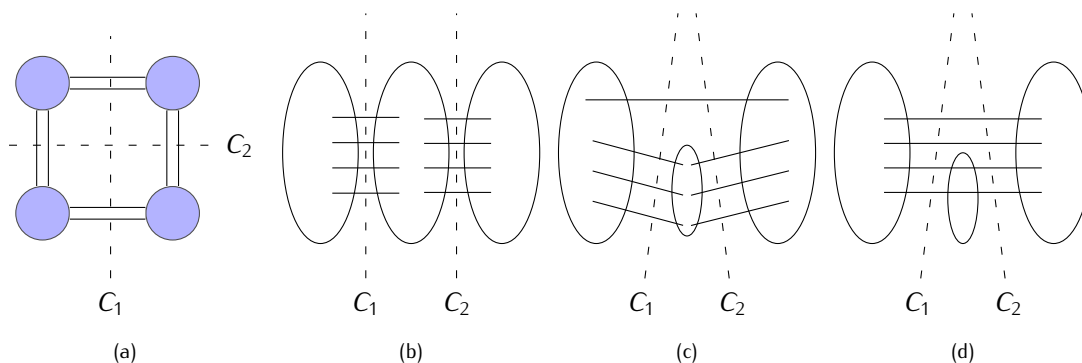
Lema 3.7. Naj bosta C_1 in C_2 različna $c - 4$ –prezesa $(3, 4)$ –grafa G . Potem velja natanko ena izmed naslednjih trditev:

- C_1 ima 2 povezavi v vsaki komponenti grafa $G - C_2$ in C_2 ima 2 povezavi v vsaki komponenti grafa $G - C_1$.



Slika 3.7: Graf.

- b) *Ena komponenta grafa $G - C_1$ je vsebovana v komponenti grafa $G - C_2$, ena komponenta grafa $G - C_2$ je vsebovana v komponenti grafa $G - C_1$ in $|C_1 \cap C_2| = 0$.*
- c) *Ena komponenta grafa $G - C_1$ je vsebovana v komponenti grafa $G - C_2$, ena komponenta grafa $G - C_2$ je vsebovana v komponenti grafa $G - C_1$ in $|C_1 \cap C_2| = 1$.*
- d) *Ena komponenta grafa $G - C_1$ je vsebovana v komponenti grafa $G - C_2$, ena komponenta grafa $G - C_2$ je vsebovana v komponenti grafa $G - C_1$ in $|C_1 \cap C_2| = 2$.*



Slika 3.8: $c - 4$ -prezezi $(3, 4)$ -grafa G .

Dokaz: Naj ima $G - C_1$ komponenti G_1 in H_1 , in $G - C_2$ komponenti G_2 in H_2 . Ker sta C_1 in C_2 različna, mora imeti en izmed prerezov povezavo v komponenti drugega, recimo C_2 naj seka H_1 . Naj bo $e \in C_2 \cap E(H_1)$. Ker morata biti končni točki povezave e v različnih komponentah grafa $G - C_2$, mora H_1 z odstranitvijo $C_2 \cap E(H_1)$ postati nepovezan. Po Lemi 3.6 je H_1 2-povezan in zato je $|C_2 \cap E(H_1)| \geq 2$. Sedaj premislimo tri primere.

Primer 1: $|C_2 \cap E(G_1)| > 0$.

V tem primeru isti premislek kot zgoraj pove, da je $|C_2 \cap E(G_1)| \geq 2$, in posledično velja $|C_2 \cap E(G_1)| = |C_2 \cap E(H_1)| = 2$. Ker sta G_2 in H_2 2-povezani, dobimo, da je tudi $|C_2 \cap E(G_2)| = |C_2 \cap E(H_2)| = 2$, kar je izjava (a).

Primer 2: $|C_2 \cap E(G_1)| = 0$ in $|C_1 \cap C_2| = 0$.

V tem primeru so vse povezave prereza C_2 v $E(H_1)$, in s tem dobimo izjavo (b).

Primer 3: $|C_2 \cap E(G_1)| = 0$ in $|C_1 \cap C_2| > 0$.

Naj bo $e' \in C_1 \cap C_2$. Potem sta krajišči povezave e' v različnih komponentah grafa $G - C_2$, toda vse povezave iz G_1 in najmanj ena povezava prereza C_1 pripadajo isti komponenti grafa $G - C_2$. Ker je $|C_1 \cap C_2| = 4 - |C_2 \cap E(H_1)| \leq 2$, dobimo izjavo (c) ali (d).

S tem je dokaz leme 3.7 končan.

□

Naslednja pomožna lema pove, v kakšni zvezi so odstranljive povezave in $c - 4$ -prerezi.

Lema 3.8. *Naj bo G $(3, 4)$ -graf in e povezava grafa G . Potem povezava e ni odstranljiva natanko tedaj, ko pripada $c - 4$ -prerezu ali pa je $G \cong K_4$.*

Dokaz: Očitno ni povezave v K_4 , ki je odstranljiva. Predpostavimo, da $G \not\cong K_4$. Naj bo H graf dobljen iz grafa G z odstranitvijo povezave e . Izjava, da H vsebuje $c - 3$ -prerez je očitno enaka izjavi, da povezava e ni odstranljiva v G , in seveda izjavi, da povezava e pripada $c - 4$ -prerezu v grafu G .

□

Lema 3.9. *Naj bo G $(3, 4)$ -graf in e povezava grafa G , ki ne leži na 4-ciklu. Naj bo H $(3, 4)$ -graf, ki ga dobimo iz grafa G z odstranitvijo povezave e , in e' odstranljiva povezava grafa H . Potem je povezava e' :*

- a) *odstanljiva tudi v G , ali pa je*
- b) *ena izmed dveh povezav grafa H , ki nista povezavi grafa G , in obe povezavi grafa G , ki povezujeta krajišči povezave e' s krajiščem povezave e sta odstranljivi povezavi grafa G .*

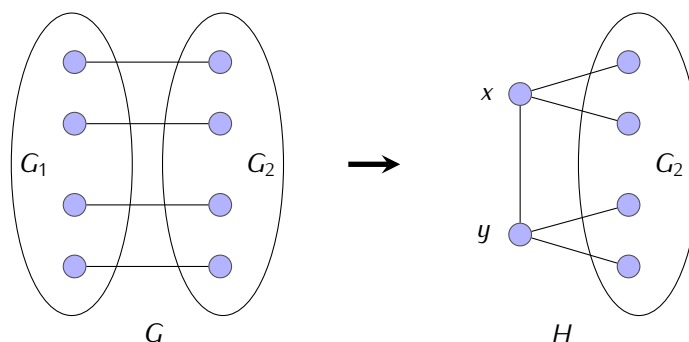
Dokaz: Naj bodo G , e , H in e' kot navedeno. Če e' ni povezava v grafu G , naj bo e'' povezava v grafu G , ki povezuje končno točko povezave e' s končno točko povezave e . Dokazati moramo, da je $e'(e'')$ odstranljiva v grafu G . Predpostavimo, da povezava $e'(e'')$ ni odstranljiva v G . Po lemi 3.8 velja, da povezava $e'(e'')$ pripada $c - 4$ -prerezu grafa G . Ta prerez ne more vsebovati povezave e , ker sicer povezava e ne bi bila odstranljiva. Iz tega sledi, da povezava e' , pripada 4-prerezu grafa H . Ponovno lema 3.8 dokazuje, da mora biti ta 4-prerez trivialen, in je tako povezava e vsebovana v 4-ciklu grafa G . To protislovje dokazuje lemo 3.9.

□

Lema 3.10. *Naj bo G $(3, 4)$ -graf in naj bo C $c - 4$ -prerez grafa G z dvema cikličnima komponentama G_1 in G_2 . Naj bo H $(3, 4)$ -graf, ki ga dobimo iz G_2 tako, da dodamo dve točki x in y , povezavo xy in štiri*

povezave, ki povezujejo x in y s tistimi krajišči povezav prereza C , ki ležijo v G_2 . (Glej sliko 3.9). Potem velja:

- a) Če G_2 ni 4-cikel, je vsaka povezava grafa G_2 , ki je odstranljiva v H , odstranljiva tudi v G .
- b) Če G_2 ni 4-cikel, potem vsaj dve izmed treh možnih alternativ za graf H porodita $(3, 4)$ -graf.
- c) Če je G_2 4-cikel, potem natanko ena izmed treh možnih alternativ za graf H porodi $(3, 4)$ -graf.



Slika 3.9: Prikaz leme 3.10.

Dokaz:

- a) Naj bo e povezava grafa G_2 , ki je odstranljiva v grafu H , ni pa odstranljiva v grafu G . Potem povezava e pripada $c - 4$ -prerezu C_1 grafa G , vendar ne vsem $c - 4$ -prerezom grafa H . (To dokazuje lema 3.8). Z uporabo leme 3.7 na C in C_1 , vidimo da velja izjava (i), in takrat mora biti graf H kot prikazuje slika 3.10. Ker sta oba izmed očitnih 4-prerezov grafa H trivialna, mora biti graf G_2 4-cikel.
- b) Naj bo H kubični graf dobljen iz grafa G_2 z dodajanjem dveh novih točk x in y , povezave xy in štirih poljubnih povezav, ki povezujejo x in y s krajišči povezav prereza C v grafu G_2 . Pokazali bomo, da v primeru, ko graf H ni $(3, 4)$ -graf, lahko izberemo drugačne povezave incidentne točkama x in y , in dobimo $(3, 4)$ -graf. Po lemi 3.6 graf H nima večkratnih povezav in je 2-povezan. Prav tako se lahko hitro prepričamo, da graf H ne vsebuje 2-prereza. Torej moramo obravnavati samo primer, ko graf H premore $c - 3$ -prerez C_1 (sestavljen iz neodvisnih povezav). V tem primeru mora H vsebovati vsaj eno povezavo incidentno z x ali y , saj ni $c - 3$ -prerez grafa G .

Sedaj moramo premisliti tri primere.

Primer 1: Prerez C_1 vsebuje 2 povezavi, ki sta incidentni točki x ali y .

Potem ima vsak izmed teh dveh povezav krajšiče različno od x in y . Vendar potem dve povezavi prereza C , ki sta incidenčni tem točkam, skupaj s tretjo povezavo prereza C_1 , oblikujejo netrivialni 3-prerez v grafu G , kar je protislovje.

Primer 2: Prerez C_1 vsebuje povezavo xz , in ne vsebuje povezave incidenčne točki y .

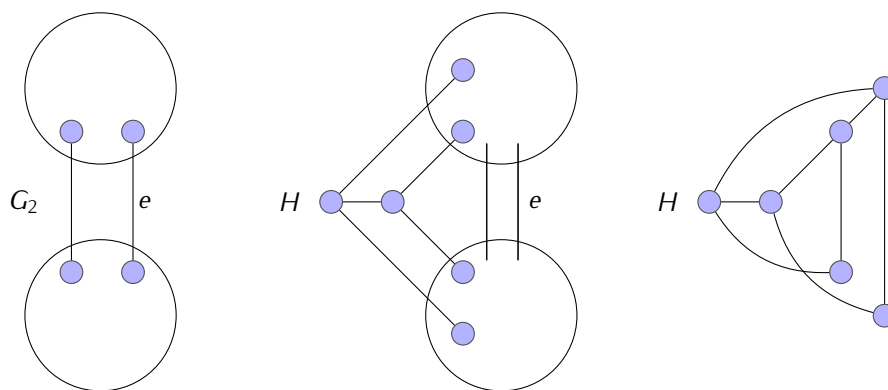
Potem povezava prereza C incidenčna s točko z in dve preostali povezavi prereza C_1 , tvorijo $c - 3$ -prerez grafa G .

Primer 3: Prerez C_1 vsebuje povezavo xy .

Naj bosta x_1 in x_2 točki, ki sta sosednji točki x v grafu G_2 , in naj bosta točki y_1 in y_2 sosednji točki y v grafu G_2 . Potem graf G_2 vsebuje 2-prerez C_2 , tako da $G_2 - C_2$ vsebuje komponento H_x , ki vsebuje x_1 in x_2 , in komponento H_y , ki vsebuje y_1 in y_2 . Naj bo $H' = (H - \{xx_1, yy_2\}) \cup \{xy_2, yx_1\}$. Denimo, da H' ni $(3, 4)$ -graf, z istim razmislekom kot prej ugotovimo, da mora graf G_2 vsebovati 2-prerez C_3 , tako da $G_2 - C_3$ vsebuje komponento H_1 , ki vsebuje x_1 in y_1 , in komponento H_2 , ki vsebuje x_2 in y_2 . Torej ima $G_2 - (C_2 \cup C_3)$ 4 komponente, kjer je x_1 vsebovana v $H_x \cap H_1$, x_2 v $H_x \cap H_2$, y_1 v $H_y \cap H_1$ in y_2 v $H_y \cap H_2$. Ker je G_2 2-povezan, je vsaka od teh komponent incidenčna z najmanj dvema povezavama v $C_2 \cup C_3$. Tako je vsaka komponenta incidenčna z natanko 2 povezavama v $C_2 \cup C_3$. Ampak potem mora biti vsaka komponenta ena sama točka, ker bi drugače 2 povezavi v $C_2 \cup C_3$ in povezava v C incidenčna tem dvema povezavama, tvorile netrivialen 3-prerez v grafu G . Torej je G_2 4-cikel, in za željen $(3, 4)$ -graf H lahko izberemo $K_{3,3}$ (glej sliko 3.10).

To dokazuje lemo 3.10.

□



Slika 3.10: Možne alternative grafa H .

Posledica 3.11. Naj bo G $(3, 4)$ -graf, ki ni izomorfen grafu \tilde{Q}_3 , naj bo e povezava grafa G , ki leži na

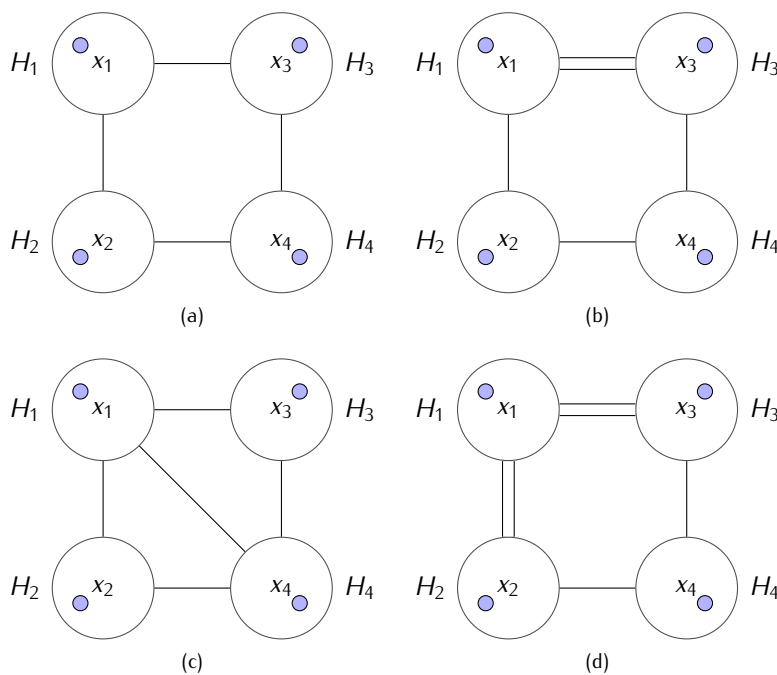
4-ciklu F , naj bo H (3, 4)-graf, ki ga dobimo iz grafa G z odstranitvijo povezave e , in naj bo e' povezava grafa G , ki je odstranljiva v grafu H . Potem je e' odstranljiva v grafu G , razen če povezuje točko 4-cikla F s točko grafa $G - F$.

Dokaz: Uporabimo lemo 3.10(a). Za $G_1 = F$ in $G_2 = G - F$. G_2 ni 4-cikel, ker po predpostavki $G \neq \tilde{Q}_3$ in ker $G \neq Q_3$, saj Q_3 nima odstranljivih povezav.

□

Lema 3.12. Naj bo G (3, 4)-graf, naj bo C $c - 4$ -prerez grafa G s cikličnima komponentama G_1 in G_2 ter naj bodo x_1, x_2, x_3 in x_4 krajišča povezav prereza C , ki ležijo v G_2 . Potem velja:

- Če je H' (3, 4)-graf, ki ga dobimo iz G_2 tako, da dodamo dve povezavi, ki povežeta po dve točki iz $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, potem je vsaka povezava e grafa G_2 , ki je odstranljiva v H' , odstranljiva tudi v G , razen če sta v G_2 dve točki iz $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ povezani s povezavo $e' \neq e$, in sta e' in e incidenčni isti točki.
- Grafu G_2 je vedno mogoče dodati dve povezavi na tak način, da dobimo (3, 4)-graf H' opisan v (a), razen če obstaja točka grafa G_2 , ki je povezana s tremi točkami iz $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, oziroma, če so tri točke iz $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ neodvisne in tvorijo 6-cikel s tremi drugimi točkami grafa G_2 .



Slika 3.11: Različne strukture grafa G_2 .

Dokaz:

- a) Naj bo e povezava v grafu G_2 , ki je odstranljiva v grafu H' , ni pa odstranljiva v grafu G . Po lemi 3.8 povezava e pripada $c - 4$ -prerezu C_1 grafa G , ne pripada pa nobenemu $c - 4$ -prerezu grafa H' . Z opazovanjem štirih možnih odnosov med C in C_1 iz leme 3.7, vidimo, da je to možno le, če imamo situacijo a) ali d). In tudi v teh primerih povezava e pripada 4 -prerezu grafa H' , zato mora biti ta 4 -prerez trivialen. 4 -prerez je sestavljen iz dveh novih povezav grafa H' , to je tistih, ki niso v grafu G_2 , skupaj s povezavo e in dodatno povezavo prereza C_1 . Ker mora biti ta 4 -prerez trivialen, sklepamo, da obstaja povezava e' grafa G_2 , ki povezuje dve točki izmed točk x_1, x_2, x_3 in x_4 , in da je povezava e sosednja povezavi e' .
- b) Najprej predpostavimo, da sta točki x_1 in x_2 sosednji. Če je G_2 4 -cikel, potem lahko vzamemo, da je $H' = K_4$. Po drugi strani, če ima graf G_2 najmanj šest točk, pa lahko z uporabo leme 3.10 (b) za graf $G_2 - \{x_1, x_2\}$ sklepamo, da:

- vsaj ena od možnosti za graf H je $(3, 4)$ -graf, ali pa je
- $G_2 - \{x_1, x_2\}$ 4 -cikel, in lahko vzamemo $H = K_{3,3}$, ali pa imajo x_1, x_3 in x_4 skupnega soseda.

Odslej lahko predpostavimo, da je $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ neodvisna množica točk. Denimo, da $H = G_2 \cup \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ni $(3, 4)$ -graf. Ker je graf G_2 2 -povezan in je G $(3, 4)$ -graf, sledi, da ima graf H povezavni-prerez C_1 , sestavljen iz 2 ali 3 povezav, ki ločujejo $\{x_1, x_2\}$ od $\{x_3, x_4\}$. Jasno, da je C_1 povezavni-prerez grafa G_2 , ki ločuje $\{x_1, x_2\}$ od $\{x_3, x_4\}$. Z uporabo istega premisleka na $G_2 \cup \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, lahko ugotovimo, da ima graf G_2 tudi drugačen povezavni-prerez C_2 , ki je sestavljen iz 2 ali 3 povezav, ki ločujejo $\{x_1, x_3\}$ od $\{x_2, x_4\}$. Z uporabo simetrije, lahko predpostavljamo, da ima graf G_2 eno izmed struktur prikazanih na sliki 3.11.

Naj bo H_i komponenta grafa $G - (C_1 \cup C_2)$, ki vsebuje x_i , $1 \leq i \leq 4$.

V primeru (a) in (b) morata biti H_2 in H_4 samostojni točki, drugače bi G imel netrivialen 3 -prerez. Toda to je v nasprotju z predpostavko, da točka x_2 ni sosedna s točko x_4 .

V primeru (c), sta H_2 in H_3 samostojni točki, in po lemi 3.6, je vsak od H_1 in H_4 bodisi samostojna povezava, ali pa je 2 -povezan. Če je $G_2 \cup \{x_1x_4, x_2x_3\}$ $(3, 4)$ -graf, smo končali. V nasprotnem ima G_2 povezavni-prerez, ki sestoji iz 2 ali 3 povezav, ki ločuje $\{x_1, x_4\}$ od $\{x_2, x_3\}$. To je mogoče le, če je eden izmed H_1 in H_4 , recimo da H_1 , samostojna povezava, in v tem primeru sledi, da imajo x_1, x_2 in x_3 skupnega soseda.

V primeru (d), je H_4 samostojna točka, in vsak od H_2 in H_3 je bodisi samostojna povezava ali pa je 2 -povezan. V obeh primerih lahko najdemo štiri medsebojno povezavno-disjunktno poti P_2, Q_2, P_3 in

Q_3 , tako da ima P_i krajišči x_i in x_4 , in Q_i ima krajišče x_i in drugo krajišče v H_1 , kjer je $i = 2, 3$. Če $G_2 \cup \{x_1x_4, x_2x_3\}$ ni $(3, 4)$ -graf, sklepamo da G_2 vsebuje povezavni-prerez C_3 , ki ločuje $\{x_1, x_4\}$ od $\{x_2, x_3\}$ in je sestavljen iz ene povezave iz P_2 , ene povezave iz P_3 in ene povezave e_1 iz grafa H_1 . Poleg tega mora biti e_1 most v H_1 , ki ločuje x_1 od Q_2 in Q_3 . Naj bosta D_1 in D_2 komponenti grafa $H_1 - e_1$, kjer $x_1 \in V(D_1)$. Če sta H_2 in H_3 oba 2-povezana, lahko izberemo Q_i tako, da vsebuje katerokoli od dveh H_1H_i -povezav, kjer je $i = 2, 3$ in zato D_1 ni incidenčen z nobeno izmed teh povezav, kar pomeni, da ima graf G 2-prerez. Torej lahko domnevamo, da je H_2 samostojna povezava. Če je graf H_3 2-povezan, potem kot zgoraj sklepamo, da D_1 ni incidenčen z nobeno od obeh H_1H_3 -povezav, kot tudi ne z H_1H_2 -povezavo incidenčno z x_2 . Torej ima graf G 3-prerez in je D_1 ena od pripadajočih komponent. Zato je $V(D_1) = \{x_1\}$ in točka grafa $H_2 - x_2$ je skupna soseda točk x_1, x_2 in x_4 .

Nazadnje predpostavimo, da je tudi H_3 samostojna povezava. Če za nek $i \in \{2, 3\}$, D_1 ni incidenčna z nobeno od H_1H_i -povezav, potem kot zgoraj sklepamo, da $V(D_1) = x_1$ in imajo x_1, x_{5-i} , in x_4 skupnega soseda. Torej lahko predpostavimo, da je D_1 incidenčen z eno od H_1H_i -povezav, kjer je $i = 2, 3$. Ampak potem ima graf G 3-prerez, ki ločuje D_2 od $G - D_2$. Torej je D_2 samostojna točka, in $V(D_2) \cup V(H_2) \cup V(H_3) \cup \{x_4\}$ inducira 6-cikel v grafu G .

To dokazuje lemo 3.12

□

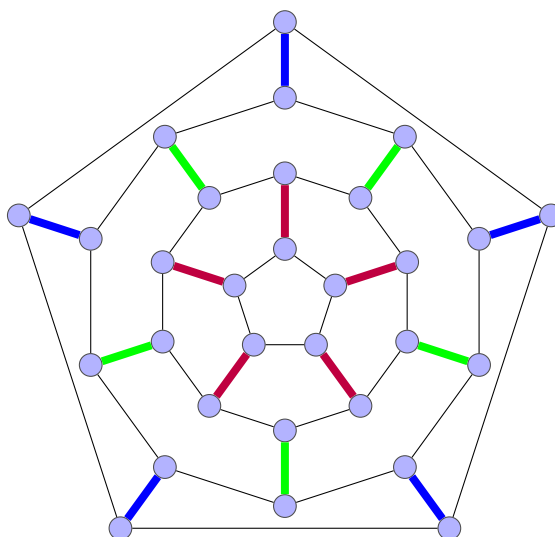
Definicija 3.13 (Minimalni $c-k$ -prerez). *Za dani $(3, 4)$ -graf G pravimo, da je C_m minimalni $c-k$ -prerez ali samo m -prerez, če ima ena izmed komponent, ki jo dobimo z odstranitvijo povezav tega prereza lastnost, da ne obstaja noben pravi podgraf tega grafa, ki je komponenta $c-k$ -prereza grafa G .*

Primer Na sliki 3.12 imamo primer grafa, v katerem si pogledjmo tri $c-5$ -prereze. Naj bo C_1 $c-5$ -prerez zelene barve. Potem obe komponenti, ki jih dobimo, če odstranimo povezave iz C_1 , vsebujeta pravi podgraf, ki je komponenta vijoličnega $c-5$ -prereza oziroma modrega $c-5$ -prereza. Tako vidimo, da sta minimalna $c-5$ -prereza modre in vijoličaste barve, $c-5$ -prerez zelene barve pa ni minimalni $c-5$ -prerez.

Definicija 3.14. *Naj bo G $(3, 4)$ -graf. Če je C_m minimalni $c-k$ -prerez grafa G , potem $M(C_m)$ označuje komponento grafa $G - C_m$, ki je minimalna po definiciji 3.13.*

Lema 3.15. *Naj bo C_m minimalni $c-4$ -prerez $(3, 4)$ -grafa G :*

- Če $M(C_m)$ premore prerez, ki sestoji iz dveh neodvisnih povezav, je $M(C_m)$ 4-cikel.
- Če $M(C_m)$ ni 4-cikel, so vse njegove povezave odstranljive v grafu G .



Slika 3.12: Dva minimalna $c - 5$ -prereza in en $c - 5$ -prerez, ki ni minimalni.

- c) Če je $M(C_m)$ 4-cikel, sta vsaj dve neodvisni povezavi grafa $M(C_m)$ odstranljivi v grafu G , razen, če je $G = Q_3$.

Dokaz:

- a) V nasprotnem $M(C_m)$ ne bi bil minimalen.
- b) Sledi iz leme 3.7, lema 3.8, in točke a) te leme.
- c) Jasno je, da je povezava 4-cikla odstranljiva, če in samo če je tudi njena vzporedna povezava na 4-ciklu odstranljiva. Naj bosta povezavi e_1 in e_2 , vzporedni povezavi 4-cikla, ki nista odstranljivi. Po lemi 3.8 pripadata $c - 4$ -prerezu v grafu G , očitno tako pripadata istemu $c - 4$ -prerezu, recimo, da pripadata C_1 . Z uporabo leme 3.7 a), vidimo, da je druga komponenta M_2 grafa $G - C_m$ ločena z 2 povezavama prereza C_1 . Recimo, da ima $M_2 - C_1$ povezani komponenti M' in M'' . Če povezavi grafa $M(C_m)$, različni od e_1 in e_2 , nista odstranljivi, potem pripadata $c - 4$ -prerezu C_2 grafa G , in jasno je, da C_2 ločuje obe M' in M'' (obe komponenti vsebujeta mostove). Z uporabo leme 3.5 a) sklepamo, da sta M' in M'' samostojni povezavi.

To dokazuje lemo 3.15.

□

Posledica 3.16. Če je G $(3, 4)$ -graf, $G \notin \{K_4, Q_3\}$, sta vsaj dve povezavi poljubnega 4-cikla v grafu G odstranljivi.

Dokaz: Naj bo M 4-cikel grafa G . Če je M enak $M(C_m)$ za nek minimalni $c - k$ -prerez C_m , posledica sledi iz leme 3.15. V nasprotnem primeru morajo povezave grafa G z natanko enim krajiščem na 4-ciklu M tvoriti trivialen 4-prerez in je tako $G = K_{3,3}$, in so tako vse povezave odstranljive.

□

V nadaljevanju bomo definirali zelo pomembno operacijo na grafih.

Definicija 3.17 (H -operacija). H -operacija je nasprotna operaciji odstranjevanja povezave.

Rečemo, da je graf G pridobljen iz grafa G' z uporabo H -operacije, če sta $e_1 = x_1y_1$ in $e_2 = x_2y_2$ različni neodvisni povezavi grafa G' , u in v dve novi točki, ki nista v grafu G' , in je $V(G) = V(G') \cup \{u, v\}$ ter $E(G) = E(G') \setminus \{e_1, e_2\} \cup \{uv, ux_1, uy_1, vx_2, vy_2\}$.

Primer Oglejmo si primer kako iz dodekaedra naredimo kocko s pomočjo odstranjevanja povezav. Za lažje razumevanje postopka si bomo pomagali s sliko 3.13, kjer si bomo ogledali primer (a). Na sliki smo z rdečo barvo na posameznih korakih označili povezavo, ki je v postopku odstranjevanja. Na drugem grafu vidimo, da smo odstranili rdečo povezavo, rdeči točki, ki sta bili krajišči rdeče povezave. Prav tako smo odstranili tudi štiri povezave, ki so imele za eno izmed krajišč povezav rdeči točki. Obenem smo ostali dve krajišči odstranjenih ostalih povezav posamezne rdeče točke označili z zeleno barvo in jih med seboj povezali z novima povezavama. Postopek ponovimo šestkrat kot je prikazano na omenjeni sliki. Na ta način zmanjšamo število točk iz 20 na 8 in tako dobimo iz dodekaedra kocko.

Če v obratni smeri pogledamo na sliko 3.13, imamo primer H -operacije.

V nadaljevanju si bomo pogledali bistveni izrek magistrskega dela.

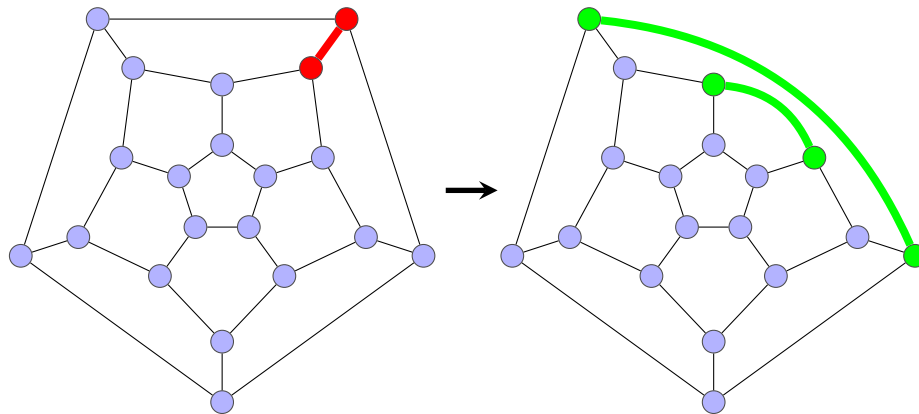
Izrek 3.18 (Fontet-Wormald klasifikacijski izrek). *Družino $(3, 4)$ -grafov sestavljajo natanko tisti grafi, ki jih dobimo iz polnega grafa K_4 oziroma kocke z večkratno uporabo H -operacije.*

Dokaz: Vsak $(3, 4)$ -graf G , ki je različen od K_4 in Q_3 , ima odstranljivo povezavo, saj so po lemi 3.8 bodisi, vse povezave odstranljive, ali pa ima graf G $c - 4$ -prerez. V slednjem primeru lema 3.15 pove, da sta vsaj 2 povezavi odstranljivi.

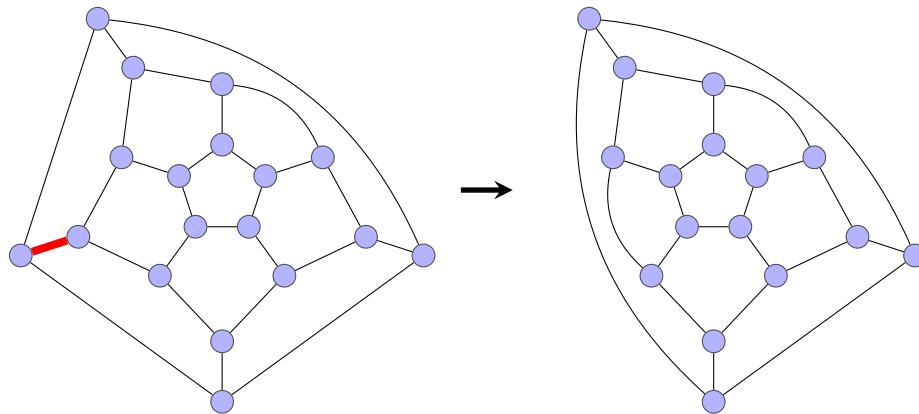
Dokazati moramo, da je graf G , ki je pridobljen iz $(3, 4)$ -grafa G' z uporabo H -operacije, tudi $(3, 4)$ -graf. Za vsako ločeno množico povezav grafa G obstaja ločena množica povezav grafa G' z enakim številom povezav, ali eno manj, kar pomeni, da zadostuje uvideti, da H -operacija ne more spremeniti trivialnega 3-prereza v $c - 3$ -prerez.

□

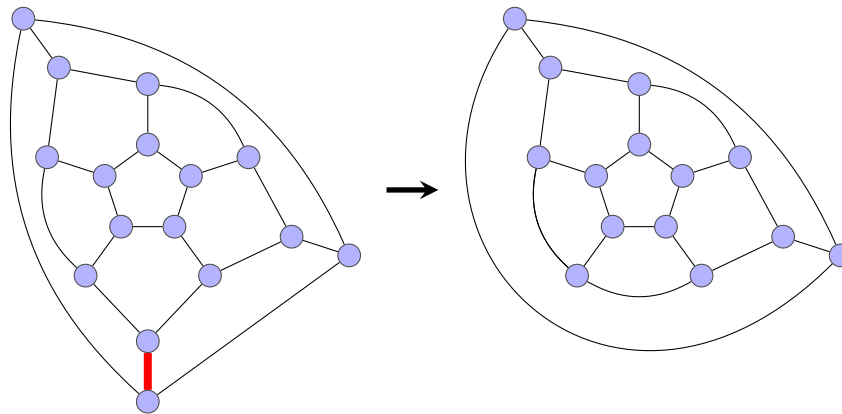
Definicija 3.19 (Dvojno jadro). Glede na kocko Q_3 in ukrivljeno kocko \tilde{Q}_3 definiramo zapestnici B_{10} in \tilde{B}_{10} kot grafa na sliki 3.14. 6-cikel s sredinsko diagonalo imenujemo jadro. Če je jadro S induciran podgraf



(a) Na grafu dodekaedra smo z rdečo označili prvo povezavo, ki jo bomo odstranili. Tako vidimo na drugem grafu, da smo s tem postopkom odstranili rdečo povezavo in pripadajoči rdeči točki te povezave. Na drugem grafu prav tako vidimo, da smo zelene točke med seboj povezali z novima dvema povezavama. Te štiri točke so krajišča povezav, ki so za krajišče imele odstranjene rdeče točke.

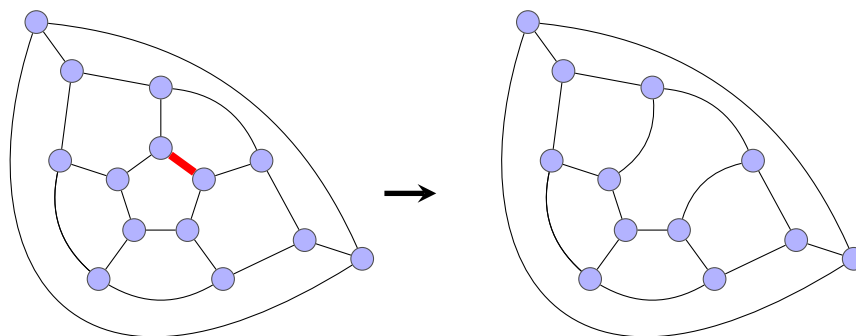


(b) Postopek ponovimo na drugi povezavi

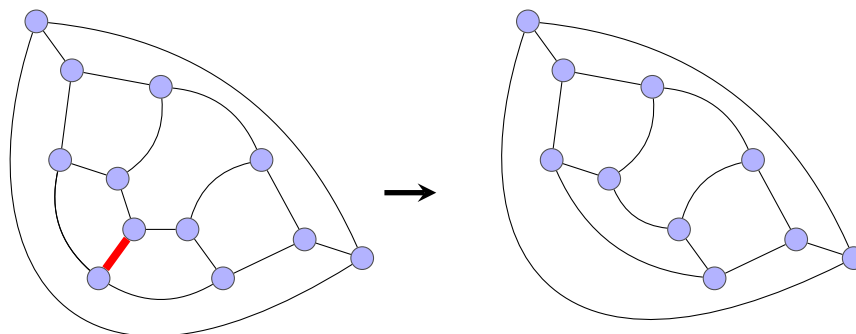


(c) Postopek ponovimo na tretji povezavi

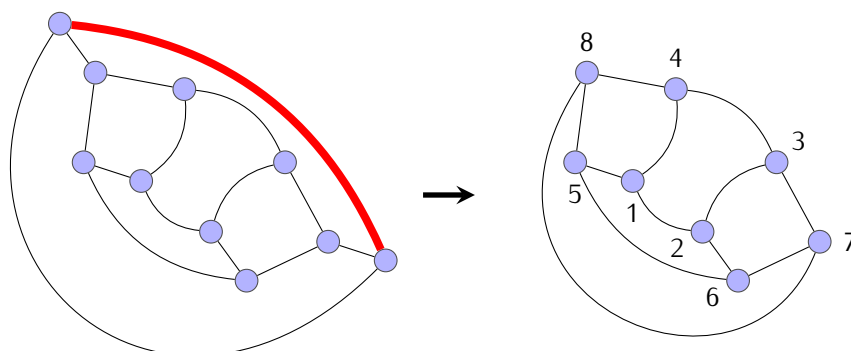
Slika 3.13: Kako iz dodekaedra naredimo kocko s pomočjo operacije odstranjevanja povezav.



(d) Postopek ponovimo na četrti povezavi

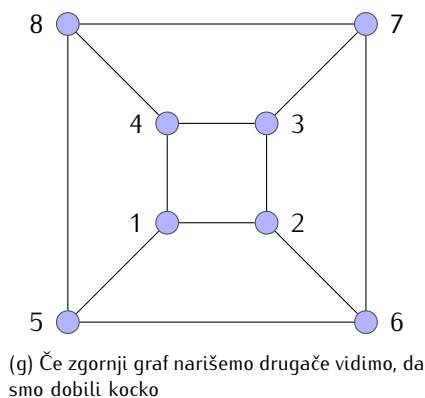


(e) Postopek ponovimo na peti povezavi



(f) Postopek ponovimo na šesti povezavi, tako smo s pomočjo operacije odstranjevanja povezav odstranili 12 točk iz dodekaedra in prišli do kocke

Slika 3.13: Kako iz dodekaedra naredimo kocko s pomočjo operacije odstranjevanja povezav.

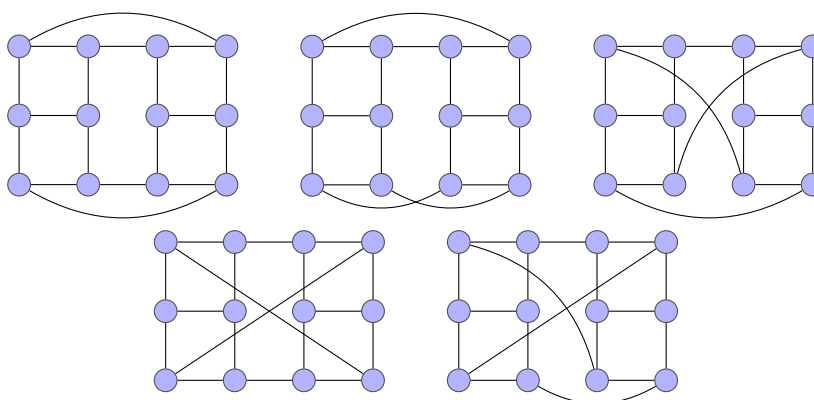


Slika 3.13: Kako iz dodekaedra naredimo kocko s pomočjo operacije odstranjevanja povezav.

grafa G , potem povezave grafa G z natanko enim krajiščem v jadrju S imenujemo vrvi jadra S . Kubični graf sestavljen iz dveh disjunktnih jader, ki si delita 4 iste vrvi bomo imenovali **dvojno jadro** (obstaja 5 neizomorfnih dvojnih jader).



Slika 3.14: B_{10} in \tilde{B}_{10} .

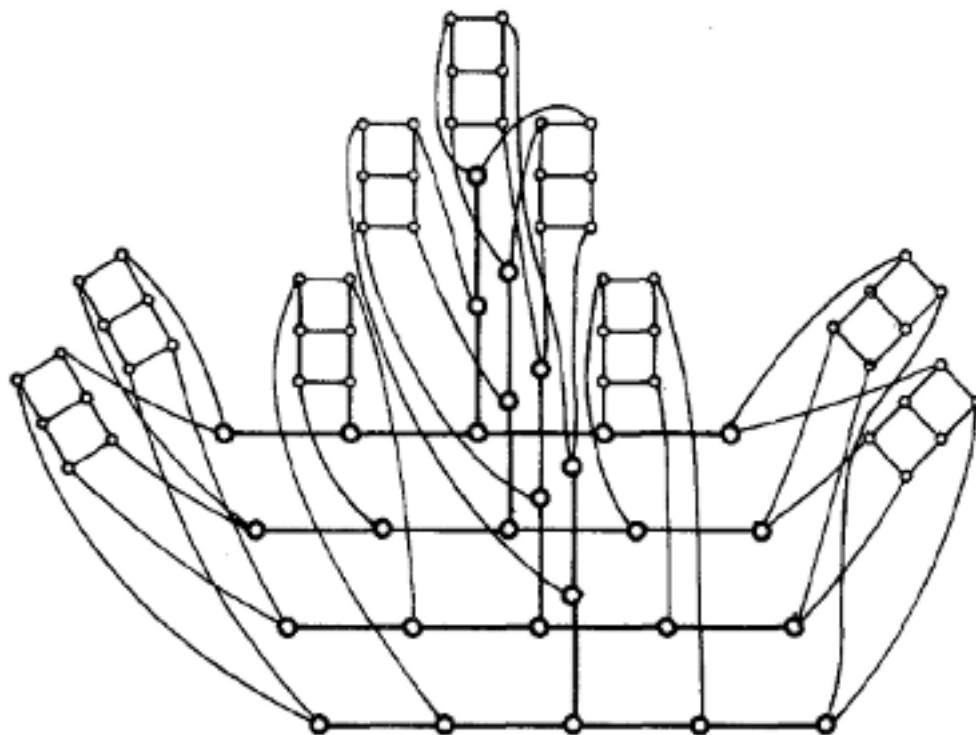


Slika 3.15: Neizomorfna dvojna jadra.

Definicija 3.20 (Viking ladja). **Viking ladja** je objekt, ki ima naslednjo strukturo (sestavljeno iz trupa, vrvi in jader). Naj bo T poljubno drevo z največjo stopnjo točke v grafu največ 3, recimo s t točkami v_1, \dots, v_t .

Naj bodo T_1, T_2, T_3 drevesa izomorfná drevesu T , s pripadujočimi točkami $T_i(v_1), \dots, T_i(v_t), i = 1, 2, 3$. Za vsak $k = 1, \dots, t$ vzemimo $3 - \deg(v_k)$ disjunktnih jader in pridružimo štiri vrvi od vsakega jadra do $v_k, T_1(v_k), T_2(v_k)$ in $T_3(v_k)$ na kakršenkoli način, da pridobimo graf G . Jasno je, da je graf G kubičen.

Pojasnilo k definiciji: Če je drevo T samostojna točka, bo imel 3 jadra vezana na drevo T , drugače pa imajo točke stopnje 1 dve jadra, točke stopnje 2 eno jadro, in točke stopnje 3 v drevesu T ne bodo imele vrvi z njim. Primer viking ladje, si lahko ogledate na sliki 3.16.



Slika 3.16: Viking ladja.

Ni težko videti, da so B_{10}, \tilde{B}_{10} , dvojna jadra in Viking ladja $(3, 4)$ -grafi.

V nadaljevanju si bomo ogledali izrek, ki pove splošno število odstranljivih povezav v $(3, 4)$ -grafih.

Izrek 3.21. Naj bo G $(3, 4)$ -graf in naj bo $r(G)$ število odstranljivih povezav grafa G . Potem velja:

1. Če $G \notin \{K_4, Q_3, \tilde{Q}_3, B_{10}, \tilde{B}_{10}\}$, je

$$r(G) \geq \frac{1}{5} (|E(G)| + 12) \quad (3.1)$$

V (3.1) velja enakost natanko tedaj, ko je G dvojno jadro oziroma Viking ladja.

2. $r(K_4) = r(Q_3) = 0$.

3. $r(\tilde{Q}_3) = 4$.

4. $r(B_{10}) = r(\tilde{B}_{10}) = 5$.

Dokaz: Dokaz te trditve, si lahko bralec ogleda v članku [1].

□

Poglavje 4

Fulereni

V tem poglavju bomo opisali definicije, trditve in primere, ki smo jih pridobili iz naslednjih virov: [18, 19, 20, 22, 26].

Fuleren je polieder s petkotnimi in šestkotnimi ploskvami, v katerem se v vsakem oglišču stikajo trije robovi. Naslednja definicija pove ekvivalentno definicijo fulerena v jeziku teorije grafov.

Definicija 4.1. *Fuleren je kubičen, 3-povezavno povezan ravninski graf, ki ima petkotna in šestkotna lica.*

4.1 Zgodovina fulerenov

Fulere v matematiki poznamo že iz grških časov, prisekan ikozaeder je eno od trinajstih teles, ki jih je opisal Arhimed v Pappusovem spisu iz 4. stoletja pred našim štetjem. Tako so poliedri ena prvih struktur, ki so bile obravnavane v matematiki. Iz kemijskega stališča se ikozaedrska $C_{60}H_{60}$ kletka omenja leta 1965 kot možna topološka struktura. Obstoje C_{60} je napovedal Eiji Osawa iz Japonske leta 1970. Opazil je, da ima struktura molekule, ki jo je preiskoval, obliko delno podobno nogometni žogi, in postavil hipotezo, da bi lahko obstajale tudi strukture v obliki celotne žoge. Njegova ideja je bila objavljena v japonskih znanstvenih revijah, vendar na žalost ni dosegla Evrope in Amerike.

Tudi v letu 1970, je R.W. Henson predlagal strukturo in izdelal model C_{60} . Na žalost je bil dokaz za to novo obliko ogljika zelo slab in ni bil sprejet niti med njegovimi prijatelji. Rezultati niso bili nikoli objavljeni, vendar so bili nagrajeni v reviji Carbon leta 1999.

V masni spektrometriji, so se diskretni vrhovi zdeli ustrezni molekulam z natančno maso šestdeset, sedemdeset ali več atomov ogljika. Leta 1985 so Harold Kroto, James R. Heath, Sean O'Brien, Robert

Curl in Richard Smalley, odkrili C_{60} , in kmalu zatem so začeli odkrivati fulerene. Kroto, Curl in Smalley so dobili leta 1996 Nobelovo nagrado za kemijo za svoje prizadevanja v odkritju tega razreda molekul.

Molekulo fulerena 'Buckyball' je leta 1991 revija Science imenovala za molekulo leta. V letu 1991 so uredniki revije Science izjavili, da razvoj znanosti v smeri fulerenov prehitijo katerikoli znanstveni dosežek. Od leta 1991 se je razvoj znanosti okoli fulerenov le še pospeševal. Raziskovalci po svetu odkrivajo nova spoznanja iz osnov fulerenov in prav tako potencialne uporabe fulerenov. Tako so nastala nova področja raziskav, med katere spadajo tudi ogljikove nanocevke in nanožice.

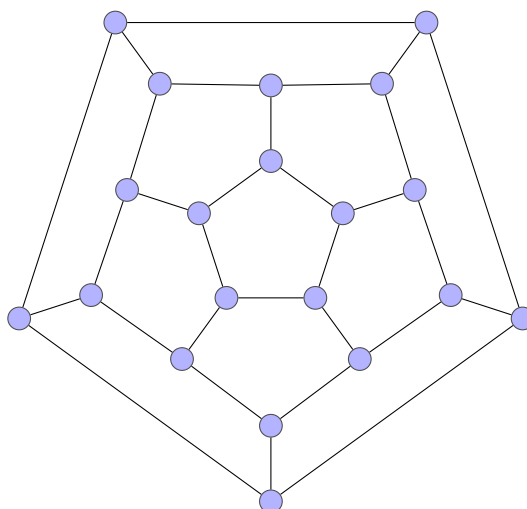
Buckminster fuleren (C_{60}) je dobil ime po Richardu Buckminster Fullerju, znanemu arhitektu, ki je naredil geodetsko kupolo, katera spominja na fulerene. Ker imajo buckminster fulerene obliko podobno kot nekakšna kupola, so se polastili imena. Odkritje družine fulerenov je prišlo po buckminster fulerenu, skrajšano ime 'fuleren' se nanaša na družino fulerenov.

4.2 Zgledi fulerenov

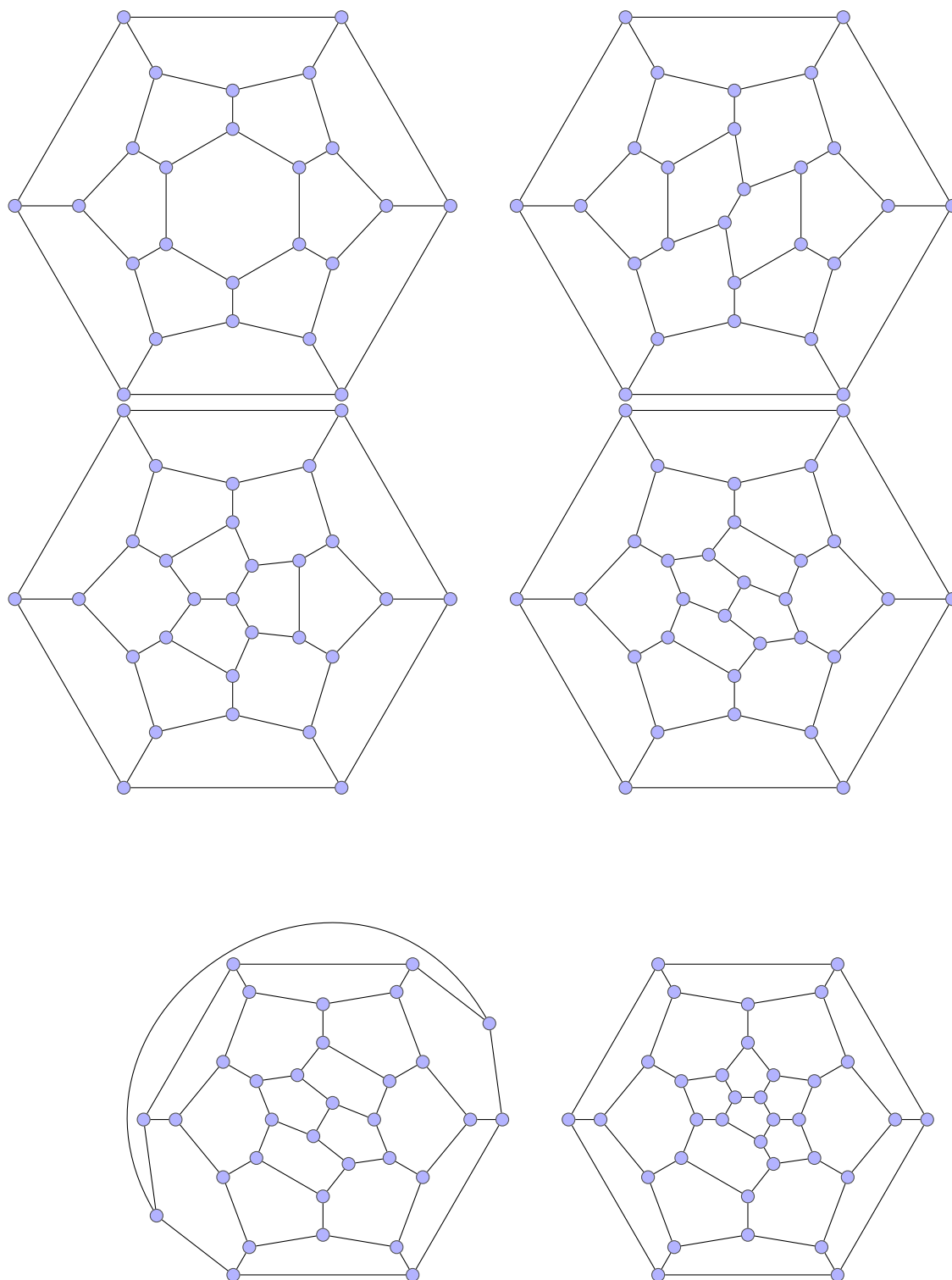
Definicija 4.2. Število lic dolžine 6 v fulerenu označimo s h .

Grünbaum in Motzkin sta leta 1963 dokazala, da obstaja fuleren z n točkami za vsako sodo število $n \geq 20$, z izjemo števila $n = 22$.

Pokazali bomo šest grafov fulerenov in sicer za $h = 0, 2, 3, 4, 5, 6$ in 7 (glej sliko 4.2). Najmanjši fuleren z $h = 0$ je dodekaeder, ki smo ga že spoznali v prejšnjem poglavju (glej sliko 4.1).



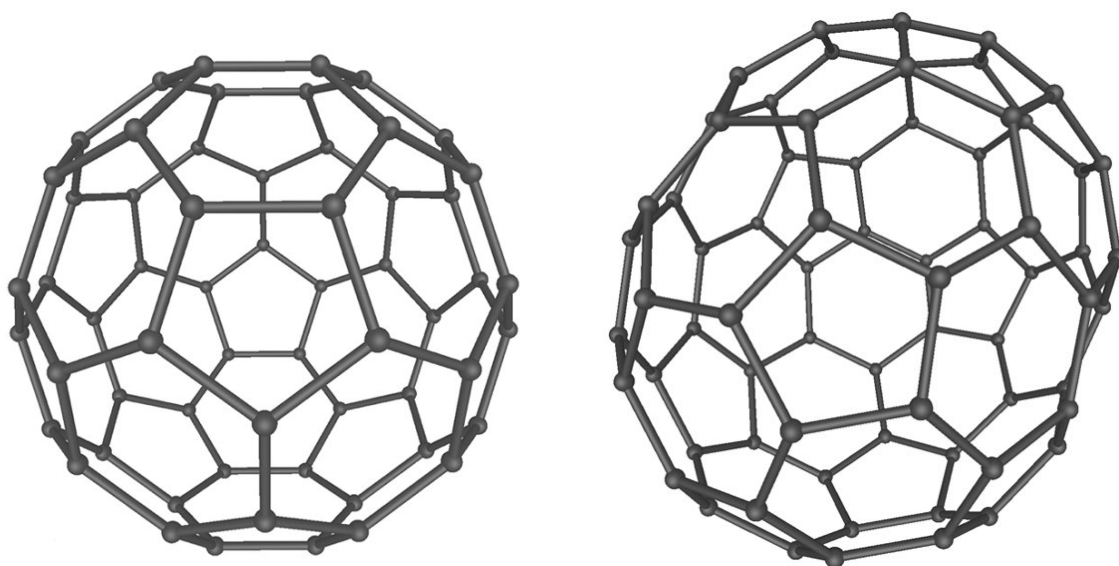
Slika 4.1: Fuleren $h = 0$ - Dodekaeder.



Slika 4.2: Fulereni za $h = 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

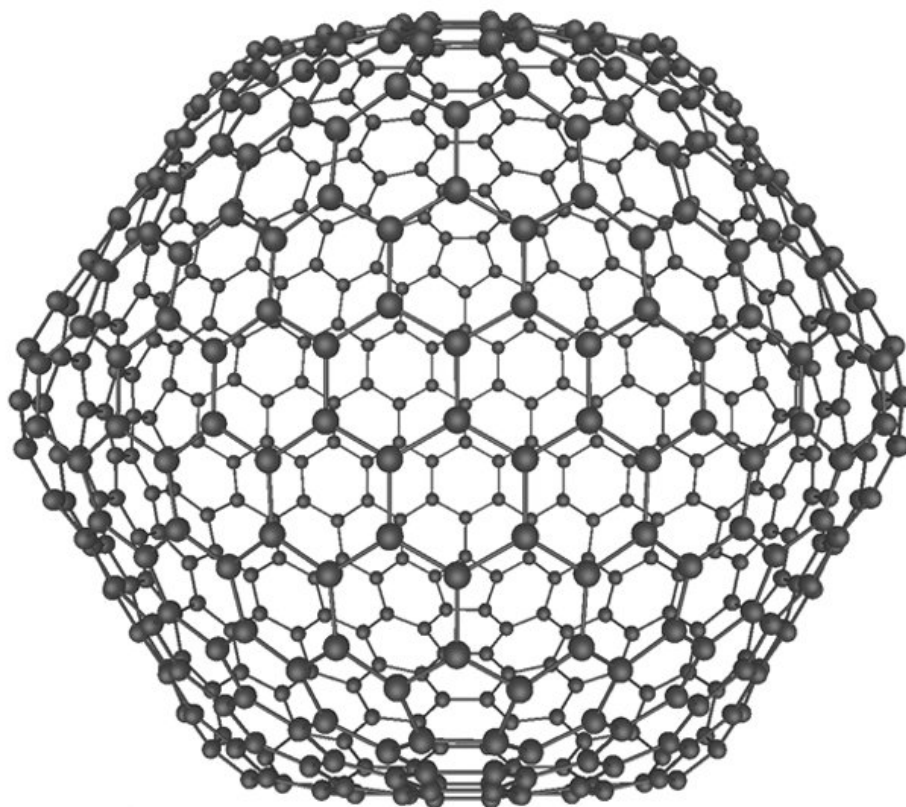
4.3 Nanocevke

Raziskave fulerenov so pripeljale do odkritja ogljikovih nanocevok. Leta 1991 je Sumio lijima v reviji Nature objavil članek o ogljikovih nanocevkah. Fulereni so najrazličnejše kroglna struktura, pri nanocevkah pa



(a) C₆₀ - Buckminster fuleren.

(b) C₇₀ - fuleren.



(c) C₅₄₀ - fuleren.

Slika 4.3: Primeri Fulerenov.

je osnovna geometrijska lastnost, da imajo obliko votlega valja. Zato se jih prepozna tudi pod imenom tubularni fulereni oziroma cilindrični fulereni. Največkrat jih vidimo z zaprtim koncem cevi, obstajajo pa tudi popolnoma odprte nanocevke.

Zaprte nanocevke si predstavljamo tako, da vzamemo ravnino, kjer 6-cikle zvijemo v cevko, ter vsak konec zaključimo s polovico fulerena primerne premera.

Netrivialne $c - 5$ -prereze imajo le tiste nanocevke, ki so zaprte s polovico dodekaedra.



Slika 4.4: Nanocevka.

Več podrobnosti in zanimivosti o nanocevkah najdete v članku [26].

4.4 Osnovne lastnosti fulerenov

Trditev 4.3. Vsak fuleren ima natanko 12 petkotnih lic, vsa druga lica pa so šestkotna.

Dokaz: Naj bo $|V|$ število točk, $|E|$ število povezav, $|F|$ število lic, $|P|$ število petkotnih lic in $|H|$ število šestkotnih lic v našem fulerenu. Vsaka točka grafa leži na natanko treh licih in vsaka povezava leži na dveh licih. Tako velja, da je število točk grafa $|V| = (5|P| + 6|H|)/3$. Število povezav grafa G je $|E| = (5|P| + 6|H|)/2 = \frac{3}{2}|V|$ in število lic je $|F| = |P| + |H|$. Po Eulerjevi formuli (glej trditev 2.36) dobimo:

$$\frac{5|P| + 6|H|}{3} - \frac{5|P| + 6|H|}{2} + |P| + |H| = 2$$

in zato velja:

$$|P| = 12, |V| = 2|H| + 20, |E| = 3|H| + 30.$$

□

Spomnimo se, da je $c-k$ -prerez trivialen, če je ena izmed dobljenih dveh komponent natanko k -cikel (glej definicijo 3.4).

Trditev 4.4. *Notranji obseg oziroma ožina fulerenov je 5.*

Dokaz: Dokaz si lahko ogledate v članku [23]

□

Izrek 4.5. *Naslednji izjavi sta ekvivalentni:*

- a) *Fuleren ima netrivialne $c-5$ -prezeze.*
- b) *Fuleren je izomorfen nanocevkki za neko celo število $k > 0$.*

Dokaz: Dokaz smo zaradi obsežnosti izpustili, lahko pa si ga ogledate v članku [23].

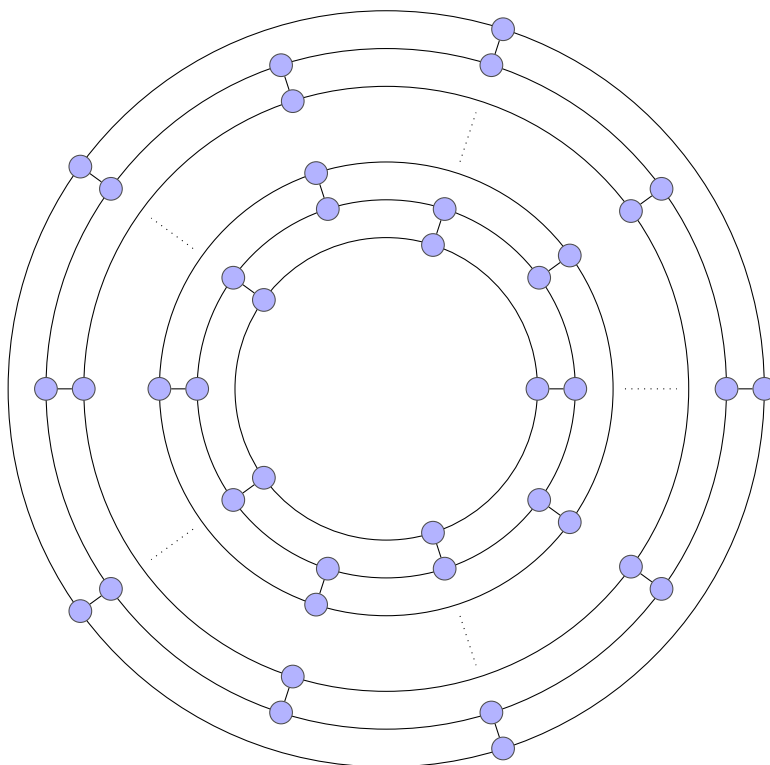
□

4.5 Ciklična povezavna povezanost fulerenov

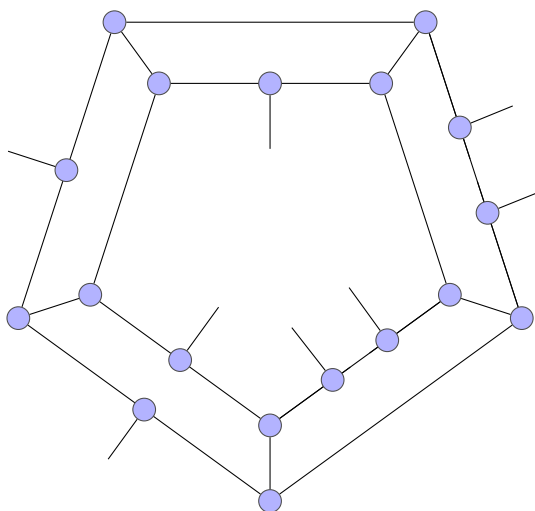
V tem podpoglavju si bomo pogledali zanimivi trditvi, ki povesta, da je vsak fuleren ciklično 4-povezavno povezan (glej trditev 4.6), oziroma ciklično 5-povezavno povezan (glej trditev 4.7).

Trditev 4.6. *Vsak fuleren je ciklično 4-povezavno povezan.*

Dokaz: Pokažimo s protislovjem. Naj bo fuleren G vložen v ravnini. Recimo, da graf G ni ciklično 4-povezavno povezan. Torej, recimo, da obstaja množica treh povezav, ki tvorijo $c-3$ -prerez, (Manj kot 3 povezave ne bi razcepile grafa, ker je graf 3-povezan). Označimo te 3 povezave z e_i , $i = 1, 2, 3$ in njihova krajišča z v'_i, v''_i , $i = 1, 2, 3$. Zaradi 3-povezanosti in kubičnosti grafa G , obstajata dva cikla, C' in C'' , tako da ima vsaka povezava e_i eno točko v C' , recimo v'_i , ter eno točko v C'' , recimo da v''_i . Pri tem so e_1, e_2 in e_3 edine povezave, ki povezujejo točke na ciklih C' in C'' . Če v C' in C'' ne bi bilo več točk, bi bila C' in C'' 3-cikla, kar ne more biti res, ker je G fuleren in ima po trditvi 4.4 ožino 5. Označimo s k' in k'' število dodatnih točk na ciklih C' in C'' . Ker ima G ožino 5, morata biti k' in k'' vsaj 3. (Lahko bi bila k' in k'' tudi 2, vendar bi v tem primeru morali dve točki imeti povezavo med sabo in bi tvorili 3-cikel v grafu G , ker je G 3-povezan. Torej izključimo, da sta k' in k'' lahko enaka 2).



Slika 4.5: Nanocevka, ki jo sestavljata dva pokrova s po šestimi petkotniki in k plasti, kjer vsaka plast vsebuje 5 šestkotnikov.



Slika 4.6: Lokalna struktura.

Torej $k' + k'' \geq 6$. Ker pa vsak par sosednjih povezav tvori lice fullerena in so lica fullerena dolžine 6 ali 5, vemo, da so lica, ki vsebujejo dve izmed povezav e_i dolžine največ 6. Od tod sledi, da je $k' + k'' \leq 6$, in tako velja $k' = k'' = 3$. To pomeni, da sta C' in C'' 6-cikla. Recimo da je C' notranji. Potem so 3

točke zajete s k' začetno (oz. končno) točko neke povezave, ki gre v notranjost cikla C' . Poimenujmo te povezave z e'_i , $i = 1, 2, 3$. Če bi kateri dve imeli skupno končno točko v' , potem bi po 3-povezanosti in 3-regularnosti tudi tretja morala imeti končno točko v' . V tem primeru bi obstajalo lice dolžine 3 ali 4 (odvisno od postavitve točk na C'), kar pa je v nasprotju s tem, da je G fuleren. Nato lahko ponovno sklepamo, da morajo biti končne točke povezav e'_i na nekem ciklu, C'_1 , z natanko 3 dodatnimi točkami na tem ciklu. Ponovimo zgornji postopek za C'_1 . Zaradi končnosti grafa G je število korakov končno, recimo m korakov. Na koncu dobimo cikel C'_m , ki tvori lice dolžine 3 ali pa lice dolžine 6 z natanko eno točko v notranjosti. Oba zaključka sta v nasprotju z našo predpostavko.

□

Spomnimo se, da s $\sigma(G)$ označujemo največjo ciklično povezavno povezanost grafa.

Trditev 4.7. *Vsak fuleren G je ciklično 5-povezavno povezan.*

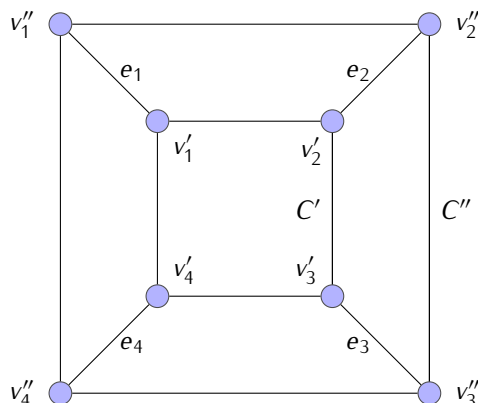
Dokaz: Naj bo fuleren G vložen v ravnino. Očitno je, da $\sigma(G)$ ne sme presegati 5, ker z vzemanjem petkotnega lica grafa G in z odstranitvijo petih povezav, ki povezujejo to lice s preostalimi v grafu G , dobimo dve komponenti, in vsaka od njiju vsebuje cikel. Kombinacija tega dejstva z izrekom 4.6 nam pove, da imamo bodisi $\sigma(G) = 4$ ali $\sigma(G) = 5$.

Recimo, da je $\sigma(G) = 4$, in se osredotočimo na ravninsko upodobitev grafa G . Tako imamo štiri povezave grafa G , e_1, e_2, e_3 in e_4 , z odstranitvijo katerih graf G razpade na dve komponenti, G' in G'' , od katerih vsaka vsebuje cikel. Označimo krajišča povezave e_i na grafu G' z v'_i ter na grafu G'' z v''_i , za $i = 1, 2, 3, 4$. Zaradi 3-povezanosti in kubičnosti grafa G , obstajata dva cikla, C' in C'' , tako da ima vsaka povezava e_i eno krajišče, recimo v'_i , na ciklu C' , drugo krajišče, v''_i , na ciklu C'' , in nobena druga povezava ne povezuje cikla C' s ciklom C'' (glej sliko 4.7). Namreč, vsak od grafov G' in G'' je 2-povezan, in vsak od njiju ima le eno lice, ki ni šestkotnik ali petkotnik. Cikla C' in C'' sta točno na meji ciklov teh posebnih lic na grafih G' in G'' .

Cikla C' in C'' morata biti dolžine najmanj 5, tako mora biti nekaj dodatnih točk na vsakem od njiju. Označimo število teh dodatnih točk na ciklu C' s k' , na ciklu C'' pa s k'' . Ker je graf G kubičen in 3-povezan, morata biti k' (in k''), najmanj 3.

Recimo, da je $k' = 2$. Povezovanje teh dveh dodatnih točk z neko povezavo, bo povzročilo bodisi tricikel oziroma štiricikel, odvisno od njene ustrezne pozicije na ciklu C' . Po drugi strani pa, če te točke niso povezane s povezavo, potem imamo podgraf, ki ga označimo z G'_2 , ki je vsebovan v celoti znotraj cikla C' . Ampak potem, z odstranitvijo dveh dodatnih točk iz cikla C' ločimo G'_2 od preostanka grafa, in to je v nasprotju s 3-povezanostjo grafa G . Zato možnost, da imamo $k' = 2$, ne nastopi.

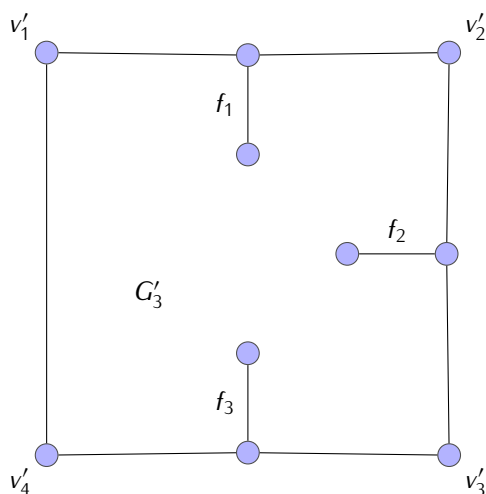
Tako velja $k' + k'' \geq 6$. Po drugi strani pa velja $k' + k'' \leq 8$, ker ni mogoče dati več kot 8 dodatnih



Slika 4.7: Cikla C' in C'' in povezave, ki ju povezujejo.

točk cikloma C' in C'' , dodajanje najmanj treh na vsakega od njiju brez oblikovanja lica grafa G z več kot 6 stranicami.

Recimo, da je $k' = 3$. Premislimo primer podgrafa G'_3 grafa G , ki je prikazan na sliki 4.8. Označimo z $|V'|$ število točk, z $|E'|$ število povezav in s $|F'|$ število lic tega podgrafa.

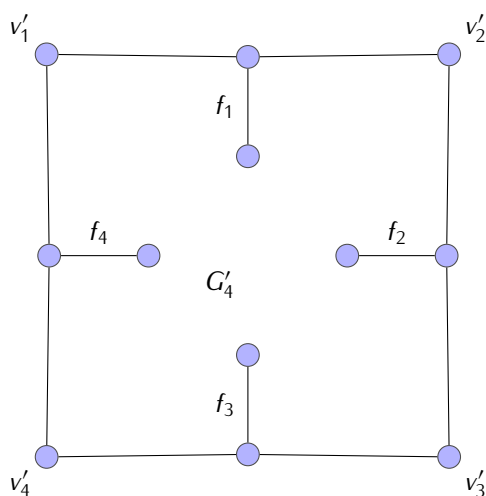


Slika 4.8: Primer $k' = 3$.

Imamo $|V'| = 7 + r$, kjer je r število točk grafa G , ki so znotraj cikla C' . Ker imajo vsi stopnjo 3, dobimo $|E'| = (3r + 17)/2$. Z uporabo Eulerjeve formule 2.36, $|V'| - |E'| + |F'| = 2$, dobimo, $|F'| = (r + 7)/2$, in zato velja $|F'| \geq 4$. Edini način, da imamo $|F'| = 4$, je, da imamo le eno točko grafa G znotraj cikla C' . Zato mora biti ta točka skupno krajišče povezav f_1, f_2 in f_3 , in graf G mora vsebovati vsaj en štiricikel (ali še huje, tricikel v primeru, ko sta dve od treh dodatnih točk cikla C' na isti strani). Zato mora biti r najmanj 3. Toda v tem primeru, bo G'_3 imel vsaj 5 lic, in vsaj eden od njih bo vseboval le točke grafa G ,

ki so znotraj cikla C' . Tako, po odstranitvi povezav f_1 , f_2 in f_3 , dobimo dve komponenti grafa G , in vsaka od njiju vsebuje cikel, kar je v nasprotju z izrekom 4.6. Ker naše sklepanje ni odvisno od tega, kako so dodatne $k' = 3$ točke razdeljene na ciklu C' , lahko sklepamo, da primer, ko imamo $k' = 3$ ni mogoč. Zato mora biti $k' \geq 4$.

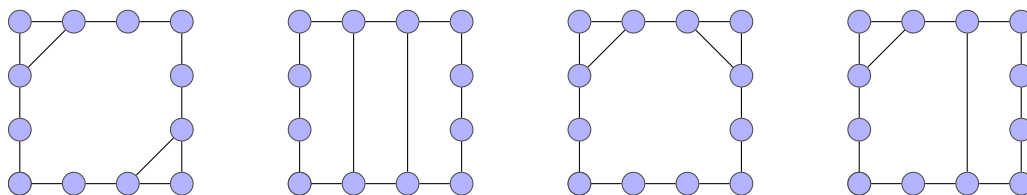
Z uporabo enakega razmišljanja o ciklu C'' , dobimo $k' = k'' = 4$. Osredotočimo se na podgraf G'_4 grafa G , prikazanega na sliki 4.9. Ta podgraf ima štiri točke stopnje 2, štiri dodatne točke stopnje 3, in sodo število točk grafa G , ki so znotraj cikla C' ter ima vsaka stopnjo 3.



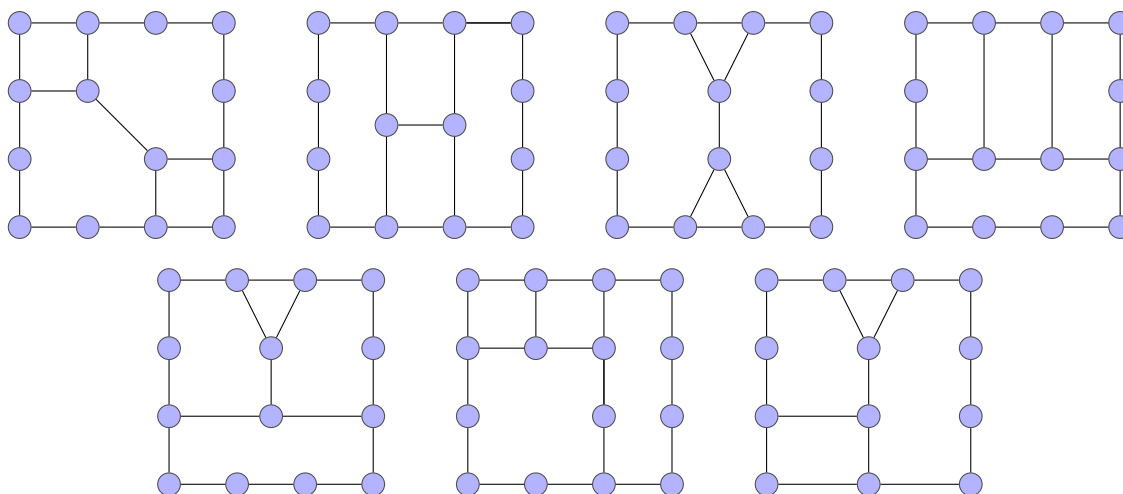
Slika 4.9: Primer $k' = 4$.

Naj zdaj z $|V'|$ označimo število točk, z $|E'|$ število povezav in s $|F'|$ število lic podgraфа G'_4 , in z uporabo Eulerjeve formule, dobimo $8 + r - (3r + 20)/2 + |F'| = 2$, ali $|F'| = (r + 8)/2$. Če vzamemo $r = 0$, potem obstajajo štiri možni načini povezovanja štirih dodatnih točk na ciklu C' , ki upoštevajo ravninskost, 3-regularnost in 3-povezanost grafa G (glej sliko 4.10). (Zaradi večjega pregleda so v slikah 4.10 in 4.11 vse notacije odstranjene. Cikel C' je predstavljen na straneh zunanega kvadrata, in dodatnimi točkami, če obstajajo, s točkami, kjer se dve vrstici srečata.) Očitno je, da vsak od teh štirih načinov ustvari vsaj en trikotnik ali štirikotnik. Zato mora biti r najmanj 2. Ob predpostavki, da je $r = 2$, dobimo eno od sedmih možnosti prikazanih na sliki 4.11. Očitno je, da noben od teh grafov ni podgraf fulerena, tako da možnost, da je $r = 2$, izključimo.

Zato morajo biti vsaj štiri točke grafa G znotraj cikla C' . Ampak v tem primeru velja $|F'| \geq 6$, in vsaj eno od teh lic je v celoti definirano s točkami grafa G znotraj cikla C' . S sklicevanjem na 3-povezanost in 3-regularnost grafa G , vemo da mora obstajati cikel. Recimo, da obstaja cikel C'_1 , ki vsebuje krajišča povezav f_1 , f_2 , f_3 in f_4 . Tako dobimo situacijo podobno tisti, s katero smo začeli, in lahko uporabimo enako



Slika 4.10: Primer $r = 0$.



Slika 4.11: Primer $r = 2$.

razmišljanje za cikel C'_1 . Zaradi omejenosti grafa G , po končnem številu korakov, recimo n , dobimo cikel C'_n , ki bo imel ne več kot 2 točki grafa G v njegovi notranjosti. Ker smo pravkar dokazali, da fuleren ne more vsebovati tak podgraf, iz tega sledi, da $\sigma(G)$ ne mora biti 4. Zato je $\sigma(G) = 5$.

□

Lema 4.8. Število $c - 5$ -prerezov v fulerenu je vsaj dvanajst.

Dokaz: Po trditvi 4.3 vemo, da ima fuleren dvanajst petkotnih lic, tako posledično velja, da ima dvanajst $c - 5$ -prerezov. To so povezave, ki gredo iz petkotnih lic.

□

Poglavje 5

Zaključek

V drugem poglavju smo se spoznali z osnovnimi pojmi teorije grafov in sicer smo preučili nekaj osnovnih definicij, trditev, posledic, primerov in operacij na grafih, ki smo jih potrebovali v tretjem in četrtem poglavju. V tretjem poglavju smo preučevali odstranljive povezave v poljubnem ciklično 4-povezavno povezanem kubičnem grafu. V četrtem poglavju pa smo se osredotočili na posebno družino takih grafov – fullerene, navedli smo njihove osnovne lastnosti, nekaj zgledov, navedli malo zgodovine teh grafov, predvsem pa smo se osredotočili na njihovo ciklično povezavno povezanost.

Literatura

- [1] L.DØWLING ANDERSEN, H. FLEISCHNER, B. JACKSON, *Removable edges in cyclically 4-edge-connected cubic graphs*, *Graphs Comb* 4 (1988), 1-21.
- [2] V. BATAGELI, *Teorija grafov, sprehodi po grafu*, <http://ucilnica.fmf.uni-lj.si/mod/resource/view.php?id=4475>, 2008, Dostopno na spletu 7. april 2011.
- [3] G. FIJAVŽ, *Izbrana poglavja iz matematike*, <http://matematika.fe.uni-lj.si/sola/sandbox/FE/Podiplomski%20studij/Iz%brana%20poglavja%20iz%20matematike%20-%20doktorski%20studij/grafi-osnove%-ipm-fijavz.pdf>, Dostopno na spletu 18. marec 2011.
- [4] S. KLAVŽAR, *Stopnje točk grafov v nalogah : (za konec gremo še v Portorož)*, *Presek* 26 (1998/1999), 72-78.
- [5] T. KRAMBERGER, *Graf*, <http://164.8.132.54/GIS/GIS-SEST0.pdf>, 2008/2009, Dostopno na spletu 18. marec 2011.
- [6] B. LUŽAR, *Injektivna barvanja grafov : diplomsko delo*, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, Ljubljana, 2008.
- [7] T. OBREHT, *Oberwolfachov problem*, http://www-mat.pfmb.uni-mb.si/dodatna_gradiva/kombinatorika/seminar2003%/oberwolfach.pdf, 2004, Dostopno na spletu 18. marec 2011.
- [8] *Mnozice*, <http://www2.arnes.si/~mpavle1/mp/mnozice.html>, Dostopno na spletu 28. marec 2011.
- [9] T. PETEK, *Osnove teorije množic*, <http://www.mp.feri.uni-mb.si/osebne/petek/folije/mat1/mnozice.pdf>, Dostopno na spletu 28. marec 2011.
- [10] P. POTOČNIK, *Deseta lekcija: Drevesa*, <http://www.nauk.si/materials/4188/out/#state=8>, Dostopno na spletu 28. marec 2011.

- [11] P. POTOČNIK, *Zapiski predavanj iz diskretne matematike 1*, <http://www.fmf.uni-lj.si/~potocnik/Ucbeniki/DM-Zapiski2010.pdf>, 2010, Dostopno na spletu 18. marec 2011.
- [12] *Povezanost grafov*, http://www.fmf.uni-lj.si/~skreko/Pouk/ds2/Predavanja/2007-08/Povezanost_2008.pdf, Dostopno na spletu 18. marec 2011.
- [13] J. ŽEROVNIK, *Osnove teorije grafov in diskretne optimizacije*, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, Maribor, 2003.
- [14] *Number of edges of regular graph*, http://www.proofwiki.org/wiki/Number_of_Edges_of_Regular_Graph, Dostopno na spletu 18. marec 2011.
- [15] R.J. WILSON, J.J. WATKINS, *Uvod v teorijo grafov*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1997.
- [16] *Obseg*, http://sl.wikipedia.org/wiki/Obseg_, Dostopno na spletu 13. april 2011.
- [17] *Izomorfizem grafov*, http://wiki.fmf.uni-lj.si/wiki/Izomorfizem_grafov, Dostopno na spletu 5. september 2011.
- [18] T. DOŠLIĆ, *Cyclical edge-connectivity of fullerene graphs and $(k, 6)$ -cages*, J Math Chem 33 (2003), 103-112.
- [19] N. TRDIN, *Fulereni in njihova uporaba*, http://www.google.si/url?sa=t&source=web&cd=5&sqi=2&ved=0CDAQFjAE&url=http%3A%2F%2Fucilnica0910.fmf.uni-lj.si%2Ffile.php%2F16%2Fmoddata%2Fforum%2F109%2F2137%2FNejc_Trdin_-_Fulereni.pdf&rct=j&q=uporaba%20fulerena&ei=xprjTZv2A9HTsgb0n4SUBg&usg=AFQjCNGn86GdMYyDx211cJuClayILa5u4A&cad=rja, 2008, Dostopno na spletu 31. maj 2011.
- [20] R. ERMAN, *Nekaj lastnosti fulerenov*, http://www.google.si/url?sa=t&source=web&cd=1&ved=0CBUQFjAA&url=http%3A%2F%2Fucilnica0910.fmf.uni-lj.si%2Ffile.php%2F16%2Fmoddata%2Fforum%2F109%2F2136%2FRok_Erman_-_Fulereni.pdf&rct=j&q=Nekaj%20lastnosti%20fulerenov&ei=DZzjTcf7JorKtAaDzN3wBQ&usg=AFQjCNGBZBEYoPpzSWdtSTNcs4wRnATZ4Q&cad=rja, 2009, Dostopno na spletu 31. maj 2011.
- [21] M. ČANČULA, P. MURŠIČ, M. POKLINEK, P. KOŽELJ, *Nemogoče razporeditve, poliedri, ploščine in Eulerjeva formula*, <http://mara.pef.upr.si/mars2007/mars2007/EulerjevaFormula.pdf>, 2007, Dostopno na spletu 4. avgust 2011.

- [22] M. ZEMLIČ, *Adsorpcija plinov v ogljikovih nanocevkah*, http://mafija.fmf.uni-lj.si/seminar/files/2001_2002/nanocevke.pdf, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, Ljubljana, 2002, Dostopno na spletu 4. avgust 2011.
- [23] K. KUTNAR, D. MARUŠIČ, *On cyclic edge-connectivity of fullerenes*, *Disc Appl Math* 156 (2008), 1661–1669.
- [24] *Fullerene*, <http://en.wikipedia.org/wiki/Fullerene>, Dostopno na spletu 6. avgust 2011.
- [25] INSITUT DE BIOLOGIE MOLÉCULAIRE ET CELLULAIRE, *Functionalised carbon nanotubes as therapeutic vectors*, http://www-ibmc.u-strasbg.fr/ict/vectorisation/nanotubes_eng.shtml, Dostopno na spletu 6. avgust 2011.
- [26] M. HUMAR, *Ogljikove nanocevke*, <http://www.matjazhumar.com/documents/OgljikoveNanocevke.pdf>, Dostopno na spletu 5. september 2011.