UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Zaključna naloga

Pravična delitev

(Fair Division)

Ime in priimek: Tjaša Krašna
Študijski program: Matematika
Mentor: prof. dr. Štefko Miklavič

Koper, september 2016

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Tjaša KRAŠNA

Naslov zaključne naloge: Pravična delitev

Kraj: Koper

Leto: 2016

Število listov: 40 Število slik: 23 Število tabel: 4

Mentor: prof. dr. Štefko Miklavič

Ključne besede: pravična delitev, metoda deli in izbiraj, metoda osamljenega delivca, metoda osamljenega izbiralca, metoda zadnjega zmanjševalca, metoda zaprtih ponudb, metoda označevanja.

Math. Subj. Class. (2010): 91A05, 91A06, 91B08

Izvleček:
V zaključni nalogi sem predstavila problem pravične delitve. Cilj tega problema je razdeliti množico dobrin S med N igralcev, kjer vsak igralec dobi pravičen del vreden (po njegovem mnenju) vsaj $\frac{1}{N}$ celotne množice S. Najprej sem predstavila osnovne pojme in terminologijo pravične delitve. S pomočjo primerov sem razložila nekaj pomembnejših metod, ki se uporabljajo za pravično delitev dobrin. Najbolj znana neskončna metoda pravične delitve za dva igralca je metoda deli in izbiraj. Kot pove ime metode en igralec deli, drugi izbira. Ker igro pravične delitve lahko igra tudi več igralcev, je metoda deli in izbiraj posplošena na tri ali poljubno število igralcev. Pri tem uporabljamo metodo osamljenega delivca ali metodo osamljenega izbiralca, odvisno od vloge igralcev. Kot zadnjo neskončno metodo pravične delitve sem predstavila metodo zadnjega zmanjševalca, kjer v vsakem krogu igre dobi pravičen delež tisti igralec, ki je zadnji zmanjšal del. V zadnjih dveh poglavjih sem predstavila diskretni metodi pravične delitve. Množica dobrin vsebuje tudi predmete, ki jih ni mogoče fizično deliti, kot so na primer nakit, hiša, posestvo, itd. Metoda zaprtih ponudb reši problem delitve dediščine. Ta metoda pravično razdeli dediščino med manjše število dedičev. Na koncu so vsi prepričani, da so dobili enakovreden delež. Poleg lastnine pa je v igri tudi denar, s katerim poravnajo razlike. Pri metodi označevanja igralci ne potrebujejo svojega denarja, ampak razdelijo niz predmetov z uporabo oznak. Metoda zagotavlja, da vsak igralec dobi eno izmed svojih ponudb (en segment med dvema zaporednima oznakama). Večina snovi je povzete po [P. Tannenbaum, Excursion in modern Mathematics. Springer - Verlag, Five edition (2004), 87-135].

Key words documentation

Name and SURNAME: Tjaša KRAŠNA

Title of the final project paper: Fair Division

Place: Koper

Year: 2016

Number of pages: 40 Number of figures: 23 Number of tables: 4

Mentor: Prof. Štefko Miklavič, PhD

Keywords: fair division, divider-chooser method, lone-divider method, lone-chooser method, last-diminisher method, method of sealed bids, method of markers.

Math. Subj. Class. (2010): 91A05, 91A06, 91B08

Abstract: In the final project paper I present the problem of fair division. The goal of this problem is to divide the set od goods S between N players, where each player gets his fair share, worth (by his/her opinion) at least $\frac{1}{N}$th of the total value of S. First, I presented the basic concepts and teminology of fair-division game. By using examples, I explained some of the most important methods used for fair-division of goods. The best known continuous fair-division method involving just two players is the divider-chooser method. As this name suggests, one player divides, the other picks. Because the fair-division game can also be played with more than two players is the divider-chooser method generalized on three or N players, where we use the lone-divider method or the lone-chooser method, depending on the player's role. As final continuous fair-division method I presented the last-diminisher method, when the fair share in each round goes to the player, who diminished his part last. In the final two chapters, I introduced two discrete fair-division methods. The set S is also made up of objects that are indivisible like jewelry, houses, property, etc. To solve the problem of inheritance we use the method of sealed bids, which fairly divide the amount of inheritance among a small number od heirs. At the end, all heirs believe that they got a fair share. In addition to the properties, inheritance also includes money, which is used to settle the differences. When the method of markers is used, the players do not need their money. Instead, they divide the string of objects using markers. The method of markers guarantee that each player ends up with one of his or her bid segments (a section between two consecutive markers). Most of the material is taken from [P. Tannenbaum, Excursion in modern Mathematics. Springer - Verlag, Five edition (2004), 87-135].

Zahvala

Najprej se iskreno zahvaljujem mentorju, prof. dr. Štefku Miklaviču za vso potrpežljivost, pomoč in nasvete pri izdelavi zaključne naloge.
Posebna zahvala gre tudi mojim staršem, ki so me skozi vsa študijska leta spodbujali in mi pomagali doseči želeni cilj. Zahvalila bi se prijateljem in sošolcem za vso pomoč in podporo.

Kazalo vsebine

1 Uvod **1**

2 Pravična delitev **3**
2.1 Kaj je pravična delitev? 4
2.2 Vrste iger pravičnih delitev 5

3 Metoda deli in izbiraj **6**

4 Metoda osamljenega delivca **8**
4.1 Steinhausova metoda osamljenega delivca za tri igralce 8
4.2 Metoda osamljenega delivca za poljubno število igralcev 10

5 Metoda osamljenega izbiralca **13**
5.1 Metoda osamljenega izbiralca za tri igralce 13
5.2 Metoda osamljenega izbiralca za poljubno število igralcev 15

6 Metoda zadnjega zmanjševalca **17**

7 Metoda zaprtih ponudb **24**

8 Metoda označevanja **27**

9 Zaključek **31**

10 Literatura **32**

Kazalo tabel

1 Vrednostni sistem igralcev. 4
2 Metoda osamljenega delivca. 10
3 Tabela ponudb. 24
4 Tabela pravičnih deležev. 25

Kazalo slik

1 Vrednostni sistem igralcev. 6
2 Razrez torte. 7
3 Steinhauseva metoda. 9
4 Metoda osamljenega izbiralca. 13
5 Vrednostni sistem treh igralcev. 14
6 Prva delitev. 14
7 Druga delitev. 15
8 Vrednostni sistem in izbira igralca B. 15
9 Metoda osamljenega izbiralca za 4 igralce. 16
10 Prvi upravičenec. 17
11 Zmanjševanje C-dela. 18
12 Delitev S med 6 igralcev. 19
13 Delitev S med 5 igralcev. 20
14 Delitev S med 4 igralce. 21
15 Delitev S med 3 igralce. 22
16 Delitev S med 2 igralca. 23
17 Pravično razdeljen otok z metodo zadnjega zmanjševalca. 23
18 Niz predmetov. 27
19 Ponudbe igralcev. 28
20 Razdelitev prvega segmenta. 28
21 Razdelitev drugega segmenta. 28
22 Razdelitev zadnjega segmenta. 29
23 Niz ostankov. 29

Seznam kratic

itd.	in tako dalje
npr.	na primer
tj.	to je

1 Uvod

S pojmom delitve se prvič srečamo že kot otroci, ko delimo igrače in prosti čas s prijatelji. Ko postajamo starejši, se vse več srečujemo z abstraktnim pojmom delitve, kot je delitev obveznosti, odgovornosti ali celo krivice. Delitev dobrih stvari, kot so hrana, igrače, ljubezen in delitev slabih stvari, kot je krivica, odgovornost, opravila med seboj, je najboljša socialna človeška komunikacija.
Stoletja vojn in osvajanja so svet pripeljali na rob uničenja. Z današnjimi znanji in napredno tehnologijo smo sposobni narediti nepopravljivo škodo planetu in s tem tudi človeštvu. S tekmovalnostjo in sebičnostjo prinašamo toliko zla, da se svet razdeljuje na skrajno bogate in skrajno revne. Zato moramo najprej spremeniti naše mišljenje, medsebojne odnose in ravnanje. Pravična delitev dobrin uporablja um in logiko namesto sebičnosti in ustrahovanja. Izhaja iz razumevanja, da je človeštvo celota in da dobrine pripadajo celotnemu človeštvu, ki je zanje tudi odgovorno. Elementi, ki jih združuje princip pravične delitve dobrin, so: pravičnost, solidarnost, sodelovanje, medsebojno razumevanje in ljubezen do drugega. To je eden velikih dosežkov na socialnem področju.
Pravična delitev vsebuje tudi dosežke preproste matematike. S prvim matematičnim pojmom o pravični delitvi se srečamo v tretjem razredu osnovne šole. Najbolj tipičen problem, ki nam ga takrat predstavijo je: "Imamo 20 bombonov, ki jih razdelimo med štiri otroke, da dobi vsak enako število bombonov." Tipičen odgovor na to vprašanje je: "Vsak otrok dobi 5 bombonov." V zaključni nalogi bomo spoznali, da to ni nujno tipičen primer pravične delitve. Na primer imamo različne sladkarije, kot so: lizike, čokoladice, gumijaste bombone, trde bombone, itd. Vsak otrok ima različen okus, lahko so nekomu najbolj všeč lizike, drugemu čokoladice, itd. Vsak otrok bo seveda dal prednost svoji najljubši sladkariji. Kaj v tem primeru pomeni pravična delitev?
V zaključni nalogi je predstavljenih nekaj osnovnih pojmov pravične delitve. V začetnem poglavju se snov navezuje na terminologijo pravične delitve. S problemom pravične delitve se ukvarjajo že več desetletij. Konec leta 1930 je matematik Steinhaus predstavil njegovo najbolj znano raziskavo Ham Sandwich Theorem. Raziskavo enostavneje razložimo na naslednji način. Imamo sendvič s tremi sestavinami, npr.: kruh, šunka in sir, potem iščemo način, da z enim samim rezom razrežemo sendvič na dva dela tako, da je v vsaki polovici enaka količina kruha, šunke in sira. Izrek ima lep teoretični rezul-

tat, v praksi pa nimamo niti najmanjšega namiga kako to storiti, da bi dobili pravično polovico sendviča. Zaradi omejitev tega izreka, je Stainhause začel razmišljati drugače. Praktično je pristopil k problemu kako razdeliti stvari enakovredno. To je privedlo do temeljev teorije o pravični delitvi, kot jo poznamo danes.
Konec leta 1940 je Steinhaus skupaj s svojima študentoma Banachom in Knasterjem razvil pomembnejše metode pravične delitve, ki jih obravnavamo v zaključni nalogi.
Bralec bo podrobnejšo razlago in dodatne naloge našel v [1].

2 Pravična delitev

S preprostim vprašanjem, kako razdelimo predmet ali množico predmetov med 2 ali več oseb, da vsaka oseba prejme pravičen delež, pridemo do osnovnega problema pravične delitve. Ta problem lahko rešimo s pomočjo osnovnih matematičnih idej.

Nekaj osnovnih pojmov in terminologije pravične delitve si bomo predstavili v okviru igre z igralci, cilji, pravili in strategijami. Tako kot vse igre, ima tudi igra pravične delitve osnovne predmete:

- Množico dobrin, ki so deljive. Dobrine so navadno oprijemljivi predmeti, kot so sladkarije, torta, pica, nakit, slike, avtomobili, hiše, posestva, itd. Splošneje so dobrine vsi predmeti z neko vrednostjo. V bolj ezoteričnih primerih, so dobrine neoprimeljive (npr. pravice, licence, itd.).
  Množico dobrin, ki jih delimo, označimo z S.

- Množico igralcev, ki si razdelijo množico S. Igralce označimo s $P_1, P_2, \ldots, P_N$. Navadno so igralci osebe, lahko pa so tudi države, etične ali politične skupine in inštitucije. Najpomembnejša naloga igralcev je, da imajo vsak svoj vrednostni sistem, tj. sposobnost določiti vrednost množice S in vrednost njenih podmnožic $s_1, s_2, \ldots$

Cilj igre pravične delitve je končati igro s pravično delitvijo množice S, tako da vsak igralec $P_1, P_2, \ldots, P_N$ dobi pravičen del $s_1, s_2, \ldots, s_N$ množice S. Za izpolnitev cilja potrebujemo še tako imenovane metode pravičnih delitev. Metoda pravične delitve je množica pravil, s katerimi definiramo potek igre. To pa pomeni, da igra pravične delitve ne vsebuje samo množice dobrin S in množice igralcev, ampak tudi metodo s katero dokončamo igro.
Kot vsaka igra, ima tudi igra pravičnih delitev naslednje predpostavke:

- *Sodelovanje* - igralci so pripravljeni sodelovati in sprejeti pravila igre kot zavezujoča. Pravila igre zagotavljajo, da je po končnem številu igralčevih potez množica S pravično razdeljena. V igri ne manipulirajo in ni sodnikov, so samo igralci in pravila.

- *Racionalnost* - igralci igrajo igro racionalno, njihov vrednostni sistem ustreza osnovnim zakonom aritmetike.
- *Zasebnost* - igralci nimajo informacij kakšne poteze bodo nasprotniki naredili in kaj jim je všeč.
- *Enakovrednost* - vsak igralec ima pravico do enakovrednega dela, to pomeni, da dva igralca imata pravico do polovice množice S, trije igralci do tretjine množice S, itd.

Kadar so vse predpostavke izpolnjene, metoda pravične delitve vsakemu igralcu zagotavlja pravičen del množice S.

2.1 Kaj je pravična delitev?

Naj bo s podmnožica množice S in igralec P eden od N igralcev. Podmnožica s je pravičen del za igralca P, če je po njegovem mnenju vredna vsaj $\frac{1}{N}$ celotne vrednosti množice S. Vsak igralec v igri dodeli vrednost vsaki podmnožici s množice S.
Koncept pravične delitve je relativen, saj kar je za igralca P pravična delitev, ni nujno tudi pravična delitev za igralca Q. Lahko se tudi zgodi, da pravičen del igralca P ni njegov najboljši del, zato je težko ugotoviti kaj se šteje za pravičen del.

Primer 2.1. Recimo, da štirje igralci A, B, C in D igrajo igro pravične delitve. Množico S smo razdelili na štiri podmnožice $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S$ (podmnožice niso nujno enake velikosti). Vsak igralec najprej poda vrednosti za vsako podmožico, kot je prikazano v tabeli:

Tabela 1: Vrednostni sistem igralcev.

Igralci \ Podmnožica	s_1	s_2	s_3	s_4
A	30%	24%	20%	26%
B	35%	25%	20%	20%
C	25%	15%	40%	20%
D	20%	20%	20%	40%

Ker imamo štiri igralce, ima vsak pravico do 25% množice S.
Torej za igralca A sta pravični podmnožici s_1 in s_4, za igralca B s_1 in s_2, za igralca C s_1 in s_3, za igralca D pa samo podmnožica s_4.

2.2 Vrste iger pravičnih delitev

Igre pravične delitve so razdeljene v enega izmed treh tipov odvisno od množice S:

- *Neskončne igre*: v neskončni igri pravične delitve je množica S deljiva na neskončno različnih načinov. Dele lahko za poljubne majhne količine povečamo ali zmanjšamo. Primeri neskončnih iger pravične delitve so delitev torte, pice, zemljišč, itd.

- *Diskretne igre*: igra pravične delitve je diskretna, kadar je množica S sestavljena iz nedeljivih predmetov, kot so nakit, hiša, avtomobili, itd.

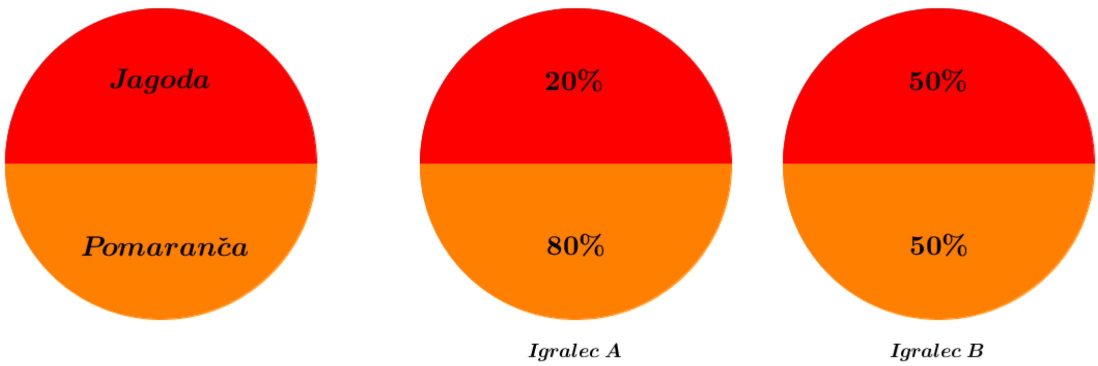
- *Mešana igra*: mešana igra pravične delitve je igra, ki vsebuje tako neskončne kot diskretne komponente.

Glede na zastavljeni problem razlikujemo tudi metode pravične delitve. Diskretno metodo uporabljamo, kadar množica S vsebuje nedeljive diskretne predmete. Neskončno metodo uporabljamo, ko lahko množico S razdelimo na neskončno načinov. Pri mešani metodi pa uporabimo diskretno in neskončno metodo posamično.

3 Metoda deli in izbiraj

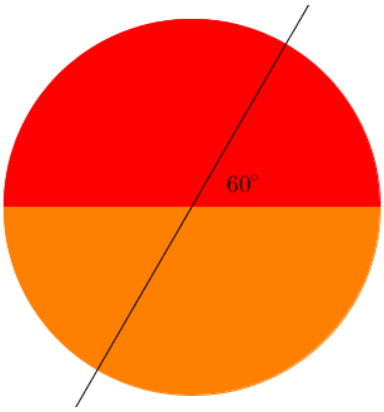
Metoda deli in izbiraj je najbolj znana neskončna metoda pravične delitve za dva igralca. Angleško ime metode je The Divider-Chooser Method. Preprosto povedano en igralec deli, drugi izbira. Predmet, ki ga bomo delili označimo z S. Prvi igralec, delivec, razreže torto (torta je metafora za vsako neskončno množico S) na dva kosa. Drugi igralec pa nato izbere njemu najboljši kos. Ko drugi igralec izbere kos, preostali kos dobi delivec. Če je igra odigrana pravilno, metoda zagotavlja, da oba igralca dobita kos za katerega verjameta, da je vreden vsaj $\frac{1}{2}$ celotne torte. Delivec je prepričan, da je razrezal torto na dva enaka kosa, tisti, ki izbira pa lahko izbere kos, ki je zanj vreden več kot polovico S. To pa ni nič v protislovju, saj ima vsak igralec svoj vrednostni sistem.

Primer 3.1. Igralca A in B se odločita razdeliti pomarančno-jagodno torto. Predpostavimo, da se igralca ne poznata, torej ne vesta kaj je komu všeč in kaj ni. Igralec A ima pomaranče štirikrat raje kot jagode, igralcu B pa so jagode in pomaranče enako všeč. Torto bosta razdelila po metodi deli in izbiraj.



Slika 1: Vrednostni sistem igralcev.

Igralec B se javi za delivca. Torto razreže na dva enaka kosa - popolnoma razumski rez glede na njegov vrednostni sistem. Vsak kos je vreden polovico celotne vrednosti torte.



Slika 2: Razrez torte.

Na vrsti je igralec A, ki izbere kos. Ker ima igralec A štirikrat raje pomaranče kot jagode, izbere kos, ki ima večji pomarančni del. Igralec B dobi kos, ki je zanj vreden natanko $\frac{1}{2}$ celotne torte, igralec A pa je izbral kos, ki je zanj vreden 60% torte, torej več kot $\frac{1}{2}$ torte.

Primer prikazuje zakaj je bolje izbirati kot deliti. Delivec je prepričan, da sta kosa vredna natanko polovico torte, drugi igralec pa s svojim vrednostnim sistemom lahko izbere kos, ki je vreden več kot $\frac{1}{2}$ celotne torte.
Dokler metoda pravične delitve obravnava vse igralce enakovredno, imata oba igralca enake možnosti za izbiranje. Dogovorita se lahko z metom kovanca ali kocke.

4 Metoda osamljenega delivca

Angleško ime metode je The Lone-Divider Method. Kot bomo videli v nadaljevanju poglavja je metoda dobila tako ime, ker v igri samo en igralec deli, vsi ostali igralci pa izbirajo. Matematik Steinhaus je leta 1943 razširil metodo pravične delitve deli in izbiraj za tri igralce. To je bil prvi pomembni dosežek pravične delitve. Leta 1967 je Harold Kuhn, matematiki na univerzi Princeton, posplošil Steinhausovo razširitev metode za poljubno število igralcev.

4.1 Steinhausova metoda osamljenega delivca za tri igralce

Uvod. Enemu igralcu je dodeljena vloga delivca, ostala dva igralca pa izbirata. Delivca označimo z D, igralca, ki izbirata pa s C_1 in C_2. Vloga delivca je podeljena naključno.

Korak 1. **Delitev**: Delivec D razreže torto na tri enake kose (s_1, s_2, s_3). Vsak kos je zanj vreden tretjino celotne torte, saj zaenkrat še ne ve kateri kos bo dobil.

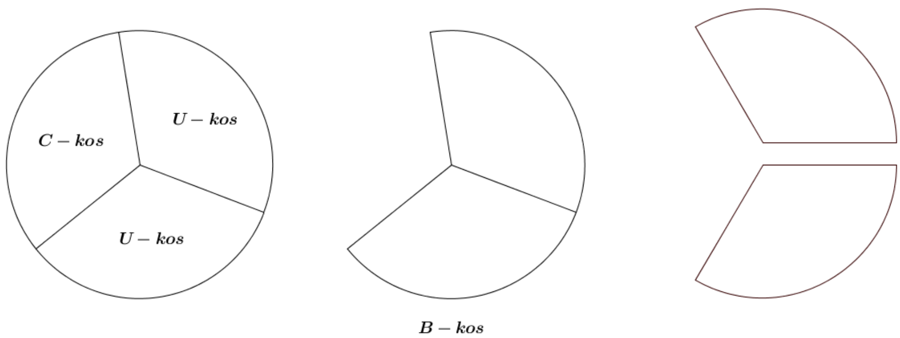
Korak 2. **Ponudba**: Na vrsti sta igralca, ki izbirata. Igralec C_1 napiše na list papirja kateri kos je zanj najboljši. Neodvisno od C_1 naredi enako tudi igralec C_2. To sta ponudbi igralcev, ki izbirata. Zaradi zasebnosti je pomembno, da se ponudbi izvedeta neodvisno. Igralec C_1 ne vidi ponudbe igralca C_2 in obratno. Vsak igralec, ki izbira, mora napisati ponudbo za kos, ki je zanj vreden tretjino ali več celotne torte. Lahko napiše ponudbo za en, dva ali celo vse tri kose. Šele ko sta obe ponudbi napisani, ju pregledamo.

Korak 3. **Razdelitev**: Kdo dobi kateri kos, je odvisno od ponudbe. Kose razdelimo v dve množici: C-kosi in U-kosi. C-kosi so kosi, ki so napisani v eni ali v obeh ponudbah, U-kosi pa so kosi, ki jih ni nihče izbral.

Glede na število kosov v množici C-kosov ločimo dva primera:

- Množico C-kosov, ki vsebuje dva ali več kosov. Vsakemu igralcu, ki je izbiral damo kos, za katerega je dal ponudbo. Delivec dobi zadnji kos. Tako vsak igralec dobi pravičen kos torte. Če niso zadovoljni s svojim kosom, jih lahko na koncu poljubno menjajo med seboj.

- Množico C-kosov, ki vsebuje samo en kos, ostala dva kosa sta v množici U-kosov. To pomeni, da sta oba igralca napisala ponudbo za isti kos. Torej vzamemo en kos iz množice U-kosov in ga damo delivcu, saj so zanj vsi kosi enakovredni. Ostali kos množice U-kosov združimo s kosom iz množice C-kosov, da dobimo en kos, B-kos. Delivčev U-kos je za igralca, ki izbirata, vreden manj kot $\frac{1}{3}$, B-kos pa je vreden več kot $\frac{2}{3}$ celotne torte. Zato B-kos igralca C_1 in C_2 razdelita po metodi deli in izbiraj.



Slika 3: Steinhauseva metoda.

Primer 4.1. Trije prijatelji bi radi pravično razdelili torto z metodo osamljenega delivca. Igralce naključno označimo z D, C_1 in C_2. Ker imamo tri igralce, mora biti vsak kos vreden vsaj $33\frac{1}{3}\%$ celotne torte. Igralec D razdeli torto na tri enake kose (s_1, s_2, s_3), igralca C_1 in C_2 pa napišeta naslednje ponudbe:

a) C_1: $\{s_2, s_3\}$
C_2: $\{s_1\}$
Na podlagi ponudbe vidimo, da so vsi kosi v množici C-kosov, množica U-kosov pa je prazna. Igralec C_2 je edini dal ponudbo za kos s_1, torej dobi kos s_1. Za igralca C_1 sta kosa s_2 in s_3 vredna vsaj $33\frac{1}{3}\%$ celotne torte. Izbere tistega, ki mu je vreden več, ostalega dobi delivec D. Recimo, da igralec C_2 izbere kos s_3. Delivec dobi kos s_2. Tako so dobili vsak svoj pravičen kos.

b) C_1: $\{s_1\}$
C_2: $\{s_2\}$
Množica C-kosov vsebuje kosa s_1 in s_2, množica U-kosov pa ima en kos s_3. Ker za kos s_3 ni bilo ponudbe, ga dobi delivec D, saj so njemu vsi trije kosi enako vredni. Igralec C_1 dobi kos s_1 in igralec C_2 pa kos s_2.

c) C_1: $\{s_1\}$
C_2: $\{s_1\}$
V tem primeru oba igralca napišeta ponudbo za kos s_1. Torej s_1 je v množici C-kosov, kosa s_2 in s_3 pa v množici U-kosov. Izberemo en kos iz množice U-kosov in ga damo delivcu. Recimo, da delivec D dobi kos s_2. Kosa s_1 in s_3 združimo v en kos, dobimo B-kos $s_1 + s_3$. Igralca C_1 in C_2 si B-kos razdelita po metodi deli in izbiraj. Tako vsak dobi pravičen kos torte.

4.2 Metoda osamljenega delivca za poljubno število igralcev

V igri z N igralci, je delivec izbran naključno, ostalih $N-1$ igralcev pa izbira. Igro začne delivec, ki množico S razdeli na N delov. Igralci, ki izbirajo, pa napišejo ponudbo neodvisno od ostalih. Kadar so ponudbe znane, imamo dva primera:

1. Če igralci, ki izbirajo, dajo ponudbo za različne dele, dobi vsak igralec izbrani del, delivec pa tisti del, ki ostane. Na koncu si dele lahko poljubno zamenjajo.

2. Lahko se zgodi, da dva igralca napišeta ponudbo za isti del ali trije igralci za dva dela ali k igralcev za manj kot k istih delov. Najprej iz igre začasno umaknemo dele, ki si jih je izbralo več igralcev. Prav tako začasno izključimo igralce, ki so dali ponudbe za iste dele. Nato so vsak izmed ostalih igralcev in delivec deležni pravičnega dela izmed ostalih delov, ki niso skupni. Dele, ki smo jih začasno umaknili iz igre, združimo v novo množico S in postopek še enkrat ponovimo.

Primer 4.2. Štirje igralci bi radi razdelili parcelo S z metodo osamljenega delivca. Delivec na zemljevidu razdeli parcelo na štiri manjše parcele (s_1, s_2, s_3, s_4). Ker imamo štiri igralce, mora biti pravičen del parcele vreden za vsakega igralca vsaj 25%. V spodnji tabeli je prikazan vrednostni sistem igralcev:

Tabela 2: Metoda osamljenega delivca.

	s_1	s_2	s_3	s_4
D	25%	25%	25%	25%
C_1	10%	50%	30%	10%
C_2	25%	40%	15%	20%
C_3	15%	30%	20%	35%

Igralci, ki izbirajo dajo naslednje ponudbe:
C_1: $\{s_2, s_3\}$
C_2: $\{s_1, s_2\}$
C_3: $\{s_2, s_4\}$
Ker so igralci dali ponude za vse dele, najprej pogledamo kateri del je za posameznega igralca največ vreden. Igralca C_1 in C_2 bi najraje imela del s_2, igralec C_3 pa del s_4. Torej igralec C_3 dobi del s_4. Ker je del s_2 za igralca C_1 vreden 50%, za igralca C_2 pa 40%, ga dobi C_1. Igralec C_2 dobi torej del s_1, ki ni njegov najboljši del, je pa zanj pravičen del in na koncu delivec dobi del s_3. Tako smo pravično razdelili parcelo S med štiri igralce.

Primer 4.3. Šest igralcev bo pravično razdelilo torto z metodo osamljenega delivca. Torej imamo delivca D in pet igralcev C_1, C_2, C_3, C_4 in C_5, ki izbirajo. Delivec najprej razreže torto na šest kosov s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 in s_6. Nato igralci C_1, C_2, C_3, C_4 in C_5 napišejo naslednje ponudbe:
C_1: $\{s_2, s_3, s_5\}$
C_2: $\{s_1, s_5, s_6\}$
C_3: $\{s_3, s_5, s_6\}$
C_4: $\{s_2, s_3\}$
C_5: $\{s_3\}$
Zdaj lahko kose pravično razdelimo med igralce. Igralec C_5 dobi kos s_3 in posledično nato pripada s_2 igralcu C_4, s_5 igralcu C_1, s_6 igralcu C_3 in s_1 igralcu C_2. Na koncu ostane še kos s_4, ki ga dobi delivec D. Torto smo tako pravično razdelili med šest igralcev.

Primer 4.4. Šest igralcev razdeli torto z metodo osamljenega delivca. Delivec razreže torto na šest kosov $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)$. Za vsakega igralca mora biti pravičen kos torte vreden vsaj $16\frac{2}{3}\%$. Igralci dajo naslednje ponudbe:
C_1: $\{s_1\}$
C_2: $\{s_2, s_3\}$
C_3: $\{s_4, s_5\}$
C_4: $\{s_4, s_5\}$
C_5: $\{s_1\}$
Opazimo, da sta igralca C_1 in C_5 dala ponudbo za isti kos s_1 ter igralca C_3 in C_4 sta dala ponudbo za kosa s_4, s_5. Zato iz igre začasno umaknemo kose s_1, s_4 in s_5. Prav tako začasno izključimo igralce C_1, C_3, C_4 in C_5. Igro nadaljujemo z igralcem C_2 in delivcem D. Noben igralec, ki izbira, ni dal ponudbe za kos s_6, zato ga dobi delivec. Brez škode za splošnost lahko igralec C_2 dobi kos s_3, tako nam ostane še kos s_2. V igro nazaj vključimo igralce in kose, ki smo jih prej začasno izključili. Kose s_1, s_2, s_4, s_5

združimo v novo torto. Zdaj imamo v igri štiri igralce, torej mora biti pravičen kos za vsakega igralca vreden vsaj 25%. Ponudbe igralcev so naslednje:
C_1: $\{s_1\}$
C_3: $\{s_4\}$
C_4: $\{s_5\}$
C_5: $\{s_1, s_2\}$.
Igralec C_1 dobi kos s_1, posledično dobi igralec C_5 kos s_2. Igralec C_3 dobi kos s_4 in igralec C_4 dobi kos s_5. Tako smo torto pravično razdelili med šest igralcev.

5 Metoda osamljenega izbiralca

Metoda osamljenega igralca ali angleško The Lone-Chooser Method je posplošitev metode deli in izbiraj, kjer imamo enega igralca, ki izbira, ostali igralci pa so delivci. Matematik Arlington M. Fink na Iowa State University je prvi predlagal to metodo.

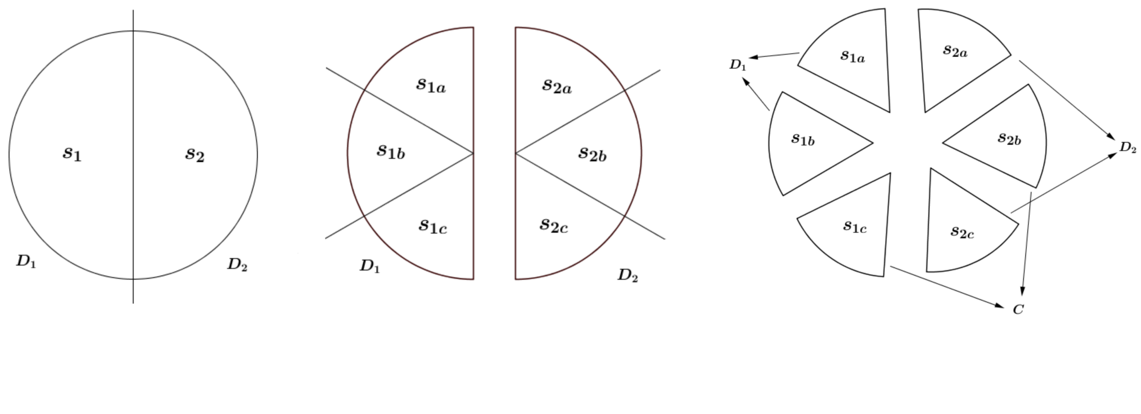
5.1 Metoda osamljenega izbiralca za tri igralce

Uvod. V igri sta dva igralca delivca D_1 in D_2 ter igralec C, ki izbira. Kdo ima kakšno vlogo, določimo naključno.

Korak 1. **Delitev**: Igralca D_1 in D_2 z metodo deli in izbiraj razdelita množico S na dva pravična dela. Recimo, da igralec D_1 dobi del s_1 in igralec D_2 dobi del s_2.

Korak 2. **Ponovna delitev**: Vsak delivec razdeli njegov del na tri manjše dele. D_1 razdeli s_1 na tri dele: s_{1a}, s_{1b} in s_{1c}. Prav tako D_2 razdeli s_2 na tri dele: s_{2a}, s_{2b} in s_{2c}.

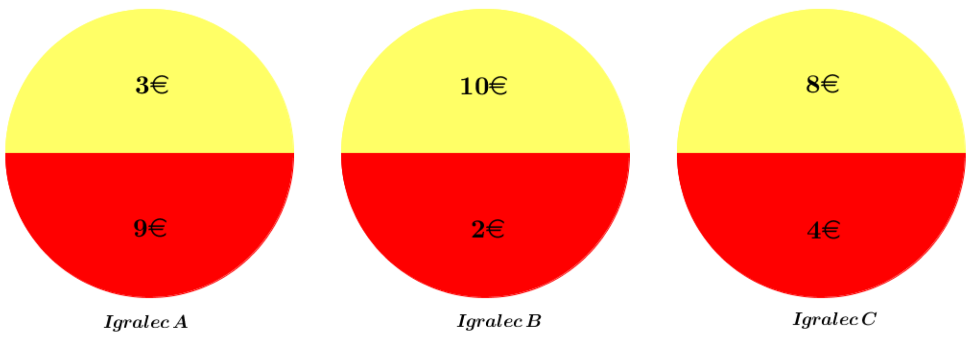
Korak 3. **Izbira**: Na vrsti je igralec C, ki izbere en del delivca D_1 in en del delivca D_2. Izbrana dela, sta igralčev končni del, delivec D_1 obdrži ostala dva dela dela s_1, delivec D_2 pa ostala dela dela s_2.



Slika 4: Metoda osamljenega izbiralca.

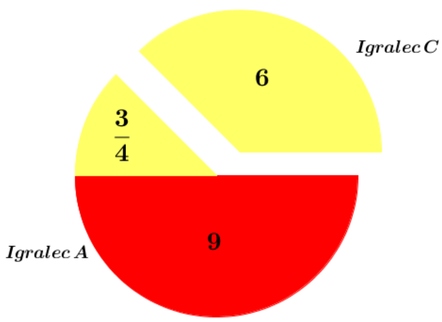
Ta delitev je pravična delitev, saj ima igralec D_1 na koncu $\frac{2}{3}$ dela s_1. Igralcu D_1 je bil del s_1 vreden vsaj $\frac{1}{2}$ celotne množice S, torej je dobil vsaj $\frac{1}{3}$ množice S. Podobno velja tudi za igralca D_2. Ne vemo pa koliko sta dela s_1 in s_2 vredna igralcu C, vendar to ni pomembno. Recimo, da je del s_1 igralcu C vreden $x\%$ in del s_2 $(100 - x)\%$. Po delitvi s_1 in s_2 na tri manjše dele, igralec C izbere po en del. Torej en del dela s_1 je igralcu C vreden vsaj $\frac{x}{3}\%$, en del od s_2 pa vsaj $\frac{100-x}{3}\%$. V vsakem primeru torej igralec C dobi del, ki je vreden vsaj $\frac{x}{3} + \frac{100-x}{3} = \frac{100}{3}\%$. Delitev bo vedno pravična ne glede na to koliko sta dela vredna igralcu C.

Primer 5.1. Trije igralci A, B, C bi radi razdelili vanilijevo-jagodno torto vredno 12 denarnih enot z metodo osamljenega izbiralca. Met kocke določi, da sta igralca A in C delivca in igralec B izbira. Ker je igralec C vrgel večje število pik na kocki kot igralec A, bo prvi razrezal torto na dva enaka kosa.



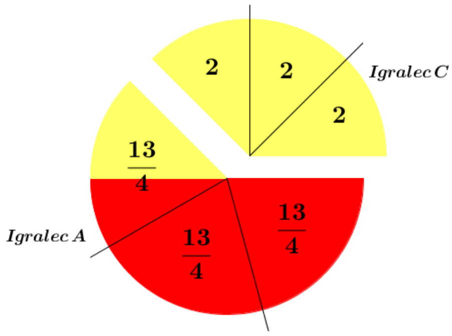
Slika 5: Vrednostni sistem treh igralcev.

Korak 1: Igralec C razdeli torto na dva enaka kosa glede na njegov vrednostni sistem, igralec A izbere večji kos.



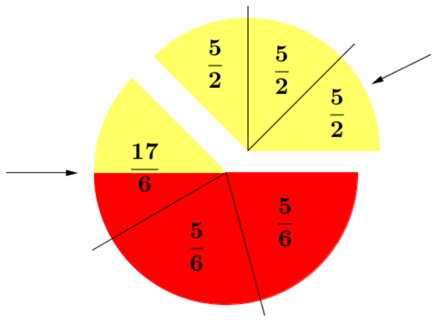
Slika 6: Prva delitev.

Korak 2: Igralca A in C nato razdelita vsak svoj kos na tri manjše kose. Opazimo, da kosi niso enake velikosti in enakih vrednosti.



Slika 7: Druga delitev.

Korak 3: Na vrsti je igralec B, ki izbere en izmed treh kosov igralca A in en kos igralca C.



Slika 8: Vrednostni sistem in izbira igralca B.

Za igralca B je končni kos vreden $5\frac{1}{3}$ denarnih enot, to je zanj pravičen kos, saj je vreden več kot 4 denarne enote. Igralcu A ostane kos vreden $6\frac{1}{2}$ denarnih enot, igralcu C pa kos vreden 4 denarne enote. Tako so vsi dobili pravičen kos torte.

5.2 Metoda osamljenega izbiralca za poljubno število igralcev

V igri z N igralci en igralec izbira, označimo ga s C, ostalih $N-1$ igralcev pa ima vlogo delivca, označimo jih z $D_1, D_2, \ldots, D_{N-1}$. Vloge igralcem določimo naključno. Metoda temelji na matematični indukciji, če igro lahko odigrajo trije igralci, jo lahko odigrajo tudi štirje, če jo lahko odigrajo štirje, jih lahko odigra tudi pet, itd. Če imamo v igri N igralcev predpostavimo, da lahko uporabimo metodo za $N-1$ igralcev.

Korak 1: Delivci $D_1, D_2, \ldots, D_{N-1}$ pravično razdelijo množico S na $N-1$ delov. Za $N-1$

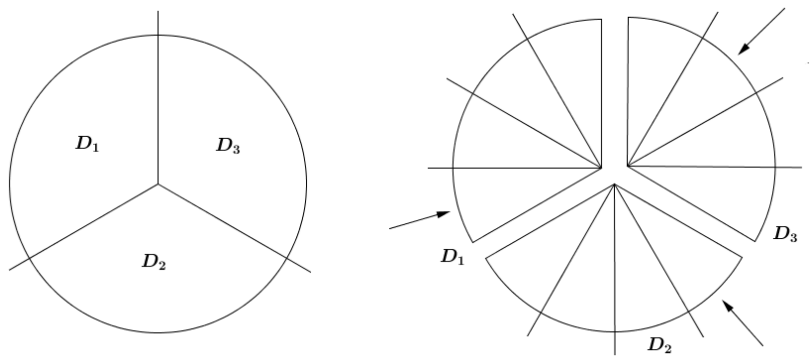
igralcev je to pravična delitev, saj vsak dobi del vreden vsaj $\frac{1}{N-1}$ celotne množice S.

Korak 2: Vsak delivec razdeli svoj del na N manjših delov.

Korak 3: Na vrsti je igralec C, ki izbere po en del izmed vsakega delivca; en del od D_1, en del od D_2, $\ldots$, en del od D_{N-1}. Na koncu ima igralec C $N-1$ delov, ki skupno dajo končni del, vsakemu delivcu tudi ostane $N-1$ delov.

Če je igra odigrana pošteno, metoda zagotavlja, da vsak igralec dobi pravičen del.

Primer 5.2. Štirje igralci bi radi pravično razdelili jagodno torto z metodo osamljenega izbiralca. Torej mora vsak igralec na koncu igre dobiti kos, ki je zanj vreden vsaj 25% celotne torte. V poglavju 5.1 smo pokazali, da z metodo osamljenega izbiralca pravično razdelimo torto med tri igralce. Ker metoda temelji na matematični indukciji, lahko z metodo pravično razdelimo torto tudi med štiri igralce.
Torej imamo tri delivce D_1, D_2, D_3 in igralca C, ki izbira. Torto pravično razdelimo med tri delivce tako, da vsak dobi kos, ki je zanj vreden vsaj $33\frac{1}{3}\%$.
Vsak delivec razdeli kos na štiri manjše enakovredne kose (vsak kos vreden vsaj $8\frac{1}{3}\%$).
Na vrsti je igralec C, ki izbere en kos igralca D_1, en kos igralca D_2 in en kos igralca D_3.



Slika 9: Metoda osamljenega izbiralca za 4 igralce.

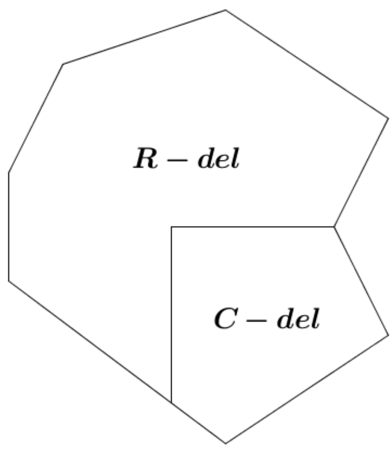
Vsak igralec na koncu igre dobi kos vreden natanko 25%. Tako smo z metodo osamljenega izbiralca razdelili torto med štiri igralce.

6 Metoda zadnjega zmanjševalca

Metodo zadnjega zmanjševalca sta odkrila leta 1940 poljska matematika Stefan Banach in Bronislaw Knaster. Angleško ime metode je The Last-Diminisher Method. Kot bomo videli v nadaljevanju poglavja, je metoda dobila takšno ime zato, ker v vsakem krogu igre, dobi pravičen delež tisti igralec, ki je zadnji zmanjšal del, o katerem igralci odločajo znotraj tega kroga.
Osnovna ideja metode je, da je množica S vedno razdeljena na dva dela: zahtevani del ali C-del in preostali del, R-del. V igri imamo N igralcev, ki so razdeljeni v dve skupini: igralci, ki zahtevajo C-del ali upravičenci in ostali igralci neupravičenci. V igri imajo neupravičenci dve možnosti, postati upravičenci z zmanjševanjem C-dela ali ostati neupravičenci. Potek igre je naslednji:

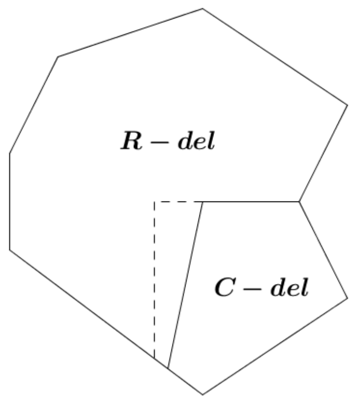
Uvod: Preden začnemo igro postavimo igralce naključno v vrsto. Označimo jih s P_1, P_2, ..., P_N. V tem vrstnem redu igrajo celotno igro. Na koncu vsakega kroga imamo enega igralca manj in množica S je po vsaki delitvi manjša.

Krog 1: Igro začne igralec P_1. Z "rezanjem" dobi podmnožico množice S, ki je po njegovem mnenju vredna vsaj $\frac{1}{N}$ celotne množice S. Torej je igralec P_1 upravičenec C-dela. Ker igralec ne ve ali bo C-del na koncu njegov, mora biti previden da del ni ne prevelik ne premajhen.



Slika 10: Prvi upravičenec.

Naslednji na vrsti je igralec P_2. Odločiti se mora, ali postane upravičenec C-dela tako, da ga zmanjša ali pa ostane neupravičenec in preskoči krog. Igralec P_2 igra, če je C-del zanj vreden več kot $\frac{1}{N}$ celotne množice S, sicer ostane neupravičenec in preskoči krog. Če se igralec P_2 odloči, da bo postal upravičenec C-dela, mora C-del zmanjšati tako, da je zanj pravičen del. Tako postane P_2 upravičenec novega C-dela, odrezani del pa postane del R-dela. Takrat se igralec P_1 vrne med neupravičence.



Slika 11: Zmanjševanje C-dela.

Zdaj je na vrsti P_3 z odločitvijo ali postane upravičenece ali preskoči krog ne glede na to kaj pripada prejšnjima igralcema. Če P_3 preskoči krog, ostane vse isto in na vrsto pride naslednji igralec. Recimo, da je C-del za igralca P_3 vreden več kot $\frac{1}{N}$ celotne množice S. Torej bo igralec P_3 vstopil v igro in zmanjšal C-del, da bo zanj vreden natanko $\frac{1}{N}$ množice S. Prejšnji igralec postane neupravičenec. Tako se igra nadaljuje dokler nimajo vsi igralci možnosti izbire igrati ali preskočiti krog. Zadnji upravičenec C-dela obdrži C-del, ki je zanj pravičen del in odstopi iz igre. Neupravičenci gredo v naslednji krog z manjšo množico S.

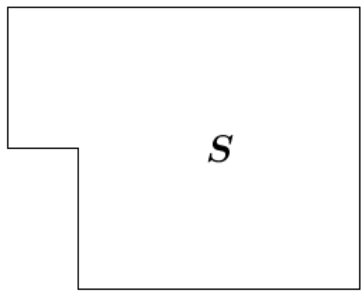
Krog 2: R-del postane nova množica S, ki bo pravično razdeljena med preostalih $N-1$ igralcev. Ponovimo celoten postopek kot v prvem krogu s C-delom, R-delom, upravičenci, neupravičenci, le da zdaj imamo enega igralca manj in vrednost množice S je za vsakega igralca natanko $\frac{1}{N-1}$ celotne S. Na koncu kroga zadnji upravičenec obdrži C-del in odstopi iz igre.

Krog 3, itd.: Postopek ponavljamo vsak krog z igralcem manj in manjšo množico S dokler ne ostaneta samo še dva igralca. V zadnjem krogu pa igralca igro zaključita tako, da z metodo deli in izbiraj razdelita množico S na dva pravična dela.

Primer 6.1. Otok bi radi razdelili z metodo zadnjega zmanjševalca med šest igralcev $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6)$. Igralci igrajo v določenem vrstem redu.

KROG 1:

Igralci: $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$.



Slika 12: Delitev S med 6 igralcev.

Poteza 1: Igro začne igralec P_1 z "rezanjem" C-dela, ki je po njegovem mnenju vreden $16\frac{2}{3}\%$.

Upravičenec: P_1.
Neupravičenci: P_2, P_3, P_4, P_5, P_6.

Poteza 2: Na vrsti je igralec P_2, ki C-del zmanjša, ker je po njegovem mnenju C-del vreden več kot $16\frac{2}{3}\%$. Novi C-del je za igralca P_2 vreden natanko $16\frac{2}{3}\%$, P_2 postane upravičenec.

Upravičenec: P_2.
Neupravičenci: P_3, P_4, P_5, P_6, P_1.

Poteza 3: Za igralca P_3 je C-del vreden manj kot $16\frac{2}{3}\%$, zato krog izpusti. Tako ostane neupravičenec.

Upravičenec: P_2.
Neupravičenci: P_4, P_5, P_6, P_1, P_3.

Poteza 4: Igralec P_4 krog preskoči, torej ostane neupravičenec.

Upravičenec: P_2.
Neupravičenci: P_5, P_6, P_1, P_3, P_4.

Poteza 5: Za igralca P_5 je C-del vreden več kot $16\frac{2}{3}\%$, zato igro igra in postane upravičenec, igralec P_2 pa postane neupravičenec.

Upravičenec: P_5.
Neupravičenci: P_6, P_1, P_3, P_4, P_2.

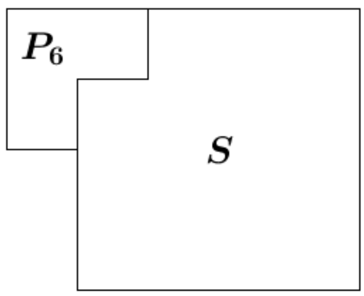
Poteza 6: Igralec P_6 C - del še zmanjša.

Upravičenec: P_6.
Neupravičenci: P_1, P_3, P_4, P_2, P_5.

Vsi igralci so imeli možnost izbire ali igro igrajo najprej ali krog preskočijo. Prvi krog je končan in igralec P_6 je postal lastnik C-dela.

KROG 2:

Igralci: P_1, P_2, P_3, P_4, P_5.



Slika 13: Delitev S med 5 igralcev.

Poteza 1: Krog začne igralec P_1 z "rezanjem" C-dela, ki je po njegovem mnenju vreden 20% .

Upravičenec: P_1.
Neupravičenci: P_2, P_3, P_4, P_5.

Poteza 2: Na vrsti je igralec P_2, ki krog preskoči.

Upravičenec: P_1.
Neupravičenci: P_3, P_4, P_5, P_2.

Poteza 3: Za igralca P_3 je C-del vreden manj kot 20%, zato preskoči krog.

Upravičenec: P_1.
Neupravičenci: P_4, P_5, P_2, P_3.

Poteza 4: Igralec P_4 krog preskoči in ostane neupravičenec.

Upravičenec: P_1.
Neupravičenci: P_5, P_2, P_3, P_4.

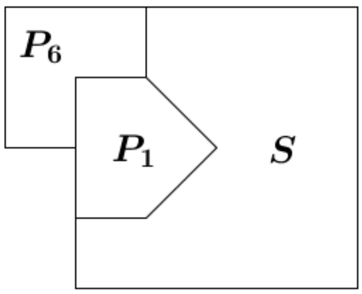
Poteza 5: Igralec P_5 krog preskoči.

Upravičenec: P_1.
Neupravičenci: P_2, P_3, P_4, P_5.

Drugi krog je končan, igralec P_1 je dobil C-del.

KROG 3:

Igralci: P_2, P_3, P_4, P_5.



Slika 14: Delitev S med 4 igralce.

Poteza 1: Krog tokrat začne igralec P_2 z "rezanjem" novega C-dela, ki je po njegovem mnenju vreden 25% .

Upravičenec: P_2.
Neupravičenci: P_3, P_4, P_5.

Poteza 2: Na vrsti je igralec P_3, ki zmanjša C-del.

Upravičenec: P_3.
Neupravičenci: P_4, P_5, P_2.

Poteza 3: Za igralca P_4 je C-del vreden več kot 20%, zato igra igro naprej.

Upravičenec: P_4.
Neupravičenci: P_5, P_2, P_3.

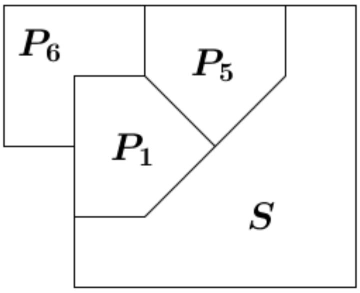
Poteza 4: Igralec P_5 se odloči, da bo igro igral in zmanjša C-del.

Upravičenec: P_5.
Neupravičenci: P_2, P_3, P_4.

Tretji krog je končan, lastnik zmanjšanega C-dela je igralec P_5.

KROG 4:

Igralci: P_2, P_3, P_4.



Slika 15: Delitev S med 3 igralce.

Poteza 1: Krog tokrat začne igralec P_2 z "rezanjem" novega C-dela, ki je po njegovem mnenju vreden $33\frac{1}{3}\%$.

Upravičenec: P_2.
Neupravičenci: P_3, P_4.

Poteza 2: Na vrsti je igralec P_3, ki krog preskoči.

Upravičenec: P_2.
Neupravičenci: P_4, P_3.

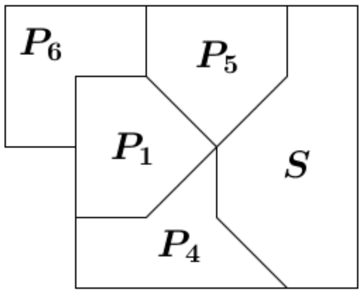
Poteza 3: Igralcu P_4 je C-del vreden več kot 20%, zato igra igro naprej.

Upravičenec: P_4.
Neupravičenci: P_3, P_2.

Četrti krog je končan in P_4 dobi svoj del.

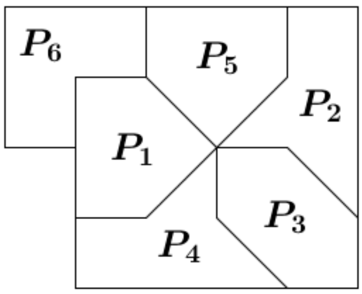
KROG 5:

Igralci: P_2, P_3.



Slika 16: Delitev S med 2 igralca.

Zadnji krog igralca P_2 in P_3 razdelita S po metodi deli in izbiraj. Prvi začne igralec P_2, ki razdeli S na dva dela, igralec P_3 pa izbere njemu najboljši del.



Slika 17: Pravično razdeljen otok z metodo zadnjega zmanjševalca.

7 Metoda zaprtih ponudb

Metodo zaprtih ponudb sta odkrila okrog leta 1948 matematika Hugo Steinhaus in Bronislaw Knaster. Je najpomembnejša metoda diskretnih pravičnih delitev. Najpogosteje se jo uporablja pri razdelitvi premoženja ali zapuščine med manjše število dedičev. Angleško ime metode je The Method of Sealed Bids. Metoda ima tako ime zato, ker igralci na začetku oddajo ponudbo za vsak predmet v zaprti ovojnici, da izpolnijo zahteve po zasebnosti. Lepa značilnost metode je, da je vsak igralec na koncu igre prepričan, da je dobil več, kot je njegov pravičen delež.

Primer 7.1. Dedek napiše oporoko v kateri zapušča petim vnukom hišo, vikend na morju, avto in njemu najljubši motor Vespo. V oporoki zahteva, da predmetov vnuki ne smejo prodati naprej, ampak morajo biti pravično razdeljeni med njimi.

Korak 1. **Dražba**: Vsak igralec napiše ponudbo za vsako nepremičnino in dragoceni predmet. Ponudba je napisana kot poštena cena v denarni vrednosti. Za izpolnitev zahteve po zasebnosti, je pomembno, da so ponudbe napisane samostojno in nihče ne sme biti seznanjen s ponudbami drugih soigralcev. To najlažje dosežemo, če igralci ponudbe oddajo v zaprti ovojnici. Po prejemu vseh ponudb odpremo ovojnico in pregledamo ponudbe.

Tabela 3: Tabela ponudb.

	A	B	C	D	E
Hiša	250.000	245.000	238.500	240.000	238.500
Vikend na morju	69.500	68.000	71.000	73.500	70.950
Avto	19.950	21.200	18.500	19.900	20.000
Motor	3.700	4.100	3.990	3.750	4.380

Korak 2. **Dodelitev**: Po pregledu ponudb razdelimo predmete. Vsak predmet gre najboljšemu ponudniku. V našem primeru hišo dobi igralec A, vikend na morju igralec D, lastnik avta postane igralec B in motor dobi igralec E. Igralec C ne dobi ničesar, kar pa ni pravično.

Korak 3. **Plačilo**: V koraku 2 so igralci dobili več ali manj kot je njihov pravičen delež, zato potrebujemo še plačila. Plačila so odvisna od tega, kaj je igralec dobil v koraku 2; lahko je dolžan denar ali pa dobi denar od prejšnjega lastnika. Da ugotovimo koliko je kdo dolžan, moramo najprej izračunati za vsakega igralca koliko je skupno pripravljen plačati in koliko od tega je zanj pravičen delež.

Tabela 4: Tabela pravičnih deležev.

	A	B	C	D	E
Hiša	250.000	245.000	238.500	240.000	238.500
Vikend na morju	69.500	68.000	71.000	73.500	70.950
Avto	19.950	21.200	18.500	19.900	20.000
Motor	3.700	4.100	3.990	3.750	4.380
Skupaj	343.150	338.300	331.990	337.150	333.830
Pravičen delež	68.630	67.660	66.398	67.430	66.766

Če je skupna vrednost predmetov, ki jih igralec dobi v koraku 2 večja od pravičnega deleža, igralec plača razliko lastniku. Če pa je skupna vrednost predmetov, ki jih igralec dobi, manjša od njegovega pravičnega deleža, mu lastnik plača razliko v gotovini.

Igralec A: Njegov pravičen delež je 68.630 evrov. Dobil je hišo v vrednosti 250.000 evrov. Torej igralec A mora lastniku (dedku) plačati 181.370 evrov ($250.000 - 68.630 = 181.370$).
Igralec B: Njegov pravičen delež je 67.660 evrov. V koraku 2 je postal lastnik avta vrednega 21.200 evrov. Ker je vrednost avta manjša kot njegov pravičen delež, dobi še 46.460 evrov v gotovini ($67.660 - 21.200 = 46.460$).
Igralec C: Pravičen delež igralca je 66.398 evrov. Ker pa ne dobi nobenega predmeta, prejme 66.398 evrov v gotovini. Tako je njegov pravičen delež poravnan.
Igralec D: Njegov pravičen delež je 67.430 evrov. Dobil je vikend na morju vreden 73.500 evrov. Lastniku mora plačati razliko v vrednosti 6.070 evrov.
Igralec E: Igralčev pravičen delež je 66.766 evrov. Dobil je dedkovo najljubši motor Vespo vredno 4.380 evrov. Ker je dobil manj kot je njegov pravičen delež, dobi še 62.386 evrov v gotovini.

Tako je vsak igralec dobil pravičen delež, a nismo še končali. Če dodamo plačila lastniku igralcev A in D ter odštejemo plačila igralcev B, C in E, ki so jih dobili v gotovini opazimo, da nam ostane še 12.196 evrov ($181.370 + 6.070 - 46.460 - 66.398 - 62.386 = 12.196$). To nas vodi še do zadnjega koraka.

Korak 4. Delitev presežka: Presežek je razdeljen enako med pet dedičev. Torej vsak igralec dobi še 2.439,20 evrov v gotovini od skupnega presežka v vrednosti 12.196 evrov. Na koncu vsak igralec dobi pravičen delež, ki je predmet ali denar in nepričakovani bonus 2.439,20 evrov v gotovini.

Metoda zaprtih ponudb v ozadju vsebuje osnovno idejo ekonomije. V večini poslov imamo prodajalca in kupca. Prodajalec vedno ve, da ima na nasprotni strani kupca in obratno. Ker vesta en za drugega, delata škodo na obeh straneh. Pri metodi zaprtih ponudb pa je vsak igralec hkrati kupec in prodajalec, ne ve pa na kateri strani je dokler ponudbe niso odprte. S tem ostane igralec pošten in imajo vsi igralci korist tudi na dolgi rok.
Da metoda zaprtih ponudb dobro deluje morata biti izpolnjena naslednja pogoja:

- Vsak igralec mora imeti dovolj denarja, da lahko igra. Če igralec napiše pošteno ponudbo za predmete, jih mora biti pripravljen kupiti. To pa pomeni, da bo moral plačati določene vsote denarja. Če igralec nima na voljo dovolj denarja, je v igri v zelo slabem položaju.

- Vsak igralec mora sprejeti denar kot nadomestilo za vsak predmet ali nepremičnino. To pomeni, da za nobenega igralca ne sme biti kateri od predmetov neprecenljiv npr.: "Želim si dedkov motor, ne premislim si za nobeno ceno." Tak odnos ni najboljši za reševanje problema.

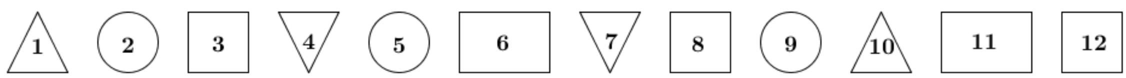
Metoda zaprtih ponudb ima posebno preprosto obliko v igri z dvema igralcema in enim predmetom.

Primer 7.2. Mož in žena se ločujeta in edina skupna vrednostna lastnina je hiša. Ker je ločitev sporazumna in nočeta najeti odvetnikov ali iti na sodišče, se odločita razdeliti hišo z metodo zaprtih ponudb. Možu je hiša vredna 320.000 evrov, žena pa bi za njo odštela 355.000 evrov. Hišo dobi žena, ker je njena ponudba višja, vendar mora plačati lastnino v vrednosti 177.500 evrov, ker je upravičena le do polovične vrednosti hiše. Možev pravičen delež je 160.000 evrov. Presežek v vrednosti 17.500 evrov ($177.500 - 160.000 = 17.500$) je pravično razdeljen med moža in ženo (vsak dobi 8.750 evrov). Torej na koncu žena dobi hišo, ampak možu plača 168.750 evrov.

8 Metoda označevanja

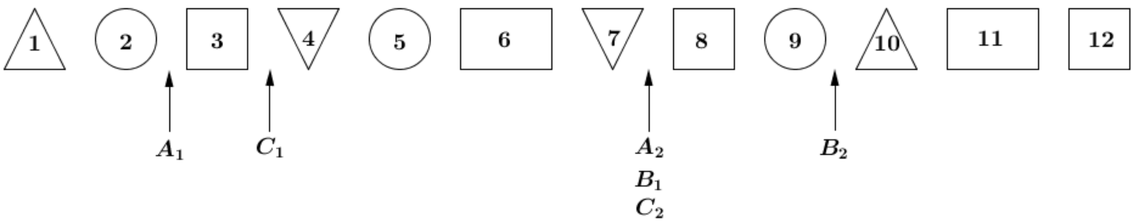
Metoda označevanja je diskretna metoda pravične delitve. Leta 1975 jo je predlagal matematik na Clarement Graduate School William F. Lucas. Angleško ime metode je The Method of Markers. Kot bomo videli v nadaljevanju ima metoda takšno ime zato, ker igralci uporabljajo oznake za določanje pravičnih deležev.
Pri metodi označevanja igralci ne potrebujejo svojega denarja. Metode ne moremo tako učinkovito uporabiti kot metodo zaprtih ponudb, razen če moramo razdeliti veliko več predmetov razmeroma enake vrednosti med manj igralcev. Igro začnemo tako, da vse predmete, ki jih bomo delili, postavimo v vrsto. Dobimo fiksno zaporedje ali niz predmetov, ki se skozi igro ne spreminja. Nato vsak igralec napiše ponudbo za posamezne segmente zaporednih predmetov. Segmente dobimo z rezanjem nizov predmetov. Če igro igra N igralcev, potem mora vsak igralec napisati ponudbo kje bi razrezal niz na N segmentov. Vsak segment mora predstavljati sprejemljiv delež celotne množice predmetov. Opazimo, da če razrežemo niz na N segmentov, potrebujemo $N-1$ rezov. V praksi je en izmed možnih načinov, kako razrezati niz, da označimo mesta kjer naj bi bil rez z neko oznako. Torej vsak igralec naredi ponudbo na sledeč način: v niz predmetov postavi $N-1$ oznak in tako razdeli niz na N segmentov. Zaradi zahteve po zasebnosti vsak igralec napiše ponudbo samostojno in neodvisno od ostalih soigralcev. Metoda označevanja zagotavlja, da ima na koncu vsak igralec eno izmed svojih ponudb. Lahko se zgodi da en igralec prejme samo en predmet, medtem ko drugi igralec lahko prejme dva ali več predmetov. Koliko predmetov je dodeljenih igralcu je odvisno od vrednostnega sistema vsakega igralca.

Primer 8.1. Trije igralci (A, B in C) bodo razdelili 12 predmetov z metodo označevanja. Predmete postavimo v vrsto in jih oštevilčimo.



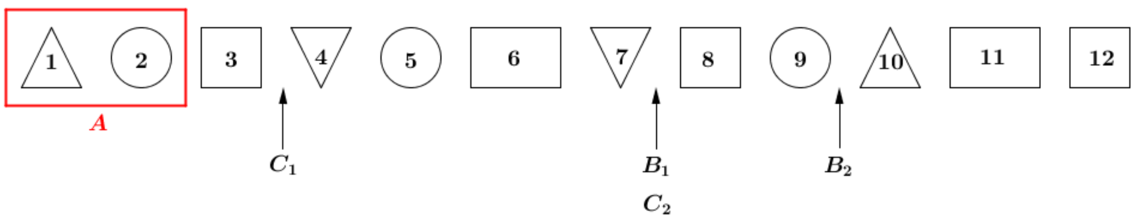
Slika 18: Niz predmetov.

Korak 1. Ponudba: Vsak igralec napiše neodvisno od drugih na list papirja svojo ponudbo kje natančno želi postaviti oznake. Ker so trije igralci, ima vsak po dve oznaki.



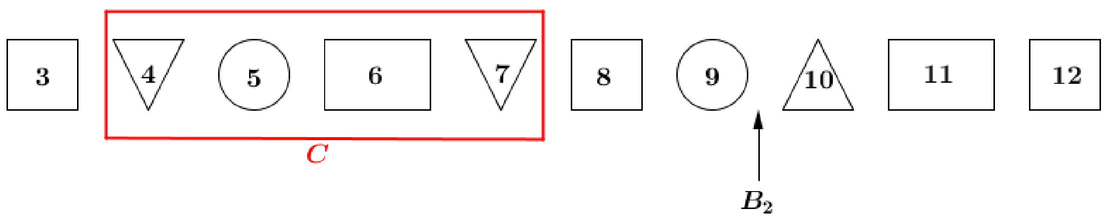
Slika 19: Ponudbe igralcev.

Korak 2. Razporeditev: Segmente razdelimo na naslednji način: pregledamo niz predmetov od leve proti desni dokler ne najdemo prve oznake. V našem primeru je prva oznaka A_1 igralca A, to pomeni, da prvi segment dobi igralec A (od 1 do 2). Odstranimo vse markerje igralca A iz igre.



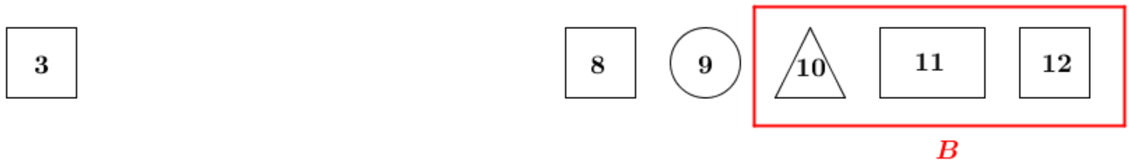
Slika 20: Razdelitev prvega segmenta.

Ponovno pregledamo niz predmetov od leve proti desni do druge oznake. Druga oznaka pripada igralcu C. Igralec C dobi predmete od njegove prve oznake do druge oznake (od 4 do 7). Ko dobi svoj segment, odstranimo še njegove oznake.



Slika 21: Razdelitev drugega segmenta.

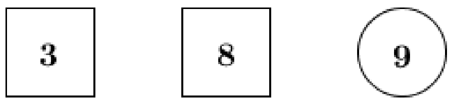
Zopet pregledamo od leve proti desni in pridemo do zadnje oznake B_2 igralca B. Torej igralcu B pripada zadnji segment (od 10 do 12).



Slika 22: Razdelitev zadnjega segmenta.

Tako je vsak igralec dobil svoj izbrani segment.

Korak 3. **Delitev ostankov**: Velikokrat ostane premalo predmetov, da bi igro nadaljevali. Problem z ostanki rešimo tako, da igralci izžrebajo številke in v takem vrstnem redu dobijo predmete. V našem primeru imamo še tri predmete, ki so ostali, torej vsak igralec bo dobil en predmet. Recimo da igralec B dobi predmet 3, igralec A predmet 8 in igralec C predmet 9.



Slika 23: Niz ostankov.

Splošnejši opis metode označevanja z N igralci in M predmeti postavljenimi v vrsto:

Korak 1. **Ponudba**: Vsak igralec neodvisno od soigralcev napiše ponudbo kje bi razdelil niz predmetov na N segmentov. Z $N-1$ oznakami ločijo en pravičen delež od drugega.

Korak 2. **Razporeditev**: Pregledamo niz predmetov od leve proti desni do prve oznake. Igralec, katerega je prva oznaka, dobi prvi segment. Nato vse njegove oznake odstranimo iz igre. V primeru, da je na istem mestu več oznak, izberemo eno oznako naključno z žrebanjem številk, metom kocke ali kovanca. Nadaljujemo pregled niza predmetov proti desni do druge oznake. Igralec s to oznako dobi drugi segment (predmete od prve njegove oznake do druge). Tako nadaljujemo dokler vsak igralec ne dobi svojega segmenta.

Korak 3. **Ostanki**: Ostanke predmetov razdelimo med igralce tako, da vsak dobi vsaj en predmet. Če ostane več predmetov kot je igralcev, ponovno uporabimo metodo oznak. Lahko se zgodi da ostane manj predmetov kot je igralcev. V tem primeru igralci žrebajo številke in s tem določijo v kakšnem vrstnem redu bodo dobili ostanke.

Čeprav je metoda označevanja enostavna, jo lahko uporabljamo samo z nekaterimi omejenimi pogoji. Metoda predpostavlja, da vsak igralec lahko razdeli niz predmetov na segmente približno enake vrednosti. To je mogoče, kadar imajo predmeti majhne in homogene vrednosti. Če pa imamo v igri dragocene predmete, ki imajo zelo visoko vrednost, je nemogoče postaviti oznake. Na primer vzamemo niz različnih bombonov in niz različnih kovancev. Kovancev ne moremo razdeliti z metodo označevanja kot bombone.

9 Zaključek

Problem pravične delitve dobrin med igralce oziroma člane neke skupine je praktični problem, ki ga srečamo v vsakdanjem življenju. Na prvi pogled problem pravičnosti ni problem področja matematike. Najprej verjetno pomislimo, da o tej temi razpravljajo na področju ekonomije, političnih ved ali prava. Presenetljivo je to, da če so izpolnjeni nekateri osnovni pogoji, lahko matematika zagotovi veliko več kot samo pravičnost.
V zaključni nalogi smo obravnavali problem pravične delitve z uporabo konceptov in terminologije izposojene od teorije iger. Spoznali smo kaj je pravična delitev in nekaj pomembnih metod. Najbolj znana metoda pravične delitve je metoda deli in izbiraj za dva igralca. S pomočjo primerov smo razložili posplošeni metodi metode deli in izbiraj: metoda osamljenega delivca in metoda osamljenega izbiralca za tri in poljubno število igralcev. Nato smo preko igre spoznali še metodo zadnjega zmanjševalca, kjer v vsakem krogu igre dobi pravičen delež tisti igralec, ki zadnji zmanjša del o katerem igralci odločajo znotraj kroga. Metoda zaprtih ponudb nam je mogoče dala idejo kako pravično razdeliti premoženje med manjše število dedičev. V zadnjem poglavju smo pravično razdelili niz predmetov z metodo označevanja.
V zaključni nalogi lahko opazimo, da nimamo vedno jasne izbire katero metodo je najbolje uporabiti v določeni situaciji, ampak nam te metode lahko zelo dobro služijo v življenju.

10 Literatura

[1] P. Tannenbaum, *Excursion in MODERN MATHEMATICS*, Springer-Verlag, Five edition, 2004. 87–135

[2] *Fair Division*, Coconino Community College. `www.coconino.edu/resources/files/pdfs/academics/arts-and-sciences/MAT142/Chapter_8_FairDivision.pdf`. (Datum ogleda: 5. 6. 2016.)