UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

DOKTORSKA DISERTACIJA

# NOVI KONCEPTI IN REZULTATI V TEORIJI DOMINACIJE IN PRIREJANJ V GRAFIH

NINA CHIARELLI

KOPER, 2016

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

DOKTORSKA DISERTACIJA

# NOVI KONCEPTI IN REZULTATI V TEORIJI DOMINACIJE IN PRIREJANJ V GRAFIH

NINA CHIARELLI

KOPER, 2016 MENTOR: IZR. PROF. DR. MARTIN MILANIČ

# ZAHVALA

Najprej bi se zahvalila mentorju, izr. prof. dr. Martinu Milaniču, ki me je velikodušno sprejel pod svoje okrilje in je bil pripravljen deliti z mano vse svoje znanje in svoje izkušnje. Hvala, ker ti ni bilo težko mi marsikaj razložiti dva ali več krat, ker si si kljub polnemu urniku vedno vzel čas zame in za moja vprašanja, ker si me spodbujal in razumel na tej moji, vse prej kot ravni, poti. Hvala, ker si ves čas verjel vame in v moje sposobnosti, ker nisi dovolil, da bi me lastni strahovi prikrajšali za kakšno izkušnjo in ker sem, predvsem zaradi tebe, imela možnost spoznati veliko zanimivih ljudi.

Hvaležnost bi izrazila tudi dr. Gabrieli Argiroffo, prof. dr. Endreju Borosu, dr. Tınaz Ekim, dr. Didem Gözüpek, dr. Valerii Leoni, prof. dr. Štefku Miklaviču in doc. dr. Gracieli Nasini, s katerimi sem imela možnost raziskovati v času študija.

Posebej bi se zahvalila mami Tanji in očetu Oskarju za vso podporo in spodbudo tekom študija. Hvala, ker sta razumela kdaj nimam časa in kdaj potrebujem čas zase in me ob pravih trenutkih "odtrgala" od dela.

Ne nazadnje hvala tudi tebi Damjan, ki si znal razumeti krike obupa, ko se kakšen dokaz ni izšel in si vedno našel besede, ki so mi povrnile motivacijo. Hvala, ker si razumel mojo vztrajnost, ki je občasno mejila na trmo, in ker si znal prisluhniti, ko sem to potrebovala.

# Kazalo vsebine

# Izvleček


NOVI KONCEPTI IN REZULTATI V TEORIJI DOMINACIJE
IN PRIREJANJ V GRAFIH

V disertaciji so obravnavane teme s področij teorije dominacije in prirejanj v grafih. Teme povezane s teorijo dominacije v grafih zajemajo obravnavo štirih na novo definiranih grafovskih razredov, ki temeljijo na pragovnih grafih in dominantno pragovnih grafih. Pragovni grafi so tisti grafi $G$, katerih točkam $v \in V(G)$ lahko dodelimo take nenegativne uteži $w(v)$, da bo za vsako množico $S \subseteq V$ veljalo: $S$ je neodvisna množica v grafu $G$ natanko tedaj, ko velja $\sum_{v \in S} w(v) \leq t$, kjer $t \in \mathbb{R}_+$ predstavlja prag (ki ga v neodvisni množici ne smemo preseči). Podobno so dominantno pragovni grafi definirani kot tisti grafi $G$, katerih točkam $v \in V(G)$ lahko dodelimo take nenegativne uteži $w(v)$, da bo za vsako množico $S \subseteq V$ veljalo: $S$ je dominantna množica v grafu $G$ natanko tedaj, ko velja $\sum_{v \in S} w(v) \geq t$, kjer $t \in \mathbb{R}_+$ predstavlja prag (ki ga moramo v dominantni množici doseči). Na tej definiciji slonita definiciji razredov totalno dominantno pragovnih in povezano dominantno pragovnih grafov, s tem da mora v teh primerih množica $S$ predstavljati totalno dominantno množico oz. povezano dominantno množico. Za oba omenjena (na novo definirana) grafovska razreda sta z uporabo dualnosti podani karakterizaciji s pomočjo Boolovih funkcij in hipergrafov. Ker razreda nista hereditarna, sta obravnavani tudi hereditarni različici obeh razredov. Za slednji je podanih več karakterizacij, vključno s karakterizacijama s prepovedanimi induciranimi podgrafi. Na podlagi karakterizacij so izpeljani nekateri rezultati v zvezi s prepoznavanjem grafov iz teh razredov in z izračunom pripadajočih separacijskih struktur.

Če posameznim točkam pragovnega grafa dodamo nekaj listov, dobimo razred t.i. z listi razširjenih pragovnih grafov. V disertaciji je podana karakterizacija tako dobljenega razreda grafov s prepovedanimi induciranimi podgrafi. Izkaže se, da če dva grafa na 6 točkah izmed (trinajstih) prepovedanih induciranih podgrafov za razred hereditarno totalno dominantno pragovnih grafov zamenjamo z ustreznima induciranima podgrafoma na 5 točkah, dobimo podrazred hereditarno totalno dominantnih grafov, katerega vsak povezan element je z listi razširjen pragovni graf. Za

tako dobljen razred grafov sta opisana algoritma linearne časovne zahtevnosti za prepoznavanje grafov iz tega razreda ter za izračun totalno dominantno pragovne strukture teh grafov.

Temi povezani s teorijo prirejanj zajemata obravnavo ekvistarabilnih grafov in 2-razširljivih kartezičnih produktov grafov. Ekvistarabilni grafi so tisti grafi $G$, katerih povezavam $e \in E(G)$ lahko dodelimo take nenegativne uteži $w(e)$, da bo za vsak $F \subseteq E$ veljalo: $F$ je maksimalna zvezda v grafu $G$ natanko tedaj, ko velja $\sum_{e \in F} w(e) = 1$. Na podlagi znane ekvivalence med (krepko) ekvistarabilnimi in (krepko) ekvistabilnimi grafi sta izpeljani ekvivalenci med grafovskima razredoma, ki vsebujeta ekvistabilne oz. ekvistarabilne grafe, ter med grafovskima razredoma, ki sta vsebovana v krepko ekvistabilnih oz. krepko ekvistarabilnih grafih. Izpeljani ekvivalenci temeljita na konceptu razširljivosti (v smislu prirejanj) in t.i. pogoja $P_5$-omejenosti, ki pravi, da je sredinska točka vsake poti $P_5$ stopnje vsaj 3. Podane so tudi karakterizacije ekvistarabilnih dvodelnih grafov in ekvistarabilnih gozdov.

V zadnjem poglavju obravnavamo 2-razširljive kartezične produkte grafov. Pravimo, da je povezan graf $G$ 2-razširljiv, če vsebuje 2-prirejanje in lahko vsako 2-prirejanje v grafu $G$ razširimo do popolnega prirejanja. Podana je karakterizacija 2-razširljivih netrivialnih kartezičnih produktov tistih povezanih grafov, ki vsebujejo popolno prirejanje, obravnavamo pa tudi nekatere posebne primere 2-razširljivih kartezičnih produktov v primeru, ko nimata oba faktorja popolnega prirejanja. V zvezi s slednjim podamo karakterizaciji za 2-razširljivost kartezičnih produktov dveh grafov, kjer je eden od faktorjev pot, drugi pa bodisi lih cikel ali poln dvodelen graf, in primer 2-razširljivega kartezičnega produkta, v katerem noben izmed faktorjev ne vsebuje popolnega prirejanja.

**Math. Subj. Class (2010):** 05C69, 05C70, 05C76, 05C22, 05C75, 05C85, 05C65, 06E30

**Ključne besede:** hereditaren grafovski razred, pragoven graf, dominantno pragoven graf, totalno dominantna množica, povezana dominantna množica, hipergraf, ekvistabilen graf, ekvistarabilen graf, $k$-prirejanje, $k$-razširljivost, $k$-notranje razširljiv graf, kartezični produkt grafov.

# Abstract


NEW CONCEPTS AND RESULTS IN DOMINATION AND MATCHING THEORY IN GRAPHS

The thesis studies topics related to domination and matching theory in graphs. Topics related to domination include the study of four newly defined graph classes based on threshold and domishold graphs. Threshold graphs are graphs $G$ that admit non-negative weights $w(v)$ on the vertices $v \in V(G)$ such that for every subset $S \subseteq V$ it holds that $S$ is an independent set in $G$ if and only if $\sum_{v \in S} w(v) \leq t$, where $t \in \mathbb{R}_+$ is a threshold (that cannot be exceeded by any independent set). Similarly, domishold graphs are defined as graphs $G$ that admit non-negative weights $w(v)$ on the vertices $v \in V(G)$ such that for every subset $S \subseteq V$ it holds that $S$ is a dominating set in $G$ if and only if $\sum_{v \in S} w(v) \geq t$, where $t \in \mathbb{R}_+$ is a threshold (that has to be reached by every dominating set). We introduce, in a similar way, the classes of total domishold graphs and connected domishold graphs, except that in these cases the condition that $S$ is a dominating set is replaced with the condition that S is a total dominating, resp. a connected dominating set. For both graph classes characterizations are given involving Boolean functions and hypergraphs, making use of duality. Moreover, since the two graph classes are not hereditary, we consider also their hereditary versions, for which we give several characterizations, including characterizations in terms of forbidden induced subgraphs. Based on these characterisations, some results about recognition of graphs in these classes and about the computation of the corresponding separating structures are obtained.

By adding any number of leaves to the vertices of a threshold graph we obtain a so-called leaf extension of a threshold graph. In the thesis, a characterization of the resulting graph class is obtained in terms of forbidden induced subgraphs. It turns out that by replacing two graphs on 6 vertices from the list of (thirteen) forbidden induced subgraphs for the class of hereditary total domishold graphs with two of their particular induced subgraphs on 5 vertices, we get a subclass of hereditary total domishold graphs each connected member of which is a leaf extension of a threshold graph. For the so obtained graph class we also give linear

time algorithms for both recognizing the graphs in the class and for computing an integral total domishold structure of such a graph. Such algorithms are not known for the (larger) class of hereditary total domishold graphs.

Topics related to matching theory include the study of equistarable graphs and 2-extendable Cartesian product graphs. Equistarable graphs are graphs $G$ that admit non-negative weights $w(e)$ on the edges $e \in E(G)$ such that for every subset $F \subseteq E$ it holds that $F$ is a maximal star in $G$ if and only if $\sum_{e \in F} w(e) = 1$. Based on the known equivalence between (strongly) equistarable graphs and (strongly) equistable graphs we establish some other equivalences for graph classes that contain equistable, resp. equistarable graphs and graph classes that are contained in the class of strongly equistable, resp. strongly equistarable graphs. The equivalences are established with help of matching extendability and the so-called $P_5$-constrainedness property, which requires that the middle vertex of every 5-vertex path in the graph has degree at least 3. We also give several characterizations of the classes of equistarable bipartite graphs and equistarable forests.

The last section deals with 2-extendable Cartesian product graphs. We say that a connected graph $G$ is 2-extendable if $G$ has a 2-matching and every 2-matching in $G$ extends to a perfect matching. We characterize 2-extendable nontrivial Cartesian product graphs involving two connected factors having a perfect matching, as well as some cases of 2-extendable nontrivial Cartesian product graphs when the factors do not (both) have a perfect matching. In particular, we give characterizations of 2-extendable Cartesian products where one of the factors is a path and the other one is either an odd cycle or a complete bipartite graph. Finally, we give an example of a 2-extendable Cartesian product when none of the factors contains a perfect matching.

**Math. Subj. Class (2010):** 05C69, 05C70, 05C76, 05C22, 05C75, 05C85, 05C65, 06E30

**Key words:** hereditary graph class, threshold graph, domishold graph, total dominating set, connected dominating set, hypergraph, equistable graph, equistarable graph, $k$-matching, $k$-extendability, $k$-internally extendable graph, Cartesian product of graphs.

# 1 UVOD

Pojem dominantne množice se v literaturi pojavi okrog leta 1960, vendar lahko zametke teorije dominacije najdemo že leta 1862 v de Jaenisch-evi študiji o problemu najmanjšega števila kraljic, s katerimi lahko pokrijemo (dominiramo) šahovnico velikosti $n \times n$ [30]. Teorijo dominacije v grafih lahko povežemo s problemi vsakdanjega življenja kot so: socialna omrežja, načrtovanje poti (javnih) prevozov, načrtovanje omrežij in še mnogo drugih [55].

Za pojem dominantne množice je znanih več alternativnih (ekvivalentnih) definicij. Za dani graf $G = (V, E)$ je množica $S \subseteq V$ *dominantna* natanko tedaj, ko velja eden (in tedaj vsi) izmed naslednjih pogojev:

- za vsako točko $v \in V \setminus S$ velja $|N_G(v) \cap S| \geq 1$, kjer $N_G(v)$ označuje soseščino točke $v$ (tj. vsaka točka, ki ni v $S$, ima vsaj enega soseda v $S$);
- za vsako točko $v \in V$ velja $|N_G[v] \cap S| \geq 1$, kjer $N_G[v]$ označuje zaprto soseščino točke $v$;
- za vsako točko $v \in V \setminus S$ velja $d(v, S) \leq 1$, kjer $d(v, S)$ označuje razdaljo točke $v$ od množice $S$.

Te definicije so motivirale uvedbo različnih variant dominacije, kot so: vektorska dominacija [21, 53], totalna dominacija [8, 58, 59], razdaljna dominacija [93] ter mnoge druge [15], [56, poglavje 7]. Lahko pa za dominantno množico zahtevamo, da izpolnjuje še nekatere dodatne pogoje (npr. da je neodvisna ali da inducira povezan podgraf) in tako dobimo neodvisno dominacijo [102] oz. povezano dominacijo [1, 19, 36, 41]. Da je dominacija v grafih deležna zanimanja, dokazujejo tudi številni članki, ki preučujejo dominacijo (ali katero izmed njenih različic) v različnih hereditarnih grafovskih razredih [17, 22, 27, 28, 66, 88] in različnih produktnih grafih [14, 15, 35]. Kljub temu da vsak graf premore dominantno množico, se izkaže, da spada določitveni problem, ali ima dan graf dominatno množico velikosti kvečjemu $k$, v razred NP-polnih problemov [43]. Eden od možnih pristopov za reševanje NP-polnih odločitvenih ali NP-težkih optimizacijskih problemov je, da na vhodnih podatkih poiščemo omejitve, s pomočjo katerih lahko problem učinkovito rešimo. Splošen okvir, v katerega lahko nekatere take omejitve postavimo v primeru problemov na grafih, je: *Ali lahko točkam (ali povezavam, v odvisnosti od problema) danega grafa $G$ dodelimo take nenegativne celoštevilske uteži in najdemo tako množico celih števil $T$, da ima podmnožica točk (ali povezav) $X$ lastnost $P$ če in samo če vsota elementov iz množice $X$ pripada množici $T$?* Omenjeni okvir ponuja poenoten opis karakterističnih lastnosti različnih grafovskih razredov, kot so pragovni grafi [26], dominantno pragovni grafi [6] in ekvistabilni grafi [82], lahko pa ga apliciramo tudi splošneje, v kontekstu Boolove optimizacije [77]. Če so ustrezne uteži podane skupaj z grafom, ki ga preučujemo, lahko s pomočjo dinamičnega programiranja v času $\mathcal{O}(Mn)$, kjer je $M$ zgornja meja za $T$ in $n$ število točk (ali povezav) grafa, najdemo podmnožico točk z lastnostjo $P$ največje ali najmanjše cene, glede na poljubno cenovno funkcijo, kot je to opisano v [77].

V disertaciji se bomo posvetili trem razredom grafov, ki jih lahko definiramo s pomočjo zgornjega okvirja. Prvi je razred totalno dominantno pragovnih grafov, obravnavan v poglavju 3, kjer $P$ predstavlja lastnost *biti totalno dominantna množica* in je $T = [t, \infty] \cap \mathbb{N}$ navzgor neomejen interval nenegativnih celih števil. V disertaciji bomo, z uporabo koncepta dualnosti, podali karakterizacije razreda totalno dominantno pragovnih grafov s pomočjo hipergrafov in Boolovih funkcij. Ker razred totalno dominantno pragovnih grafov ni hereditaren, bo posebej obravnavana tudi hereditarna različica razreda, za katero bo, med drugim, podana karakterizacija s prepovedanimi induciranimi podgrafi. Drugi razred, ki ga lahko umestimo v zgornji okvir (in ki bo predstavljen v poglavju 5), je razred povezano dominantno pragovnih grafov, kjer $P$ predstavlja lastnost *biti povezana dominantna množica* in je $T = [t, \infty] \cap \mathbb{N}$ spet navzgor neomejen interval nenegativnih celih števil. V disertaciji bomo ravno tako kot za zgoraj omenjeni razred, tudi za razred povezano dominantno pragovnih grafov podali karakterizacije s pomočjo hipergrafov in Boolovih funkcij. Ker tudi ta razred grafov ni hereditaren, bo posebej obravnavana hereditarna različica razreda, za katero bo, med drugim, podana karakterizacija s prepovedanimi induciranimi podgrafi.

Lastnosti obeh zgoraj omenjenih razredov predstavljata različici dominacije v grafih, za kateri najdemo primere uporabe tako v problemih vsakdanjega življenja, npr. pri načrtovanju izgradnje gasilskih ali policijskih enot [38] (za totalno dominacijo) in pri načrtovanju brezžičnih senzorskih omrežjih [10, 18, 81] (za povezano dominacijo), kot tudi, preko povezave s t.i. *transverzalami hipergrafov*, v teoriji iger [48], pri načrtovanju brezžičnih mobilnih omrežij [87] in na številnih področjih računalništva: strojno učenje, podatkovno rudarjenje, umetna inteligenca [37, 62].

Neodvisna množica v grafu $G = (V, E)$ je taka podmnožica točk $S \subseteq V$, ki vsebuje le paroma nesosedne točke. Pravimo, da je neodvisna množica maksimalna, ko ji ne moremo dodati nobene točke, ne da bi s tem izgubili pogoj neodvisnosti. S pomočjo neodvisnih množic so definirani pragovni grafi. Če definicijo postavimo v zgoraj omenjeni okvir, predstavlja v tem primeru $P$ lastnost *biti neodvisna množica* in je $T = [0, t] \cap \mathbb{N}$ navzgor omejen interval nenegativnih celih števil. Pragovni grafi in posplošitve le-teh so bile ekstenzivno študirane [26, 54, 72, 74, 82, 84, 98], ta literatura pa nam ponudi tudi mnogo alternativnih karakterizacij pragovnih grafov. V disertaciji bomo v poglavju 4 opisali družino grafov, ki jo lahko umestimo med pragovne in totalno dominantno pragovne grafe. To so t.i. z listi razširjeni pragovni grafi. Podali bomo karakterizacijo omenjene družine grafov s prepovedanimi induciranimi podgrafi ter opisali in analizirali algoritma za prepoznavanje grafov iz te družine in za izračun totalno dominantno pragovne strukture (glej definicijo 3.1) danega grafa iz te družine.

S pomočjo neodvisnih množic je definirana tudi družina ekvistabilnih grafov, ki tvori posplošitev družine pragovnih grafov in ki jo lahko ravno tako opišemo s pomočjo podanega okvirja. Sedaj $P$ predstavlja lastnost *biti maksimalna neodvisna množica* in $T = \{t\}$ vsebuje le eno število. Ekvistabilne grafe je leta 1980 definiral Payan [82], od tedaj pa so to družino grafov preučevali mnogi [64, 67, 68, 76, 77, 83] ter jo povezali še s krepko ekvistabilnimi grafi [73], splošno particijskimi grafi [32] in trikotniškimi grafi [75]. Milanič in Trotignon sta v [78] opisala zvezo med ekvistabilnimi in na novo definiranimi ekvistarabilnimi grafi. To zvezo, ki je dobljena preko komplementov povezavnih grafov grafov brez trikotnikov, bomo v poglavju 6 razširili še na ostale družine, povezane z ekvistabilnimi grafi, in sicer na družino splošno particijskih grafov in na družino trikotniških grafov, podali pa bomo tudi karakterizaciji ekvistarabilnih dvodelnih grafov in ekvistarabilnih gozdov. Pri tem si bomo pomagali s prirejanji v grafih (tj. z množicami paroma disjunktnih povezav) [71], natančneje s pojmoma popolnega notranjega prirejanja [3–5] in $k$-razširljivosti [85, 86]. Graf $G$ je $k$-razširljiv, če je povezan, vsebuje prirejanje velikosti $k$ in če lahko vsako prirejanje velikosti $k$ razširimo do popolnega prirejanja (tj. do prirejanja, ki pokrije vse točke grafa).

Leta 1980 je Plummer [85] pokazal, da je vsak 2-razširljiv graf bodisi dvodelen bodisi 3-povezan bikritičen graf, kjer je graf $G$ bikritičen, če ima za vsak par različnih točk $u, v \in V(G)$ graf $G - \{u, v\}$ popolno prirejanje. Little idr. so v [70] podali potrebne in zadostne pogoje za to, da je graf 1-razširljiv. V literaturi pa lahko zasledimo tudi kar nekaj del, ki se ukvarjajo s problemom $k$-razširljivosti znotraj posameznih grafovskih razredov [2, 85, 86, 100, 101]. Nekoliko manj je del, ki $k$-razširljivost obravnavajo na produktnih grafih [49, 69, 92]. V poglavju 7 se bomo posvetili 2-razširljivim kartezičnim produktom. Podali bomo karakterizacijo 2-razširljivih kartezičnih produktov za primer, ko sta oba faktorja 0-razširljiva, obravnavali in karakterizirali pa bomo tudi nekatere posebne primere, ko nista oba faktorja 0-razširljiva.

V poglavju 2 so navedeni osnovni pojmi in rezultati iz teorije grafov, Boolovih funkcij in hipergrafov, ki jih bomo potrebovali v nadaljnjih poglavjih disertacije.

Večina rezultatov disertacije je vključena v naslednje znanstvene članke:

- Chiarelli, N. in Milanič, M. *Linear Separation of Total Dominating Sets in Graphs*, v Brandstädt, A., Jansen, K. in Reischuk (eds.), WG 2013, LNCS, 8165, Springer-Verlag (2013), pp. 165–176.
- Chiarelli, N. in Milanič, M. *Total domishold graphs: a generalization of threshold graphs, with connections to threshold hypergraphs*, Discrete Applied Mathematics vol. 179 (2014), pp. 1–12.
- Chiarelli, N. in Milanič, M. *On a class of graphs between threshold and total domishold graphs*, Discrete Applied Mathematics vol. 195 (2015), pp. 43–58.

- Boros, E., Chiarelli, N. in Milanič, M. *Equistarable bipartite graphs*, Discrete Mathematics vol. 339 (2016), pp. 1960–1969.
- Chiarelli, N. in Milanič, M. *Linear Separation of Connected Dominating Sets in Graphs* (v pripravi; povzetek je objavljen na konferenci ISAIM 2014).
- Chiarelli, N., Miklavič, Š. in Milanič, M. 2-*extendable Cartesian product graphs* (v pripravi).

# 2
# OSNOVE

V tem poglavju bodo opisani osnovni pojmi, definicije in za disertacijo pomembni izreki, ki jih bomo uporabili v kasnejših poglavjih. Začeli bomo na splošno, z osnovnimi pojmi in definicijami iz teorije grafov, in se nato posvetili bolj specifičnim definicijam in izrekom, neposredno povezanim s temami, obravnavanimi v nadaljevanju. Za morebitne nedefinirane (osnovne) pojme iz teorije grafov napotujemo bralca na [11, 96], za pojme iz Boolovih funkcij na [29] in za pojme iz hipergrafov na [7].

## 2.1 Grafi – osnovni pojmi

Graf $G$ je par $(V, E)$, ki sestoji iz množice točk ($V = V(G)$) in množice povezav ($E = E(G)$), kjer so povezave definirane kot (neurejeni) pari točk. Zapis povezave $e = \{u, v\}$ običajno poenostavljeno pišemo kot $uv$, pri čemer sta $u$ in $v$ *krajišči* povezave $e$. Točkama, ki tvorita povezavo, pravimo *sosednji* (ali *povezani*) točki; za to uporabljamo oznako $u \sim v$. Vse točke, sosednje točki $v \in V$, tvorijo *soseščino* točke $v$, ki jo označimo z $N_G(v)$, poznamo pa tudi *zaprto soseščino* točke $v$, tj. $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Točke iz množice $V(G) \setminus N_G[v]$ tvorijo *nesoseščino* točke $v$. Za neko množico točk $U \subseteq V(G)$ je $N_G[U] = \cup_{u \in U} N_G[u]$. *Stopnja točke* $v$ v grafu $G$ je velikost njene soseščine, označimo jo z $d_G(v)$ (če je iz konteksta jasno, o katerem grafu govorimo, je indeks $G$ običajno izpuščen), *najmanjšo stopnjo točke* v grafu $G$ označimo z $\delta(G)$. Če za dve točki $u, v \in V(G)$ velja $N_G(v) = \{u\}$, pravimo, da je točka $u$ *zasebni sosed* točke $v$ in je točka $v$ *list*.

Množici paroma povezanih točk pravimo *klika*, množici paroma nepovezanih točk pa *neodvisna množica*. Točko $v \in V(G)$, za katero velja $N_G[v] = V(G)$, imenujemo *univerzalna* ali *dominantna točka* grafa $G$, točka $v \in V(G)$, za katero velja $N_G[v] = \{v\}$ oz. $d_G(v) = 0$, pa je *izolirana točka* grafa $G$. Točki, katere soseščina tvori kliko, pravimo *simplicialna točka*.

Graf $G$ lahko podamo s seznamom sosednosti ali z matriko sosednosti. *Seznam sosednosti* je seznam, ki nam za vsako točko grafa $G$ poda njene sosede (v poljubnem vrstnem redu), medtem ko je *matrika sosednosti* matrika velikosti $|V(G)| \times |V(G)|$, katere vrstice in stolpci predstavljajo točke grafa $G$ in za posamezne elemente velja:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{če je } v_i v_j \in E(G); \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

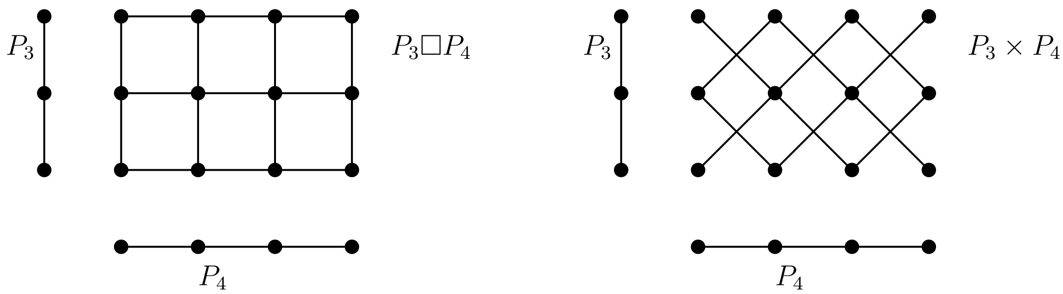
Pri tem predpostavimo neko fiksno linearno razvrstitev množice $V(G)$, torej $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Grafe običajno obravnavamo do izomorfizma natančno. Pravimo, da je graf $G$ *izomorfen* grafu $H$ (in to označimo z $G \cong H$), če obstaja taka bijektivna preslikava $f : V(G) \to V(H)$, da za vsaki dve točki $u, v \in V(G)$ velja $uv \in E(G)$ če in samo če je $f(u)f(v) \in E(H)$.

Če graf $H$ dobimo iz grafa $G$ tako, da iz njega odstranimo neko množico točk $U \subseteq V(G)$ (skupaj s pripadajočimi povezavami), pravimo, da je $H$ *induciran podgraf* grafa $G$, operacijo označujemo z $G - U$. Graf $H$ lahko v tem primeru zapišemo tudi kot $H = G[S]$, kjer je $S = V(G) \setminus U$, in rečemo, da je $H$ *podgraf grafa $G$ induciran z množico $S$*. Graf $G$ je *povezan*, če za poljubni točki velja, da obstaja pot med njima, sicer je *nepovezan*. *Povezana komponenta* grafa $G$ je maksimalen povezan podgraf grafa $G$. Množico točk $S \subseteq V(G)$ imenujemo *točkovni prerez* grafa $G$, če ima graf $G - S$ več povezanih komponent kot graf $G$. Če je $|S| = 1$, pravimo točki $v \in S$ *prerezna točka*. Povezava $e \in E(G)$ je *prerezna povezava*, če ima podgraf $G - e$ več povezanih komponent kot graf $G$. Graf je *$k$-povezan* (za nek $k \in \mathbb{N}$), če je $|V(G)| \geq k + 1$ in je graf $G - X$ povezan za vsako množico $X \subseteq V(G)$, za katero je $|X| < k$. Največji $k$, za katerega je graf $G$ $k$-povezan, določa *povezanost* grafa $G$, označimo jo s $\kappa(G)$.

*Komplement grafa $G$* je graf $\overline{G}$, za katerega velja $V(\overline{G}) = V(G)$ in $E(\overline{G}) =$

$\{uv\,;\, u,v \in V(G), u \neq v$ in $uv \notin E(G)\}$. *Povezavni graf* $L(G)$ grafa $G$ je graf z $V(L(G)) = E(G)$, kjer sta dve točki $e_1, e_2 \in V(L(G))$ povezani natanko tedaj, ko imata povezavi $e_1, e_2 \in E(G)$ skupno krajišče. *Disjunktna unija* grafov $G$ in $H$ z $V(G) \cap V(H) = \emptyset$, označimo jo z $G + H$, je graf, za katerega velja $V(G+H) = V(G) \cup V(H)$ in $E(V+H) = E(G) \cup E(H)$. S $kG$ označimo disjunktno unijo $k$ kopij grafa $G$. *Spoj* grafov $G$ in $H$, označimo ga z $G * H$, je graf, ki ga dobimo tako, da disjunktni uniji grafov $G$ in $H$ dodamo vse povezave oblike $\{uv\,;\, u \in V(G)$ in $v \in V(H)\}$. *Kartezični produkt* grafov $G$ in $H$, označimo ga z $G \Box H$, je graf z $V(G \Box H) = \{(u,x)\,;\, u \in V(G)$ in $x \in V(H)\}$ in $E(V \Box H) = \{(u,x)(v,y)\,;\, (u,x),(v,y) \in V(G) \times V(H)$ in $u = v$ ter $xy \in E(H)$ ali $x = y$ ter $uv \in E(G)\}$. Primer kartezičnega produkta grafov $G = P_3$ in $H = P_4$ lahko vidimo na sliki 2.1 levo. *Direktni produkt* (ali *tenzorski produkt*) grafov $G$ in $H$, označimo ga z $G \times H$, je graf z $V(G \times H) = \{(u,x)\,;\, u \in V(G)$ in $x \in V(H)\}$ in $E(V \times H) = \{(u,x)(v,y)\,;\, uv \in E(G)$ in $xy \in E(H)\}$. Primer direktnega produkta grafov $G = P_3$ in $H = P_4$ lahko vidimo na sliki 2.1 desno. Oba omenjena produkta sta komutativna, tj. $G \Box H \cong H \Box G$ in $G \times H \cong H \times G$ [52].




Slika 2.1: Grafa $P_3$ in $P_4$ ter njun kartezični produkt (levo) in direktni produkt (desno).

Za množico grafov $\mathcal{F}$ pravimo, da je dani graf $\mathcal{F}$*-prost*, če ne vsebuje nobenega induciranega podgrafa, izomorfnega kakemu grafu iz množice $\mathcal{F}$.

Grafe, ki ustrezajo določenemu pogoju (oz. imajo neko skupno lastnost), združimo v t.i. *razred grafov*. Formalno je razred grafov množica grafov, zaprta za izomorfizem, tj. taka množica $X$ grafov, da iz $G \in X$ in $G \cong H$ sledi $H \in X$. Pravimo, da je razred grafov *hereditaren*, če je zaprt za inducirane podgrafe. Primer lastnosti, ki nam ne da hereditarnega razreda grafov, je npr. povezanost. Pri preučevanju hereditarnih razredov grafov nam je v pomoč naslednja dobro znana opazka.

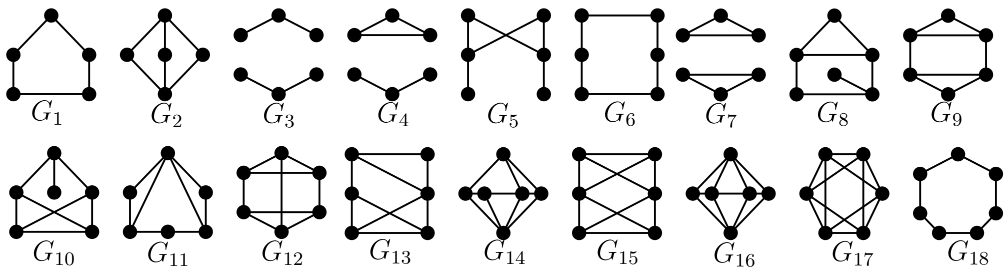
**Trditev 2.1** (folklora)**.** *Naj bo $\mathcal{A}$ razred $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$-prostih grafov in $\mathcal{B}$ razred $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$-prostih grafov. Potem je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ če in samo če za vsak graf $G \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ obstaja tak graf $H \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, da je graf $H$ induciran podgraf grafa $G$.*

*Dokaz.* Predpostavimo najprej, da je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ in da graf $G \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ nima kot induciranega nobenega grafa iz $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. To pomeni, da je $G \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Ker pa je po drugi strani $G \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$, nas to privede do protislovja.

Predpostavimo sedaj, da ima vsak graf iz $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ nek graf iz $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ kot induciran podgraf. Naj bo $G \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$. Ker graf $G$ ne pripada razredu $\mathcal{B}$, vsebuje $G$ nek induciran podgraf $H \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$. Po predpostavki vsebuje torej graf $H$ induciran podgraf $K \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. Graf $K$ je torej tudi induciran podgraf grafa $G$, kar pa je v protislovju s tem, da je $G \in \mathcal{A}$. $\square$

*Pot* na $n$ točkah $P_n$ je graf z $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ in $E(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$. *Pot v grafu* $G$ je podgraf grafa $G$ izomorfen kakšni poti. Poti v grafu, kjer je $v_1 = x$ in $v_n = y$ pravimo tudi $x-y$ *pot*. *Cikel* na $n$ točkah $C_n$ je graf z $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ in $E(C_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$. *Drevo* je povezan graf brez ciklov. Disjunktni uniji dreves pravimo *gozd*. *Poln graf* na $n$ točkah je graf, v katerem so vse točke paroma povezane, označimo ga s $K_n$. Če lahko točke grafa razdelimo na kliko $K$ in neodvisno množico $I$, za kateri velja $K \cap I = \emptyset$, imamo opravka z *razcepljenimi grafi*. Graf je *dvodelen*, če lahko njegove točke razdelimo v dve (disjunktni, morebiti prazni) neodvisni množici. Ko med takima neodvisnima množicama točk obstajajo vse možne povezave, govorimo o *polnem dvodelnem grafu* oblike $K_{m,n}$, pri čemer indeksa $m$ in $n$ označujeta velikosti posameznih množic točk. Polnemu dvodelnemu grafu $K_{1,n}$ pravimo *zvezda*. Pravimo, da je graf *tetiven*, če je $\{C_4, C_5, C_6, \dots\}$-prost. $(1,2)$*-polarni grafi* so tisti grafi, katerih množico točk lahko razdelimo v množici $K$ in $L$ tako, da je $K$ klika in $L$ inducira podgraf maksimalne stopnje kvečjemu 1. Gagarin in Metelsky sta v [42] podala karakterizacijo $(1,2)$-polarnih grafov s pomočjo prepovedanih induciranih podgrafov.

**Izrek 2.2** (Gagarin, Metelsky [42])**.** *Razred* $(1, 2)$*-polarnih grafov sovpada z razredom vseh* $\{G_1, G_2, \ldots, G_{18}\}$*-prostih grafov, kjer so* $G_1, \ldots, G_{18}$ *grafi na sliki 2.2.*

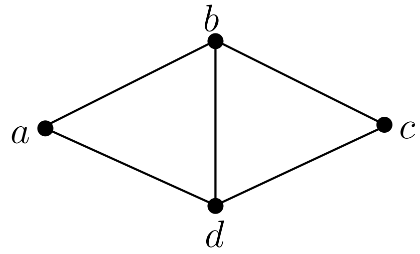



Slika 2.2: Prepovedani inducirani podgrafi za razred $(1, 2)$-polarnih grafov.

V nadaljevanju podajamo nekaj znanih rezultatov, ki zajemajo razrede pragovnih grafov, ekvistabilnih grafov in dominantno pragovnih grafov. Definicije vseh treh razredov slonijo na obstoju utežne funkcije, ki točkam danega grafa dodeli take nenegativne realne uteži, da lahko z njihovo pomočjo karakteriziramo podmnožice točk grafa, ki ustrezajo obravnavani lastnosti. Naj na tem mestu omenimo, da so tako podane definicije ekvivalentne splošnemu okvirju, ki je bil predstavljen v uvodu. Teorija linearnega programiranja [24, 90] nam pove, da lahko dane realne uteži vedno pretvorimo v celoštevilske.

## 2.2 Neodvisne množice, pragovni grafi in ekvistabilni grafi

Spomnimo se, da je neodvisna množica v grafu $G = (V, E)$ taka podmnožica točk $S \subseteq V$, ki vsebuje le paroma nesosedne točke. Pravimo, da je neodvisna množica *maksimalna*, ko ji ne moremo dodati nobene točke, ne da bi s tem izgubili pogoj neodvisnosti, neodvisni množici največje možne velikosti pa pravimo *največja neodvisna množica*. Velikosti največje neodvisne množice v grafu $G$ pravimo tudi *neodvisnostno število* grafa $G$, označimo ga z $\alpha(G)$. Očitno je vsaka največja neodvisna množica poljubnega grafa $G$ tudi maksimalna neodvisna množica, obratna trditev pa v splošnem ne drži.




Slika 2.3: Diamant.

**Primer 2.3.** *V diamantu (na sliki 2.3) so množice* $\{a, c\}, \{b\}$ *in* $\{d\}$ *maksimalne neodvisne množice, medtem ko samo množica* $\{a, c\}$ *predstavlja tudi največjo neodvisno množico tega grafa.*

Pri preučevanju neodvisnih množic v grafu se lahko vprašamo, kateri grafi omogočajo, da točkam dodelimo uteži, s pomočjo katerih bi neodvisne množice točk na preprost način ločili od preostalih podmnožic točk [25]. V tem primeru želimo točkam $v \in V(G)$ dodeliti take nenegativne uteži $w(v)$, da bo za vsak $S \subseteq V$ veljalo: $S$ je neodvisna množica v grafu $G$ natanko tedaj, ko velja $w(S) := \sum_{v \in S} w(v) \leq t$, kjer $t \in \mathbb{R}_+$ predstavlja prag (ki ga ne smemo preseči). Funkciji $w$ pravimo *pragovna funkcija* grafa $G$, grafom, ki dopuščajo tako dodelitev uteži, pa *pragovni grafi*. Pragovni grafi in posplošitve le-teh so bili ekstenzivno študirani v [26, 54, 72, 74, 82, 84, 98], ta literatura pa nam ponudi tudi mnogo alternativnih karakterizacij pragovnih grafov. Ena izmed karakterizacij je podana v naslednjem izreku.

**Izrek 2.4** (Chvátal, Hammer [26])**.** *Za vsak graf* $G$ *so naslednje trditve ekvivalentne:*

1. *$G$ je pragoven graf.*
2. *$G$ je $\{2K_2, P_4, C_4\}$-prost.*
3. *Točke grafa $G$ lahko razdelimo v disjunktni množici $I$ in $K$, kjer je $I$ neodvisna množica in $K$ klika, pri čemer lahko točke v množici $I$ linearno uredimo kot $v_1, v_2, \ldots, v_k$, tako da velja $N(v_1) \subseteq N(v_2) \subseteq \cdots \subseteq N(v_k)$.*
4. *Graf $G$ lahko dobimo iz praznega grafa tako, da mu zaporedoma dodajamo po eno izolirano ali dominantno točko.*

S pomočjo neodvisnih množic so definirani tudi nekateri drugi grafovski razredi. Pravimo, da je graf $G = (V, E)$ *ekvistabilen* če in samo če obstaja taka funkcija $w : V \to \mathbb{R}_+$, da za vse podmnožice točk $S \subseteq V$ velja, da je $S$ maksimalna neodvisna množica grafa $G$ natanko tedaj ko je $w(S) = 1$ [82]. Mahadev idr. so leta 1994 v [73] definirali podrazred ekvistabilnih grafov in ga poimenovali krepko ekvistabilni grafi. Za graf $G = (V, E)$ označimo s $\mathcal{S}(G)$ množico vseh maksimalnih neodvisnih množic grafa $G$ in s $\mathcal{T}(G)$ množico vseh ostalih nepraznih podmnožic točk grafa $G$. Pravimo, da je graf $G$ *krepko ekvistabilen*, če za vsako množico $T \in \mathcal{T}(G)$ in za vsak $\gamma \leq 1$ obstaja taka funkcija $w : V \to \mathbb{R}_+$, da je $w(S) = 1$ za vse $S \in \mathcal{S}(G)$ in $w(T) \neq \gamma$. Mahadev idr. so dokazali, da je vsak krepko ekvistabilen graf tudi ekvistabilen [73] in postavili domnevo, da velja tudi obrat te trditve. Domneva je bila pred kratkim ovržena [78].

## 2.3 Dominantne množice in dominantno pragovni grafi

*Dominantna množica* $S \subseteq V$ je taka podmnožica točk grafa $G$, za katero velja $\cup_{v \in S} N_G[v] = V$. Pravimo, da je dominantna množica *minimalna*, ko ji ne moremo odvzeti nobene točke, ne da bi s tem izgubili pogoj dominantnosti, dominantni množici najmanjše možne moči pa pravimo *najmanjša dominantna množica*.

Podobno kot za neodvisne množice se lahko tudi za dominantne množice vprašamo, kateri grafi omogočajo, da točkam dodelimo uteži, s pomočjo katerih bi dominantne množice na preprost način ločili od preostalih (tj. nedominantnih) podmnožic točk [6]. V tem primeru želimo točkam $v \in V(G)$ dodeliti take nenegativne uteži $w(v)$, da bo veljalo: $S$ je dominantna množica v grafu $G$ natanko tedaj, ko je $w(S) \geq t$, kjer $t \in \mathbb{R}_+$ predstavlja prag (ki ga moramo preseči). Funkciji $w$ pravimo *dominantno pragovna funkcija* grafa $G$, grafom, ki dopuščajo tako dodelitev uteži, pa *dominantno pragovni* grafi.

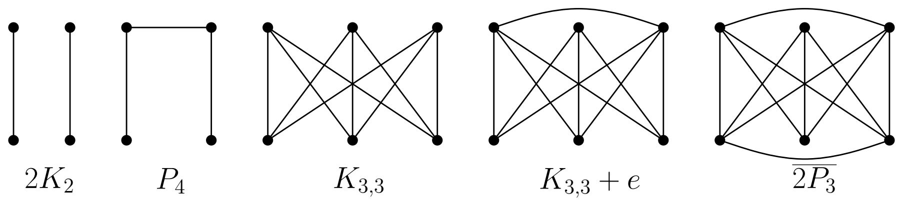
Opazimo lahko, da vsak graf premore dominantno množico, vendar pa odločitveni problem, ali ima dani graf $G$ dominantno množico velikosti največ $k$ (pravimo mu tudi *problem dominacije*), spada v razred NP-polnih problemov [43]. Za NP-polne probleme se domneva, da ne obstajajo učinkoviti algoritmi; razrešitev te znamenite domneve je vredna milijon dolarjev [79]. Če je graf $G$ podan skupaj s celoštevilsko dominantno pragovno funkcijo, lahko s pomočjo dinamičnega programiranja [77] problem dominacije rešimo v psevdopolinomskem času.

Opazimo lahko, da je definicija dominantno pragovnega grafa podobna definiciji pragovnega grafa, a ker tu govorimo o dominantnih množicah (namesto o neodvisnih), je neenakost v pogoju obrnjena. Družina vseh neodvisnih množic danega grafa je namreč zaprta za odstranjevanje točk, družina vseh dominantnih množic grafa pa za dodajanje točk.

Strukturo dominantno pragovnih grafov natančno podaja naslednja karakterizacija.

**Izrek 2.5** (Benzaken, Hammer [6])**.** *Za vsak graf $G$ so naslednje trditve ekvivalentne:*

1. *$G$ je dominantno pragoven graf.*
2. *$G$ je $\{2K_2, P_4, K_{3,3}, K_{3,3}+e, \overline{2P_3}\}$-prost. (Glej sliko 2.4.)*
3. *Graf $G$ lahko dobimo iz praznega grafa tako, da zaporedoma dodajamo po eno izolirano ali dominantno točko ali naredimo spoj z grafom $K_1$.*




Slika 2.4: Prepovedani inducirani podgrafi za razred dominantno pragovnih grafov.

Glede na to, da sta tako razred pragovnih grafov kot razred dominantno pragovnih grafov hereditarna, lahko iz podane karakterizacije in trditve 2.1 sklepamo, da je razred pragovnih grafov vsebovan v razredu dominantno pragovnih grafov.

## 2.4 Prirejanja in $k$-razširljivost

Množici paroma disjunktnih povezav v grafu $G$ pravimo *prirejanje*. Če imamo v grafu $G = (V, E)$ dano prirejanje $M \subseteq E$, pravimo, da je točka $v \in V$ *pokrita s* *prirejanjem* $M$, če je točka $v$ krajišče neke povezave v $M$. Množico krajišč vseh povezav iz $M$ bomo označili z $V(M)$. Za dani prirejanji $M$ in $M'$ v grafu $G$ pravimo, da lahko $M$ *razširimo* do $M'$, če je $M \subseteq M'$. Prirejanju, ki sestoji iz natanko $k$ povezav, pravimo $k$*-prirejanje*. Pravimo, da je prirejanje $M$ v grafu $G$ *popolno*, če so vse točke grafa $G$ pokrite s prirejanjem $M$ in *popolno notranje*, če je vsaka točka, ki ni pokrita s prirejanjem $M$ list (tj. točka stopnje 1). Več o popolnih notranjih prirejanjih lahko najdemo v [3–5] in v tam citiranih referencah. Potreben in zadosten pogoj za obstoj popolnega prirejanja je že leta 1947 podal Tutte in je danes znan kot Tutte-ov izrek (*"Tutte's Theorem"*), ki ga navajamo v nadaljevanju. Oznaka $c_\ell(G-S)$ bo v nadaljevanju uporabljena za število lihih povezanih komponent grafa $G-S$.

**Izrek 2.6** (**Tutte-ov izrek**, [94]). *Graf $G$ vsebuje popolno prirejanje če in samo če je $c_\ell(G-S) \leq |S|$ za vsako množico $S \subseteq V(G)$.*

Povezan graf $G$ je $k$*-razširljiv*, če vsebuje prirejanje velikosti $k$ ter lahko vsako $k$-prirejanje razširimo do popolnega prirejanja [85].

Little idr. [70] so leta 1975 ob preučevanju posebnega tipa prirejanj v grafih podali izrek, ki se izkaže za zelo podobnega Tutte-ovemu, ko ga prevedemo na razširljivost grafov. V nadaljevanju navajamo omenjeni izrek, kot ga je podal Yu [99].

**Izrek 2.7** (Yu [99]). *Naj bo $G$ graf na sodo mnogo točkah. Potem je graf $G$ 1-razširljiv če in samo če za vsako podmnožico točk $S \subseteq V(G)$ veljata naslednja pogoja:*

1. $c_\ell(G-S) \leq |S|$ *in*

2. *če je* $c_\ell(G-S) = |S|$, *potem je* $S$ *neodvisna množica.*

Glede na definicijo $k$-razširljivosti lahko opazimo, da so 0-razširljivi natanko tisti povezani grafi, ki vsebujejo neko popolno prirejanje ter 1-razširljivi tisti povezani grafi z vsaj eno povezavo, katerih vsaka povezava je vsebovana v nekem popolnem prirejanju.

## 2.5 Boolove funkcije

Naj bo $n$ pozitivno celo število. *Boolova funkcija* v $n$ spremenljivkah je preslikava $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Za dana vektorja $x, y \in \{0,1\}^n$ pišemo $x \leq y$, če je $x_i \leq y_i$ za vsak $i \in [n]$, kjer je $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Pravimo, da je Boolova funkcija $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *pozitivna* ali *monotona*, če je $f(x) \leq f(y)$ za vsaka dva vektorja $x, y \in \{0,1\}^n$, kjer je $x \leq y$. Z $\overline{x}$ označimo vektor $\overline{x} \in \{0,1\}^n$, podan z $\overline{x}_i = 1 - x_i$ za vsak $i \in [n]$. *Disjunktivna normalna oblika* (krajše DNO) Boolove funkcije je izraz oblike

$$\bigvee_{k=1}^{m} c_k = \bigvee_{k=1}^{m} \left( \bigwedge_{i \in A_k} x_i \wedge \bigwedge_{j \in B_k} \overline{x_j} \right),$$

kjer je vsak $c_k$ elementarna konjunkcija (*člen*) in sta $A_k$ in $B_k$ disjunktni množici indeksov. Običajno v zapisu posameznih členov funkcije znake za konjunkcijo izpuščamo (tj. $x_1 \wedge x_2$ enostavno zapišemo kot $x_1 x_2$). DNO je *popolna*, če noben člen v zapisu Boolove funkcije ne absorbira kakšnega drugega člena, kjer je *absorbcija* definirana z zaporedno uporabo pravila $x_1 \vee (x_1 x_2) = x_1$.

Naj bo $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ Boolova funkcija in $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Funkcija $f$ *ni odvisna od spremenljivke* $x_i$, če za vsak $x \in \{0,1\}^n$ velja enakost $f_{|x_i=1} = f_{|x_i=0}$, kjer sta $f_{|x_i=1}$ in $f_{|x_i=0}$ zožitvi funkcije $f$ na $x_i = 1$ oz. $x_i = 0$ (tj. $f_{|x_i=1}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ in podobno je $f_{|x_i=0}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$). V nasprotnem primeru je funkcija $f$ *odvisna od spremenljivke* $x_i$.

Pozitivna Boolova funkcija je *pragovna*, če obstajajo take nenegativne realne uteži $w = (w_1, \ldots, w_n)$ in tako nenegativno realno število $t$, da za vsak $x \in \{0,1\}^n$ velja $f(x) = 0$ če in samo če je $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq t$ (glej [29]). Takemu paru $(w, t)$ pravimo *separacijska struktura* funkcije $f$. Vsaka pragovna Boolova funkcija ima separacijsko strukturo, ki je celoštevilska [29]. Vektorje, za katere funkcija $f$ zavzame vrednost 1, imenujemo *pravilne točke* funkcije $f$, vektorje, pri katerih funkcija $f$ zavzame vrednost 0, pa *nepravilne točke* funkcije $f$. Pravimo, da je točka $x$ *minimalna pravilna točka* funkcije $f$, če je $x$ pravilna točka funkcije $f$ in ne obstaja taka pravilna točka $y$ funkcije $f$, da je $y \leq x$ in $x \neq y$. Podobno pravimo, da je $x$ *maksimalna nepravilna točka* funkcije $f$, če je $x$ nepravilna točka funkcije $f$ in ne obstaja taka nepravilna točka $y$ funkcije $f$, da je $x \leq y$ in $x \neq y$.

Iz geometrijskega vidika so pragovne funkcije natanko tiste pozitivne Boolove funkcije $f$, katerih množici pravilnih in nepravilnih točk lahko ločimo z neko hiperravnino $\{x \in \mathbb{R}^n\, ; \sum_{i=1}^n w_i x_i = t\}$, ki jo imenujemo *separator* funkcije $f$ (pri tem predpostavimo, da je $(w,t)$ separacijska struktura funkcije $f$).

**Primer 2.8.** *Funkcija* $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 \vee x_2x_3$ *je pragovna funkcija. Njen separator je* $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3\, ; 2x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$*, njena separacijska struktura pa je npr.* $(2,1,1,1)$.

Omenimo še, da lahko pragovne Boolove funkcije študiramo v splošnem (tj. z utežmi $w_1,\ldots,w_n \in \mathbb{R}$, ki niso nujno nenegativne), vendar se lahko, brez škode za splošnost, omejimo na pozitivne Boolove funkcije [29], kar bo za potrebe disertacije povsem zadoščalo. Boolovi funkciji $f$ lahko priredimo *dualno funkcijo* $f^d$, definirano kot: $f^d(x) = \overline{f(\overline{x})}$ za vse $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \{0,1\}^n$, kjer je $\overline{x} = (\overline{x_1},\overline{x_2}\ldots,\overline{x_n})$. Če je $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ pragovna funkcija in je $(w_1,\ldots,w_n,t)$ neka njena celoštevilska separacijska struktura, potem je tudi $f^d$ pragovna funkcija, s separacijsko strukturo $(w_1,\ldots,w_n,\sum_{i=1}^n w_i - t - 1)$ [29].

Za množico $V$ in vektor $x \in \{0,1\}^V$ je množica $S(x) = \{v \in V\, ; x_v = 1\}$ *nosilec* vektorja $x \in \{0,1\}^V$. Z $x^S$ označujemo *karakteristični vektor* množice $S$, tj.

$$x_i^S = \begin{cases} 1, & \text{če } i \in S; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Očitno za vse $T \subseteq V$ velja $S(x^T) = T$, za vse $v \in \{0,1\}^V$ pa $x^{S(v)} = v$.

Pragovne Boolove funkcije sta Chow [23] in Elgot [40] karakterizirala na sledeč način. Za $k \geq 2$ pravimo, da je pozitivna Boolova funkcija $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *k-sumabilna*, če za nek $r \in \{2,\ldots,k\}$ obstaja $r$ (ne nujno različnih) pravilnih točk funkcije $f$, recimo $x^1,x^2,\ldots,x^r$ in $r$ (ne nujno različnih) nepravilnih točk funkcije $f$, recimo $y^1,y^2,\ldots,y^r$, da velja $\sum_{i=1}^r x^i = \sum_{i=1}^r y^i$. Pravimo, da je funkcija $f$ *k-asumabilna*, če ni $k$-sumabilna in je *asumabilna*, če je $k$-asumabilna za vsak $k \geq 2$.

**Izrek 2.9** (Chow [23] in Elgot [40], glej tudi [29, izrek 9.14])**.** *Pozitivna Boolova funkcija je pragovna natanko tedaj, ko je asumabilna.*

Odločitveni problem, ali je pozitivna Boolova funkcija, podana s popolno disjunktivno normalno obliko (DNO) pragovna, lahko rešimo v polinomskem času z uporabo dualnosti Boolovih funkcij in linearnega programiranja. Rezultat je povzet v naslednjem izreku.

**Izrek 2.10** (Peled, Simeone [84], glej tudi [29, izrek 9.16])**.** *Obstaja algoritem polinomske časovne zahtevnosti, ki na podlagi popolne DNO pozitivne Boolove funkcije $f(x_1, \ldots, x_n)$ odloči, ali je $f$ pragovna. V primeru pozitivnega odgovora algoritem tudi poda celoštevilsko separacijsko strukturo funkcije $f$.*

Ena izmed lastnosti pragovnih Boolovih funkcij je ta, da uteži $w_1, \ldots, w_n$ naravno določajo neko razvrstitev spremenljivk, ki opisuje relativni "vpliv" spremenljivk na vrednost funkcije. Natančneje, če je $w_i \geq w_j$, potem je "bolj verjetno", da bo vrednost funkcije enaka 1, ko je $x_i = 1$ in $x_j = 0$, kot ko je $x_i = 0$ in $x_j = 1$. Koncept relativnega vpliva (ali moči) spremenljivk lahko razširimo na splošne Boolove funkcije, kot sledi. Naj bo $f(x_1, \ldots, x_n)$ Boolova funkcija in naj bosta $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Pravimo, da je spremenljivka $x_i$ *močnejša* od spremenljivke $x_j$ glede na funkcijo $f$, in to zapišemo kot $x_i \succsim_f x_j$, če je bodisi $i = j$ ali je $f_{|x_i=1,x_j=0} \geq f_{|x_i=0,x_j=1}$. Spomnimo, da je relacija *navidezne urejenosti* binarna relacija, ki je refleksivna in tranzitivna.

**Izrek 2.11** (Crama, Hammer [29, izrek 8.2])**.** *Relacija moči navidezno ureja množico spremenljivk vsake Boolove funkcije.*

Naslednji izrek nam pove, da je relacija moči, ko imamo opravka s pragovnimi funkcijami, strogo sovisna (tj. vsaki dve spremenljivki sta primerljivi).

**Izrek 2.12** (Crama, Hammer [29, izrek 8.3])**.** *Če je $f(x_1, \ldots, x_n)$ pragovna funkcija s separacijsko strukturo $(w_1, \ldots, w_n, t)$ in je $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n$, potem je $x_1 \succsim_f x_2 \succsim_f \cdots \succsim_f x_n$.*

Pozitivna Boolova funkcija je *regularna*, če je relacija moči strogo sovisna. Natančneje, pravimo, da je $f(x_1, \ldots, x_n)$ regularna glede na $(x_1, \ldots, x_n)$, če velja $x_1 \succsim_f x_2 \succsim_f \cdots \succsim_f x_n$. Vsaka pozitivna pragovna Boolova funkcija je torej regularna. Odločitveni problem, ali je pozitivna Boolova funkcija, podana s popolno disjunktivno normalno obliko regularna, je polinomsko rešljiv, kot nam pove naslednji izrek.

**Izrek 2.13** (Crama, Hammer [29, izrek 8.16]). *Obstaja algoritem polinomske časovne zahtevnosti, ki na podlagi popolne DNO pozitivne Boolove funkcije* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *odloči, ali je* $f$ *regularna.*

Za razumevanje algoritma omenjenega v izreku 2.10, ki bo podan v nadaljevanju (algoritem 1), potrebujemo še naslednji izrek, ki problem prepoznavanja pragovnih funkcij prevede na linearno programiranje:

**Izrek 2.14** (Crama, Hammer [29, izrek 9.13]). *Pozitivna Boolova funkcija z maksimalnimi nepravilnimi točkami* $x^1, x^2, \ldots, x^p$ *in minimalnimi pravilnimi točkami* $y^1, y^2, \ldots, y^m$ *je pragovna če in samo če ima sistem neenakosti*

$$(TS) \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^j \leq t, & j = 1, 2, \ldots, p; \\ \sum_{i=1}^{n} w_i y_i^j \geq t + 1, & j = 1, 2, \ldots, m; \\ w_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

*rešitev* $(w_1, w_2, \ldots, w_n, t)$. *V tem primeru je vsaka rešitev sistema (TS) separacijska struktura obravnavane funkcije.*

Sistem (TS) lahko rešimo v polinomskem času z uporabo poljubnega algoritma polinomske časovne zahtevnosti za linearno programiranje (npr. z elipsoidno metodo [47, 50]). Sistem (TS) pa sestavimo v polinomskem času v dveh korakih: (i) preverimo, ali je vhodna funkcija regularna, in (ii) če je, jo dualiziramo. Dualizacija funkcije $f$ v spodnjem algoritmu je izvedena s pomočjo algoritma DualReg, opisanega v [29], ki teče v polinomskem času. Algoritem DualReg iz seznama minimalnih pravilnih točk regularne funkcije $f$ izračuna seznam maksimalnih nepravilnih točk funkcije $f$.

**Algoritem 1:** Algoritem polinomske časovne zahtevnosti za prepoznavanje pragovnih Boolovih funkcij

**Vhod**: Popolna DNO pozitivne Booolove funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

**Izhod**: NE, če $f$ ni pragovna; separacijska struktura funkcije $f$, sicer.

```
če funkcija f ni regularna potem
    vrni NE;
sicer
    dualiziraj funkcijo f;
    vzpostavi sistem (TS);
    reši (TS);
    če (TS) nima rešitve potem
        vrni NE;
    sicer
        vrni rešitev (w_1, w_2, ..., w_n, t) sistema (TS)
```

Obstoj "popolnoma kombinatoričnega" algoritma, ki bi v polinomskem času podal odgovor na problem prepoznavanja pragovnih funkcij, je še vedno odprt problem [29].

## 2.6 Hipergrafi

*Hipergraf* je par $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$, kjer je $V$ končna množica *točk* in $\mathcal{E}$ končna množica podmnožic množice $V$, ki jim pravimo *(hiper)povezave* [7]. Hipergraf $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ je *pragoven*, če obstajata taka utežna funkcija $w : V \to \mathbb{R}_+$ in tak prag $t \in \mathbb{R}_+$, da za vsako podmnožico $X \subseteq V$ velja $w(X) \leq t$ če in samo če $X$ ne vsebuje nobene povezave hipergrafa $\mathcal{H}$ [45]. Paru $(w, t)$ pravimo *separacijska struktura* hipergrafa $\mathcal{H}$.

Vsak hipergraf $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ lahko na zelo naraven način povežemo s pozitivno Boolovo funkcijo $f_{\mathcal{H}} : \{0,1\}^V \to \{0,1\}$, definirano s pozitivno DNO

$$f_{\mathcal{H}}(x) = \bigvee_{e \in \mathcal{E}} \bigwedge_{u \in e} x_u \tag{2.1}$$

za vse $x \in \{0,1\}^V$. Ravno tako lahko vsaki pozitivni Boolovi funkciji $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ podani s popolno DNO $\phi = \vee_{j=1}^m \wedge_{i \in C_j} x_i$ priredimo hipergraf $\mathcal{H}(\phi) = (V, \mathcal{E})$ na sledeč način: $V = [n]$ in $\mathcal{E} = \{C_1, \ldots, C_m\}$. Neposredno iz definicije sledi, da sta pragovnost hipergrafov in Boolovih funkcij povezani, kot sledi.

**Trditev 2.15.** *Hipergraf $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ je pragoven če in samo če je pozitivna Boolova funkcija $f_{\mathcal{H}}$ pragovna. Pozitivna Boolova funkcija, podana s popolno DNO $\phi = \bigvee_{j=1}^m \bigwedge_{i \in C_j} x_i$, je pragovna če in samo če je hipergraf $\mathcal{H}(\phi)$ pragoven.*

Poleg tega dobimo, s prevedbo karakterizacije pozitivnih Boolovih funkcij, podane v izreku 2.9, v jezik hipergrafov, naslednjo karakterizacijo pragovnih hipergrafov. Za $k \geq 2$ pravimo, da je hipergraf $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ *$k$-sumabilen*, če za nek $r \in \{2, \ldots, k\}$ obstaja takih $r$ (ne nujno različnih) podmnožic točk $A_1, \ldots, A_r$, da vsak $A_i$ vsebuje (kot podmnožico) vsaj eno povezavo hipergrafa $\mathcal{H}$, in takih $r$ (ne nujno različnih) podmnožic točk $B_1, \ldots, B_r$, da vsak $B_i$ ne vsebuje (kot podmnožico) nobene povezave hipergrafa $\mathcal{H}$, da za vsako točko $v \in V$ velja

$$|\{i\,;\, v \in A_i\}| = |\{i\,;\, v \in B_i\}|. \tag{2.2}$$

Pravimo, da je hipergraf $\mathcal{H}$ *$k$-asumabilen*, če ni $k$-sumabilen, in *asumabilen*, če je $k$-asumabilen za vsak $k \geq 2$.

**Posledica 2.16.** *Hipergraf $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ je pragoven če in samo če je asumabilen.*

*Dokaz.* Gre za direktno posledico trditve 2.15, izreka 2.9 in definicije asumabilnosti. □

Hipergraf $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ je *Spernerjev*, če nobena povezava hipergrafa $\mathcal{H}$ ne vsebuje kakšne druge povezave hipergrafa $\mathcal{H}$ ali, ekvivalentno, če za vsaki dve različni povezavi $e, f \in \mathcal{E}$ velja, da je $\min\{|e \setminus f|, |f \setminus e|\} \geq 1$. To motivira naslednjo definicijo.

**Definicija 2.17.** *Pravimo, da je hipergraf $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ dualno Spernerjev, če za vsaki dve različni povezavi $e, f \in \mathcal{E}$ velja, da je $\min\{|e \setminus f|, |f \setminus e|\} \leq 1$.*

Zgoraj definiran razred hipergrafov nam bo (skupaj z naslednjo trditvijo) prišel zelo prav pri karakterizaciji hereditarnih različic v nadaljevanju obravnavanih grafovskih razredov.

**Trditev 2.18.** *Vsak dualno Spernerjev hipergraf je pragoven.*

*Dokaz.* Da bi prišli do protislovja, predpostavimo, da obstaja dualno Spernerjev hipergraf $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$, ki ni pragoven. Po posledici 2.16 obstajajo tako celo število $k \geq 2$, takih $k$ (ne nujno različnih) podmnožic točk $A_1, \ldots, A_k$, da vsaka od njih vsebuje vsaj eno povezavo hipergrafa $\mathcal{H}$ in takih $k$ (ne nujno različnih) podmnožic točk $B_1, \ldots, B_k$, da nobena od njih ne vsebuje nobene povezave hipergrafa $\mathcal{H}$, da je za vsako točko $v \in V$ izpolnjen pogoj (2.2). Za vsak $i \in [k]$ označimo z $e_i$ poljubno (a fiksno) povezavo hipergrafa $\mathcal{H}$, ki je vsebovana v $A_i$. Naj bo $i^* \in [k]$ tak, da velja $|e_{i^*}| \leq |e_i|$ za vse $i \in [k]$. To implicira, da za vsak $i \in [k]$ velja $|e_{i^*} \setminus e_i| \leq |e_i \setminus e_{i^*}|$, in ker je $\mathcal{H}$ dualno Spernerjev, to dalje implicira

$$|e_{i^*} \setminus e_i| \leq 1 \tag{2.3}$$

za vsak $i \in [k]$. Po drugi strani pa, ker noben $B_i$ ne vsebuje povezave $e_{i^*}$, velja za vsak $i \in [k]$ neenakost

$$1 \leq |e_{i^*} \setminus B_i| \,. \tag{2.4}$$

Če sedaj seštejemo neenakosti (2.3) za vse $i \in [k]$, dobimo $k \leq \sum_{i\in[k]} |e_{i^*} \setminus B_i|$, kar implicira sledeče (protislovno) zaporedje enakosti in neenakosti

$$\begin{aligned} k &\leq \sum_{i\in[k]} |e_{i^*} \setminus B_i| = \sum_{i\in[k]} \sum_{v\in e_{i^*}\setminus B_i} 1 = \sum_{v\in e_{i^*}} \sum_{i\,;\, v\notin B_i} 1 = \sum_{v\in e_{i^*}} (k - |\{i\,;\, v \in B_i\}|) \\ &= \sum_{v\in e_{i^*}} (k - |\{i\,;\, v \in A_i\}|) = \sum_{v\in e_{i^*}} \sum_{i\,;\, v\notin A_i} 1 = \sum_{i\in[k]} \sum_{v\in e_{i^*}\setminus A_i} 1 = \sum_{i\in[k]} |e_{i^*} \setminus A_i| \\ &\leq \sum_{i\in[k]} |e_{i^*} \setminus e_i| = \sum_{\substack{i\in[k]\\ i\neq i^*}} |e_{i^*} \setminus e_i| \leq \sum_{\substack{i\in[k]\\ i\neq i^*}} 1 = k - 1\,. \end{aligned}$$

Prva enakost v drugi vrstici sledi iz pogoja (2.2), medtem ko prva neenakost v tretji vrstici sledi iz dejstva, da je $e_i \subseteq A_i$, kar implicira $e_{i^*} \setminus A_i \subseteq e_{i^*} \setminus e_i$. Zadnja neenakost sledi iz (2.2).

S tem protislovjem smo zaključili dokaz. □

Omenimo še, da lahko dualno Spernerjeve hipergrafe študiramo tudi povsem samostojno. Primer najdemo v članku Boros idr. [12], kjer je tudi podan alternativen (konstruktiven) dokaz zgornje trditve. (V članku [12] je sicer študiran razred t.i. 1-Spernejevih hipergrafov, ki so definirani kot tisti hipergrafi, ki so hkrati Spernerjevi in dualno Spernerjevi.)

# 3
# TOTALNO DOMINANTNO PRAGOVNI GRAFI

*Totalno dominantna množica* (krajše: TD množica) grafa $G = (V, E)$ je taka podmnožica točk $S \subseteq V$, za katero velja, da ima vsaka točka grafa $G$ soseda v $S$. Očitno je, da TD množice obstajajo le za grafe brez izoliranih točk.

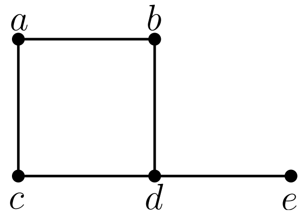
**Definicija 3.1.** *Pravimo, da je graf $G = (V, E)$* totalno dominantno pragoven *(krajše: TDP), če obstaja tak par $(w, t)$, kjer je $w : V \to \mathbb{R}_+$ utežna funkcija in $t \in \mathbb{R}_+$ prag, da za vsako podmnožico $S \subseteq V$ velja $w(S) := \sum\limits_{x \in S} w(x) \geq t$, če in samo če je $S$ totalno dominantna množica v grafu $G$. Poljubnemu takemu paru $(w, t)$ pravimo* totalno dominatno pragovna struktura *grafa $G$.*

**Primer 3.2.** *Vsak poln graf je TDP, saj je podmnožica $S \subseteq V(K_n)$ TD množica grafa $K_n$ natanko tedaj, ko je $|S| = 2$. Posledično je par $(w, 2)$, kjer je $w(v) = 1$ za vsak $v \in V(K_n)$, totalno dominantno pragovna struktura grafa $K_n$.*

**Definicija 3.3.** *Pravimo, da je graf $G = (V, E)$* hereditarno totalno dominantno pragoven *(krajše: HTDP), če je vsak njegov induciran podgraf TDP.*

Sicer bi v definiciji TD grafov lahko zahtevali tudi odsotnost izoliranih točk, vendar je brez te predpostavke bistveno lažje dokazati določene trditve in posledice (npr. trditev 3.7 in posledico 3.8 v nadaljevanju).

**Primer 3.4.** *Graf $G$ na sliki 3.1 je TDP (vzamemo lahko $w(a) = w(e) = 1$, $w(b) = w(c) = 3$, $w(d) = 6$ in $t = 9$), medtem ko cikel $C_4$ ni TDP, saj bi v vsaki*



Slika 3.1: TDP graf $G$, v katerem imamo induciran cikel $C_4$

*TDP strukturi $(w, t)$ cikla $C_4$ (z oznakami točk kot v ciklu na sliki 3.1) moralo veljati, da je $w(a) + w(b) \geq t$ in $w(c) + w(d) \geq t$, medtem ko morata biti vsoti $w(a) + w(d)$ ter $w(b) + w(c)$ strogo manjši od $t$. Od tod pa bi sledilo, da je po eni strani teža $w(V(C_4)) = w(a) + w(b) + w(c) + w(d) \geq 2t$, po drugi strani pa $w(V(C_4)) < 2t$, kar nas privede do protislovja. Posledično graf $G$ ni HTDP.*

Kot lahko opazimo iz primera 3.4, TDP grafi niso hereditaren grafovski razred.

V nadaljevanju tega poglavja bomo najprej predstavili nekaj osnovnih lastnosti TDP grafov in operacij, ki ohranjajo to lastnost. Nato se bomo posvetili tesni zvezi med TDP grafi in Boolovimi funkcijami ter hipergrafi. Sledilo bo podpoglavje o HTDP grafih, kjer bo med drugim podana karakterizacija teh grafov s prepovedanimi induciranimi podgrafi. Zaključni del poglavja pa bo namenjen algoritmičnim rezultatom v zvezi s problemom prepoznavanja TDP grafov in problemoma totalno dominantne ter dominantne množice v TDP grafih.

## 3.1 Osnovne lastnosti

V tem podpoglavju bodo predstavljene osnovne lastnosti TDP grafov.

**Trditev 3.5.** *Vsak graf, ki ima izolirano točko, je TDP.*

*Dokaz.* Če ima graf $G$ izolirano točko, nima nobene TD množice. Tedaj je par $(w, |V(G)| + 1)$, kjer je $w(v) = 1$ za vsak $v \in V(G)$, totalno dominantno pragovna struktura grafa $G$. $\square$

Cikel $C_4$ lahko dobimo s spojem dveh kopij grafa $2K_1$. Ker $C_4$ ni TDP, lahko sklepamo, da razred TDP grafov ni zaprt za spoj. Vendar lahko opazimo, da je zaprt za spoj s $K_1$ (tj. za dodajanje univerzalne točke), kar formalno opisuje trditev 3.7, ki jo bomo dokazali s pomočjo sledeče leme.

**Lema 3.6.** *Vsak TDP graf ima totalno dominantno pragovno strukturo, v kateri so vse uteži (strogo) pozitivne.*

*Dokaz.* Naj bo $(w, t)$ totalno dominantno pragovna struktura TDP grafa $G = (V, E)$. Tedaj je vrednost

$$\delta = t - \max\{w(S)\,;\, S \in \mathcal{P}(V) \setminus \mathcal{T}\},$$

kjer je $\mathcal{P}(V)$ potenčna množica množice $V$ in $\mathcal{T}$ označuje množico vseh TD množic grafa $G$, dobro definirana in pozitivna. Naj bosta $w' : V \to \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ in $t' \in \mathbb{R}$ definirana kot: $w'(x) = |V|w(x) + \delta/2$ za vsak $x \in V$ in $t' = |V|t$. Trdimo, da je $(w', t')$ totalno dominantno pragovna struktura grafa $G$. Če je $S \in \mathcal{T}$, je $w'(S) = |V|w(S) + \delta|S|/2 \geq |V|t = t'$. V nasprotnem primeru je $S \in \mathcal{P}(V) \setminus \mathcal{T}$ in je $w(S) + \delta/2 < t$ in posledično $w'(S) = |V|w(S) + \delta|S|/2 \leq |V|(w(S) + \delta/2) < |V|t = t'$. □

**Trditev 3.7.** *Naj bo $G$ graf in naj bo $G'$ spoj grafov $G$ in $K_1$. Potem je graf $G$ TDP natanko tedaj, ko je graf $G'$ TDP.*

*Dokaz.* Dokaz bo sledil iz opazke, da sta množici $\mathcal{T}$ in $\mathcal{T}'$ TDP množic grafov $G$ in $G'$, v tem zaporedju, povezani, kot sledi:

$$\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \{\{v\} \cup S\,;\, \emptyset \neq S \subseteq V(G)\},$$

kjer je $V(G') = V(G) \cup \{v\}$.

Predpostavimo najprej, da je $G$ TDP graf. Zaradi leme 3.6 vemo, da ima graf $G$ totalno dominantno pragovno strukturo $(w, t)$ z $w(x) > 0$ za vsak $x \in V(G)$. Definirajmo $w' : V(G') \to \mathbb{R}_+$ na sledeč način:

- za vsak $x \in V(G)$ naj bo $w'(x) = w(x)$;
- $w'(v) = t - \min\{w(x)\,;\, x \in V(G)\}$.

Trdimo, da je $(w', t)$ totalno dominantno pragovna struktura grafa $G'$. Res, če je $S \in \mathcal{T}'$, ločimo dva primera. Če $v \notin S$, je $S \in \mathcal{T}$ in velja $w'(S) = w(S) \geq t$.

Če $v \in S$, potem je $\{v, x\} \subseteq S$ za nek $x \in V(G)$ in je $w'(S) = w(x) + w(v) = w(x) + t - \min\{w(x) \mid x \in V(G)\} \geq t$. Podobno obravnavamo dva primera, ko je $w'(S) \geq t$. Če $v \notin S$, potem je $w(S) \geq t$ in zato je $S \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. Če $v \in S$, potem je $S \cap V(G) \neq \emptyset$ (sicer je $w'(S) = w'(v) < t$, ker so vse uteži pozitivne) in torej je $S \in \mathcal{T}'$.

V nasprotno smer je dokaz preprost. Ker je $\mathcal{T}' \cap \mathcal{P}(V(G)) = \mathcal{T}$, je vsak par $(w, t)$, kjer je $(w', t)$ totalno dominantno pragovna struktura grafa $G'$ in je $w$ zožitev funkcije $w'$ na $V(G)$, totalno dominantna struktura grafa $G$. □

**Posledica 3.8.** *Vsak pragoven graf je HTDP.*

*Dokaz.* Karakterizacija pragovnih grafov podana v 4. točki izreka 2.4 implicira, da vsak pragoven graf vsebuje bodisi izolirano bodisi univerzalno točko. Indukcija po številu točk skupaj s trditvama 3.5 in 3.7 pokaže, da je vsak pragoven graf TDP. Ker je razred pragovnih grafov hereditaren [26], je vsak pragoven graf tudi HTDP. □

TDP grafi v splošnem niso zaprti za disjunktno unijo. Kot primer lahko vzamemo pot na treh točkah $P_3$, ki je TDP, medtem ko $2P_3$ ni TDP (glej sliko 3.2 na strani 35). Naslednja trditev pokaže, da so, kljub zgornji opazki, TDP grafi zaprti za disjunktno unijo s takim (TDP) grafom, ki ima samo eno minimalno (glede na inkluzijo) TDP množico.

**Trditev 3.9.** *Naj bosta $G$ in $H$ grafa in naj ima graf $H$ enolično minimalno TDP množico. Tedaj je disjunktna unija $G + H$ TDP graf če in samo če je graf $G$ TDP graf.*

*Dokaz.* Naj bo $T$ edina minimalna TDP množica v grafu $H$. Tedaj za množici $\mathcal{T}$ in $\mathcal{T}'$ TDP množic grafov $G$ in $G' := G + H$ velja:

$$\mathcal{T}' = \{S \cup T' \,;\, S \in \mathcal{T} \text{ in } T \subseteq T' \subseteq V(H)\}.$$

Predpostavimo, da je graf $G$ TDP, s totalno dominantno pragovno strukturo $(w, t)$. Naj bo $N = w(V(G))$ in definirajmo $w' : V(G') \to \mathbb{R}_+$ kot

$$w'(x) = \begin{cases} w(x), & \text{če } x \in V(G); \\ N, & \text{če } x \in T; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Enostavno se lahko prepričamo, da je sedaj par $(w', t + |T|N)$ totalno dominantno pragovna struktura grafa $G'$.

Obratno, če je $(w', t')$ totalno dominantno pragovna struktura grafa $G'$, potem je $(w, t' - w'(T))$, kjer je $w$ zožitev funkcije $w'$ na $V(G)$, totalno dominantno pragovna struktura grafa $G$. □

**Posledica 3.10.** *Naj bo $G$ graf in naj bo $G' = G + K_2$. Tedaj je graf $G$ TDP natanko tedaj, ko je graf $G'$ TDP.*

Pravimo, da je graf $G$ *ko-dominantno pragoven*, če je njegov komplement $\overline{G}$ dominantno pragoven graf (spomnimo se, definicijo dominantno pragovnih grafov smo podali na strani 14). Za razred ko-dominantno pragovnih grafov torej velja, da so njegovi prepovedani inducirani podgrafi ravno komplementi grafov iz slike 2.4 (na strani 14). Glede na trditev 2.1 je torej razred pragovnih grafov podrazred ko-dominantno pragovnih grafov. Pragovni grafi so torej ravno dominantno pragovni ko-dominantno pragovni grafi [6,26], zato lahko posledico 3.8 posplošimo, kot sledi.

**Posledica 3.11.** *Vsak ko-dominantno pragoven graf je HTDP.*

*Dokaz.* Trditev zlahka dokažemo z indukcijo po številu točk in z uporabo posledice 3.10, trditev 3.5 in 3.7 ter dejstev: (1) da je razred ko-dominantno pragovnih grafov hereditaren (ker je razred dominantno pragovnih grafov hereditaren [6]); (2) da vsak ko-dominantno pragoven graf vsebuje ali izolirano točko ali dominantno točko ali povezano komponento, izomorfno grafu $K_2$ [6]. □

Opazimo lahko, da ni vsak HTDP graf ko-dominantno pragoven. Kot primer si lahko ogledamo pot na 4 točkah $P_4$, ki je HTDP graf (enolično minimalno totalno dominantno množico predstavljata sredinski točki poti, ki jima lahko dodelimo težo 1, končnima točkama pa težo 0, ter za prag vzamemo $t = 2$), medtem ko ni dominantno pragoven graf, kar vidimo s pomočjo izreka 2.5. Ker je $P_4$ graf, izomorfen svojemu komplementu, posledično tudi ni ko-dominantno pragoven.

Kot smo opazili že na začetku (primer 3.4), razred TDP grafov ni hereditaren. To opazko lahko dodatno podkrepimo s tem, da pokažemo, da množica TDP grafov ni vsebovana v nobenem netrivialnem hereditarnem grafovskem razredu (tudi če izvzamemo grafe z izoliranimi točkami).

**Trditev 3.12.** *Za vsak graf $G$ obstaja tak TDP graf $G'$ brez izoliranih točk, da je $G$ induciran podgraf grafa $G'$.*

*Dokaz.* Naj bo $G$ poljuben graf. Grafu $G = (V, E)$ najprej dodamo točko, recimo $v$, ki jo povežemo z vsemi izoliranimi točkami v grafu $G$ in nato v tem novem grafu vsaki točki dodamo zasebnega soseda. Tako dobljeni graf označimo z $G'$ in očitno je, da je graf $G$ njegov induciran podgraf. Glede na opisano konstrukcijo je očitno, da predstavlja množica $V \cup \{v\}$ edino minimalno TD množico grafa $G'$. Torej je par $(w, t)$, kjer je $w : V(G') \to \mathbb{R}_+$, z

$$w(x) = \begin{cases} 1, & \text{za vsak } x \in V \cup \{v\}; \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases}$$

ter $t = |V| + 1$, totalno dominantno pragovna struktura grafa $G'$. $\square$

## 3.2 Povezava z Boolovimi funkcijami in hipergrafi

To podpoglavje bo namenjeno predstavitvi tesne zveze med TDP grafi, pragovnimi Boolovimi funkcijami in pragovnimi hipergrafi. Začeli bomo s karakterizacijo TDP grafov s pomočjo pragovnih Boolovih funkcij.

**Definicija 3.13.** *Grafu $G = (V, E)$ lahko priredimo* sosednostno funkcijo*, tj. Boolovo funkcijo $f_G^{so} : \{0,1\}^V \to \{0,1\}$, ki zavzame vrednost 1 natanko pri tistih vektorjih, katerih nosilec vsebuje soseščino neke točke grafa $G$. Formalno:*

$$f_G^{so}(x) = \bigvee_{v \in V} \bigwedge_{u \in N(v)} x_u$$

*za vsak vektor $x \in \{0,1\}^V$. (Če je $N(v) = \emptyset$, potem je $\wedge_{u \in N(v)} x_u = 1$.)*

**Trditev 3.14.** *Graf $G = (V, E)$ z množico točk $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ je TDP če in samo če je njegova sosednostna funkcija $f_G^{so}$ pragovna. Še več, če je $(w_1, \ldots, w_n, t)$ celoštevilska separacijska struktura funkcije $f_G^{so}$, potem je $(w, \sum_{i=1}^n w_i - t)$, z $w(v_i) = w_i$ za vsak $i \in [n]$, totalno dominantno pragovna struktura grafa $G$.*

*Dokaz.* Spomnimo, da je pozitivna Boolova funkcija $f(x_1, \ldots, x_n)$ pragovna natanko tedaj, ko je njena dualna funkcija $f^d(x) = \overline{f(\overline{x})}$ pragovna in da če je $(w_1, \ldots, w_n, t)$ celoštevilska separacijska struktura funkcije $f$, tedaj je $(w_1, \ldots, w_n, \sum_{i=1}^n w_i - t - 1)$ separacijska struktura funkcije $f^d$. Zato je za prvi del trditve dovolj pokazati, da je $G$ TDP graf natanko tedaj, ko je $(f_G^{so})^d$ pragovna funkcija.

Naj bo $x \in \{0,1\}^V$ in naj bo $S(x)$ njegov nosilec. Po definiciji je $(f_G^{so})^d(x) = 0$ natanko tedaj, ko je $f_G^{so}(\overline{x}) = 1$, kar se zgodi če in samo če množica $V \setminus S$ vsebuje soseščino kakšne točke. Drugače povedano, je $(f_G^{so})^d(x) = 0$ če in samo če $S$ ni TD množica. Od tod pa sledi, da če je dualna funkcija $(f_G^{so})^d$ pragovna s celoštevilsko separacijsko strukturo $(w_1, \ldots, w_n, t)$, je $(w, t+1)$ z $w(v_i) = w_i$ za vse $i \in [n]$, totalno dominantno pragovna struktura grafa $G$. Velja tudi obratno, če je $(w, t)$ celoštevilska totalno dominantno pragovna struktura grafa $G$, potem je $(w_1, \ldots, w_n, t-1)$ z $w_i = w(v_i)$ za vse $i \in [n]$ separacijska struktura funkcije $(f_G^{so})^d$.

Nazadnje, če je $(w_1, \ldots, w_n, t)$ celoštevilska separacijska struktura funkcije $f_G^{so}$, potem je $(w_1, \ldots, w_n, \sum_{i=1}^n w_i - t - 1)$ separacijska struktura funkcije $(f_G^{so})^d$ in posledično je $(w, \sum_{i=1}^n w_i - t)$ z $w(v_i) = w_i$ za vsak $i \in [n]$, totalno dominantno pragovna struktura grafa $G$. □

Kot smo pokazali v trditvah 2.15 in 3.14, lahko TDP grafe karakteriziramo s pomočjo pragovnosti izpeljanega hipergrafa. Velja tudi obratno. V nadaljevanju pokažemo, da lahko preverimo, ali je dani hipergraf pragoven tako, da preverimo, ali je ustrezen izpeljani graf TDP. Za slednjega lahko celo predpostavimo, da je razcepljen (tj. točke grafa lahko razdelimo na kliko in neodvisno množico).

Najprej bomo izpeljali enostavno, a uporabno lastnost pragovnih hipergrafov. *Univerzalna točka* v hipergrafu $\mathcal{H}$ je točka, ki je vsebovana v vsaki hiperpovezavi hipergrafa $\mathcal{H}$.

**Lema 3.15.** *Naj bo $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergraf in naj bo $\mathcal{H}' = (V', \mathcal{E}')$ hipergraf, dobljen iz hipergrafa $\mathcal{H}$ z dodajanjem univerzalne točke, tj. $V' = V \cup \{v\}$ in $\mathcal{E}' = \{e \cup \{v\}\,;\, e \in \mathcal{E}\}$. Potem je $\mathcal{H}$ pragoven če in samo če je $\mathcal{H}'$ pragoven.*

*Dokaz.* Najprej predpostavimo, da je hipergraf $\mathcal{H}$ pragoven in je $(w, t)$ njegova celoštevilska separacijska struktura. Bralec se bo zlahka prepričal, da je par $(w', t')$, kjer je $w' : V' \to \mathbb{R}_+$ definirana s predpisom

$$w'(x) = \begin{cases} w(V), & \text{če } x = v; \\ w(x), & \text{sicer} \end{cases}$$

in je $t' = t + w(V)$, separacijska struktura hipergrafa $\mathcal{H}'$.

Obratno, če je hipergraf $\mathcal{H}'$ pragoven, s celoštevilsko separacijsko strukturo $(w', t')$, potem je par $(w, t)$, kjer je $w : V \to \mathbb{R}_+$ zožitev funkcije $w'$ na $V$ in $t = t' - w'(v)$, separacijska struktura hipergrafa $\mathcal{H}$. $\square$

Hipergrafu $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$, lahko priredimo *razcepljen incidenčni graf* $RI(\mathcal{H})$, tj. razcepljen graf $G$ z $V(G) = V \cup \mathcal{E}'$, kjer je $\mathcal{E}' = \{e' \,;\, e \in \mathcal{E}\}$, $V$ je klika, $\mathcal{E}'$ je neodvisna množica in je točka $v \in V$ povezana s točko $e' \in \mathcal{E}'$ če in samo če je $v \in e$.

**Trditev 3.16.** *Za vsak hipergraf $\mathcal{H}$ velja, da je $\mathcal{H}$ pragoven natanko tedaj, ko je njegov razcepljen incidenčni graf $RI(\mathcal{H})$ TDP.*

*Dokaz.* Naj bo $\mathcal{H}$ hipergraf. Dokaz gre z indukcijo po $|V|$. Primer ko je $|V| = 1$, je trivialen, saj je $\mathcal{H}$ pragoven in je $RI(\mathcal{H})$ izomorfen bodisi grafu $K_1$ (če je $\mathcal{E} = \emptyset$) bodisi grafu $K_2$ (če je $\mathcal{E} = \{\emptyset\}$) in je zato TDP.

Predpostavimo sedaj, da je $|V| > 1$.

Če vsebuje $\mathcal{H}$ univerzalno točko $v \in V$, potem naj bo $\mathcal{H}' = (V', \mathcal{E}')$ hipergraf, ki smo ga dobili tako, da smo iz $\mathcal{H}$ izbrisali $v$, tj. $V' = V \backslash \{v\}$ in $\mathcal{E}' = \{e \backslash \{v\} \,;\, e \in \mathcal{E}\}$. Po indukcijski hipotezi je $\mathcal{H}'$ pragoven če in samo če je njegov razcepljen incidenčni graf $RI(\mathcal{H}')$ TDP. Opazimo lahko, da je razcepljen incidenčni graf hipergrafa $\mathcal{H}'$ izomorfen grafu, ki ga dobimo iz razcepljenega incidenčnega grafa hipergrafa $\mathcal{H}$ tako, da mu odstranimo univerzalno točko (namreč $v$). Zato trditev 3.7 in lema 3.15 implicirata, da je $\mathcal{H}$ pragoven če in samo če je njegov razcepljen incidenčni graf TDP.

Torej lahko predpostavimo, da hipergraf $\mathcal{H}$ nima nobene univerzalne točke. Naj bo $G = RI(\mathcal{H})$, naj bo $\mathcal{E}$ kot zgoraj in naj $f_G^{so} : \{0,1\}^{V(G)} \to \{0,1\}$ označuje sosednostno funkcijo grafa $G$,

$$f_G^{so}(x) = \bigvee_{v \in V(G)} \bigwedge_{u \in N_G(v)} x_u.$$

Naj bo $f'_G : \{0,1\}^{V(G)} \to \{0,1\}$ funkcija, podana s predpisom

$$f'_G(x) = \bigvee_{e \in \mathcal{E}} \bigwedge_{u \in e} x_u$$

in naj $f_{\mathcal{H}}$ označuje zožitev funkcije $f'_G$ na $V$, tj. funkcijo $f_{\mathcal{H}} : \{0,1\}^V \to \{0,1\}$, podano s predpisom

$$f_{\mathcal{H}}(x) = f'_G(x) = \bigvee_{e \in \mathcal{E}} \bigwedge_{u \in e} x_u.$$

Pokazali bomo, da so naslednji pogoji, ki implicirajo zgornjo trditev, ekvivalentni:

1. Hipergraf $\mathcal{H}$ je pragoven.
2. Funkcija $f_{\mathcal{H}}$ je pragovna.
3. Funkcija $f'_G$ je pragovna.
4. Funkcija $f_G^{so}$ je pragovna.
5. Graf $G$ je TDP.

Ekvivalenca med pogojema 1 in 2 sledi iz trditve 2.15.

Ekvivalenco med pogojema 2 in 3 lahko enostavno vzpostavimo neposredno iz definicije z uporabo dejstva, da $f'_G$ ni odvisna od nobene spremenljivke oblike $x_{e'}$, kjer je $e' \in \mathcal{E}'$. Natančneje, če je $((w_x; x \in V), t)$ separacijska struktura funkcije $f_{\mathcal{H}}$, potem njena razširitev s pravilom $w_{e'} = 0$ za vse $e' \in \mathcal{E}'$ vodi do separacijske strukture funkcije $f'_G$. Obratno, ker $f'_G$ ni odvisna od spremenljivk oblike $x_{e'}$, kjer je $e' \in \mathcal{E}'$, ima separacijsko strukturo $(w, t)$ z utežmi enakimi 0 za vse spremenljivke omenjene oblike (glej [29]). Z neupoštevanjem (ničelnih) uteži $w_{e'}$ za $e' \in \mathcal{E}'$ dobimo separacijsko strukturo funkcije $f_{\mathcal{H}}$.

Ekvivalenca med pogojema 3 in 4 je posledica opazke, da gre pri $f'_G$ in $f_G^{so}$ za enaki funkciji. Dejansko, če je $f'_G(x) = 1$ za nek $x \in \{0,1\}^{V(G)}$, potem je $x_u = 1$ za vse $u \in e$ za neko povezavo $e \in \mathcal{E}$ in posledično je $x_u = 1$ za vse $u \in N_G(v)$, kjer je $v = e'$, kar implicira $f_G^{so}(x) = 1$. Obratno, če je $f_G^{so}(x) = 1$ za nek $x \in \{0,1\}^{V(G)}$, potem obstaja nek tak $v \in V$, da je $x_u = 1$ za vsak $u \in N_G(v)$. Ker $\mathcal{H}$ nima univerzalnih točk, obstaja taka točka $e' \in \mathcal{E}'$ v neodvisni množici, da velja bodisi $v = e'$ (če je $v \in \mathcal{E}'$) bodisi $v \notin e$ (sicer). V prvem primeru imamo (trivialno) zvezo $N_G(v) = N_G(e')$, medtem ko imamo v drugem primeru zvezo $N_G(e') = e \subseteq \mathcal{V} \setminus \{v\} \subseteq N_G(v)$. V obeh premerih je $x_u = 1$ za vsako točko $u \in e$, kar implicira $f'_G(x) = 1$. Sledi, da je $f'_G = f^{so}_G$.

Nazadnje, ekvivalenca med pogojema 4 in 5 sledi iz trditve 3.14. □

Trditev 3.16 ima tudi naraven obrat. *Razcepljena particija* razcepljenega grafa $G$ je par $(K, I)$, kjer je $K$ klika in $I$ neodvisna množica ter velja $K \cup I = V(G)$ in $K \cap I = \emptyset$. Danemu razcepljenemu grafu $G$ z razcepljeno particijo $(K, I)$ lahko priredimo $(K, I)$-*sosednostni hipergraf*, tj. hipergraf, kjer je $\mathcal{E} = \{N_G(v)\,;\, v \in I\}$. Spomnimo, da je $\mathcal{E}$ množica, tj. če imata dve točki iz $I$ enaki soseščini v grafu $G$, potem v $\mathcal{E}$ obdržimo le eno kopijo soseščine.

**Posledica 3.17.** *Vsak razcepljen graf $G$ z razcepljeno particijo $(K, I)$ je TDP graf če in samo če je njegov $(K, I)$-sosednostni hipergraf pragoven.*

*Dokaz.* Posledica sledi direktno iz trditve 3.16 in opazke, da je graf $G$ izomorfen razcepljenemu incidenčnemu grafu, ki ga dobimo iz $(K, I)$-sosednostnega hipergrafa. □

Poglavje bomo zaključili s karakterizacijo TDP grafov s pomočjo Boolovih funkcij in hipergrafov.

Rekli bomo, da je neka soseščina minimalna, če ne vsebuje (kot prave podmnožice) nobene druge soseščine. Formalno, množica $S \subseteq V(G)$ je minimalna soseščina natanko tedaj, ko obstaja taka točka $v \in V(G)$, da je $S = N_G(v)$ in za vsak $u \in V \setminus \{v\}$ velja $N_G(u) \not\subset N_G(v)$.

Vsakemu grafu $G = (V, E)$ lahko priredimo razcepljen graf $R(G)$, definiran kot sledi: $V(R(G)) = V \cup W$, kjer je

$$W = \{S\,;\, S \subseteq V(G) \text{ in je } S \text{ minimalna soseščina v grafu } G\},$$

$V$ klika, $W$ neodvisna množica in je poljubna točka $v \in V$ povezana s točko $X \in W$ natanko tedaj, ko je $v \in X$. Danemu grafu $G$ lahko priredimo tudi *hipergraf minimalnih soseščin* $\mathcal{MS}(G) = (V, \mathcal{E})$, kjer je $V = V(G)$ in je $\mathcal{E} = W$.

**Izrek 3.18.** *Za vsak graf $G$ so naslednje trditve ekvivalentne:*

1. *Graf $G$ je TDP.*
2. *Sosednostna funkcija $f_G^{so}$ grafa $G$ je pragovna.*
3. *Boolova funkcija $f : \{0,1\}^{V(G)} \to \{0,1\}$, ki ustreza popolni DNO $\phi$ funkcije $f_G^{so}$, je pragovna.*
4. *Hipergraf $\mathcal{H}(\phi)$ je pragoven.*
5. *Hipergraf minimalnih soseščin $\mathcal{MS}(G)$ grafa $G$ je pragoven.*
6. *Razcepljen incidenčni graf hipergrafa minimalnih soseščin $RI(\mathcal{MS}(G))$ je TDP.*
7. *Razcepljen graf $R(G)$ je TDP.*

*Dokaz.* Ekvivalenca med pogojema 1 in 2 je bila pokazana v trditvi 3.14. Ekvivalenca med pogojema 2 in 3 je trivialna, saj je $f_G^{so}$ ekvivalentna funkciji podani s popolno DNF $\phi$. Ekvivalenca med pogojema 3 in 4 sledi iz trditve 2.15. Ekvivalenca med pogojema 4 in 5 sledi iz opazke, da je hipergraf $\mathcal{H}(\phi)$ izomorfen hipergrafu minimalnih soseščin $\mathcal{MS}(G)$. Ekvivalenca med pogojema 5 in 6 sledi iz trditve 3.16 in nazadnje, ekvivalenca med pogojema 6 in 7 sledi iz opazke, da je razcepljen incidenčni graf $RI(\mathcal{MS}(G))$ izomorfen razcepljenemu grafu $R(G)$. □

## 3.3 Hereditarno totalno dominantno pragovni grafi

V tem podpoglavju se bomo posvetili hereditarni različici razreda TDP grafov. Podali bomo dve karakterizaciji HTDP grafov, dokazi pa bodo temeljili na razredu dualno Spernerjevih hipergrafov, ki smo ga definirali v poglavju 2 (glej definicijo 2.17).

Rekli bomo, da je graf $G$ 2-*asumabilen glede na soseščine*, če je njegov hipergraf minimalnih soseščin $\mathcal{MS}(G)$ 2-asumabilen in *hereditarno* 2-*asumabilen glede na soseščine*, če je vsak njegov induciran podgraf 2-asumabilen glede na soseščine. Iz izrekov 2.9 in 3.18 sledi, da je vsak TDP graf 2-asumabilen glede na soseščine.

Opazimo lahko tudi, da obratno ne drži, tj. obstaja razcepljen graf $G$, ki je 2-asumabilen glede na soseščine, ni pa TDP. To lahko enostavno izpeljemo s pomočjo posledice 2.16, trditve 3.18 in dejstva, da ni vsaka 2-asumabilna pozitivna Boolova funkcija pragovna ([29], izrek 9.15).

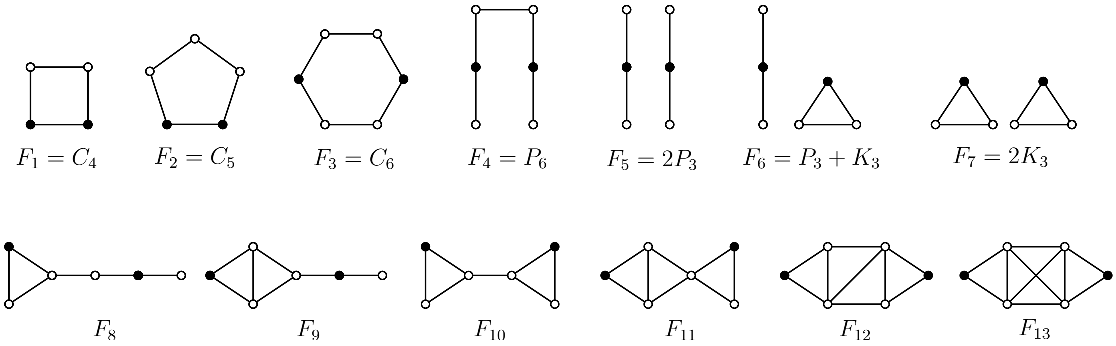
Dalje je graf $G$ *dualno Spernerjev glede na soseščine*, če je njegov hipergraf minimalnih soseščin $\mathcal{MS}(G)$ dualno Spernerjev in *hereditarno dualno Spernerjev glede na soseščine*, če je vsak injegov induciran podgraf dualno Spernerjev glede na soseščine. Iz izreka 3.18 in trditve 2.18 sledi, da je vsak graf, ki je dualno Spernerjev glede na soseščine, tudi TDP. Ponovno lahko opazimo, da obrat ne drži. V naslednjem primeru bomo podali TDP graf, ki ni dualno Spernerjev glede na soseščine.

**Primer 3.19.** *Naj bo $G = (K \cup I, E)$ razcepljen graf na 10 točkah, kjer je $K$ klika s $|K| = 4$ in $I$ neodvisna množica, za katero velja $I = \{v_{ij}\,; 1 \leq i < j \leq 4\}$, kjer je $N_G(v_{ij}) = \{i, j\}$ za vsak $v_{i,j} \in I$. Ker imamo v hipergrafu minimalnih soseščin $\mathcal{H}$ hiperpovezavi $\{1, 2\}$ in $\{3, 4\}$, hipergraf $\mathcal{H}$ gotovo ni dualno Spernerjev. Torej graf $G$ ni dualno Spernerjev glede na hipergrafe soseščin. Po drugi strani pa lahko enostavno najdemo separacijsko strukturo hipergrafa $\mathcal{H}$ tako, da vsaki točki iz klike dodelimo težo 1, vsaki točki iz neodvisne množice dodelimo težo 0 in določimo $t = 1$. Slednje nam pokaže, da je hipergraf $\mathcal{H}$ pragoven in po izreku 3.18 je posledično $G$ TDP graf.*

V sledečem izreku bomo pokazali, da, v primeru HTDP grafov, držita tudi obrata zgornjih implikacij.

**Izrek 3.20.** *Za vsak graf $G$ so naslednje trditve ekvivalentne:*

1. *Graf $G$ je hereditarno totalno dominantno pragoven.*
2. *Graf $G$ je hereditarno 2-asumabilen glede na soseščine.*
3. *Graf $G$ je $\{F_1, \ldots, F_{13}\}$-prost, kjer so $F_1, \ldots, F_{13}$ grafi na sliki 3.2.*
4. *Graf $G$ je hereditarno dualno Spernerjev glede na soseščine.*




Slika 3.2: Grafi $F_1, \ldots, F_{13}$

*Dokaz.* Implikacija $1 \Rightarrow 2$ sledi iz posledice 2.16 in izreka 3.18.

Za dokaz implikacije $2 \Rightarrow 3$ zadošča preveriti, da noben izmed grafov $F_1, \ldots, F_{13}$ ni 2-asumabilen glede na soseščine. Pokažimo, da je poljuben graf $F \in \{F_1, \ldots, F_{13}\}$ 2-sumabilen glede na soseščine. Z drugimi besedami, da v hipergrafu $\mathcal{MS}(G)$ obstajata dve podmnožici točk, recimo jima $A_1$ in $A_2$, ki vsebujeta (kot podmnožico) vsaj eno povezavo hipergrafa in dve podmnožici točk, recimo jima $B_1$ in $B_2$, ki ne vsebujeta (kot podmnožico) nobene povezave hipergrafa, da za vsako točko $v \in V$ velja

$$|\{i\,;\, v \in A_i\}| = |\{i\,;\, v \in B_i\}|. \tag{3.1}$$

Vzemimo dve točki stopnje 2 iz $F$, recimo jima $u$ in $v$, ki imata disjunktni soseščini (npr. tisti dve točki, ki sta na sliki 3.2 obarvani črno). Označimo točke v ustreznih soseščinah z $a, b$ in $c, d$ (v primeru grafov $F_1$ in $F_2$ je $c = u$ in $b = v$). Enostavno lahko opazimo, da lahko unijo omenjenih soseščin $N(u) \cup N(v)$ razdelimo na taki dve disjunktni množici $Y = \{a, c\}$ in $Z = \{b, d\}$, da nobena ne vsebuje soseščine kakšne točke grafa $F$. Opazimo tudi, da sta množici $N(u)$ in $N(v)$ povezavi hipergrafa $\mathcal{MS}(G)$, medtem ko sta množici $Y$ in $Z$ neodvisni množici. Pogoj (3.1) sedaj velja za $A_1 = N(u)$, $A_2 = N(v)$, $B_1 = Y$ in $B_2 = Z$, kar implicira, da je hipergraf $\mathcal{MS}(G)$ 2-sumabilen.

Da bi dokazali implikacijo $3 \Rightarrow 4$, je dovolj pokazati, da je vsak $\{F_1, \ldots, F_{13}\}$-prost graf dualno Spernerjev glede na soseščine, saj je razred $\{F_1, \ldots, F_{13}\}$-prostih grafov hereditaren. Naj bo $G$ graf, ki je $\{F_1, \ldots, F_{13}\}$-prost. Da bi prišli do protislovja, predpostavimo, da njegov hipergraf minimalnih soseščin $\mathcal{MS}(G)$ ni dualno Spernerjev. Potem obstajata dve taki hiperpovezavi v $\mathcal{MS}(G)$, recimo $e_1$ in $e_2$, da je $\min\{|e_1 \setminus e_2|, |e_2 \setminus e_1|\} \geq 2$. Po definiciji hipergrafa $\mathcal{MS}(G)$ torej obstajata dve točki, recimo $u$ in $v$, v grafu $G$, da velja $e_1 = N_G(u)$ in $e_2 = N_G(v)$. Velja tudi naslednji pogoj:

$$\text{Za } w \in \{u, v\},\ \text{če je } x \in V(G) \setminus \{w\},\ \text{potem } N_G(x) \not\subseteq N_G(w). \qquad (3.2)$$

V odvisnosti od tega, ali sta $u$ in $v$ povezana ali ne, ločimo dva primera.

*Primer 1: $uv \notin E(G)$.*

Naj bosta $a$ in $b$ dva različna elementa v $e_1 \setminus e_2 = N_G(u) \setminus N_G(v)$ in naj bosta $c$ in $d$ dva različna elementa v $e_2 \setminus e_1 = N_G(v) \setminus N_G(u)$. Očitno so točke $a, b, c, d, u, v$ paroma različne. Dalje so $ua, ub, vc, vd \in E(G)$ in $va, vb, uc, ud, uv \notin E(G)$. Naj bo $k$ število povezav v grafu $G$ med množicama $\{u, a, b\}$ in $\{v, c, d\}$. Opazimo, da je $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Predpostavimo, da je $k = 0$. Potem je, v odvisnosti od števila povezav v preseku $\{ab, cd\} \cap E(G)$, podgraf induciran na točkah $\{u, v, a, b, c, d\}$ izomorfen bodisi grafu $F_5 = 2P_3$, grafu $F_6 = P_3 + K_3$ ali grafu $F_7 = 2K_3$, protislovje.

Predpostavimo, da je $k = 1$. Potem je, v odvisnosti od števila povezav v preseku $\{ab, cd\} \cap E(G)$, podgraf induciran na točkah $\{u, v, a, b, c, d\}$ izomorfen bodisi grafu $F_4 = P_6$, grafu $F_8$ ali grafu $F_{10}$, protislovje.

Predpostavimo, da je $k = 2$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da $ac \in E(G)$ in $ad \notin E(G)$. Predpostavimo najprej, da je $bd \in E(G)$. Potem velja $bc \notin E(G)$ in, v odvisnosti od števila povezav v preseku $\{ab, cd\} \cap E(G)$, vsebuje podgraf induciran na točkah $\{u, v, a, b, c, d\}$ bodisi graf $F_1 = C_4$, graf $F_2 = C_5$ ali graf $F_3 = C_6$ kot induciran podgraf, protislovje. Predpostavimo sedaj, da $bd \notin E(G)$. Potem je $bc \in E(G)$. Ker je graf $G$ $C_4$-prost, je $ab \in E(G)$ in v odvisnosti od tega, ali je $cd \in E(G)$ ali ne, je podgraf induciran na točkah $\{u, v, a, b, c, d\}$ izomorfen bodisi grafu $F_{11}$ bodisi grafu $F_9$, protislovje.

Predpostavimo, da je $k = 3$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da so $ac, bc, bd \in E(G)$ in $ad \notin E(G)$. Ker je graf $G$ $C_4$-prost, so $ab \in E(G)$ in $cd \in E(G)$. Toda sedaj je podgraf induciran na točkah $\{u, v, a, b, c, d\}$ izomorfen grafu $F_{12}$, protislovje.

Končno predpostavimo, da je $k = 4$. Ker je graf $G$ $C_4$-prost, sta $ab \in E(G)$ in

$cd \in E(G)$. Toda sedaj je podgraf induciran na točkah $\{u, v, a, b, c, d\}$ izomorfen grafu $F_{13}$, protislovje.

*Primer 2: $uv \in E(G)$.*

Naj bosta $a = v$ in $b$ dva različna elementa v $e_1 \setminus e_2 = N_G(u) \setminus N_G(v)$ in naj bosta $c = u$ in $d$ dva različna elementa v $e_2 \setminus e_1 = N_G(v) \setminus N_G(u)$. Ker je graf $G$ $C_4$-prost, velja $bd \notin E(G)$ in točke $\{b, u, v, d\}$ inducirajo $P_4$ v $G$. Uporaba pogoja (3.2) z $w = u$ in $x = d$ implicira $N_G(d) \not\subset N_G(u)$. Torej obstaja taka točka, recimo $d'$, da je $d'd \in E(G)$ in $d'u \notin E(G)$. Očitno je, da $d' \notin \{u, v, b, d\}$. Trdimo, da točka $d'$ ni povezana s točko $b$. Res, če bi veljalo $d'b \in E(G)$, potem bi graf $G$ vseboval bodisi induciran $C_4$ (v primeru, ko $d'v \in E(G)$) bodisi induciran $C_5$ (sicer), protislovje.

Zaradi simetrije imamo (kot zgoraj) v $G$ točko $b' \in V(G) \setminus \{u, v, b, d\}$, ki je povezana s točko $b$ in ni povezana s točkama $v$ in $d$. Očitno $b' \neq d'$. Če je $b'd' \in E(G)$, potem imamo, v odvisnosti od števila povezav v množici $\{ub', vd'\} \cap E(G)$, v $G$ induciran podgraf na točkah $\{u, v, a, b, c, d\}$, ki vsebuje bodisi graf $F_1 = C_4$, graf $F_2 = C_5$ ali graf $F_3 = C_6$ kot induciran podgraf, protislovje. Če $b'd' \notin E(G)$, potem imamo, v odvisnosti od števila povezav v množici $\{ub', vd'\} \cap E(G)$, v $G$ induciran podgraf na točkah $\{u, v, a, b, c, d\}$, ki vsebuje bodisi graf $F_4 = P_6$, graf $F_8$ ali graf $F_{10}$ kot induciran podgraf, protislovje.

Končno, implikacija $4 \Rightarrow 1$ sledi iz izreka 3.18 in trditve 2.18. □

Izrek 3.20 implicira lepo strukturno lastnost HTDP grafov. Spomnimo, da je graf $(1, 2)$-polaren, če omogoča delitev množice točk v dva (morda prazna) dela $K$ in $L$ tako, da je $K$ klika in $L$ inducira podgraf maksimalne stopnje kvečjemu 1. Naslednji rezultat je neposredna posledica izreka 3.20 in karakterizacije $(1, 2)$-polarnih grafov s prepovedanimi induciranimi podgrafi, ki sta jo podala Gagarin in Metelsky v izreku 2.2.

**Posledica 3.21.** *Vsak HTDP graf je $(1, 2)$-polaren tetiven graf.*

*Dokaz.* Opazimo, da so na seznamu grafov iz izreka 2.2 samo trije grafi tetivni: $G_3 = 2P_3, G_4 = P_3 + K_3$ in $G_7 = 2K_3$ (tj. grafi $F_5, F_6$ in $F_7$ na sliki 3.2). To implicira, da je razred $(1, 2)$-polarnih tetivnih grafov natanko razred $\{F_5, F_6, F_7, C_4, C_5, C_6, \dots\}$-prostih grafov. Opazimo, da $C_4 = F_1, C_5 = F_2, C_6 =$

$F_3$ in, da je $F_4 = P_6$ induciran podgraf vsakega cikla na vsaj 7 točkah. Torej je razred $\{F_1, \ldots, F_7\}$-prostih grafov podrazred $(1, 2)$-polarnih tetivnih grafov. Glede na izrek 3.20 enako velja tudi za HTDP grafe. $\square$

Poudarimo tudi, da obrat posledice 3.21 ne drži, saj so grafi $F_8, F_9, \ldots, F_{13}$ $(1, 2)$-polarni tetivni grafi, ki niso TDP.

## 3.4 Algoritmični vidiki TDP grafov

Kot smo pokazali v izreku 3.20, je razred HTDP grafov karakteriziran s končno mnogo prepovedanimi induciranimi podgrafi. Od tod sledi, da lahko HTDP grafe prepoznamo v polinomskem času. Naslednji izrek vzpostavi obstoj algoritma za prepoznavanje TDP grafov v polinomskem času, tako da problem prepoznavanja TDP grafov prevede na problem prepoznavanja pragovnih pozitivnih Boolovih funkcij, podanih v popolni disjunktivni normalni obliki.

**Izrek 3.22.** *TDP grafe je moč prepoznati v polinomskem času. V polinomskem času lahko izračunamo tudi (celoštevilsko) totalno dominantno pragovno strukturo TDP grafa $G$.*

*Dokaz.* Izrek 2.10 in trditev 3.14 implicirata, da sledeči algoritem polinomske časovne zahtevnosti določi, ali je graf $G$ TDP in v primeru pozitivnega odgovora poda tudi njegovo totalno dominantno pragovno strukturo. Najprej izračunamo popolno DNO $\phi$ sosednostne funkcije $f_G^{so}$ grafa $G$. Natančneje, naj bo $\phi = \bigvee_{S \in \mathcal{N}} \bigwedge_{u \in S} x_u$, kjer je $\mathcal{N}$ množica tistih soseščin točk grafa $G$, ki ne vsebujejo, kot prave podmnožice, soseščine kakšne druge točke grafa $G$. Nato na $\phi$ uporabimo algoritem iz izreka 2.10. Če algoritem poda negativen odgovor, tj. da funkcija $f_G^{so}$ ni pragovna, potem graf $G$ ni TDP. V nasprotnem primeru bo algoritem izračunal celoštevilsko separacijsko strukturo $(w_1, \ldots, w_n, t)$ funkcije $f_G^{so}$ in v tem primeru trditev 3.14 implicira, da je $(w, \sum_{i=1}^n w_i - t)$ z $w(v_i) = w_i$ za vse $i \in [n]$ celoštevilsko totalno dominantno pragovna struktura grafa $G$. $\square$

Oglejmo si še nekaj posledic izreka 3.22. *Totalno dominantno število* $\gamma_t(G)$ grafa $G$ brez izoliranih točk je velikost najmanjše totalno domininatne množice grafa $G$. *Problem totalno dominantne množice* je problem izračuna totalno dominantnega števila danega grafa brez izoliranih točk. V splošnem je problem NP-poln in ostaja NP-poln tudi za posebne grafovske razrede, kot so npr. dvodelni grafi ali razcepljeni grafi [28]. Po drugi strani pa imamo za določene grafovske razrede algoritme polinomske časovne zahtevnosti [59,66]. Z redkimi izjemami imajo znani algoritmi polinomske časovne zahtevnosti opraviti zgolj s hereditarnimi grafovskimi razredi. Izrek 3.22 skoraj direktno implicira, da je problem totalne dominantne množice v TDP grafih rešljiv v polinomskem času (in s tem poveča množico znanih nehereditarnih grafovskih razredov, kjer je problem polinomsko rešljiv). Medtem ko je problem NP-poln za tetivne grafe (in celo za rezcepljene grafe), naš rezultat pokaže, da je problem rešljiv v polinomskem času v razredu HTDP grafov, ki so, po posledici 3.21, podrazred tetivnih grafov.

**Trditev 3.23.** *Problem totalno dominantne množice je v razredu TDP grafov rešljiv v polinomskem času.*

*Dokaz.* Naj bo $G$ TDP graf brez izoliranih točk. Glede na izrek 3.22 lahko predpostavimo, da imamo graf $G$ podan skupaj s celoštevilsko totalno dominantno pragovno strukturo $(w, t)$. Najmanjšo TD množico $S$ lahko sedaj poiščemo s pomočjo naslednjega preprostega požrešnega algoritma:

1. Točke razvrstimo glede na njihovo težo tako, da velja:

$$w(v_1) \geq w(v_2) \geq \cdots \geq w(v_n).$$

2. Začenši s prazno množico, $S = \emptyset$, množici $S$ dodajamo točke, glede na zgornji vrstni red $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, dokler velja $w(S) < t$. Natančneje, če je $k$ najmanjši tak indeks, za katerega je $\sum_{i=1}^{k} w(v_i) \geq t$, je $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$.

3. Vrnemo $S$.

Algoritem poišče najmanjšo množico točk $S$ grafa $G$, za katero velja $w(S) \geq t$. Da je $S$ TD množica grafa $G$, sledi iz dejstva, da je $w(S) \geq t$ in da je $(w, t)$ totalno dominantno pragovna struktura grafa $G$. Pokažimo še, da je množica $S$ tudi najmanjša TD množica grafa $G$. Predpostavimo, da v grafu $G$ obstaja TD množica $S'$, za katero velja $|S'| \leq |S|$. Ker je $S'$ TD množica, je $w(S') \geq t$.

Ker pa imamo točke grafa razvrščene glede na težo in algoritem vrne množico $\{v_1, \ldots, v_k\}$ z najmanjšim indeksom $k$, ki ustreza neenakosti $\sum_{i=1}^{k} w(v_i) \geq t$, to implicira, da je $|S'| \geq |S|$. Ker lahko razvrščanje točk grafa (1. korak) opravimo v času $\mathcal{O}(n \log n)$ in lahko privzamemo, da sta dodajanje točke v množico $S$ ter seštevanje (v 2. koraku) opravljena v linearnem času, je skupna časovna zahtevnost algoritma polinomska. □

Trditev 3.23 prinaša tudi nekaj posledic za problem dominantne množice, ki jih bomo preučili v nadaljevanju. *Dominantno število* $\gamma(G)$ danega grafa $G$ je velikost najmanjše dominantne množice v grafu. *Problem dominantne množice* je problem izračuna dominantnega števila danega grafa. V splošnem je problem NP-poln [43], še več, za vsak $\epsilon > 0$ ne obstaja algoritem polinomske časovne zahtevnosti, ki bi aproksimiral dominantno število danega grafa na $n$ točkah v okviru faktorja $(1 - \epsilon)\ln n$, razen če je NP $\subseteq$ DTIME$(n^{\mathcal{O}(\log\log n)})$ [22,28], aproksimacija dominantnega števila s faktorjem aproksimacije $0,2267 \ln n$ pa je NP-poln problem (glej [22]).

**Trditev 3.24.** *Obstaja 2-aproksimacijski algoritem za problem dominantne množice v razredu TDP grafov.*

*Dokaz.* Imejmo TDP graf $G$ in naj bo $S$ množica njegovih izoliranih točk ter $G' = G - S$. Predpostavimo lahko, da ima $G$ vsaj eno povezavo (sicer je $\gamma(G) = |V(G)|$) in je zato neprazen graf, ki ima TD množico. Glede na trditev 3.23 lahko v polinomskem času izračunamo najmanjšo TD množico $D$ grafa $G'$. Naj bo $D' = D \cup S$.

Očitno je $D'$ dominantna množica grafa $G$. Po drugi strani, če z $D^*$ označimo najmanjšo dominantno množico grafa $G$, vidimo, da je $D^* - S$ najmanjša dominantna množica grafa $G'$.

Vemo, da sta dominantno število in totalno dominantno število za vsak graf $H$ brez izoliranih točk povezana kot sledi: $\gamma(H) \leq \gamma_t(H) \leq 2\gamma(H)$ [55]. V našem primeru je torej $\gamma_t(G') \leq 2\gamma(G')$, kar implicira, da je $|D| = \gamma_t(G') \leq 2\gamma(G') = 2|D^* - S|$ in posledično

$$|D'| = |D \cup S| = |D| + |S| \leq 2|D^* - S| + |S| \leq 2|D^*|.$$

Zatorej je algoritem, ki vrne $D'$, 2-aproksimacijski algoritem za problem dominantne množice v razredu TDP grafov. □

Za konec omenimo še, da je časovna zahtevnost izračuna dominantnega števila za TDP grafe odprt problem.

# 4

# Z LISTI RAZŠIRJENI PRAGOVNI GRAFI

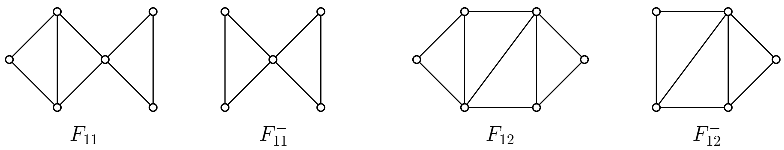
Spomnimo, da so ko-dominantno pragovni natanko tisti grafi, katerih komplementi so pragovni grafi. S prevedbo točke (3) izreka 2.5 na komplemente dobimo sledečo karakterizacijo ko-dominantno pragovnih grafov:

**Izrek 4.1.** *Graf $G$ je ko-dominantno pragoven če in samo če ga lahko dobimo iz praznega grafa tako, da zaporedoma naredimo eno od naslednjih operacij:*

- *dodajanje izolirane točke (tj. disjunktna unija z grafom $K_1$),*
- *dodajanje univerzalne točke (tj. spoj z grafom $K_1$),*
- *dodajanje izolirane povezave (tj. disjunktna unija z grafom $K_2$).*

Podana strukturna karakterizacija ko-dominantno pragovnih grafov in dejstvo, da je vsak ko-dominantno pragoven graf HTDP, motivirata vprašanje, ali obstaja podoben (kompozicijski) rezultat tudi za razred HTDP grafov, ki bi nam dal boljši vpogled v strukturo HTDP grafov in nas po možnosti privedel do bolj učinkovitega algoritma za prepoznavanje grafov v tem razredu (glej izrek 3.20). Tovrsten rezultat bi lahko vodil tudi do bolj učinkovitega algoritma za izračun TDP strukture danega HTDP grafa, kot je algoritem, ki sloni na linearnem programiranju in ki ga z uporabo trditve 3.14 izpeljemo iz algoritma 1 podanega na strani 20.

Kot prvi korak v smeri morebitne strukturne karakterizacije HTDP grafov se bomo v tem poglavju posvetili strukturni karakterizaciji podrazreda $\mathcal{G}$ HTDP grafov, ki ga dobimo tako, da v množici prepovedanih induciranih podgrafov za razred HTDP grafov (slika 3.2 na strani 35) grafa $F_{11}$ in $F_{12}$ zamenjamo z dvema njunima induciranima podgrafoma na 5 točkah, imenovanima $F_{11}^-$ in $F_{12}^-$ (glej sliko 4.1).




Slika 4.1: Grafi $F_{11}, F_{11}^-, F_{12}$ in $F_{12}^-$.

Grafovski razred $\mathcal{G}$ je posplošitev razreda pragovnih grafov. V podpoglavju 4.1 bomo pokazali, da je vsak povezan graf iz razreda $\mathcal{G}$ listna razširitev nekega pragovnega grafa, torej dobljen tako, da vsaki točki pragovnega grafa dodamo nekaj (nič ali več) listov. Posledično je problem pridobitve strukturne karakterizacije HTDP grafov reduciran na razumevanje strukture HTDP grafov, ki vsebujejo kot induciran podgraf enega izmed grafov $F_{11}^-$ in $F_{12}^-$. V poglavju 4.3 bomo pokazali tudi, da lahko z dobljeno strukturno karakterizacijo grafov iz razreda $\mathcal{G}$ in z analizo strukture množice vseh minimalnih TDP množic teh grafov razvijemo algoritem linearne časovne zahtevnosti za izračun TDP strukture grafa iz $\mathcal{G}$, ki je, v nasprotju z algoritmom za splošen primer, popolnoma kombinatoričen in deluje direktno na danem grafu.

## 4.1 Karakterizacija z listi razširjenih pragovnih grafov

Začeli bomo z definicijo pragovne razdelitve, kot so jo podali Heggernes idr. v [57] in bo osnova za algoritem podan v nadaljevanju.

**Definicija 4.2** (Heggernes idr. [57])**.** Pragovna razdelitev *danega pragovnega grafa $G$ je razdelitev $\{I_0, I_1, \ldots, I_r, K_1, \ldots, K_r\}$ množice točk $V(G)$ z $I = \cup_{i=0}^r I_i$ in $K = \cup_{i=1}^r K_i$ tako, da je zadoščeno naslednjim pogojem:*

- *$(K, I)$ je razcepljena particija grafa $G$ (tj. $K$ je klika in $I$ je neodvisna množica).*

- *Vsaka točka $x \in K$ ima soseda v množici $I$.*
- $N_G(I_1) \subset N_G(I_2) \subset \cdots \subset N_G(I_r)$ *in za vsak indeks $i \leq r$ za točki $u \in I_i$ in $v \in I_i$ velja $N_G(u) = N_G(v)$.*
- *Za vsak indeks $i \in \{1, \ldots, r\}$ je $K_i = N_G(I_i) \setminus N_G(I_{i-1})$.*

Ker bomo v nadaljevanju pozornost usmerili le na povezane grafe $G$ z $|V(G)| \geq 2$, bo $I_0 := \emptyset$ in bomo zato v opisu pragovne razdelitve množico $I_0$ izpustili. Za nas bo torej pragovna razdelitev enaka množici $\{I_1, \ldots, I_r, K_1, \ldots, K_r\}$.

**Lema 4.3.** *Pragovno razdelitev pragovnega grafa lahko izračunamo v linearnem času.*

*Dokaz.* Rezultat je direktna posledica izreka 10.4 iz [45]. □

Imejmo graf $H$ in funkcijo $\ell : V(H) \to \mathbb{Z}_+$. Pravimo, da je *$\ell$-razširitev grafa $H$* graf $H_\ell^+$, ki ga iz grafa $H$ dobimo tako, da vsaki točki $v$ dodamo natanko $\ell(v)$ listov. Formalno:

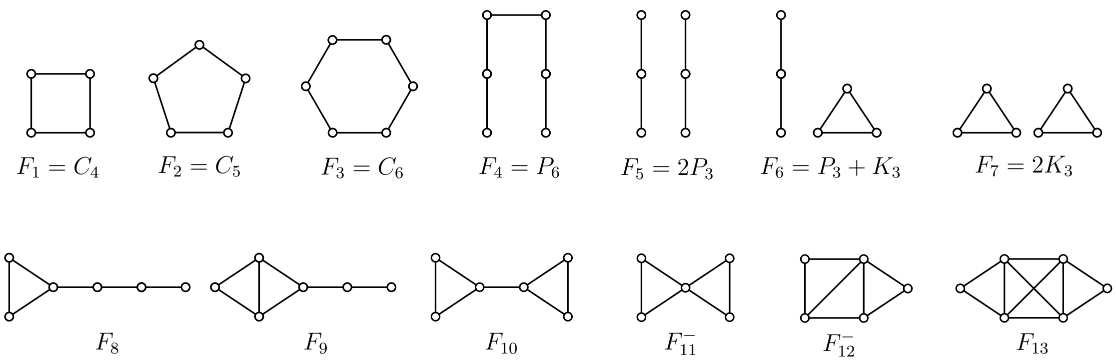
- $V(H_\ell^+) = V(H) \cup L$, kjer je $L = \bigcup_{v \in V(H)} L_v$ taka množica novih točk, da velja $L \cap V(H) = \emptyset, |L_v| = \ell(v)$ za vsak $v \in V(H)$ in $L_u \cap L_v = \emptyset$ za različne $u, v \in V(H)$.
- $E(H_\ell^+) = E(H) \cup \bigcup_{v \in V(H)} \{vv' \mid v' \in L_v\}$.

*Listna razširitev* grafa $H$ je poljubna $\ell$-razširitev grafa $H$ in *z listi razširjen pragoven graf* je poljubna listna razširitev nekega pragovnega grafa.

V nadaljevanju bomo karakterizirali z listi razširjene pragovne grafe s pomočjo prepovedanih induciranih podgrafov. Naslednja lema nam da zadosten pogoj za to, da je dan povezan graf z listi razširjen pragoven graf.

**Lema 4.4.** *Naj bo $G$ povezan $\mathcal{F}^-$-prost graf (glej sliko 4.2). Potem je $G$ z listi razširjen pragoven graf.*

*Dokaz.* Dokaz gre s protislovjem. Predpostavimo, da obstaja povezan $\mathcal{F}^-$-prost graf $G$, ki ni z listi razširjen pragoven graf. Posledično, podgraf $H$ grafa $G$ induciran z množico točk stopnje vsaj 2 ni pragoven. Po izreku 2.4 graf $H$ vsebuje induciran podgraf izomorfen grafu $2K_2$, grafu $P_4$ ali grafu $C_4$. Ker je $G$ $C_4$-prost, je




Slika 4.2: Množica prepovedanih induciranih podgrafov $\mathcal{F}^-$.

tudi $H$ $C_4$-prost. Torej $H$ vsebuje induciran podgraf izomorfen bodisi $2K_2$ bodisi $P_4$. Ločimo dva primera:

*Primer 1*: $H$ vsebuje induciran podgraf izomorfen grafu $2K_2$.

Naj $\mathcal{K}$ označuje množico vseh induciranih podgrafov izomorfnih $2K_2$ v grafu $H$. Ker je $G$ povezan, sta povezavi vsakega grafa $K \in \mathcal{K}$ povezani s potjo v grafu $G$. Naj $r(K)$ označuje razdaljo v grafu $G$ med povezavama iz $K$. Izberimo $K \in \mathcal{K}$ z najmanjšo vrednostjo $r(K)$ in naj bo $V(K) = \{s, t, u, v\}$ z $E(K) = \{st, uv\}$. Naj bo $P = (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ najkrajša $\{s,t\} - \{u,v\}$ pot v $G$. Potem je $x_0 \in \{s,t\}$ in $x_k \in \{u,v\}$. Ker je $K$ induciran podgraf grafa $G$, je $k \geq 2$, še več, $k = 2$, saj bi sicer množica $\{s, t, x_2, x_3\}$ inducirala podgraf $K'$ v $H$ izomorfen grafu $2K_2$ z $r(K') < r(K)$, kar je v protislovju s tem, kako smo izbrali graf $K$.

Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $x_0 = s$ in $x_2 = u$ in za poenostavitev zapisa uporabimo $x_1 = x$. Ker je graf $G$ $F_{11}^-$-prost, lahko brez škode za splošnost predpostavimo tudi, da $xv \notin E(G)$.

Ločimo dva podprimera, v odvisnosti od tega, ali je $xt \in E(G)$ ali ne.

*Primer 1.1*: $xt \in E(G)$.

Ker je $v \in V(H)$, je $d_G(v) \geq 2$. Torej ima točka $v$ v grafu $G$ soseda, ki je iz množice $V(G) \setminus \{s, t, u, x\}$, recimo mu $y$.

Če $y$ ni povezan s točko $u$, potem ni povezan niti s točko $x$, saj je graf $G$ $C_4$-prost. Ker je graf $G$ tudi $C_5$-prost, $y$ ni povezan niti s točkama $s$ in $t$. Toda sedaj točke $\{s, t, u, v, x, y\}$ inducirajo graf $F_8$ v grafu $G$, kar nas privede do protislovja.

Torej je $y$ povezan s točko $u$.

Če je $y$ povezan s točko $x$, potem ni povezan s točkama $t$ in $u$, saj je graf $G$ $F_{11}^{-}$-prost. Toda sedaj točke $\{s, t, u, x, y\}$ inducirajo $F_{11}^{-}$ v grafu $G$, protislovje. Torej $y$ ni povezan s točko $x$.

Dejstvo, da je graf $G$ $C_4$-prost, sedaj implicira, da $y$ ni povezan s točkama $s$ in $t$. Toda sedaj točke $\{s, t, u, v, x, y\}$ inducirajo $F_{10}$ v grafu $G$ in ponovno pridemo do protislovja.

*Primer 1.2*: $xt \notin E(G)$

Ker je $t \in V(H)$, je $d_G(t) \geq 2$. Torej ima točka $t$ v grafu $G$ soseda, ki je iz množice $V(G) \setminus \{s, u, v, x\}$, recimo mu $y$.

Če $y$ ni povezan s točko $s$, potem ni povezan niti s točko $x$, saj je graf $G$ $C_4$-prost. Ker je graf $G$ tudi $C_5$-prost, $y$ ni povezan s točko $u$ in ker je graf $G$ tudi $C_6$-prost, $y$ ni povezan s točko $v$. Toda sedaj točke $\{s, t, u, v, x, y\}$ inducirajo pot $P_6$ v grafu $G$, protislovje. Torej je $y$ povezan s točko $s$.

Če $y$ ni povezan s točko $x$ dobimo, zaradi tega, ker je graf $G$ $\{C_4, C_5\}$-prost, podobno kot zgoraj na točkah $\{s, t, u, v, x, y\}$ induciran graf $F_8$ v grafu $G$, kar nas privede do protislovja. Torej je $y$ povezan s točko $x$.

Dejstvo, da je graf $G$ $F_{12}^{-}$-prost, sedaj implicira, da $y$ ni povezan s točko $u$, in ker je tudi $C_4$-prost, $y$ ni povezan niti s točko $v$. Toda sedaj točke $\{s, t, u, v, x, y\}$ inducirajo graf $F_9$ v grafu $G$ in ponovno smo prišli do protislovja.

*Primer 2*: $H$ ne vsebuje induciranega podgrafa izomorfnega grafu $2K_2$.

V tem primeru ima $H$ induciran podgraf $K$ izomorfen grafu $P_4$. Naj bo $V(K) = \{s, t, u, v\}$ in $E(K) = \{st, tu, uv\}$. Ker sta $s, v \in V(H)$, velja, da je $d_G(s) \geq 2$ in $d_G(v) \geq 2$. Označimo z $x$ in $y$ soseda točk $s$ in $v$ (v tem vrstnem redu) iz množice $V(G) \setminus \{s, t, u, v\}$.

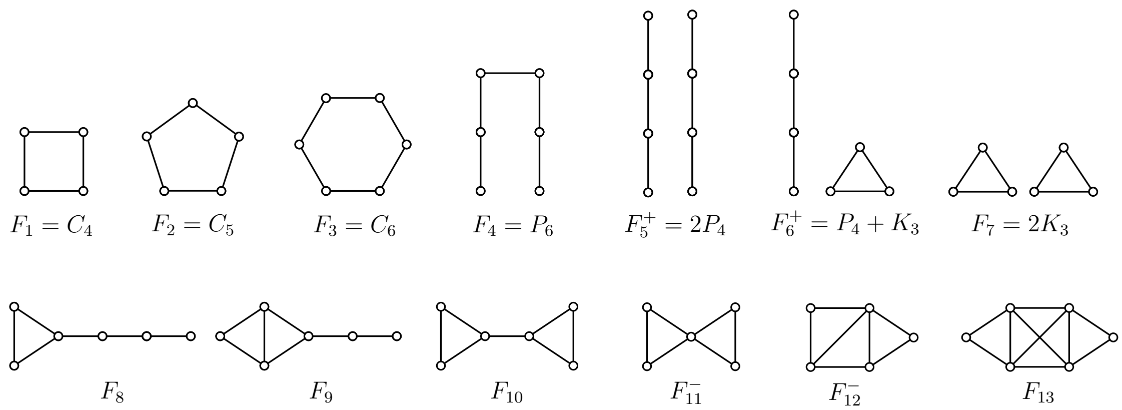
Če je $x$ povezan s točko $v$, potem dejstvo, da je $G$ $C_5$-prost, implicira, da je $x$ povezan s točko $t$ ali s točko $u$. Toda sedaj imamo v grafu $G$ induciran bodisi graf $F_{12}^{-}$ (če je $x$ povezan s točkama $t$ in $u$) bodisi cikel $C_4$ (sicer). Ker v obeh primerih pridemo do protislovja, $x$ ni povezan s točko $v$. S podobnim sklepanjem lahko vidimo, da $y$ ni povezan s točko $s$, kar implicira tudi, da $x \neq y$.

Predpostavimo, da sta $x$ in $y$ povezana. Potem sta $x$ in $y$ točki grafa $H$ in da bi se izognili induciranemu grafu $2K_2$ v $H$, sklepamo, da je $x$ povezan s točko $u$ in $y$ povezan s točko $t$. Dalje, da bi se izognili induciranemu ciklu $C_4$, sklepamo, da je $x$ povezan s točko $t$, in podobno, da je $y$ povezan s točko $u$. Toda sedaj točke $\{s,t,u,v,x,y\}$ inducirajo graf $F_{13}$ v grafu $G$, protislovje. Torej $x$ in $y$ nista povezana.

V izogib induciranemu podgrafu izomorfnemu poti $P_6$ v grafu $G$, lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da je $x$ povezan s točko $t$ ali s točko $u$. To pomeni, da je $x \in V(H)$. Ker pa množica $\{s,x,v,y\}$ v grafu $G$ inducira podgraf izomorfen grafu $2K_2$, sklepamo, da $y \notin V(H)$ (sicer bi graf $H$ vseboval induciran podgraf izomorfen grafu $2K_2$). To pomeni, da je $d_G(y) = 1$ in posledično $y$ ni povezan s točkama $t$ in $u$. Dalje, v izogib induciranemu podgrafu izomorfnemu grafu $2K_2$ v $H$ (na točkah $\{s,x,u,v\}$) sklepamo, da je $x$ povezan s točko $u$. Dejstvo, da je graf $G$ $C_4$-prost implicira, da je $x$ povezan tudi s točko $t$. Toda sedaj točke $\{s,t,u,v,x,y\}$ inducirajo graf $F_9$ v grafu $G$ in ponovno pridemo do protislovja.

S tem je lema dokazana. □

Iz leme 4.4 lahko izpeljemo karakterizacijo za splošen primer.




Slika 4.3: Grafi $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5^+, F_6^+, F_7, F_8, F_9, F_{10}, F_{11}^-, F_{12}^-, F_{13}$

**Izrek 4.5.** *Graf $G$ je z listi razširjen pragoven graf če in samo če je $\{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5^+, F_6^+, F_7, F_8, F_9, F_{10}, F_{11}^-, F_{12}^-, F_{13}\}$-prost, kjer so $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5^+, F_6^+, F_7, F_8, F_9, F_{10}, F_{11}^-, F_{12}^-, F_{13}$ grafi na sliki 4.3.*

*Dokaz.* Naj bo $G$ z listi razširjen pragoven graf. Torej obstaja tak pragoven graf $H$, da je $G$ listna razširitev grafa $H$. Dokaz gre s protislovjem.

Predpostavimo, da graf $G$ ni $\{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5^+, F_6^+, F_7, F_8, F_9, F_{10}, F_{11}^-, F_{12}^-, F_{13}\}$-prost in naj bo $X \subseteq V(G)$ taka podmnožica točk, da velja $G[X] \in \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5^+, F_6^+, F_7, F_8, F_9, F_{10}, F_{11}^-, F_{12}^-, F_{13}\}$. Ker je vsaka točka iz $V(G) \setminus V(H)$ v grafu $G$ stopnje 1, lahko enostavno preverimo, da podgraf grafa $H$ induciran z množico $V(H) \cap X$ vsebuje $2K_2, C_4$ ali $P_4$, kar je v nasprotju s točko (2) izreka 2.4.

Naj bo sedaj $G$ graf, ki je $\{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5^+, F_6^+, F_7, F_8, F_9, F_{10}, F_{11}^-, F_{12}^-, F_{13}\}$-prost. Vidimo, da je $G$ tetivni graf (saj je $\{C_4, C_5, C_6, P_6\}$-prost), torej lahko vsebuje induciran cikel dolžine kvečjemu 3. Ker je graf $G$ $F_7$-prost, je lahko tak cikel vsebovan v največ eni povezani komponenti grafa $G$. Trdimo, da vsebuje graf $G$ kvečjemu eno komponento, ki ni zvezda. Predpostavimo, da to ne drži in naj bosta $C$ in $C'$ različni komponenti grafa $G$, ki nista zvezdi. Glede na zgornjo opazko lahko privzamemo, da $C$ ne vsebuje ciklov (tj. je drevo) in ker $C$ ni zvezda, vsebuje inducirano pot $P_4$ (saj je $P_2 \cong K_{1,1}$ in je $P_3 \cong K_{1,2}$). Ker je graf $G$ $F_6^+$-prost, tudi $C'$ ne vsebuje cikla in posledično ravno tako vsebuje inducirano pot $P_4$. Toda sedaj imamo v grafu $G$ induciran graf $F_5^+$, protislovje.

Ker so pragovni grafi zaprti za dodajanje izoliranih točk (tj. za disjunktno unijo s $K_1$, so z listi razširjeni pragovni grafi zaprti za dodajanje zvezd (tj. za disjunktno unijo s $K_{1,r}$, za nek $r \geq 0$). Torej zadostuje pokazati, da je edina povezana komponenta, ki ni zvezda (če obstaja) z listi razširjen pragovni graf. To pa sledi iz leme 4.4. $\square$

## 4.2 Karakterizacija in prepoznavanje $\mathcal{F}^-$-prostih grafov

Izrek 3.20 implicira, da tvori razred $\mathcal{F}^-$-prostih grafov, označimo ga z $\mathcal{G}$ (glej sliko 4.2), podrazred razreda HTDP grafov.

Algoritem za izračun totalno dominantno pragovne strukture TDP grafov, ki smo ga omenili v poglavju 3, sloni na prepoznavanju pragovnih Boolovih funkcij in posledično (glede na do sedaj znane algoritme polinomske časovne zahtevnosti [29] za ta problem) na linearnem programiranju. V naslednjih dveh podpoglavjih bomo podali popolnoma kombinatoričen algoritem za izračun totalno dominantno pragovne strukture grafa iz $\mathcal{G}$, ki temelji na analizi strukture minimalnih TD množic danega grafa.

Z uporabo dosedanjih rezultatov lahko podamo naslednjo strukturno karakterizacijo $\mathcal{F}^-$-prostih grafov:

**Izrek 4.6.** *Za graf $G$ so naslednje trditve ekvivalentne:*

1. *Graf $G$ je $\mathcal{F}^-$-prost.*
2. *Graf $G$ je $\{2P_3, P_3 + K_3\}$-prost z listi razširjen pragoven graf.*
3. *Za vsak par $(H, \ell)$, kjer je $H$ pragoven graf, $\ell : V(H) \to \mathbb{Z}_+$ in je $G$ $\ell$-razširitev grafa $H$, so izpolnjeni naslednji pogoji:*
   - (a) *Za vsaki dve različni nesosednji točki $u, v \in V(H)$ velja: $\ell(u) \leq 1$ ali $\ell(v) \leq 1$.*
   - (b) *Za vsako točko $u \in V(H)$ velja bodisi $\ell(u) \leq 1$ ali pa za vsak par $x, y$ povezanih nesosedov točke $u$ velja $\ell(x) = \ell(y) = 0$.*
   - (c) *Za vsako točko $u \in V(H)$, za katero obstaja (ne nujno inducirana) pot $P_3$ v $H - N_H[u]$ velja: $\ell(u) \leq 1$.*
4. *Obstaja tak par $(H, \ell)$, da je $H$ pragoven graf, $\ell : V(H) \to \mathbb{Z}_+$, $G$ je $\ell$-razširitev grafa $H$ in so pogoji 3.(a)-3.(c) izpolnjeni.*

*Dokaz.* Implikacija $1 \Rightarrow 2$ sledi neposredno iz izreka 4.5.

Dokaz za implikacijo $2 \Rightarrow 3$ gre s protislovjem. Predpostavimo, da je $G = H_\ell^+$ sicer $\{2P_3, P_3 + K_3\}$-prost, vendar pa funkcija $\ell : V(H) \to \mathbb{Z}_+$ ne izpolnjuje enega izmed pogojev 3.(a), 3.(b) ali 3.(c).

Če $\ell$ ne izpolnjuje pogoja 3.(a), potem obstaja tak par nepovezanih točk $u, v \in V(H)$, da velja $\ell(u) \geq 2$ in $\ell(v) \geq 2$. V tem primeru graf $G$ vsebuje induciran podgraf, izomorfen grafu $2P_3$, na točkah $\{u, v\} \cup L'_u \cup L'_v$, kjer je $L'_u \subseteq L_u$ in $L'_v \subseteq L_v$ ter velja $|L'_u| = |L'_v| = 2$.

Če $\ell$ ne izpolnjuje pogoja 3.(b), potem obstajajo taka točka $u \in V(H)$ in tak povezan par $x, y$ nesosedov točke $u$, da velja $\ell(u) \geq 2$ in je vsaj ena od vrednosti $\ell(x)$ in $\ell(y)$ različna od 0. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je

$\ell(x) \geq 1$. V tem primeru graf $G$ vsebuje induciran podgraf izomorfen grafu $2P_3$ na točkah $\{u, x, x', y\} \cup L'_u$, kjer je $x' \in L_x$ in $L'_u \subseteq L_u$ ter velja $|L'_u| = 2$.

Če $\ell$ ne izpolnjuje pogoja 3.(c), potem obstaja taka točka $u \in V(H)$ z $\ell(u) \geq 2$, za katero obstaja (ne nujno inducirana) pot $P_3$ v $H - N_H[u]$. Naj predstavljajo točke $xyz$ pot $P_3$ v grafu $H - N_H[u]$. Če točki $x$ in $z$ v grafu $H$ nista povezani, potem graf $G$ vsebuje induciran podgraf izomorfen grafu $2P_3$ na točkah $\{u, x, y, z\} \cup L'_u$, kjer je $x' \in L_x$ in $L'_u \subseteq L_u$ ter velja $|L'_u| = 2$. Podobno, če sta točki $x$ in $z$ v grafu $H$ povezani, potem graf $G$ vsebuje induciran podgraf izomorfen grafu $P_3 + K_3$.

V vseh primerih pridemo do protislovja s predpostavko, da je graf $G$ $\{2P_3, P_3 + K_3\}$-prost, kar zaključi dokaz za (2) $\Rightarrow$ (3).

Implikacija 3 $\Rightarrow$ 4 je trivialna.

Ostane nam še dokaz implikacije 4 $\Rightarrow$ 1. Predpostavimo, da obstaja tak par $(H, \ell)$, kjer je $H$ pragovni graf, $\ell : V(H) \to \mathbb{Z}_+$ in je graf $G$ taka $\ell$-razširitev grafa $H$, ki izpolnjuje pogoje 3.(a)-3.(c). Ker je $G$ z listi razširjen pragovni graf, je $G$ po izreku 4.5 $\{F_1, F_2, F_3, F_4, F_7, F_8, F_9, F_{10}, F_{11}^-, F_{12}^-, F_{13}\}$-prost. Če graf $G$ ni $\{F_1, \ldots, F_{10}, F_{11}^-, F_{12}^-, F_{13}\}$-prost, potem vsebuje tako podmnožico točk $X \subseteq V(G)$, da je $G[X] \cong F$, kjer je $F \in \{2P_3, P_3 + K_3\}$.

Predpostavimo najprej, da je $F = 2P_3$. Naj bo $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ z $E(X) = \{ab, bc, de, ef\}$. Ker sta točki $b$ in $e$ stopnje vsaj 2 v $G$, pripadata tudi $V(H)$. Če je $V(H) \cap X = \{b, e\}$, potem ni izpolnjen pogoj 3.(a). Torej lahko predpostavimo, da je $a \in V(H)$. Ker je graf $H$ $2K_2$-prost, to implicira, da $d, f \notin V(H)$. Potem je $\ell(e) \geq 2$ in pogoj 3.(b), uporabljen na $u = e$, implicira $\ell(a) = \ell(b) = 0$ in posledično $c \in V(H)$. Toda sedaj ni izpolnjen pogoj 3.(c), uporabljen na $u = e$.

Predpostavimo sedaj, da je $F = P_3 + K_3$. Naj bo $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ z $E(X) = \{ab, bc, de, ef, fd\}$. Očitno so točke $b, d, e, f \in V(H)$ in ker je $H$ $2K_2$-prost, velja tudi, da $a, c \notin V(H)$. Slednje implicira, da je $\ell(b) \geq 2$ in posledično ni izpolnjen pogoj 3.(c), uporabljen na $u = b$.

V obeh primerih smo prišli do protislovja. □

V nadaljevanju podpoglavja bomo pokazali, da lahko $\mathcal{F}^-$-proste grafe prepoznamo v linearnem času. V naslednjem podpoglavju pa bomo podali algoritem linearne časovne zahtevnosti za izračun totalno dominantno pragovne strukture $\mathcal{F}^-$-prostega grafa.

**Izrek 4.7.** *$\mathcal{F}^-$-proste grafe lahko prepoznamo v linearnem času.*

*Dokaz.* Trdimo, da algoritem 2, ki je podan spodaj, prepozna $\mathcal{F}^-$-proste grafe in da ga lahko implementiramo tako, da teče v linearnem času.

**Dokaz pravilnosti:** Najprej opazimo, da zmanjšanje, ki ga opravimo v vrsticah 1-2 ohranja ustrezne grafe, saj je množica $\mathcal{F}^-$-prostih grafov zaprta za disjunktno unijo s $K_1$ in $K_2$ in za brisanje komponent izomorfnih $K_1$ in $K_2$. Iz enakega razloga je graf $G$ $\mathcal{F}^-$-prost, če algoritem v vrstici 4 vrne DA. Če algoritem v vrstici 6 vrne NE, potem preostanek grafa ni povezan, torej ima vsaj dve povezani komponenti z vsaj tremi točkami (v vsaki), kar implicira obstoj induciranega podgrafa, izomorfnega enemu izmed grafov $F_5, F_6$ ali $F_7$ (glej sliko 4.2).

Predpostavimo, da algoritem vrne NE v vrstici 10. Trdimo, da v tem primeru graf $G$ ni listna razširitev nobenega pragovnega grafa $H$. Dejansko, predpostavimo, da je graf $G$ listna razširitev pragovnega grafa $H' \neq H$. Potem je $H'$ povezan, z stopenjsko razdelitvijo $\{I_1, \ldots, I_r, K_1, \ldots, K_r\}$. Ker $H' \neq H$, mora $H'$ vsebovati točko stopnje 1. Toda, vse točke stopnje 1 v $H'$ so vsebovane v $I_1$ (zaradi lastnosti 3.(c) izreka 2.4) kar implicira, da je $|K_1| = 1$ in posledično, da je $H$ pragoven graf. (Stopenjski razdelitvi grafov $H$ in $H'$ se lahko razlikujeta le glede na točke v $I_1$ in sicer v odvisnosti od tega, ali so vse točke v $I_1$ listi, ali ne, v vsakem primeru pa so točke iz $I_1$, ki so stopnje 1 v grafu $G$, natanko tisti listi v grafu $G$, ki so povezani z edino točko $v \in K_1$.) Dejstvo, da je graf $H$ pragoven, je v nasprotju s predpostavko, da je algoritem vrnil NE v vrstici 10. Ker graf $G$ ni z listi razširjen pragoven graf, lema 4.4 implicira, da graf $G$ ni $\{F_1, F_2, F_3, F_4, F_8, F_9, F_{10}, F_{11}^-, F_{12}^-, F_{13}\}$-prost, torej tudi ni $\mathcal{F}^-$-prost in je zato algoritem v tem primeru pravilen.

Predpostavimo, da algoritem vrne NE v vrstici 14. Potem poljubni dve različni točki $u, v \in I$ z $\ell(u) \geq 2$ in $\ell(v) \geq 2$ kršita pogoj 3.(a) izreka 4.6. Torej graf $G$ ni $\mathcal{F}^-$-prost.

Predpostavimo, da algoritem vrne NE v vrstici 18. Opazimo, da je vsaka točka iz $I_i$ povezana z vsemi točkami iz $\cup_{j=1}^{i} K_j$ in z nobeno točko iz $\cup_{j=i+1}^{r} K_j$. Točka $v \in I_i$ ima $\ell(v) \geq 2$, torej če je $r > i+1$, je naš graf razdeljen na vsaj 4 dele (in sicer $K_{i+1}, K_{i+2}, I_{i+1}$ ter $I_{i+2}$), katerih točke niso povezane s točko $v$. Poljubna trojica $(x, y, z) \in I_{i+1} \times K_{i+1} \times I_{i+2}$ predstavlja inducirano pot $P_3$ v nesoseščini točke $v$, kar je v nasprotju s pogojem 3.(c) izreka 4.6. Če je $r = i + 1$ in je $|K_r| \cdot |i_r| > 1$,

**Algoritem 2:** Algoritem linearne časovne zahtevnosti za prepoznavanje $\mathcal{F}^-$-prostih grafov

**Vhod**: Graf $G = (V, E)$;

**Izhod**: DA, če je graf $G$ $\mathcal{F}^-$-prost, NE, sicer.

**dokler** *ima $G$ povezano komponento $C$ na vsaj dveh točkah* **naredi**
$G \leftarrow G - C$;
**če** $V(G) = \emptyset$ **potem**
vrni DA;
**če** *$G$ ni povezan* **potem**
vrni NE;
`// sedaj je` $|V(G)| \geq 3$ `in je` $G$ `povezan`
naj bo $H$ graf, ki ga iz grafa $G$ dobimo z brisanjem vseh točk stopnje 1 (listov);
za vsak $v \in V(H)$ naj bo $\ell(v)$ število listov, ki so v grafu $G$ povezani z $v$;
**če** *$H$ ni pragoven* **potem**
vrni NE;
naj bo $\{I_1, \ldots, I_r, K_1, \ldots, K_r\}$ pragovna razdelitev grafa $H$;
naj bo $I = \cup_{i=1}^{r} I_i$ in $K = \cup_{i=1}^{r} K_i$;
**če** *za vsaj dve točki $v \in I$ velja $\ell(v) \geq 2$* **potem**
vrni NE;
**če** *obstaja točka $v \in I$ z $\ell(v) \geq 2$* **potem**
naj bo $i \in [r]$ tak indeks, da je $v \in I_i$;
**če** *$r > i + 1$ ali ($r = i + 1$ in $|K_r| \cdot |I_r| > 1$)* **potem**
vrni NE;
**če** *$r = i + 1$ in $\ell(w) > 0$ za neko točko $w \in K_r \cup I_r$* **potem**
vrni NE;
vrni DA;

vsebuje vsaj eden izmed delov $I_r$ in $K_r$ več kot eno točko in podobno kot zgoraj lahko najdemo pot dolžine 2 v nesoseščini točke $v$, kar je ponovno v nasprotju s pogojem 3.(c) izreka 4.6. V obeh primerih graf $G$ ni $\mathcal{F}^-$-prost.

Predpostavimo, da algoritem vrne NE v vrstici 20. Potem je $r = i + 1$, $|K_r| = |I_r| = 1$ in $\ell(w) > 0$ za neko točko $w \in K_r \cup I_r$. Sedaj točka $w$ in njen sosed v $K_r \cup I_r$ tvorita povezan par nesosedov točke $v$. Ker za točko $v$ velja $\ell(v) \geq 2$, pogoj 3.(b) izreka 4.6 ni izpolnjen. Torej graf $G$ ni $\mathcal{F}^-$-prost.

Končno, predpostavimo, da v vrstici 21 algoritem vrne DA. Trdimo, da v tem primeru par $(H, \ell)$ izpolnjuje pogoje 3.(a) - 3.(c) izreka 4.6, kar z upoštevanjem implikacije $4 \Rightarrow 1$ pomeni, da je graf $G$ $\mathcal{F}^-$-prost. Obravnavali bomo dva primera. Najprej predpostavimo, da za vse točke $v \in I$ velja $\ell(v) < 1$. V tem primeru je pogoj 3.(a) iz izreka 4.6 izpolnjen, saj mora vsaj ena točka od poljubnega para nesosednih točk v $H$ ležati v $I$. Podobno sta izpolnjena pogoja 3.(b) in 3.(c), namreč, če je $\ell(u) \geq 2$, potem je $u \in K$ in je nesoseščina točke $u$ neodvisna množica. Sedaj predpostavimo, da obstaja točka $v \in I$ z $\ell(v) \geq 2$. Ker algoritem v vrsticah 18 in 20 ni vrnil NE, velja $r \leq i + 1$ in v primeru ko je $r = i + 1$, velja še $|K_r| = |I_r| = 1$ in $\ell(w) = 0$ za obe točki $w \in K_r \cup I_r$. Ponovno je pogoj 3.(a) iz izreka 4.6 izpolnjen, saj je edina možnost za to, da imamo dve nesosednji točki, recimo $x$ in $y$, z $\ell(x) \geq 2$ in $\ell(y) \geq 2$ ta, da je npr. $x = v$ in je $y \in I \cup K_r$ (če je $i = r + 1$). Toda obe možnosti implicirata $\ell(y) \leq 1$. Pogoja 3.(b) in 3.(c) sta izpolnjena vedno, ko je $u \in K$ (saj je nesoseščina točke $u$ neodvisna množica). Ravno tako sta pogoja izpolnjena, če je $u = v$, saj nesoseščina točke $v$ (če ni prazna) sestoji samo iz dveh točk $w \in K_r \cup I_r$, za katerí velja $\ell(w) = 0$. Torej, če algoritem v vrstici 21 vrne DA, je graf $G$ res $\mathcal{F}^-$-prost.

**Analiza časovne zahtevnosti:** Začetne transformacije grafa $G$ (vrstice 1-6 danega algoritma) lahko izvedemo v času $\mathcal{O}(|V(G)|+|E(G)|)$, saj lahko povezanost grafa preverimo npr. s pregledom v širino, ki je linearne časovne zahtevnosti. Izračune v vrsticah 7-8 lahko izvedemo tako, da najprej označimo liste v grafu $G$, kar lahko naredimo v času $\mathcal{O}(|V(G)|)$ in nato pridobimo vrednosti $\ell$ tako, da preverimo, koliko listov ima posamezna točka v grafu $G$, ki ni bila označena kot list (to so ravno točke grafa $H$), in graf $H$ tako, da liste enostavno izbrišemo. To lahko storimo v času $\sum_{v \in V(H)} d_G(v) = \mathcal{O}(|V(H)|+|E(H)|)$. Preverbo, ali je graf $H$ pragoven, lahko naredimo v času $\mathcal{O}(|V(H)| + |E(H)|)$ (glej npr. [45]). Po lemi 4.3

lahko stopenjsko razdelitev izračunamo v linearnem času. Pogoja v vrsticah 13 in 15 lahko sočasno preverimo v času $\mathcal{O}(V(H))$. S primerno implementacijo lahko pogoje v vrsticah 16, 17 in 19 opravimo v času $\mathcal{O}(1)$. Če sedaj seštejemo časovne zahtevnosti posameznih delov algoritma 2, dobimo skupno časovno zahtevnost $\mathcal{O}(|V(G)| + |E(G)|)$, skladno z našo trditvijo. □

## 4.3 Izračun TDP strukture $\mathcal{F}^-$-prostih grafov

Na osnovi strukturne karakterizacije grafovskega razreda $\mathcal{G}$ (tj. $\mathcal{F}^-$-prostih grafov), ki smo jo podali v prejšnjem razdelku, bomo sedaj pokazali, da lahko totalno dominantno pragovno strukturo $(w, t)$ danega grafa $G \in \mathcal{G}$ izračunamo v linearnem času.

Pri analizi časovne zahtevnosti algoritma, podanega v dokazu izreka 4.8, bomo predpostavili (običajno) poenostavitev, da lahko seštevanje, primerjanje in množenje dveh celih števil opravimo v času $\mathcal{O}(1)$.

**Izrek 4.8.** *Celoštevilsko totalno dominantno pragovno strukturo danega $\mathcal{F}^-$-prostega grafa lahko izračunamo v linearnem času.*

*Dokaz.* Opisali in analizirali bomo algoritem za izračun celoštevilske totalno dominantno pragovne strukture danega $\mathcal{F}^-$-prostega grafa $G$. Algoritem temelji na analizi primerov in na strukturnih lastnostih vhodnega grafa ter na strukturi njegovih minimalnih totalno dominantnih množic. Čeprav je konceptualno algoritem dokaj enostaven, je njegov opis nekoliko daljši. V osnovi pa gre za to, da v največ 10 korakih algoritem preveri, katera (od končno mnogo) možnosti se pojavi in za vsako od množnosti izračuna totalno dominantno pragovno strukturo.

Za lažje branje je dokaz sestavljen tako, da so koraki algoritma zapisani z drugo vrsto pisave, po vsakem koraku sledi ocena časovne zahtevnosti in utemeljitev pravilnosti opisanega koraka. Vhodni podatek za algoritem je $\mathcal{F}^-$-prost graf $G = (V, E)$; rezultat je totalno dominantno pragovna struktura $(w, t)$ grafa $G$.

**1. korak:** Če ima graf $G$ izolirano točko, potem vrni par $(w, |V(G)| + 1)$, kjer je $w(x) = 1$ za vsak $x \in V(G)$.

*Časovna zahtevnost:* $\mathcal{O}(|V(G)|)$ za preverjanje pogoja, $\mathcal{O}(|V(G)|)$ za izračun totalno dominantno pragovne strukture.

*Pravilnost:* Sledi iz dejstva, da graf z izolirano točko nima totalno dominantne množice.

Privzamemo lahko torej, da graf $G$ nima izoliranih točk.

**2. korak:** Naj bo $\mathcal{C} = \{C \mid C$ je povezana komponenta grafa G in $|V(C)| = 2\}$. Izračunaj $Y = \cup\{V(C) \mid C \in \mathcal{C}\}$ (tj. množica točk, vsebovanih v komponentah s po dvema točkama). Če $Y = V(G)$, potem vrni par $(w, |V(G)|)$, kjer je $w(x) = 1$ za vse $x \in V(G)$.

*Časovna zahtevnost:* $\mathcal{O}(|V(G)| + |E(G)|)$ za izračun množic $\mathcal{C}$ in $Y$, $\mathcal{O}(1)$ za preverjanje pogoja in $\mathcal{O}(|V(G)|)$ za izračun totalno dominantno pragovne strukture.

*Pravilnost:* Sledi iz dejstva, da je v grafu, v katerem so vse povezane komponente izomorfne grafu $K_2$, edina totalno dominantna množica enaka $V(G)$.

Privzamemo lahko torej, da $V(G) \setminus Y \neq \emptyset$.

**3. korak:** Naj bo $G' = G - Y$ in naj bo $L$ množica točk stopnje $1$ v $G'$ ter $H = G' - L$. Izračunaj tako funkcijo $\ell : V(H) \to \mathbb{Z}_+$, da velja $G' = H_\ell^+$. Izračunaj stopenjsko razdelitev $\{I_1, \ldots, I_r, K_1, \ldots, K_r\}$ grafa $H$. [Spomnimo, da dokaz pravilnosti algoritma 2 implicira, da je $H$ pragoven graf.]

Če $K_1 = \emptyset$, potem vrni par $(w, t)$, kjer je

$$w(x) = \begin{cases} 1, & \text{če } x \in L; \\ |L|, & \text{sicer,} \end{cases}$$

in $t = (|V(G)| - |L|) \cdot |L| + 1$

*Časovna zahtevnost:* $\mathcal{O}(|V(G)| + |E(G)|)$ za izračun grafa $H$, funkcije $\ell$ in stopenjske razdelitve grafa $H$, $\mathcal{O}(1)$ za preverjanje pogoja in $\mathcal{O}(|V(G)|)$ za izračun totalno dominantno pragovne strukture.

*Pravilnost:* Sledi iz dejstva, da če je $K_1 = \emptyset$, potem je $r = 1$ in $|I_1| = 1$, zato je graf $G$ izomorfen disjunktni uniji grafov $G[Y]$ (ki sestoji iz izoliranih povezav) in zvezde $K_{1,p}$ s $p \geq 2$, kjer $L$ predstavlja natanko množico listov zvezde. Podmnožica $D \subseteq V(G)$ je TD množica v grafu $G$ če in samo če je $Y \cup I_1 \cup \{v\} \subseteq D$, za nek $v \in L$. Zlahka preverimo, da je v tem primeru $(w, t)$ totalno dominantno pragovna struktura grafa $G$.

Privzamemo lahko torej, da $K_1 \neq \emptyset$.

**4. korak:** Naj bo $Z = \{v \in V(H)\,;\, \ell(v) > 0\}$ množica točk grafa $H$, ki so povezane s kakšno točko iz $L$. Določimo $F = Y \cup Z$. [Komentar: Ker je vsaka točka v $F$ edina soseda kakšne točke v grafu $G$, za vsako TD množico $D$ v grafu $G$ velja $F \subseteq D$.]

Če $Z = \emptyset$, potem vrni par $(w, t)$, kjer je

$$w(x) = \begin{cases} |V(G')| - |K_1|, & \text{če } x \in K; \\ |K_1| \cdot (|V(G')| - |K_1|), & \text{če } x \in Y; \\ 1, & \text{sicer,} \end{cases}$$

in $t = w(Y) + |V(G')| - |K_1| + 1$.

*Časovna zahtevnost:* $\mathcal{O}(|V(G)|)$ za izračun množice $Z$ in grafa $F$, $\mathcal{O}(1)$ za preverjanje pogoja in $\mathcal{O}(|V(G)|)$ za izračun totalno dominantno pragovne strukture.

*Pravilnost:* Sledi iz dejstva, da je množica $D \subseteq V(G)$, totalno dominantna množica grafa $G$ če in samo če je $Y \cup \{x, y\} \subseteq D$, za nek $x \in K_1$ in nek $y \in V(G') \setminus \{x\}$. Res, če je $D \subseteq V(G)$ množica z $Y \cup \{x, y\} \subseteq D$, potem je očitno $w(D) \geq t$. Obratno, če za $D \subseteq V(G)$ velja $w(D) \geq t$, potem je $Y \subseteq D$, sicer bi v nasprotnem primeru imeli $w(D) \leq w(V(G)) - |K_1| \cdot (|V(G')| - |K_1|) \leq w(Y) + |K_1| \cdot (|V(G')| - |K_1|) + (|V(G')| - |K_1|) - |K_1| \cdot (|V(G')| - |K_1|) < t$. Dalje, obstaja taka točka $x \in K_1$, za katero velja $x \in D$, saj bi v nasprotnem primeru imeli $w(D) \leq w(Y) + |V(G')| - |K_1| < t$ in če je $|D \cap V(G')| = 1$, je ravno tako $w(D) \leq w(Y) + |V(G')| - |K_1| < t$. Torej je $Y \cup \{x, y\} \subseteq D$ za nek $x \in K_1$ in nek $y \in V(G') \setminus \{x\}$ in zato je množica $D$ TD množica grafa $G$.

Privzamemo lahko torej, da $Z \neq \emptyset$.

**5. korak:** Če $I_1 \not\subseteq Z$, potem:

Če $Z \cap K_1 \neq \emptyset$, potem:

Če $|Z| \geq 2$, potem vrni par $(w, |F|)$, kjer je

$$w(x) = \begin{cases} 1, & \text{če } x \in F; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Sicer vrni par $(w, t)$, kjer je

$$w(x) = \begin{cases} |K_1|, & \text{če } x \in F; \\ 1, & \text{če } x \in K_1; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

in $t = w(F) + 1$.

*Časovna zahtevnost:* $\mathcal{O}(|V(G)|)$ za preverjanje vsakega izmed dveh pogojev, $\mathcal{O}(1)$ za preverjanje najbolj notranjega pogoja in $\mathcal{O}(|V(G)|)$ za izračun totalno dominantno pragovne strukture v vsakemu od primerov.

*Pravilnost:* Predpostavimo, da obstaja točka $v \in I_1 \setminus Z$. Da bi dominirali točko $v$, mora vsaka TD množica grafa $G$ vsebovati točko iz $N_G(v) = N_H(v) = K_1$. Obravnavali bomo tri primere.

*Primer 1*: $Z \cap K_1 \neq \emptyset$ in $|Z| \geq 2$. V tem primeru dejstvo, da je $(w, t)$ totalno dominantno pragovna struktura grafa $G$, sledi iz dejstva, da je množica $F$ edina minimalna TD množica grafa $G$.

*Primer 2*: $Z \cap K_1 \neq \emptyset$ in $|Z| = 1$, recimo $Z = \{x\}$. Potem je $x \in K_1$. V tem primeru vsako minimalno TD množico grafa $G$ sestavljata množica $F$ in poljubna, od $x$ različna, točka iz $G'$. Torej, če je $D \subseteq V(G)$ TD množica grafa $G$, potem je $F$ prava podmnožica množice $D$, kar implicira, da je $w(D) \geq t$. Obratno, če za $D \subseteq V(G)$ velja $w(D) \geq t$, potem je $F \subseteq D$ (sicer bi $w(D) \leq w(F) - (|V(G')| - 1) + (|V(G')| - 1) < t$), dalje mora $D$ poleg točke $x$ vsebovati še eno točko iz grafa $G'$, saj bi v nasprotnem primeru veljalo $w(D) = w(F) < t$.

*Primer 3*: $Z \cap K_1 = \emptyset$. Ker je in $Z \neq \emptyset$, ima v tem primeru vsaka minimalna TD množica obliko $F \cup \{x\}$ za nek $x \in K_1$. Če je $D$ TD množica grafa $G$, potem obstaja tak $x \in K_1$, da je $F \cup \{x\} \subseteq D$ in je torej $w(D) \geq w(F) + 1$. Obratno, če za $D \subseteq V(G)$ velja $w(D) \geq w(F) + 1$, potem je $F \subseteq D$, sicer bi imeli $t \leq w(D) \leq w(V(G)) - |K_1| = w(F) + |K_1| - |K_1| = w(F) < t$. Dalje, $D$ mora vsebovati točko iz $K_1$, sicer bi veljalo $w(D) = w(F) < t$, torej je $D$ TD množica grafa $G$.

Privzamemo lahko torej, da je $I_1 \subseteq Z$. V opisu in analizi naslednjih korakov bomo uporabili oznaki $L_v = \{u\,;\, N(u) = \{v\}\}$ in $S' = \cup_{v \in S} L_v$ za vsak $S \subseteq I$ (npr. za $j \in \{1, \ldots, r\}$ imamo $I'_j = \cup_{v \in I_j} L_v$).

**6. korak:** Če $Z \cap K \neq \emptyset$, potem:
Naj $q$ označuje najmanjši tak indeks $i \in \{1, \ldots, r\}$, za katerega velja $Z \cap K_i \neq \emptyset$
Če $\cup_{i<q} I_i \nsubseteq Z$, potem:

Naj $p \in \{1, \ldots, q-1\}$ označuje najmanjši indeks, za katerega velja $I_p \nsubseteq Z$.

Vrni par $(w, t)$, kjer je utežna funkcija $w : V(G) \to \mathbb{Z}_+$ definirana rekurzivno, kot sledi:

(1) Za vse $x \in K_p$ naj bo $w(x) = 1$.

(2) Za vse $j = p-1, \ldots, 1$ naj bo $w(x) = \sum_{i=j+1}^{p} w(K_i)$ za vse $x \in I'_j$, $w(x) = \sum_{i=j}^{p-1} w(I'_i) + 1$ za vse $x \in K_j$.

(3) Za vse $x \in F$ naj bo $w(x) = \sum_{j \leq p} w(K_j)$.

(4) Za vse ostale točke $x$ naj bo $w(x) = 0$.

in $t = w(F) + \sum_{i<p} w(I'_i) + 1$.

Sicer, naj bo $x^* \in K_q \cap Z$.

Če ima $x^*$ soseda v $Z$, potem:

Vrni par $(w, t)$, kjer je utežna funkcija $w : V(G) \to \mathbb{Z}_+$ definirana rekurzivno, kot sledi:

(1) Za vse $j = q-1, \ldots, 1$, naj bo $w(x) = \sum_{i=j+1}^{q-1} w(K_i) + 1$ za vse $x \in I'_j$ (*opazimo:* $w(x) = 1$ *za vse* $x \in I'_{q-1}$)
in $w(x) = \sum_{i=j}^{q-1} w(I'_i)$ za vse $x \in K_j$.

(2) Za vse $x \in F$ naj bo $w(x) = \sum_{j \leq q} w(K_j) + 1$.

(3) Za vse ostale točke $x$ naj bo $w(x) = 0$.

in $t = w(F) + \sum_{i<q} w(I'_i)$.

Sicer:

Naj bo $A := (\bigcup_{i=q}^{r} (K_i \cup I_i) \cup L_{x^*}) \setminus \{x^*\}$.

Vrni par $(w, t)$, kjer je utežna funkcija $w : V(G) \to \mathbb{Z}_+$ definirana rekurzivno, kot sledi:

(1) Za vse $x \in A$ naj bo $w(x) = 1$.

(2) Za vse $j = q-1, \dots, 1$ naj bo
$w(x) = \sum_{i=j+1}^{q-1} w(K_i) + w(A)$ za vse $x \in I'_j$
(*opazimo:* $w(x) = w(A)$ *za vse* $x \in I'_{q-1}$) in
$w(x) = \sum_{i=j}^{q-1} w(I'_i) + 1$ za vse $x \in K_j$ .

(3) Za vse $x \in F$ naj bo $w(x) = w(A) + w(B)$,
kjer je $B := \bigcup_{i<q} K_i = K \setminus (A \cup \{x^*\})$.

in $t = w(F) + w(I') + 1$

*Časovna zahtevnost:* Zlahka preverimo, da z ustrezno implementacijo dosežemo časovno zahtevnost $\mathcal{O}(|V(G)|)$ za izračun totalno dominantno pragovne strukture v vsakem od primerov. Vse ostale izračune lahko opravimo v času $\mathcal{O}(|V(G)|)$.

*Pravilnost:* Po definiciji indeksa $q$ imamo $Z \cap (\cup_{j<q} K_j) = \emptyset$ in množica $F$ dominira vse točke v $K \cup L \cup (\cup_{i \geq q} I_i)$, razen morda edine točke v $Z \cap K_q$ (če ta množica vsebuje samo eno točko, ki v tem primeru predstavlja izolirano točko v množici $Z$). Pogoj 3.(b) izreka 4.6 implicira, da

$$\text{za vsak } j < q \text{ in za vsak } u \in I_j \text{ velja, da } \ell(u) \leq 1. \tag{4.1}$$

Dejansko, če je $\ell(u) \geq 2$ za nek $u \in I_j$ z $j < q$, potem bi poljuben $x \in K_q \cap Z$ skupaj z $y \in I_q$ tvoril par povezanih nesosedov točke $u$ z $\ell(u) \geq 2$ in $\ell(x) > 0$, kar je v nasprotju s pogojem 3.(b). Obravnavali bomo tri primere:

*Primer 1*: $\cup_{i<q} I_i \nsubseteq Z$.

Naj bo $p \in \{1, \dots, q-1\}$ najmanjši indeks, da velja $I_p \nsubseteq Z$. Ker smo primer, ko je $I_1 \nsubseteq Z$, obravnavali v koraku 5, sedaj velja $p \geq 2$. Naj bo $w \in I_p \setminus Z$. Da bi dominirali točko $w$, mora v tem primeru vsaka minimalna TD množica grafa $G$ vsebovati točko iz $\cup_{i \leq p} K_i$. Torej lahko množico $\mathcal{D}$ vseh minimalnih TD množic grafa $G$ razdelimo na paroma disjunktne podmnožice $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{D}_p$, kjer za vsak $j = 1, \dots, p$, velja $\mathcal{D}_j = \{D \in \mathcal{D}; \min\{i : D \cap K_i \neq \emptyset\} = j\}$. Za vsak $j \in \{1, \dots, p\}$, vsebuje $\mathcal{D}_j$ vse množice $D$ oblike $D = F \cup \{x\} \cup (\cup_{i<j} I'_i)$, kjer je $x \in K_j$.

Naj bo $D$ poljubna TD množica grafa $G$. Potem $D$ vsebuje neko minimalno TD množico grafa $G$, imenujmo jo $D'$, ki je oblike $D' = F \cup \{x\} \cup (\cup_{i<j} I'_i)$, kjer

je $1 \leq j \leq p$ in $x \in K_j$. Torej je teža množice $D'$ enaka $w(D') = w(F) + w(x) + \sum_{i<j} w(I'_i) = w(F) + \sum_{i=j}^{p-1} w(I'_i) + 1 + \sum_{i<j} w(I'_i) = t$, kar implicira $w(D) \geq t$. Obratno, naj za $D \subseteq V(G)$ velja $w(D) \geq t$. Potem je $F \subseteq D$, sicer bi imeli

$$\begin{aligned} t \;\leq\; w(D) \;&\leq\; w(V(G)) - \sum_{j\leq p} w(K_j) \\ &=\; w(F) + \sum_{j<p} w(I'_j) + \sum_{j\leq p} w(K_j) - \sum_{j\leq p} w(K_j) \\ &=\; w(F) + \sum_{j<p} w(I'_j) \;<\; t\,. \end{aligned}$$

Podobno sklepanje pokaže, da $D \cap (\cup_{i\leq p} K_i) \neq \emptyset$. Naj bo $j \in \{1,\ldots,p\}$ najmanjši tak indeks, da velja $D \cap K_j \neq \emptyset$. Če je $\cup_{i<j} I'_i \subseteq D$, potem je množica $D$ TD množica grafa $G$. Predpostavimo torej, da $\cup_{i<j} I'_i \nsubseteq D$. Naj bo $r \in \{1,\ldots,j-1\}$ tak indeks, da velja $I'_r \nsubseteq D$ in naj bo $x \in I'_r \setminus D$. Potem je

$$\begin{aligned} t \;\leq\; w(D) \;&\leq\; w(G) - w(x) - \sum_{i<j} w(K_i) \\ &=\; w(F) + \sum_{i<p} w(I'_i) + \sum_{i\leq p} w(K_i) - \sum_{i=r+1}^{p} w(K_i) - \sum_{i<j} w(K_i) \\ &\leq\; w(F) + \sum_{i<p} w(I'_i) \;<\; t\,. \end{aligned}$$

Zato za vse $D \subseteq V(G)$ velja $w(D) \geq t$ če in samo če je $D$ TD množica grafa $G$. S tem smo pokazali pravilnost 1. primera.

*Primer 2*: $\cup_{i<q} I_i \subseteq Z$ in točka $x^*$ ima soseda v $Z$.

V tem primeru množico $\mathcal{D}$ vseh minimalnih TD množic grafa $G$ razdelimo na paroma disjunktne podmnožice $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{D}_q$, kjer za vsak $j = 1,\ldots,q$ velja $\mathcal{D}_j = \{D \in \mathcal{D} \mid \min\{i : D \cap K_i \neq \emptyset\} = j\}$. Poleg tega lastnost (4.1) implicira, da za vsak $j \in \{1,\ldots,q-1\}$ množica $\mathcal{D}_j$ vsebuje vse množice $D$ oblike $D = F \cup \{x\} \cup (\cup_{i<j} I'_i)$, kjer je $x \in K_j$, medtem ko množica $\mathcal{D}_q$ vsebuje samo eno množico, natančneje $\mathcal{D}_q = \{F \cup (\cup_{i<q} I'_i)\}$.

Naj bo $D$ poljubna TD množica grafa $G$. Potem $D$ vsebuje minimalno TD množico grafa $G$, recimo ji $D'$. Tedaj je bodisi $D' = F \cup (\cup_{i<q} I'_i)$ bodisi $D' = F \cup \{x\} \cup (\cup_{i<j} I'_i)$, kjer je $1 \leq j < q$ in $x \in K_j$. V prvem primeru je teža množice $D'$ enaka $t$ in zato $w(D) \geq t$. V drugem primeru imamo $w(D') = w(F) +$

$w(x) + \sum_{i<j} w(I'_i) = w(F) + \sum_{i=j}^{q-1} w(I'_i) + \sum_{i<j} w(I'_i) = t$, kar ponovno implicira $w(D) \geq t$. Obratno, naj za $D \subseteq V(G)$ velja $w(D) \geq t$. Potem je $Z \subseteq D$, sicer bi imeli

$$\begin{aligned} t \; \leq \; w(D) \; &\leq \; w(V(G)) - \sum_{j<q} w(K_j) - 1 \\ &= \; w(F) + \sum_{j<q} w(I'_j) + \sum_{j<q} w(K_j) - \sum_{j<q} w(K_j) - 1 \\ &< \; w(F) + \sum_{j<q} w(I'_j) \; = \; t\,. \end{aligned}$$

Če $\cup_{j<q} I'_j \subseteq D$, potem je $D$ TD množica grafa $G$. Predpostavimo torej, da $\cup_{j<q} I'_j \nsubseteq D$. Naj bo $j \in \{1, \ldots, q-1\}$ najmanjši tak indeks, da velja $I'_j \nsubseteq D$ in naj bo $x \in I'_j \setminus D$. Če $(\cup_{i\leq j} K_i) \cap D \neq \emptyset$, potem je $D$ TD množica grafa $G$. Predpostavimo, da $(\cup_{i\leq j} K_i) \cap D = \emptyset$. Potem velja

$$\begin{aligned} t \; \leq \; w(D) \; &\leq \; w(V(G)) - w(x) - \sum_{i\leq j} w(K_i) \\ &= \; w(F) + \sum_{i<q} w(I'_i) + \sum_{i<q} w(K_i) - \sum_{i=j+1}^{q-1} w(K_i) - 1 - \sum_{i\leq j} w(K_i) \\ &< \; w(F) + \sum_{i<q} w(I'_i) \; = \; t\,, \end{aligned}$$

kar nas privede do protislovja. Zato za vse $D \subseteq V(G)$ velja $w(D) \geq t$ če in samo če je $D$ TD množica grafa $G$. S tem smo pokazali pravilnost 2. primera.

*Primer 3*: $\cup_{i<q} I_i \subseteq Z$ in točka $x^*$ je izolirana.

Po predpostavkah tega primera in ker je $I_1 \subseteq Z$, imamo $q \geq 2$ in posledično tudi $r \geq 2$. Poleg tega velja $Z \cap (\bigcup_{j\geq q} I_j) = \emptyset$. Opazimo, da množica $F$ dominira vse točke v $V(G) \setminus ((\cup_{i<q} I_i) \cup \{x^*\})$. Enako kot v primeru 2 množico $\mathcal{D}$ vseh minimalnih TD množic grafa $G$ razdelimo v paroma disjunktne podmnožice $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{D}_q$, kjer za vsak $j = 1, \ldots, q$ velja $\mathcal{D}_j = \{D \in \mathcal{D} \,:\, \min\{i \,:\, D \cap K_i \neq \emptyset\} = j\}$. Sedaj imamo minimalne TD množice $D \in \mathcal{D}$ dveh možnih oblik:

- za vse $j = 1, \ldots, q-1$ je vsaka množica $D \in \mathcal{D}_j$ oblike $D = F \cup \{x\} \cup \bigcup_{i<j} I'_i$ za nek $x \in K_j$,

- vsaka množica $D \in \mathcal{D}_q$ je oblike $D = F \cup \{y\} \cup \bigcup_{i<q} I'_i$ za nek $y \in A$, kjer je $A := \left(\bigcup_{i=q}^{r}(K_i \cup I_i) \cup L_{x^*}\right) \setminus \{x^*\}$.

Spomnimo, ker je $Z \cap (\cup_{j \geq q} I_j) = \emptyset$, velja $I' = \cup_{i=1}^{q-1} I'_i$.

Naj bo $D$ poljubna TD množica grafa $G$. Potem $D$ vsebuje neko minimalno TD množico grafa $G$, recimo ji $D'$, in predpostavimo najprej, da je oblike $D' = F \cup \{x\} \cup \bigcup_{i<j} I'_i$, za nek $x \in K_j$ in $1 \leq j \leq q-1$. Potem velja $w(D) \geq w(D') = w(F) + w(x) + \sum_{i<j} w(I'_i) = w(F) + \sum_{i=j}^{q-1} w(I'_i) + 1 + \sum_{i<j} w(I'_i) = t$. Podobno, če je $D'$ oblike $D' = F \cup \{y\} \cup \bigcup_{i<q} I'_i$ za nek $y \in A$, velja $w(D) \geq w(D') = w(F) + w(y) + \sum_{i<q} w(I'_i) = w(F) + 1 + \sum_{i<q} w(I'_i) = t$.

Obratno, naj za $D \subseteq V(G)$ velja $w(D) \geq t$. Potem je $F \subseteq D$, sicer bi (s predpostavko, da je $x \in F \setminus D$) imeli $t \leq w(D) \leq w(V(G)) - w(x) = w(F) + w(A) + w(B) + w(I') - (w(A) + w(B)) = w(F) + w(I') < t$, kar nas privede do protislovja.

Podobno sklepanje pokaže, da vsebuje množica $D$ element iz $A \cup B$. Predpostavimo najprej, da je $D \cap B = \emptyset$. Potem obstaja točka $y \in A \cap D$ in pokazati moramo le, da je $I' \subseteq D$, kar bomo storili s protislovjem. Predpostavimo, da je $x \in I' \setminus D$. Potem je $w(x) \geq w(A)$ in posledično je $t \leq w(D) \leq w(V(G)) - \big(w(B) + w(x)\big) \leq w(F) + w(A) + w(B) + w(I') - w(B) - w(A) = w(F) + w(I') < t$, protislovje. Sedaj predpostavimo, da vsebuje $D$ element iz množice $B$ in naj bo $j \in \{1, \ldots, q-1\}$ najmanjši tak indeks, da velja $D \cap K_j \neq \emptyset$. Pokazali bomo, da je v tem primeru $\cup_{i<j} I'_j \subseteq D$. Predpostavimo, da je $x \in L_v \setminus D$ za nek $v \in I_{j'}$, kjer je $j' < j$. Potem velja

$$
\begin{aligned}
t \;\leq\; w(D) \;&\leq\; w(V(G)) - \left(\sum_{i<j} w(K_i) + w(x)\right) \\
&=\; w(F) + w(A) + w(B) + w(I') - \sum_{i<j} w(K_i) - \sum_{i=j'+1}^{q-1} w(K_i) - w(A) \\
&\leq\; w(F) + w(I') \;<\; t\,,
\end{aligned}
$$

kar nas privede do protislovja. Zato za vse $D \subseteq V(G)$ velja $w(D) \geq t$ če in samo če je $D$ TD množica grafa $G$. S tem smo pokazali pravilnost 3. primera in zaključili dokaz za 6. korak.

Privzamemo lahko torej, da je $Z \subseteq I$.

**7. korak:** Če je $Z = I$, potem:

Naj bo $d = \max\{\ell(v)\,;\, v \in I_r\}$ in naj bo $x^+ \in I_r$ taka točka, da je $\ell(x^+) = d$. Vrni par $(w, t)$, kjer je utežna funkcija $w : V(G) \to \mathbb{Z}_+$ definirana rekurzivno, kot sledi:

(1) Za vse $x \in L_{x^+}$ naj bo $w(x) = 1$.

(2) Za vse $w \in I'_r \setminus L_{x^+}$ naj bo $w(x) = d$.

(3) Za vse $j = r, \ldots, 1$ naj bo $w(x) = \sum_{i=j}^{r} w(I'_i) - d + 1$ za vse $x \in K_j$.

(4) Za vse $j = r-1, \ldots, 1$ naj bo $w(x) = \sum_{i>j} w(K_i) + d$ za vse $x \in I'_j$

(5) Za vse $x \in F$ naj bo $w(x) = w(K) + d$.

in $t = w(F) + w(I') - d + 1$, kjer je $I' = \cup_{i \le r} I'_i$.

*Časovna zahtevnost:* Podobno kot za prejšnji korak lahko enostavno preverimo, da z ustrezno implementacijo dosežemo časovno zahtevnost $\mathcal{O}(|V(G)|)$ za izračun totalno dominantno pragovne strukture grafa $G$. Vse ostale izračune lahko opravimo v času $\mathcal{O}(|V(G)|)$.

*Pravilnost:* Množica $F$ dominira vse točke v $V(G)$, razen točk v $I$. Množico $\mathcal{D}$ vseh minimalnih TD množic grafa $G$ razdelimo v paroma disjunktne podmnožice $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{D}_r$, kjer je $\mathcal{D}_0 = \{D \in \mathcal{D}\,;\, D \cap K = \emptyset\}$ in za vse $j = 1, \ldots, r$ velja $\mathcal{D}_j = \{D \in \mathcal{D}\,;\, \min\{i \,:\, D \cap K_i \neq \emptyset\} = j\}$. Pogoj 3.(b) izreka 4.6 implicira, da

$$\text{za vsak } j < r \text{ in vsak } u \in I_j \text{ velja } \ell(u) = 1. \tag{4.2}$$

Dejansko imamo $\ell(u) \geq 1$, saj je $u \in I = Z$, vendar če bi veljalo $\ell(u) \geq 2$ za nek $u \in I_j$, kjer je $j < r$, potem bi vsaki dve točki $x \in K_r$ in $y \in I_r$ tvorili par povezanih nesosedov točke $u$, z $\ell(u) \geq 2$ in $\ell(y) > 0$, kar je v nasprotju s pogojem 3.(b).

Posledično je za vse $j = 1, \ldots, r$, vsaka minimalna TD množica $D \in \mathcal{D}_j$ oblike

$$D = F \cup \{x\} \cup \bigcup_{i<j} I'_i \tag{4.3}$$

za nek $x \in K_j$. Pogoj 3.(a) izreka 4.6 implicira, da imamo lahko največ eno točko $u \in I$ z $\ell(u) \geq 2$. Poleg tega, če taka točka obstaja, pogoj (4.2) implicira, da pripada množici $I_r$. Naj bo $x^+$ točka kot v koraku 7 in naj bo $d = \ell(x^+)$. Potem imamo natanko $d$ množic $D \in \mathcal{D}_0$ in vsaka od njih je oblike:

$$D = F \cup \bigcup_{v \in I \setminus \{x^+\}} L_v \cup \{\ell_{x^+}\} \tag{4.4}$$

kjer je $\ell_{x^+} \in L_{x^+}$.

Naj bo $D$ TD množica grafa $G$. Potem množica $D$ vsebuje minimalno TD množico $D'$ grafa $G$, kjer je $D' \in \mathcal{D}_j$ za nek $j \in \{0, 1, \ldots, r\}$. Če je $j = 0$, potem ima $D'$ obliko opisano v (4.4) (tj. $D' = F \cup \bigcup_{v \in I \setminus \{x^+\}} L_v \cup \{\ell_{x^+}\}$ za nek $\ell_{x^+} \in L_{x^+}$). V tem primeru lahko določimo spodnjo mejo za težo množice $D$, kot sledi:

$$\begin{aligned} w(D) \;\geq\; w(D') &= w(F) + \sum_{v \in I \setminus \{x^+\}} w(L_v) + w(\ell_{x^+}) \\ &= w(F) + \sum_{i=j}^{r} w(I'_i) - w(L_{x^+}) + w(\ell_{x^+}) \\ &= w(F) + w(I') - d + 1 \;=\; t\,. \end{aligned}$$

Če je $j > 0$, potem ima $D'$ obliko opisano v (4.3) (tj. $D' = F \cup \{x\} \cup \bigcup_{i<j} I'_i$ za nek $x \in K_j$) in lahko določimo spodnjo mejo za težo množice $D$, kot sledi:

$$\begin{aligned} w(D) \;\geq\; w(D') &= w(F) + w(x) + \sum_{i<j} w(I'_i) \\ &= w(F) + \sum_{i=j}^{r} w(I'_i) - d + 1 + \sum_{i<j} w(I'_i) \\ &= w(F) + w(I') - d + 1 \;=\; t\,. \end{aligned}$$

Obratno, naj za $D \subseteq V(G)$ velja $w(D) \geq t$. Potem je $F \subseteq D$, sicer v nasprotnem primeru (s predpostavko, da je $x \in F \setminus D$) dobimo $t \leq w(D) \leq w(V(G)) - w(x) = w(F) + w(K) + w(I') - (w(K) + d) = w(F) + w(I') - d < t$.

Predpostavimo najprej, da je $D \cap K \neq \emptyset$ in naj bo $j \in \{1, \ldots, r\}$ najmanjši tak indeks, da velja $D \cap K_j \neq \emptyset$. Pokazali bomo, da za vse $i < j$ in za vsak $v \in I_i$ množica $D$ vsebuje edini element iz $L_v$. Dokaz gre s protislovjem. Predpostavimo, da $x \notin D$, kjer je $L_v = \{x\}$ za nek $v \in I_{j'}$ kjer je $j' < j$. Potem je

$$\begin{aligned} t \;\leq\; w(D) \;&\leq\; w(V(G)) - \Big(\sum_{i<j} w(K_i) + w(x)\Big) \\ &=\; w(F) + w(K) + w(I') - \sum_{i<j} w(K_i) - \sum_{i>j'} w(K_i) - d \\ &\leq\; w(F) + w(I') - d \;<\; t\,, \end{aligned}$$

protislovje. Zato $D$ vsebuje množico oblike $D' = F \cup \{x\} \cup \bigcup_{i<j} I'_i$, kjer je $x \in K_j$, in je posledično TD množica grafa $G$.

Predpostavimo sedaj, da je $D \cap K = \emptyset$. Sedaj zadostuje pokazati, da vsebuje $D$ en element iz $L_v$ za vsak $v \in I$. Predpostavimo, da temu ni tako, in naj bo $v \in I$ taka točka, da velja $D \cap L_v = \emptyset$. Definicija utežne funkcije $w$ implicira $w(L_v) \geq d$ in torej imamo $t \leq w(D) \leq w(V(G)) - \big(w(K) + w(L_v)\big) = w(F) + w(K) + w(I') - w(K) - w(L_v) \leq w(F) + w(I') - d < t$, protislovje.

Zato $D$ vsebuje množico oblike (4.4) in je TD množica grafa $G$. Torej za vse $D \subseteq V(G)$ velja $w(D) \geq t$ če in samo če je $D$ TD množica grafa $G$. S tem smo končali dokaz pravilnosti 7. koraka.

Privzamemo lahko torej, da je $Z$ prava podmnožica množice $I$.

**8. korak:** Naj bo $p$ najmanjši tak indeks $j \in \{1, \ldots, r\}$, da velja $I_j \nsubseteq Z$.

Če je $Z \cap (\cup_{j \geq p} I_j) \neq \emptyset$, potem:

Vrni par $(w, t)$, kjer je utežna funkcija $w : V(G) \to \mathbb{Z}_+$ definirana rekurzivno, kot sledi:

(1) Za vse $x \in K_p$ naj bo $w(x) = 1$.

(2) Za vse $j = p-1, \ldots, 1$ naj bo $w(x) = \sum_{i=j+1}^{p} w(K_i)$ za vse $x \in I'_j$ in $w(x) = \sum_{i=j}^{p-1} w(I'_i) + 1$ za vse $x \in K_j$.

(3) Za vse $x \in F$ naj bo $w(x) = \sum_{i=1}^{p} w(K_i)$.

(4) Za vse ostale točke naj bo $w(x) = 0$.

in $t = w(F) + \sum_{j<p} w(I'_j) + 1$.

*Časovna zahtevnost:* Kot v predhodnih korakih lahko z ustrezno implementacijo dosežemo časovno zahtevnost $\mathcal{O}(|V(G)|)$.

*Pravilnost:* Ker je $Z$ prava podmnožica množice $I$, je vrednost $p$ dobro definirana in ker je $I_1 \subseteq Z$, je $p \geq 2$ (kar implicira tudi, da je $r \geq 2$). Da bi vsebovala sosede točk iz $I_p \backslash Z$, mora vsaka TD množica grafa $G$ vsebovati točko iz $\cup_{j \leq p} K_j$. Množico $\mathcal{D}$ vseh minimalnih TD množic grafa $G$ zato razdelimo na disjunktne podmnožice $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{D}_p$, kjer imamo za vse $j = 1, \ldots, p$ množice $\mathcal{D}_j = \{D \in \mathcal{D}\,;\, \min\{i : D \cap K_i \neq \emptyset\} = j\}$. Za $1 \leq j \leq p$ je vsaka množica $D \in \mathcal{D}_j$ oblike:

$$D = F \cup \{x\} \cup \bigcup_{i<j} I'_i, \tag{4.5}$$

kjer je $x \in K_j$. (Opazimo, da je za $j = p$ vsaka točka $x \in K_p$ že dominirana z neko točko iz $Z$ zaradi predpostavke, da $Z \cap (\cup_{j \geq} I_j) \neq \emptyset$.)

Pogoja 3.(b) in 3.(c) izreka 4.6 implicirata, da:

$$\text{za vsak } j < p \text{ in za vsak } u \in I_j \text{ velja, da je } \ell(u) = 1. \tag{4.6}$$

Dejansko, definicija indeksa $p$ implicira, da $\ell(u) \geq 1$. Če je $\ell(u) \geq 2$ za nek $u \in I_j$ z $j < p - 1$, potem vsaka trojica $\{x, y, z\}$, kjer je $x \in I_{p-1}$, $y \in K_{p-1}$ in $z \in I_p$, predstavlja $P_3$ v grafu $H - N_H[u]$, kar je v nasprotju s pogojem 3.(c). Če je $\ell(u) \geq 2$ za nek $u \in I_{p-1}$, potem bi vsaki dve točki $x \in Z \cap \cup_{j \geq p} I_j$ in $y \in K_p$ predstavljali par povezanih nesosedov točke $u$, kjer bi veljalo $\ell(x) > 0$, kar je v nasprotju s pogojem 3.(b).

Naj bo $D$ TD množica grafa $G$. Potem $D$ vsebuje neko minimalno TD množico grafa $G$, recimo ji $D'$, ki je oblike $D' = F \cup \{x\} \cup \bigcup_{i<j} I'_i$ za nek $x \in K_j$ z $1 \leq j \leq p$. Spodnjo mejo za težo množice $D'$ lahko navzdol omejimo, kot sledi:

$$\begin{aligned} w(D) \;\geq\; w(D') \;&=\; w(F) + w(x) + \sum_{i<j} w(I'_i) \\ &=\; w(F) + \sum_{i=j}^{p-1} w(I'_i) + 1 + \sum_{i<j} w(I'_i) \\ &=\; w(F) + \sum_{i<p} w(I'_i) + 1 \;=\; t\,. \end{aligned}$$

Obratno, naj za $D \subseteq V(G)$ velja $w(D) \geq t$. Potem je $F \subseteq D$, sicer bi veljalo

$$t \;\leq\; w(D) \;\leq\; w(F) + w(K) + \sum_{j<p} w(I'_j) - w(K) \;<\; t\,.$$

Podobno, ker je $w(\cup_{i=1}^{p} K_i) = w(K)$, trdimo, da mora množica $D$ vsebovati točko iz $\cup_{i=1}^{p} K_i$. Naj bo $j \in \{1, \ldots, p\}$ najmanjši tak indeks, da velja $D \cap K_j \neq \emptyset$. Opazimo, da za vsak $x \in \cup_{i<j} I'_i$ velja $w(x) \geq \sum_{i=j}^{p} w(K_i)$ in zato je $\cup_{i<j} I'_i \subseteq D$, sicer bi imeli

$$\begin{aligned} t \;\leq\; w(D) \;&\leq\; w(F) + w(K) + \sum_{i<p} w(I'_i) - \sum_{i<j} w(K_i) - \sum_{i=j}^{p} w(K_i) \\ &=\; w(F) + \sum_{i<p} w(I'_i) \;<\; t\,. \end{aligned}$$

Dokazali smo torej, da $D$ vsebuje množico oblike $D' = F \cup \{x\} \cup \bigcup_{i<j} I'_i$, kjer je $x \in K_j$ in je $1 \leq j \leq p$. Množica $D$ je torej TD množica grafa $G$. Torej za vse $D \subseteq V(G)$ velja $w(D) \geq t$ če in samo če je $D$ TD množica grafa $G$. S tem smo končali dokaz pravilnosti 8. koraka.

Privzamemo lahko torej, da je $Z \cap (\bigcup_{j \geq p} I_j) = \emptyset$.

**9. korak:** Naj bo $A = \cup_{j \geq p}(K_j \cup I_j) \setminus K_p$ in naj bo $d = \max\{\ell(v) \ : \ v \in I_{p-1}\}$ in naj bo $x^+ \in I_{p-1}$ taka točka, da je $\ell(x^+) = d$.

Če je $d > 1$, potem:

Vrni par $(w, t)$, kjer je utežna funkcija $w : V(G) \to \mathbb{Z}_+$ definirana rekurzivno, kot sledi:

(1) Za vse $x \in L_{x^+}$ naj bo $w(x) = 1$.

(2) Za vse $x \in (I'_{p-1} \setminus L_{x^+}) \cup A$ naj bo $w(x) = d$.

(3) Za vse $x \in K_p$ naj bo $w(x) = d + 1$.

(4) Za vse $x \in K_{p-1}$ naj bo $w(x) = w(I'_{p-1}) + d + 2$.

(5) Za vse $j = p-2, \ldots, 1$ naj bo $w(x) = \sum_{i=j+1}^{p} w(K_i) - 1$ za vse $x \in I'_j$ in $w(x) = \sum_{i=j}^{p-1} w(I'_i) + d + 2$ za vse $x \in K_j$.

(6) Za vse $x \in F$ naj bo $w(x) = w(K) - 1$.

in $t = w(F) + w(I') + d + 2$, kjer je $I' = \cup_{i<p} I'_i$.

*Časovna zahtevnost:* Kot v predhodnih korakih, lahko z ustrezno implementacijo dosežemo časovno zahtevnost $\mathcal{O}(|V(G)|)$.

*Pravilnost:* Množico $\mathcal{D}$ vseh minimalnih TD množic grafa $G$ spet razdelimo na disjunktne podmnožice $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{D}_p$, kjer imamo za vsak $j = 1, \dots, p$ množico $\mathcal{D}_j = \{D \in \mathcal{D}\,;\, \min\{i \,:\, D \cap K_i \neq \emptyset\} = j\}$. Za $1 \le j \le p$ ima vsaka množica $D \in \mathcal{D}_j$ obliko, opisano v (4.5), medtem ko je vsaka množica $D \in \mathcal{D}_p$ oblike

$$D = F \cup \{x\} \cup \bigcup_{i<p-1} I'_i \cup \left( \bigcup_{v \in I_{p-1}} \{\ell_v\} \right) \cup \{y\},$$

kjer je $x \in K_p$, $\ell_v \in L_v$ za vsak $v \in I_{p-1}$ in $y \in (\cup_{j \ge p}(K_j \cup I_j)) \setminus \{x\}$. (Točko $y$ potrebujemo zato, da dominiramo točko $x$.) Podobno kot pri analizi 8. koraka opazimo, da pogoj 3(c) izreka 4.6 implicira, da za vsak $j < p-1$ in za vsak $u \in I_j$ velja, da je $\ell(u) = 1$. Naj bo $a = |A|$ in $k = |K_p|$. Ker je $d > 1$, velja $a = k = 1$. Dejansko, če je $k \ge 2$, potem vsaka trojica $\{x, y, z\}$, kjer je $x, y \in K_p$, $x \neq y$ in $z \in I_p$ predstavlja (ne nujno inducirano) $P_3$ v grafu $H - N_H[x^+]$, kar je v nasprotju s pogojem 3.(c) (spomnimo, da je $\ell(x^+) = d \ge 2$). Podobno, če je $a \ge 2$, vsaka trojica $\{x, y, z\}$, kjer je $x, y \in A$, $x \neq y$ in $z \in K_p$ predstavlja (ne nujno inducirano) $P_3$ v grafu $H - N_H[x^+]$, kar je ponovno v nasprotju s pogojem 3.(c). Dalje, pogoj $a = 1$ implicira, da je $A = I_p$ in $r = p$.

Naj bo $D$ TD množica grafa $G$. Potem $D$ vsebuje neko minimalno TD množico $D'$ grafa $G$, kjer je $D' \in \mathcal{D}_j$ za nek $j \in \{1, \dots, p\}$. Če je $j = p$, potem je

$$D' = F \cup K_p \cup \bigcup_{v \in I \setminus \{x^+\}} L_v \cup \{\ell_{x^+}\} \cup A,$$

kjer je $\ell_{x^+} \in L_{x^+}$. Ker je $w(\bigcup_{v \in I \setminus \{x^+\}} L_v \cup \{\ell_{x^+}\}) = \sum_{i<p} w(I'_i) - (d-1)$, lahko spodnjo mejo za težo množice $D$ določimo, kot sledi:

$$\begin{aligned} w(D) \;\ge\; w(D') \;&=\; w(F) + w(K_p) + \sum_{i<p} w(I'_i) - (d-1) + w(A) \\ &\ge\; w(F) + d + 1 + w(I') - d + 1 + d = \; t\,. \end{aligned}$$

Podobno, če je $j < p$, potem je $D' = F \cup \{x\} \cup \bigcup_{i<j} I'_i$ kjer je $x \in K_j$. V tem

primeru lahko spodnjo mejo za težo množice $D$ določimo, kot sledi:

$$\begin{aligned} w(D) \;\geq\; w(D') &= w(F) + w(x) + \sum_{i<j} w(I'_i) \\ &\geq w(F) + \sum_{i=j}^{p-1} w(I'_i) + d + 2 + \sum_{i<j} w(I'_i) \\ &= w(F) + w(I') + d + 2 \;=\; t\,. \end{aligned}$$

Obratno, naj za $D \subseteq V(G)$ velja $w(D) \geq t$. Potem je $F \subseteq D$, saj bi sicer veljalo $t \leq w(D) \leq w(F)+w(I')+w(K)+w(A)-(w(K)-1) = w(F)+w(I')+d+1 < t\,.$ Podobno, množica $D$ mora vsebovati točko iz $K$, saj bi sicer imeli $t \leq w(D) \leq w(F) + w(I') + w(A) = w(F) + w(I') + d < t$.

Naj bo $j \in \{1, \ldots, p\}$ najmanjši tak indeks, da velja $D \cap K_j \neq \emptyset$. Predpostavimo najprej, da je $j = p$. V tem primeru je $A \subseteq D$, saj bi sicer veljalo $t \leq w(D) \leq w(F) + w(I') + w(K_p) = w(F) + w(I') + d + 1 < t$. Opazimo, da je $w(L_v) \geq d$ za vsako točko $v \in \cup_{i<p} I_i$. Sledi, da za vse $v \in \cup_{i<p} I_i$ velja $L_v \cap D \neq \emptyset$, saj bi sicer veljalo $t \leq w(D) \leq w(F)+w(I')+w(K_p)+w(A)-w(L_v) \leq w(F) + w(I') + d + 1 + d - d \;<\; t$, protislovje.

Torej, če je $j = p$, množica $D$ vsebuje neko množico oblike $D' = F \cup K_p \cup \bigcup_{v \in I \setminus \{x^+\}} L_v \cup \{\ell_{x^+}\} \cup A$, kjer je $\ell_{x^+} \in L_{x^+}$, in je posledično TD množica grafa $G$. Predpostavimo sedaj, da je $j < p$. Opazimo, da $w(x) \geq \sum_{i=j}^{p} w(K_i) - 1$ velja za vse $x \in \cup_{i<j} I'_i$. To implicira, da je $\cup_{i<j} I'_i \subseteq D$, saj bi v nasprotnem primeru veljalo

$$\begin{aligned} t \;\leq\; w(D) \;&\leq\; w(F) + w(I') + \sum_{i=j}^{p} w(K_j) + w(A) - \left( \sum_{i=j}^{p} w(K_i) - 1 \right) \\ &= w(F) + w(I') + d + 1 \;<\; t\,. \end{aligned}$$

Sledi, da če je $j < p$, potem $D$ vsebuje množico oblike $D' = F \cup \{x\} \cup \bigcup_{i<j} I'_i$, kjer je $x \in K_j$ in je posledično množica $D$ TD množica grafa $G$. Torej za vse $D \subseteq V(G)$ velja $w(D) \geq t$ če in samo če je $D$ TD množica grafa $G$. S tem smo končali dokaz pravilnosti 9. koraka.

Privzamemo lahko torej, da je $d = 1$ (kjer je $d$ definiran kot v koraku 9).

**10. korak:** Naj bo $a = |A|$ in $k = |K_p|$.

Vrni par $(w, t)$, kjer je utežna funkcija $w : V(G) \to \mathbb{Z}_+$ definirana rekurzivno, kot sledi:

(1) Za vse $x \in A$ naj bo $w(x) = 1$.

(2) Za vse $x \in K_p$ naj bo $w(x) = a + 1$.

(3) Za vse $j = p-1, \ldots, 1$ naj bo $w(x) = \sum_{i=j+1}^{p} w(K_i) - 1$ za vse $x \in I'_j$ in $w(x) = \sum_{i=j}^{p-1} w(I'_i) + a + 2$ za vse $x \in K_j$.

(4) Za vse $x \in F$ naj bo $w(x) = w(K \setminus A) - 1$.

in $t = w(F) + w(I') + a + 2$, kjer je $I' = \cup_{i<p} I'_i$.

*Časovna zahtevnost:* Kot v predhodnih korakih lahko z ustrezno implementacijo dosežemo časovno zahtevnost $\mathcal{O}(|V(G)|)$.

*Pravilnost:* Naj bo $D$ poljubna TD množica grafa $G$. Potem $D$ vsebuje neko minimalno TD množico $D'$ grafa $G$, kjer je $D' \in \mathcal{D}_j$ za nek $j \in \{1, \ldots, p\}$ in velja $\mathcal{D}_j = \{D \in \mathcal{D}\,; \min\{i : D \cap K_i \neq \emptyset\} = j\}$. Če je $j = p$, potem je $D' = F \cup \{x\} \cup \bigcup_{i<p} I'_i \cup \{y\}$, kjer je $x \in K_p$ in $y \in (\cup_{j \geq p} (K_j \cup I_j)) \setminus \{x\}$. Ker je $w(y) \geq 1$, lahko težo množice $D$ omejimo navzdol, kot sledi:

$$\begin{aligned} w(D) \ \geq \ w(D') &= w(F) + w(x) + \sum_{i<p} w(I'_i) + w(y) \\ &\geq w(F) + a + 1 + w(I') + 1 = t\,. \end{aligned}$$

Podobno, če je $j < p$, potem je $D' = F \cup \{x\} \cup \bigcup_{i<j} I'_i$, kjer je $x \in K_j$ in velja

$$\begin{aligned} w(D) \ \geq \ w(D') &= w(F) + w(x) + \sum_{i<j} w(I'_i) \\ &\geq w(F) + \sum_{i=j}^{p-1} w(I'_i) + a + 2 + \sum_{i<j} w(I'_i) \\ &= w(F) + w(I') + a + 2 \ = \ t\,. \end{aligned}$$

Obratno, naj za $D \subseteq V(G)$ velja $w(D) \geq t$. Potem je $F \subseteq D$, saj bi v nasprotnem primeru veljalo, da je $t \leq w(D) \leq w(F) + w(I') + w(K \setminus A) + w(A) - (w(K \setminus A) - 1) = w(F) + w(I') + a + 1 < t$. Podobno mora $D$ vsebovati točko iz $K \setminus A = \cup_{j \leq p} K_j$, saj bi sicer imeli $t \leq w(D) \leq w(F) + w(I') + w(K \setminus A) + w(A) - w(K \setminus A) = w(F) + w(I') + a < t$.

Naj bo $j \in \{1, \ldots, p\}$ najmanjši tak indeks, da velja $D \cap K_j \neq \emptyset$.

Predpostavimo najprej, da je $j = p$. V tem primeru je $|D \cap (A \cup K_p)| \geq 2$, saj bi sicer, če z $x$ označimo edino točko v $D \cap (A \cup K_p)$, veljalo, da je $t \leq w(D) \leq w(F) + w(I') + w(x) = w(F) + w(I') + a + 1 < t$. Opazimo, da velja $w(x) \geq k(a+1) - 1$ za vse točke $x \in I'$. Sledi, da je $I' \subseteq D$, saj bi v nasprotnem primeru imeli $t \leq w(D) \leq w(F) + w(I') + w(K_p) + w(A) - (k(a+1) - 1) = w(F) + w(I') + k(a+1) + a - k(a+1) + 1 < t$. Torej, če je $j = p$, množica $D$ vsebuje neko množico oblike $D' = F \cup \{x\} \cup \bigcup_{i<p} I'_i \cup \{y\}$, kjer je $x \in K_p$ in $y \in (\cup_{j \geq p} (K_j \cup I_j)) \setminus \{x\}$ ter je zato TD množica grafa $G$.

Predpostavimo sedaj, da je $j < p$. Opazimo, da je $w(x) \geq \sum_{i=j}^{p} w(K_i) - 1$ za vse točke $x \in \cup_{i<j} I'_i$. To implicira, da je $\cup_{i<j} I'_i \subseteq X$, saj bi sicer veljalo, da je

$$\begin{aligned} t \;\leq\; w(D) \;&\leq\; w(F) + w(I') + \sum_{i=j}^{p} w(K_j) + w(A) - \left(\sum_{i=j}^{p} w(K_i) - 1\right) \\ &=\; w(F) + w(I') + a + 1 \;<\; t\,. \end{aligned}$$

Torej, če je $j < p$, množica $D$ vsebuje neko množico oblike $D' = F \cup \{x\} \cup \bigcup_{i<j} I'_i$, kjer je $x \in K_j$ in je zato TD množica grafa $G$. Torej za vse $D \subseteq V(G)$ velja $w(D) \geq t$ če in samo če je $D$ TD množica grafa $G$. S tem smo končali dokaz pravilnosti 10. koraka.

Končali smo z opisom algoritma in utemeljili njegovo pravilnost. Iz analize časovne zahtevnosti posameznega koraka algoritma sledi, da je skupna časovna zahtevnost algoritma enaka $\mathcal{O}(|V(G)| + |E(G)|)$. $\square$

# 5
# POVEZANO DOMINANTNO PRAGOVNI GRAFI

V tem poglavju nadaljujemo s preučevanjem grafov, definiranih s pomočjo še ene od različic dominantnih množic, tj. s povezanimi dominantnimi množicami. *Povezana dominantna množica* (krajše: PD množica) je dominantna množica, ki inducira povezan podgraf. Povezane dominantne množice najdejo v praksi svoje mesto zlasti pri načrtovanju brezžičnih omrežij in so predmet aktivnega raziskovanja, o čemer se lahko prepričamo v sodobnih knjigah [36,55,56] in člankih [1,17,19,41,88].

## 5.1 Splošni rezultati

Glavni pojmi, s katerimi se bomo v tem poglavju ukvarjali, slonijo na naslednji definiciji.

**Definicija 5.1.** *Povezan graf $G = (V, E)$ je* povezano dominantno pragoven *(krajše: PDP), če obstaja tak par $(w, t)$, kjer je $w : V \to \mathbb{R}_+$ utežna funkcija in $t \in \mathbb{R}_+$ prag, da za vsako podmnožico točk $S \subseteq V$ velja, da je $w(S) := \sum_{x\in S} w(x) \geq t$ če in samo če je $S$ povezana dominantna množica grafa $G$. Poljubnemu takemu paru $(w, t)$ pravimo* povezano dominantno pragovna struktura *grafa $G$.*

Opazimo, da nepovezan graf $G$ ne more vsebovati nobene povezane dominantne množice, zato se v zgornji definiciji omejimo le na povezane grafe.

**Primer 5.2.** *Poln graf $K_n$ na $n$ točkah je PDP graf, saj je vsaka neprazna podmnožica točk $S \subseteq V(K_n)$ tudi povezana dominantna množica grafa $K_n$ in par $(w, 1)$, kjer je $w(x) = 1$ za vsak $x \in V(K_n)$, predstavlja povezano dominantno pragovno strukturo grafa $K_n$.*

**Primer 5.3.** *Cikel na 4 točkah, $C_4$, ni PDP graf. Da bi to videli, označimo točke cikla $C_4$ z $a, b, c, d$ (skladno z oznakami na sliki 3.1, stran 24). Opazimo lahko, da je podmnožica točk $S \subseteq V(C_4)$ povezana dominantna množica natanko tedaj, ko vsebuje vsaj eno povezavo. Če torej $(w, t)$ predstavlja PDP strukturo grafa $C_4$, zagotovo velja $w(a) + w(b) \geq t$ in $w(c) + w(d) \geq t$ , kar implicira $w(V(C_4)) \geq 2t$. Po drugi strani pa mora veljati, da je $w(a) + w(d) < t$ in $w(b) + w(c) < t$, kar implicira $w(V(C_4)) < 2t$, s čimer pridemo do protislovja.*

**Primer 5.4.** *Graf $G$, ki ga dobimo tako da ciklu $C_4$ dodamo točko, recimo ji $e$, ki je povezana z natanko eno točko iz cikla $C_4$ (glej sliko 3.1 na strani 24) je PDP graf. Minimalni (glede na inkluzijo) povezani dominantni množici grafa $G$ sta natanko $\{c, d\}$ in $\{b, d\}$. PDP strukturo grafa $G$ lahko v tem primeru dobimo z $w(a) = w(e) = 0$, $w(b) = w(c) = 1$, $w(d) = 2$ in $t = 3$.*

Primera 5.3 in 5.4 nam pokažeta, da (v nasprotju z razredoma pragovnih grafov in dominantno pragovnih grafov) razred PDP grafov, prav tako kot razred TDP grafov, ni hereditaren. To motivira sledečo definicijo:

**Definicija 5.5.** *Pravimo, da je graf $G$* hereditarno povezano dominantno pragoven *(krajše: HPDP), če je vsak povezan induciran podgraf grafa $G$ povezano dominantno pragoven graf.*

Karakterizacije HPDP grafov bomo podali v poglavju 5.2.

Naslednja karakterizacija PDP množic je bila dokazana v [63]. Spomnimo, da je točkovni prerez v grafu $G = (V, E)$ taka podmnožica točk $S \subseteq V(G)$, da je $G-S$ nepovezan graf. Točkovni prerez je minimalen, če ne vsebuje nobenega drugega točkovnega prereza.

**Trditev 5.6** (Kanté et al. [63])**.** *V vsakem povezanem grafu $G = (V, E)$, ki ni poln, je podmnožica točk $D \subseteq V$ povezana dominantna množica če in samo če za vsak minimalen točkovni prerez $S$ v grafu $G$ velja $D \cap S \neq \emptyset$.*

Drugače povedano, povezane dominantne množice danega grafa $G$ so natanko transverzale hipergrafa vseh minimalnih točkovnih prerezov grafa $G$ (tj. take podmnožice točk hipergrafa, ki imajo neprazen presek z vsemi minimalnimi točkovnimi prerezi v grafu $G$). Na osnovi tega dejstva in dejstva, da so pragovne Boolove funkcije zaprte za dualizacijo [29], lahko s podobnim pristopom, kot je bil uporabljen za dokaz trditve 3.14, karakteriziramo PDP grafe s pomočjo pragovnosti izpeljane Boolove funkcije in izpeljanega hipergrafa.

**Definicija 5.7.** *Za dani graf $G = (V, E)$ je njegova* funkcija minimalnih točkovnih prerezov *tista pozitivna Boolova funkcija $f_G^{mtp} : \{0,1\}^V \to \{0,1\}$, ki zavzame vrednost* 1 *natanko pri vektorjih $x \in \{0,1\}^V$, katerih nosilec (množica $S(x)$, definirana z $S(x) = \{v \in V\, ;\, x_v = 1\}$) vsebuje nek minimalen točkovni prerez grafa $G$.*

**Posledica 5.8.** *Za vsak povezan graf $G = (V, E)$, ki ni poln, je podmnožica točk $D \subseteq V$ povezana dominantna množica če in samo če velja $f_G^{mtp}(\overline{x^D}) = 0$, kjer je $x^D$ karakteristični vektor množice $D$.*

*Dokaz.* Naj bo $D \subseteq V$ povezana dominantna množica grafa $G$ in naj bo $f_G^{pdm} : \{0,1\}^V \to \{0,1\}$ funkcija, ki zavzame vrednost 1 natanko pri tistih vektorjih $x \in \{0,1\}^V$, katerih nosilec vsebuje neko PD množico grafa $G$. Podali bomo zaporedje ekvivalenc, ki bodo vzpostavile pravilnost posledice.

$$
\begin{aligned}
D \text{ je PD množica grafa } G &\Leftrightarrow f_G^{pdm}(x^D) = 1 \\
&\Leftrightarrow \overline{f_G^{pdm}(\overline{\overline{x^D}})} = 0 \\
&\Leftrightarrow (f_G^{pdm})^d(\overline{x^D}) = 0 \\
&\Leftrightarrow f_G^{mtp}(\overline{x^D}) = 0.
\end{aligned}
$$

Pravilnost prve ekvivalence sledi iz definicije funkcije $f_G^{pdm}$, pravilnosti druge in tretje ekvivalence sledita iz osnovnih lastnosti Boolovih funkcij, ki smo jih podali v poglavju 2.5. Iz trditve 5.6 sledi, da je funkcija $f_G^{mtp}$ ravno dual funkcije $f_G^{pdm}$, iz česar sledi tudi pravilnost zadnje ekvivalence. □

Danemu grafu $G$ lahko priredimo *hipergraf minimalnih točkovnih prerezov* $\mathcal{MTP}(G) = (V(G), S(G))$, kjer je $S(G) = \{S\, ;\, S \subseteq V(G)$ in $S$ je minimalen točkovni prerez grafa $G\}$.

**Trditev 5.9.** *Za povezan graf $G = (V, E)$ so naslednje trditve ekvivalentne:*

1. *Graf $G$ je PDP graf.*
2. *Funkcija minimalnih točkovnih prerezov $f_G^{mtp}$ je pragovna.*
3. *Hipergraf minimalnih točkovnih prerezov $\mathcal{MTP}(G)$ je pragoven.*

*Dalje, če $G$ ni poln graf in je $(w_1, \ldots, w_n, t)$ celoštevilska separacijska struktura funkcije $f_G^{mtp}$ ali hipergrafa $\mathcal{MTP}(G)$, potem je $(w, \sum_{i=1}^n w_i - t)$, kjer je $w(v_i) = w_i$ za vsak $i \in [n]$, PDP struktura grafa $G$.*

*Dokaz.* Obravnavali bomo dva primera v odvisnosti od tega, ali je $G$ poln graf ali ne.

*Primer 1:* $G$ je poln graf.

V tem primeru so vse tri trditve pravilne. Spomnimo, da je vsak poln graf PDP; primer 5.2 nam poda PDP strukturo grafa $K_n$, ki je enaka $(w, 1)$, kjer je $w(v) = 1$ za vsak $v \in K_n$.

Ker polni grafi nimajo nobenega točkovnega prereza, je $f_G^{mtp}$ konstantno enaka 0 in torej pragovna. Enak argument implicira, da je množica povezav hipergrafa $\mathcal{MTP}(G)$ prazna in po posledici 2.16 je hipergraf $\mathcal{MTP}(G)$ pragoven.

*Primer 2:* $G$ ni poln graf.

Najprej bomo pokazali ekvivalenco med pogojema 1 in 2. Spomnimo, da je pozitivna Boolova funkcija $f(x_1, \ldots, x_n)$ pragovna natanko tedaj, ko je njena dualna funkcija $f^d(x) = \overline{f(\overline{x})}$ pragovna in da če je $(w_1, \ldots, w_n, t)$ celoštevilska separacijska struktura funkcije $f$, tedaj je $(w_1, \ldots, w_n, \sum_{i=1}^n w_i - t - 1)$ separacijska struktura funkcije $f^d$. Zato je dovolj pokazati, da je $G$ PDP graf natanko tedaj, ko je $(f_G^{mtp})^d$ pragovna funkcija.

Naj bo $x \in \{0,1\}^V$ in naj bo $S$ njegov nosilec. Po definiciji je $(f_G^{mtp})^d(x) = 0$ natanko tedaj, ko je $f_G^{mtp}(\overline{x}) = 1$, kar se zgodi če in samo če množica $V \setminus S$ vsebuje minimalen točkovni prerez grafa $G$. Drugače povedano, je $(f_G^{mtp})^d(x) = 0$ če in samo če $S$ ni PD množica. Od tod pa sledi, da če je dualna funkcija $(f_G^{mtp})^d$ pragovna s celoštevilsko separacijsko strukturo $(w_1, \ldots, w_n, t)$, je $(w, t+1)$ z $w(v_i) = w_i$ za vse $i \in [n]$, povezano dominantno pragovna struktura grafa $G$. Velja tudi obratno, če je $(w, t)$ celoštevilska povezano dominantno pragovna struktura grafa $G$, potem je $(w_1, \ldots, w_n, t-1)$ z $w_i = w(v_i)$ za vse $i \in [n]$ separacijska struktura funkcije $(f_G^{mtp})^d$.

Torej, če je $(w_1, \ldots, w_n, t)$ celoštevilska separacijska struktura funkcije $f_G^{mtp}$, potem je $(w_1, \ldots, w_n, \sum_{i=1}^n w_i - t - 1)$ separacijska struktura funkcije $(f_G^{mtp})^d$ in posledično je $(w, \sum_{i=1}^n w_i - t)$ z $w(v_i) = w_i$ za vsak $i \in [n]$, PDP struktura grafa $G$.

Sedaj bomo pokazali še ekvivalenco med pogojema 2 in 3. Naj bo $\mathcal{P}$ množica vseh minimalnih točkovnih prerezov grafa $G$ in naj bo $\mathcal{H} = \mathcal{MTP}(G)$ hipergraf minimalnih točkovnih prerezov grafa $G$. Naj $f_G^{mtp} : \{0,1\}^{V(G)} \to \{0,1\}$ označuje funkcijo minimalnih točkovnih prerezov grafa $G$,

$$f_G^{mtp}(x) = \bigvee_{P \in \mathcal{P}} \bigwedge_{u \in P} x_u.$$

Opazimo, da za hipergraf $\mathcal{H}$ funkcija $f_{\mathcal{H}}(x)$, definirana kot v (2.1), na strani 20, sovpada s funkcijo $f_G^{mtp}(x)$. Po trditvi 2.15 je hipergraf $\mathcal{H}$ pragoven natanko tedaj, ko je funkcija $f_G^{mtp}(x)$ pragovna. $\square$

Pravimo, da je graf $G$ *dualno Spernerjev (oz. 2-asumabilen) glede na točkovne prereze*, če je njegov hipergraf minimalnih točkovnih prerezov $\mathcal{MTP}(G)$ dualno Spernerjev (oz. 2-asumabilen).

Trditev 5.9 skupaj z izrekom 2.9 in trditvijo 2.18 implicira naslednji rezultat.

**Trditev 5.10.** *Vsak povezan graf, ki je dualno Spernerjev glede na točkovne prereze, je PDP graf. Vsak PDP graf je 2-asumabilen glede na točkovne prereze.*

*Dokaz.* Za dokaz prvega dela trditve predpostavimo, da imamo povezan graf $G$, ki je dualno Spernerjev glede na točkovne prereze. To pomeni, da je njegov hipergraf minimalnih točkovnih prerezov $\mathcal{MTP}(G)$ dualno Spernerjev. Po trditvi 2.18 je torej hipergraf $\mathcal{MTP}(G)$ pragoven. Ekvivalenca med točkama 1 in 3 trditve 5.9 sedaj implicira, da je graf $G$ PDP.

Za dokaz drugega dela trditve predpostavimo, da imamo PDP graf $G$. Zaradi ekvivalence med točkama 1 in 3 trditve 5.9 vemo, da je v tem primeru hipergraf minimalnih točkovnih prerezov $\mathcal{MTP}(G)$ pragoven. Posledica 2.16 sedaj implicira, da je hipergraf $\mathcal{MTP}(G)$ asumabilen (kar po definiciji pomeni, da je hipergraf $\mathcal{MTP}(G)$ $k$-asumabilen za vsak $k \geq 2$) in je posledično tudi 2-asumabilen. To pa pomeni, da je graf $G$ 2-asumabilen glede na točkovne prereze. □

Naš rezultat (izrek 5.13 v nadaljevanju) implicira delen obrat trditve 5.10. Obe izjavi lahko namreč obrnemo, če zahtevamo, da lastnosti veljajo v strožjem, hereditarnem smislu. Da v splošnem obrat prve trditve ne velja, lahko vidimo na primeru 3.19 na stani 34. V grafu, ki je podan v omenjenem primeru, namreč množici minimanih soseščin in minimanih točkovnih prerezov sovpadata. Da tudi obrat druge trditve v splošnem ne velja, pa lahko izpeljemo iz dejstva, da ni vsaka 2-asumabilna pozitivna Boolova funkcija pragovna (primer take funkcije najdemo v [29], izrek 9.15), rezultatov iz poglavja 3.2, kjer so vzpostavljene povezave med Boolovimi funkcijami in TDP grafi ter opazko, da je razcepljen graf brez univerzalnih točk PDP če in samo če je TDP.

Naš dokaz izreka 5.13 bo slonel na naslednjih lastnostih tetivnih grafov.

**Lema 5.11** (Dirac [34])**.** *Vsak minimalen točkovni prerez tetivnega grafa je klika.*

**Lema 5.12** (Kumar, Madhavan [65])**.** *Če je $S$ minimalen točkovni prerez tetivnega grafa $G$, potem vsaka povezana komponenta grafa $G - S$ vsebuje točko, ki je povezana z vsemi točkami množice $S$.*

## 5.2 Karakterizacije HPDP grafov

Rekli bomo, da je graf $G$ *hereditarno 2-asumabilen (oz. hereditarno dualno Spernerjev) glede na točkovne prereze*, če je vsak njegov povezan induciran podgraf 2-asumabilen (oz. dualno Spernerjev) glede na točkovne prereze. Dalje, rekli bomo, da točkovni prerez $S \subset V(G) \setminus \{x, y\}$ *loči točki $x$ in $y$*, če sta točki $x$ in $y$ v različnih povezanih komponentah grafa $G - S$.

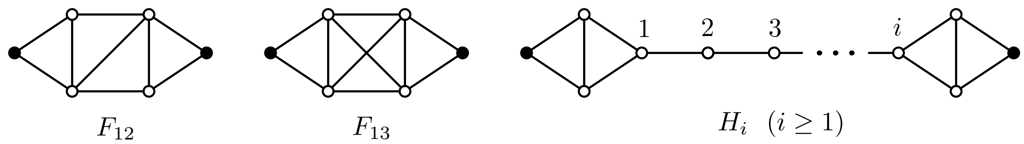
**Izrek 5.13.** *Za vsak graf $G$ so naslednje trditve ekvivalentne:*

1. *Graf $G$ je hereditarno povezano dominantno pragoven graf.*

2. *Graf $G$ je hereditarno 2-asumabilen glede na točkovne prereze.*

3. *Graf $G$ je hereditarno dualno Spernerjev glede na točkovne prereze.*

4. *Graf $G$ je $\{F_{12}, F_{13}, H_1, H_2, \dots\}$-prost tetiven graf, pri čemer so grafi $F_{12}, F_{13}$ in splošen predstavnik družine grafov $\{H_i\}$ predstavljeni na sliki 5.1.*




Slika 5.1: Grafi $F_{12}, F_{13}$ in $H_i$.

*Dokaz.* Implikaciji $3 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2$ sledita iz trditve 5.10. Da bi utemeljili implikacijo $2 \Rightarrow 4$, zadošča preveriti, da množica $\mathcal{F} := \{C_k\,;\, k \geq 4\} \cup \{F_{12}, F_{13}\} \cup \{H_i\,;\, i \geq 1\}$ ne vsebuje kakšnega grafa, ki bi bil 2-asumabilen glede na točkovne prereze. Naj bo $F \in \mathcal{F}$. Predpostavimo najprej, da je graf $F$ cikel $C_k$ za nek $k \geq 4$ in naj bodo $u_1, u_2, u_3$ in $u_4$ štiri zaporedne točke cikla. Definirajmo še naslednje množice: $A_1 = \{u_1, u_3\}$, $A_2 = \{u_2, u_4\}$, $B_1 = \{u_1, u_2\}$ in $B_2 = \{u_3, u_4\}$. Potem sta množici $A_1$ in $A_2$ minimalna točkovna prereza grafa $F$ in s tem tudi povezavi hipergrafa $\mathcal{MTP}(F)$, medtem ko množici $B_1$ in $B_2$ ne vsebujeta nobenega minimalnega točkovnega prereza grafa $F$ in predstavljata v hipergrafu $\mathcal{MTP}(F)$ neodvisni množici. Množice $A_1, A_2, B_1$ in $B_2$ zadoščajo pogoju (2.2), kar implicira, da je hipergraf minimalnih točkovnih prerezov $\mathcal{MTP}(F)$ 2-sumabilen. Predpostavimo sedaj, da je $F \in \{F_{12}, F_{13}\} \cup \{H_i\ ;\ i \geq 1\}$. Označimo z $a$ in $b$ nesosednji točki stopnje 2 v grafu $F$ (glej črno obarvane točke na sliki 5.1) in naj bodo $N(a) = \{a_1, a_2\}$ ter $N(b) = \{b_1, b_2\}$. Definirajmo sedaj množice $A_1 = N(a)$, $A_2 = N(b)$, $B_1 = \{a_1, b_1\}$ in $B_2 = \{a_2, b_2\}$. Po enakem razmisleku kot zgoraj pridemo do zaključka, da je tudi v tem primeru hipergraf minimalnih točkovnih prerezov $\mathcal{MTP}(F)$ 2-sumabilen.

Dokazati moramo še implikacijo $4 \Rightarrow 3$. Ker je razred $\{F_{12}, F_{13}, H_1, H_2, \dots\}$-prostih tetivnih grafov hereditaren, zadošča pokazati, da je vsak povezan $\{F_{12}, F_{13}, H_1, H_2, \dots\}$-prost tetiven graf dualno Spernerjev glede na točkovne prereze. Da bi prišli do protislovja, predpostavimo, da obstaja povezan $\{F_{12}, F_{13}, H_1, H_2, \dots\}$-prost tetiven graf $G = (V, E)$, ki ni dualno Spernerjev glede na točkovne prereze. Ker graf $G$ ni dualno Spernerjev glede na točkovne prereze, obstajata v grafu $G$ taka dva minimalna točkovna prereza, recimo $S$ in $S'$, da je $\min\{|S|, |S'|\} \geq 2$. Imejmo množici $C = \{a, b\}$, za neka različna $a, b \in S \setminus S'$ in $C' = \{a', b'\}$, za neka različna $a', b' \in S' \setminus S$. Dalje, naj bosta $X$ in $Y$ različni komponenti grafa $G - S$ ter $X'$ in $Y'$ različni komponenti grafa $G - S'$. Glede na lemo 5.12 sedaj v grafu $G$ obstajata taki točki $x \in X$ in $y \in Y$, da vsaka od njiju dominira $S$ ter taki točki $x' \in X'$ in $y' \in Y'$, da vsaka od njiju dominira $S'$. Definirajmo še množici $Z = \{x, y\}$ in $Z' = \{x', y'\}$.

**Trditev 1.** Bodisi $N(x) \cap \{a', b'\} = \emptyset$ ali pa $N(y) \cap \{a', b'\} = \emptyset$ in podobno je bodisi $N(x') \cap \{a, b\} = \emptyset$ ali pa $N(y') \cap \{a, b\} = \emptyset$.

*Dokaz.* Če $N(x) \cap \{a', b'\} \neq \emptyset$ in $N(y) \cap \{a', b'\} \neq \emptyset$, potem v grafu $G$ obstaja neka $x - y$ pot, kar je v nasprotju z dejstvom, da je množica $S$ nek točkovni prerez, ki loči točki $x$ in $y$. Podobno postopamo za dokaz drugega dela trditve.

Opazimo lahko, da je $C \cap C' = C \cap Z = C' \cap Z' = \emptyset$ in posledično je $|C \cup C'| = |C \cup Z| = |C' \cup Z'| = 4$. Dalje, ker je glede na lemo 5.11 vsak minimalen točkovni prerez v tetivnem grafu klika, sta $C$ in $C'$ kliki. Po drugi strani pa sta $Z$ in $Z'$ neodvisni množici in zato veljata naslednji neenakosti: $|C \cap Z'| \leq 1$ in $|C' \cap Z| \leq 1$.

**Trditev 2.** $|N(C') \cap Z| \leq 1$ in $|N(C) \cap Z'| \leq 1$.

*Dokaz.* Če je $|N(C') \cap Z| > 1$, potem je $Z \subseteq N(C')$. Ker pa je $C' \cap S = \emptyset$, to implicira, da sta točki $x$ in $y$ v isti povezani komponenti grafa $G - S$, kar nas privede do protislovja. Z upoštevanjem simetrije dobimo tudi dokaz za drugi del trditve.

Trditev 2 implicira, da je $Z \neq Z'$. Z upoštevanjem simetrije moramo sedaj analizirati še pet primerov, v odvisnosti od tega, ali imajo množice $C, C', Z$ in $Z'$ kakšno skupno točko (kjer je to mogoče) ali ne.

*Primer* 1. $|C \cap Z'| = |Z \cap Z'| = 1$.

Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $a = x'$. Ker je $C \cap Z = \emptyset$ in je $a = x'$ sledi, da $x' \notin Z$, kar implicira, da je $Z \cap Z' = \{y'\}$. Brez škode za splošnost lahko sedaj privzamemo, da je $y' = y$. Vendar dejstvo, da je $y \sim a$ implicira, da je $y' \sim x'$, kar nas privede do protislovja.

Primer, ko je $|C' \cap Z| = |Z \cap Z'| = 1$ je simetričen primeru 1.

*Primer* 2. $|Z \cap Z'| = 1$ in $C \cap Z' = C' \cap Z = \emptyset$.

Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $x = x'$. Ker $a, b \notin S'$ in $S'$ loči $x'$ in $y'$, sklepamo, da je $N(y') \cap \{a, b\} = \emptyset$. Simetrično velja, da je $N(y) \cap \{a', b'\} = \emptyset$ in posledično $y' \notin S$ ter $y \notin S'$. Ker $S$ loči $x$ in $y$ in je $\{a', b', y'\} \cap S = \emptyset$, velja tudi, da je $N(y) \cap \{a', b', y'\} = \emptyset$ ter, podobno, je $N(y') \cap \{a, b, y\} = \emptyset$.

Sedaj mora veljati, da $y \not\sim y'$, sicer bi graf $G$ vseboval bodisi induciran cikel $C_4$ na množici točk $\{y, a, a', y'\}$ (če imamo $a \sim a'$) bodisi induciran cikel $C_5$ na množici točk $\{y, a, x = x', a', y'\}$ (sicer).

Da bi se izognili induciranemu grafu $H_1$ na množici točk $\{y, a, b, x = x', a', b', y'\}$, lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je $a \sim a'$.

Predpostavimo najprej, da je $b \sim b'$. Potem je tudi $a \sim b'$ ali $a' \sim b$, saj bi v nasprotnem primeru množica $\{a, a', b', b\}$ inducirala cikel $C_4$. Toda sedaj (v odvisnosti od tega, ali imamo eno povezavo ali obe) množica $\{y, a, b, a', b', y'\}$ inducira bodisi graf $F_{12}$ bodisi graf $F_{13}$. Zato $b \not\sim b'$.

Predpostavimo sedaj, da je $a' \sim b$. Toda sedaj bodisi množica $\{y, a, b, x = x', a', b'\}$ inducira graf $F_{13}$ (če $a \not\sim b'$) bodisi množica $\{y, a, b, a', b', y'\}$ inducira graf $F_{12}$ (če je $a \sim b'$). Zato $a' \not\sim b$ in simetrično $a \not\sim b'$. Vendar sedaj množica $\{y, a, b, x = x', a', b'\}$ inducira graf $F_{12}$, kar nas privede do protislovja.

*Primer* 3. $|C \cap Z'| = |C' \cap Z| = 1$ in $Z \cap Z' = \emptyset$.

Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $a = x'$ in $a' = x$. Ob upoštevanju trditve 1 sledi, da $b \not\sim y'$. Dejstvo, da $y \not\sim x = a'$ implicira, da $y \notin S'$ (saj je $S'$ klika) in posledično tudi $y \not\sim y'$ (v nasprotnem primeru bi bili točki $x' = a$ in $y'$ v isti povezani komponenti grafa $G - S$). Da bi se izognili $x - y$ poti v grafu $G - S$ sklepamo, da $y \not\sim b'$. Sedaj točke $\{a = x', a' = x, b, b', y, y'\}$ inducirajo bodisi graf $F_{12}$ (če $b \not\sim b'$) bodisi graf $F_{13}$ (sicer). V obeh primerih pridemo do protislovja.

Z upoštevanjem simetrij, nam preostaneta še sledeča primera.

*Primer* 4. $|C \cap Z'| = 1$ in $C' \cap Z = Z \cap Z' = \emptyset$.

Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $a = x'$. Z upoštevanjem trditve 2 sedaj velja, da je $|N(C') \cap Z| \leq 1$. Torej lahko privzamemo, da $x \notin N(C')$. Posledično je $N(x) \cap \{a', b'\} = \emptyset$ in zato tudi velja, da $x \not\sim y'$, saj bi sicer imeli induciran cikel $C_4$ na množici točk $\{a, a', y', x\}$. Da bi se izognili $x-y$ poti v grafu $G-S'$ sklepamo, da $b \not\sim y'$. Dalje velja, da $N(b) \cap \{a', b'\} = \emptyset$, saj bi sicer množica $\{x, a = x', a', b, b', y'\}$ inducirala bodisi graf $F_{12}$ (če je $|N(b) \cap \{a', b'\}| = 1$) bodisi graf $F_{13}$ (sicer). Če je $y \sim y'$, potem v izogib induciranemu ciklu $C_4$ na množici točk $\{y, a = x', a', y'\}$ sklepamo, da je $y \sim a'$. Toda sedaj imamo induciran graf $F_{12}$ na množici točk $\{x, b, a = x', a', y, y'\}$, protislovje. Torej $y \not\sim y'$, kar implicira tudi, da $N(y) \cap \{a', b'\} = \emptyset$, saj bi sicer množica $\{b, a = x', y, a', b', y'\}$ inducirala bodisi graf $F_{12}$ (če je $|N(y) \cap \{a', b'\}| = 1$) bodisi graf $F_{13}$ (sicer).

Zaradi dejstev, da nobena izmed točk $a', b', y'$ ni sosednja s točko $b$ in da je množica $S$ klika, ki vsebuje točko $b$, sklepamo, da je $\{a', b', y'\} \cap S = \emptyset$. Če sedaj s $K$ označimo komponento grafa $G - S$, ki vsebuje točko $a'$, predhodni sklep implicira, da $b', y' \in V(K)$. Z upoštevanjem leme 5.12 sedaj obstaja točka $w \in V(K)$, ki dominira množico $S$. Ker $S$ loči točki $x$ in $y$, velja $\{x, y\} \not\subseteq K$ in brez škode za splošnost lahko privzamemo, da $y \notin V(K)$. Naj bo sedaj $P = (w_1, w_2, \ldots, w_k)$ najkrajša $\{a', b', y'\} - w$ pot v grafu $K$, kjer je $w_1 \in \{a', b', y'\}$ in je $w_k = w$. Ker točka $w_1$ ni sosednja s točko $b$, medtem ko točka $w_k$ je, velja, da je $k > 1$.

Predpostavimo, da je $k = 2$. Če $w \not\sim y'$, potem množica točk $\{b, a = x', w, a', b', y'\}$ inducira bodisi graf $F_{12}$ (če $|N(w) \cap \{a', b'\}| = 1$ bodisi graf $F_{13}$ (sicer), kar nas privede do protislovja. Torej je $w \sim y'$. V izogib induciranemu ciklu $C_4$ na množici točk $\{w, a = x', a', y'\}$ sklepamo, da je $w \sim a'$. Toda sedaj množica točk $\{y, a = x', b, w, a', y'\}$ inducira graf $F_{12}$, protislovje. Zato je $k \geq 3$.

V izogib induciranemu ciklu na vsaj štirih točkah sklepamo, da točka $a = x'$ dominira pot $P$. Če je $y' \sim w_2$, potem sta tudi $a' \sim w_2$ in $b' \sim w_2$ (saj bi sicer imeli induciran cikel $C_4$ na eni izmed množic točk $\{a = x', w_2, b', y'\}$ ali $\{a = x', w_2, a', y'\}$), toda sedaj imamo induciran graf $F_{12}$ na množici točk $\{y', a', a = x', w_2, w_3, w_4\}$ (kjer je $w_4 = b$, če je $k = 3$). Zato $y' \not\sim w_2$. Brez škode za splošnost lahko sedaj privzamemo, da je $w_1 = a'$. Toda sedaj nam množica točk $\{y', a' = w_1, b', a = x', w_2, w_3\}$ inducira bodisi graf $F_{12}$ (če $y' \not\sim w_2$) bodisi graf $F_{13}$ (sicer), kar nas privede do protislovja.

Primer, ko je $|C' \cap Z| = 1$ in $C \cap Z' = Z \cap Z' = \emptyset$ je simetričen primeru 4.

*Primer* 5. $C' \cap Z = C \cap Z' = Z \cap Z' = \emptyset$.

Analiza tega primera bo odvisna od števila povezav med množicama točk $\{x, y\}$

in $\{x', y'\}$. Naj bo $k := |\{xx', xy', yx', yy'\} \cap E(G)|$. Opazimo, da je $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, saj bi primer $k = 4$ impliciral obstoj induciranega cikla $C_4$ na množici točk $\{x, y, x', y'\}$.

*Primer* 5.1. $k = 3$.

Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da $\{xx', xy', yx', yy'\} \cap E(G) = \{xx', yx', yy'\}$. V izogib induciranemu ciklu $C_4$ na množici točk $\{a, x, x', y\}$ dalje velja, da je $x' \sim a$ in iz podobnega razloga je tudi $y \sim a'$. Da bi se izognili $x - y$ poti v grafu $G - S$, mora sedaj veljati, da $x \not\sim a'$ in podobno $y' \not\sim a$. Toda sedaj nam množica točk $\{x, a, x', y, a', y'\}$ predstavlja bodisi induciran graf $F_{12}$ (če $a \not\sim a'$) bodisi induciran graf $F_{13}$ (sicer), protislovje.

*Primer* 5.2. $k = 2$.

Do simetrije natančno bomo obravnavali dva podprimera:

*Primer* 5.2.1. $\{xx', xy', yx', yy'\} \cap E(G) = \{xx', yy'\}$.

Glede na trditev 1 točki $x'$ in $y'$ ne morata biti sočasno povezani s točko $a$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da $x' \not\sim a$.

Predpostavimo, da $a \not\sim a'$. Če je $y \sim a'$, potem $x \not\sim a'$ in množica točk $\{y, a, x, x', a'\}$ inducira cikel $C_5$ v grafu $G$, kar nas privede do protislovja. Torej $y \not\sim a'$. Če je $y' \sim a$, potem podgraf, ki ga inducira množica točk $\{a, x, x', a', y'\}$ predstavlja bodisi cikel $C_4$, bodisi cikel $C_5$ (v odvisnosti od tega, ali je $x \sim a'$ ali ne), kar nas ponovno privede do protislovja. Torej $y' \not\sim a$. Toda sedaj graf $G[\{a, x, x', a', y', y\}]$ vsebuje kot induciran podgraf bodisi cikel $C_5$ bodisi cikel $C_6$ (v odvisnosti od tega, ali je $x \sim a'$ ali ne). Sklepamo torej, da je $a \sim a'$.

V izogib induciranemu ciklu $C_4$ na množici točk $\{x, x', a', a\}$ sklepamo, da je $x \sim a'$ in posledično, glede na trditev 1, $a' \not\sim y$. V izogib induciranemu ciklu $C_4$ na množici točk $\{a, a', y', y\}$ sklepamo, da je $a \sim y'$, toda sedaj množica točk $\{x', x, a', a, y', y\}$ inducira graf $F_{12}$, protislovje.

*Primer* 5.2.2. $\{xx', xy', yx', yy'\} \cap E(G) = \{xx', yx'\}$.

Opazimo, da je v tem primeru $x' \in S$, v nasprotnem primeru namreč množica $S$ ne bi ločila točk $x$ in $y$. Ker je $S$ klika, je $a \sim x'$ in $b \sim x'$. Dalje to implicira, da je $N(y') \cap \{a, b\} = \emptyset$, sicer množica $S'$ ne bi ločila točk $x'$ in $y'$. Z zamenjavo množice $C = \{a, b\}$ z množico $\tilde{C} = \{x', b\}$, nas sedaj enaki argumenti, kot so bili uporabljeni v primeru 4, privedejo do protislovja.

*Primer* 5.3. $k = 1$.

Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da $\{xx', xy', yx', yy'\} \cap E(G) = \{xx'\}$.

Primer bomo analizirali glede na število $\ell$ povezav med množicama $C$ in $C'$. Formalno, naj bo $\ell := |\{aa', ab', ba', bb'\} \cap E(G)|$.

*Primer* 5.3.1. $\ell = 0$.

Najprej opazimo, da $y \not\sim a'$, saj bi sicer tudi $x \not\sim a'$ in bi podgraf $G[y, a, x, x', a']$ bodisi vseboval induciran cikel $C_4$ (če je $b \sim x'$) bodisi bil izomorfen grafu $C_5$ (sicer). Podobni argumenti implicirajo še, da $y \not\sim b'$, $y' \not\sim a$ in $y' \not\sim b$. Dalje, v izogib induciranemu grafu $H_1$ na množici točk $\{y, a, b, x, a', b'y'\}$, točka $x$ ne more biti povezana s točkama $a'$ in $b'$ hkrati. Simetrično, točka $x'$ ne more biti povezana s točkama $a$ in $b$ hkrati. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da $x' \not\sim b$ in $x \not\sim b'$. Če je $x \sim a'$, potem je tudi $x' \sim a$, saj bi sicer imeli induciran graf $H_1$ na množici točk $\{y, a, b, x, x', a', b'\}$, vendar imamo sedaj induciran graf $F_{12}$ na množici točk $\{a, b, x, x', b', a'\}$. Zato $x \not\sim a'$ in simetrično $x' \not\sim a$. Toda sedaj vsebuje graf $G$ induciran graf $H_2$ na množici točk $\{y, a, b, x, x', a', b', y'\}$, kar nas privede do protislovja.

*Primer* 5.3.2. $\ell = 1$.

Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $\{aa', ab', ba', bb'\} \cap E(G) = \{ba'\}$.

Da bi se izognili induciranemu ciklu $C_4$ na množici točk $\{x, x', a', b\}$, lahko brez škode za splošnost privzamemo tudi, da je $x \sim a'$. Z upoštevanjem trditve 1, slednje implicira, da $y \nsim a'$ in $y \nsim b'$. V izogib induciranemu grafu $F_{12}$ na množici točk $\{y, a, b, x, a', x'\}$, sklepamo, da $N(x') \cap \{a, b\} \neq \emptyset$. Trditev 1 implicira, da $y' \nsim a$ in $y' \nsim b$. Če $x' \nsim b$, potem je $x' \sim a$, toda sedaj imamo induciran cikel $C_4$ na množici točk $\{x', a, b, a'\}$. Torej je $x' \sim b$.

Dalje, v izogib induciranemu grafu $F_{13}$ na množici točk $\{a, x, b, x', a', b'\}$ sklepamo, da $\{ax', b'x\} \cap E(G) \neq \emptyset$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $ax' \in E(G)$. Toda sedaj imamo induciran graf $F_{12}$ na množici točk $\{a, b, x', a', b', y'\}$, kar nas privede do protislovja.

*Primer* 5.3.3. $\ell = 2$.

Da bi se izognili induciranemu ciklu $C_4$ na množici točk $\{a, b, a', b'\}$ sklepamo, da morata povezavi iz preseka $\{aa', ab', ba', bb'\} \cap E(G)$ imeti skupno krajišče. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $\{aa', ab', ba', bb'\} \cap E(G) = \{ba', bb'\}$.

Predpostavimo najprej, da je $x' \sim b$. Potem $y' \nsim a$ in $y' \nsim b$. Da bi se izognili induciranemu grafu $F_{13}$ na množici točk $\{x, x', b, a', b', y\}$ sklepamo, da $N(x) \cap \{a', b'\} \neq \emptyset$ in posledično $y \nsim a'$ in $y \nsim b'$. Če je $x \sim b'$, potem množica točk $\{a, b, x, a', b', y'\}$ inducira bodisi graf $F_{12}$ (če $x \nsim a'$) bodisi graf $F_{13}$ (sicer), kar nas privede do protislovja. Zato $x \nsim b'$ in podoben argument nam pokaže, da tudi $x \nsim a'$. Toda sedaj vsebuje graf $G$ induciran graf $F_{13}$ na množici točk $\{x, b, x', a', b', y'\}$, protislovje.

Predpostavimo sedaj, da $x' \nsim b$. Opazimo, da to implicira, da $x' \nsim a$, saj bi v nasprotnem primeru imeli induciran cikel $C_4$ na množici točk $\{b, a', x', b'\}$. V izogib induciranemu ciklu $C_4$ na množici točk $\{x, x', a', b\}$ sklepamo, da je $x \sim a'$. To implicira, da $y \nsim a'$ in $y \nsim b'$. Toda sedaj imamo induciran graf $F_{12}$ na množici točk $\{y, a, b, x, a', x'\}$, protislovje.

*Primer* 5.3.4. $\ell = 3$.

Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $\{aa', ab', ba', bb'\} \cap E(G) = \{aa', ba', bb'\}$.

Da bi se izognili induciranemu ciklu $C_4$ na množici točk $\{x, x', a', b\}$ lahko, brez škode za splošnost, privzamemo tudi, da je $x \sim a'$ in posledično (ob upoštevanju trditve 1) $y \nsim a'$ in $y \nsim b'$. V izogib induciranemu grafu $F_{12}$ na množici točk $\{y, a, b, a', b', y'\}$ sklepamo, da $N(y') \cap \{a, b\} \neq \emptyset$, kar implicira, da $x' \nsim a$ in $x' \nsim b$. Toda sedaj imamo induciran graf $F_{12}$ na množici točk $\{a, b, b', y, a', x'\}$, kar nas privede do protislovja.

*Primer* 5.3.5. $\ell = 4$.

Da bi se izognili induciranemu ciklu $C_4$ na množici točk $\{a, x, x', a'\}$ lahko, brez škode za splošnost, privzamemo, da je $x \sim a'$, kar skupaj s trditvijo 1 implicira, da je $N(y) \cap \{a', b'\} = \emptyset$.

Če $y' \nsim a$ in $y' \nsim b$ potem množica točk $\{y, a, b, a', b', y'\}$ inducira graf $F_{13}$ v grafu $G$, protislovje. Brez škode za splošnost lahko sedaj privzamemo, da je $y' \sim b$ in ob upoštevanju trditve 1 tudi, da $x' \nsim a$ in $x' \nsim b$. Toda sedaj imamo induciran graf $F_{13}$ na množici točk $\{a, b, b', y, a', x'\}$, kar nas privede do protislovja.

*Primer* 5.4. $k = 0$.

Podobno kot smo to storili v primeru 5.3, bomo tudi v tem primeru analizirali nekaj podprimerov, ki bodo odvisni od števila $\ell$ povezav med množicama $C$ in $C'$.

*Primer* 5.4.1. $\ell = 1$.

Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $\{aa', ab', ba', bb'\} \cap E(G) = \{ba'\}$.

Opazimo, da točka $y$ ne more biti istočasno povezana s točkama $a'$ in $b'$, saj bi sicer veljalo, da $x \nsim a'$ in $x \nsim b'$ (glede na trditev 1) in posledično bi v grafu $G$ imeli induciran graf $F_{12}$ na množici točk $\{x, a, b, y, a', b'\}$. Glede na simetrijo sklepamo tudi, da točka $y$ ne more biti hkrati povezana s točkama $a$ in $b$. Podobni argumenti aplicirani na točki $x$ in $x'$ implicirajo, da je $\{x, y\} \cap S' = \emptyset$ in da je $\{x', y'\} \cap S = \emptyset$. Naj bo $K$ tista komponenta grafa $G - S'$, za katero je $b \in V(K)$. Potem je $\{a, b, y\} \subseteq V(K)$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da $y' \notin V(K)$. Z upoštevanjem leme 5.12 sedaj v $V(K)$ obstaja točka, recimo ji $w'$, ki dominira množico $S'$. Očitno $w' \notin \{a, b, y, a', b'\}$. Poleg tega, ker $y' \notin V(K)$, velja tudi, da $w' \neq y'$ in $w' \nsim y'$. Naj bo $K'$ tista komponenta grafa $G - S$, ki vsebuje točko $a'$. Potem je $\{a', b', y'\} \subseteq V(K')$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da $y \notin V(K')$. Z upoštevanjem leme 5.12 sedaj v $V(K')$ obstaja točka, recimo ji $w$, ki dominira množico $S$. Očitno $w \notin \{a, b, a', b', y'\}$. Poleg tega, ker $y \notin V(K')$, velja tudi, da $w \neq y$ in $w \nsim y$.

Opazimo, da $w \neq w'$, saj bi sicer množica točk $\{y, a, b, w = w', a', b'\}$ inducirala graf $F_{12}$ v grafu $G$. Poleg tega velja tudi, da $w \nsim w'$, $w \nsim y'$, in $y \nsim w'$, saj bi sicer lahko prišli do protislovja z uporabo enakih argumentov kot v primerih 5.1, 5.2, ali 5.3, s tem, da bi množici $Z = \{x, y\}$ in $Z' = \{x', y'\}$ zamenjali z množicama $\tilde{Z} = \{w, y\}$ and $\tilde{Z}' = \{w', y'\}$, v tem vrstnem redu.

Ker $y \notin V(K')$ trdimo, da $y \nsim a'$ in $y \nsim b'$. Podobno, ker $y' \notin V(K)$, velja $y' \nsim a$ in $y' \nsim b$. Če je $w' \sim a$, potem je tudi $w' \sim b$, saj bi sicer množica točk $\{w', a, b, a'\}$ inducirala cikel $C_4$ v grafu $G$. Toda sedaj imamo induciran graf $F_{12}$ na množici točk $\{y, a, b, w', a', b'\}$. Zato $w' \nsim a$ in z upoštevanjem simetrij tudi $w \nsim b'$. Dalje opazimo, da če sta $b \sim w'$ in $a' \sim w$ potem imamo induciran graf $F_{12}$ na množici točk $\{a, b, w, w', a', b'\}$. Zato lahko brez škode za splošnost privzamemo, da $b \nsim w'$.

Naj bo $P' = (w'_1 = w', w'_2, \ldots, w'_p)$ najkrajša $w' - \{a, b, y\}$ pot v grafu $K$ in podobno, naj bo $P = (w_1 = w, w_2, \ldots, w_q)$ najkrajša $w - \{a', b', w', y'\}$ pot v grafu $K'$. Ker $w' \notin \{a, b, y\}$ in $w \notin \{a', b', y'\}$, velja, da sta $p \geq 2$ in $q \geq 2$.

Predpostavimo najprej, da je $p = 2$. Ker $w'_1 = w' \nsim a$ in $w' \nsim b$, mora veljati, da je $w'_2 = y$. Toda sedaj množica točk $\{w', y, b, a'\}$ inducira cikel $C_4$ v grafu $G$, kar nas privede do protislovja. Zato je $p \geq 3$.

Ker $w' \nsim b$, trdimo, da točka $a'$ dominira pot $P'$, saj bi sicer graf $G$ vseboval induciran cikel $C_j$ za nek $j \geq 4$.

Predpostavimo, da je $w'_{p-1} \sim a$. V izogib induciranemu ciklu $C_4$ na množici točk $\{a', w'_{p-1}, a, b\}$ trdimo, da je $w'_{p-1} \sim b$. Veljati mora tudi, da je $p = 3$, saj bi v primeru, ko je $p \geq 4$ množica točk $\{a, b, w'_{p-1}, a', w'_{p-2}, w'_{p-3}\}$ inducirala graf $F_{12}$ v grafu $G$. Toda sedaj imamo induciran graf $F_{12}$ bodisi na množici točk $\{a, b, w'_2, a', w', b'\}$ (če $b' \nsim w'_2$), bodisi na množici točk $\{a, b, w'_2, a', b', y'\}$ (sicer), kar nas privede do protislovja. Zato $w'_{p-1} \nsim a$.

Predpostavimo sedaj, da je $w'_{p-1} \sim y$. V tem primeru množica točk $\{a, b, y, w'_{p-1}, a', w'_{p-2}\}$ inducira bodisi graf $F_{12}$ (če $w'_{p-1} \nsim b$) bodisi graf $F_{13}$ (sicer), protislovje. Zato $w'_{p-1} \nsim y$ in posledično je $w'_p = b$.

Predpostavimo, da je $w \sim a'$. Če poleg tega velja, da $w \nsim w'_{p-1}$, potem velja tudi, da $w \nsim w'_{p-2}$ (saj bi sicer množica točk $\{w'_{p-2}, w'_{p-1}, w'_p = b, w\}$ inducirala cikel $C_4$ v grafu $G$), toda sedaj množica točk $\{w'_{p-2}, w'_{p-1}, a', w'_p = b, w, a\}$ inducira graf $F_{12}$, protislovje. Zato $w \sim w'_{p-1}$. Naj bo $w'_i$ tista točka na poti $P'$, ki je povezana z $w$ in za katero je vrednost indeksa $i$ najmanjša. Ker $w'_1 = w' \nsim w$ velja, da je $i > 2$. Dalje, ker je $w \sim w'_{p-1}$ velja, da je $i < p$. Toda sedaj množica točk $\{w'_{i-1}, a', w'_i, w, w'_p = b, a\}$ inducira bodisi graf $F_{12}$ (če $w_i \nsim b$) bodisi graf $F_{13}$ (sicer), kar nas privede do protislovja. Zato $w \nsim a'$.

Ker $w \nsim a'$, lahko sedaj zaradi simetrije uporabimo enake argumente kot za pot $P'$ in pridemo do sklepov, da je $w_q = a'$ in da točka $b$ dominira pot $P$.

Predpostavimo najprej, da je $V(P) \cap V(P') = \emptyset$. V izogib induciranemu ciklu $C_4$ na množici točk $\{w'_{p-2}, a' = w_q, b = w'_p, w'_{q-2}\}$ trdimo, da $w'_{p-2} \nsim w_{q-2}$. Predpostavimo, da $w'_{p-1} \nsim w_{q-1}$. Potem velja tudi, da $w'_{p-1} \nsim w_{q-2}$ (v nasprotnem primeru bi graf $G$ vseboval induciran cikel $C_4$ na množici točk $\{w'_{p-1}, w_{q-2}, w_{q-1}, w_q = a'\}$) in zaradi simetrije velja tudi, da $w'_{p-2} \nsim w_{q-1}$. Toda sedaj imamo induciran graf $F_{12}$ na množici točk $\{w'_{p-2}, w_q = a', w'_{p-1}, w'_p =$

$b, w_{q-1}, w_{q-2}\}$. Torej $w'_{p-1} \sim w_{q-1}$. Poleg tega je bodisi $w'_{p-2} \sim w_{q-1}$ bodisi $w_{q-2} \sim w'_{p-1}$, saj bi sicer imeli induciran graf $F_{13}$ na množici točk $\{w_q, w_{q-1}, w_{q-2}, w'_p, w'_{p-1}, w'_{p-2}\}$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $w'_{p-2} \sim w_{q-1}$. Kljub temu imamo induciran graf $F_{12}$ na množici točk $\{w'_{p-2}, a' = w_q, w_{q-1}, w_{q-2}, b = w'_p, w_{q-3}\}$ (kjer v primeru, ko je $q = 2$ vzamemo $w_{-1} = a$). S tem protislovjem smo pokazali, da $V(P) \cap V(P') \neq \emptyset$.

Ker je $w_q = a'$ in zaradi minimalnosti poti $P$ velja, da je $N(a') \cap V(P) = \{w_{q-1}\}$. Po drugi strani pa, ker točka $a'$ dominira pot $P'$ velja, da je $N(a') \cap V(P') = V(P')$. Zato $\emptyset \neq V(P) \cap V(P') = V(P) \cap \big(N(a') \cap V(P')\big) = \big(N(a') \cap V(P)\big) \cap V(P') = \{w_{q-1}\} \cap V(P') \subseteq \{w_{q-1}\}$, iz česar sledi, da je $V(P) \cap V(P') = \{w_{q-1}\}$. Zaradi simetrije podoben argument implicira, da je $V(P) \cap V(P') = \{w'_{p-1}\}$. V našem primeru je torej $w_{q-1} = w'_{p-1}$. Da bi se izognili induciranemu ciklu $C_4$ na množici točk $\{w'_{p-2}, a' = w_q, b = w'_p, w'_{q-2}\}$, trdimo, da $w'_{p-2} \nsim w_{q-2}$. Toda sedaj imamo induciran graf $F_{12}$ na množici točk $\{w'_{p-3}, w'_{p-2}, a' = w_q, w'_{p-1} = w_{q-1}, b = w'_p, w_{q-2}\}$ (kjer v primeru, ko je $p = 2$ vzamemo $w'_{-1} = b'$). Slednje protislovje zaključuje dokaz za primer 5.4.1.

*Primer* 5.4.2. $\ell = 2$.

V izogib induciranemu ciklu $C_4$ na množici točk $\{a, b, a', b'\}$ trdimo, da morata povezavi iz $\{aa', ab', ba', bb'\} \cap E(G)$ imeti skupno krajišče. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $\{aa', ab', ba', bb'\} \cap E(G) = \{ba', bb'\}$. Naj bo $K$ tista komponenta grafa $G - S'$, za katero je $b \in V(K)$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da $y' \notin V(K)$.

Če točka $b$ dominira množico $S'$, potem lahko, da bi prišli do protislovja, uporabimo enake argumente kot v primeru 4, s tem da množico $Z' = \{x', y'\}$ zamenjamo z množico $\tilde{Z}' = \{b, y'\}$. Zato točka $b$ ne dominira množice $S'$ in posledično obstaja točka $c' \in S'$, ki ni povezana s točko $b$. Predvsem velja, da $c' \notin \{x, y\}$. Ker množica $S'$ predstavlja kliko velja, da je $a' \sim c'$ in je $b' \sim c'$. Da bi se izognili induciranemu ciklu $C_4$ na množici točk $\{c', a', b, a\}$ trdimo, da $c' \nsim a$.

Po lemi 5.12 sedaj obstaja točka $w \in V(K)$, ki dominira množico $S'$. Glede na zgornje sedaj velja, da $w \neq b$ in, ker $a \nsim a'$, velja tudi, da $w \neq a$. Torej $w \notin C$. Če je $w = x$, potem graf $G$ vsebuje graf $F_{13}$ kot induciran podgraf na množici točk $\{a, b, x, a', b', y'\}$, protislovje. Zato $w \neq x$ in s podobnim argumentom vidimo tudi, da $w \neq y$, torej $w \notin Z$. Toda sedaj pridemo do protislovja z uporabo enakih argumentov kot v primeru 5.4.1, s tem da zamenjamo množico $C' = \{a', b'\}$ z množico $\tilde{C}' = \{c', b'\}$ in množico $Z' = \{x', y'\}$ z množico $\tilde{Z}' = \{w, y'\}$. (Dejansko je v tem primeru zadoščeno vsem predpostavkam: točki $w$ in $y'$ sta v različnih povezanih komponentah grafa $G - S'$ in obe dominirata $S'$; zgornji argumenti implicirajo, da $\tilde{C}' \cap Z = C \cap \tilde{Z}' = Z \cap \tilde{Z}' = \emptyset$; obstaja natanko ena povezava med $C$ in $\tilde{C}'$.)

*Primer* 5.4.3. $\ell \in \{3, 4\}$.

Glede na trditev 1 lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da je $N(x) \cap \{a', b'\} = \emptyset$ in da je $N(x') \cap \{a, b\} = \emptyset$. Toda sedaj množica točk $\{x, a, b, a', b', x'\}$ inducira bodisi graf $F_{12}$ (če je $\ell = 3$) bodisi graf $F_{13}$ (če je $\ell = 4$), kar nas privede do protislovja.

*Primer* 5.4.4. $\ell = 0$.

Najprej opazimo, da $\{a', b'\} \nsubseteq N(x)$. Dejansko, če je $\{a', b'\} \subseteq N(x)$, potem trditev 1 implicira, da $y \nsim a'$ in $y \nsim b'$. Dalje, da bi se izognili induciranemu ciklu $C_4$ na množici točk $\{x, a', y', a\}$, trdimo, da $y' \nsim a$ in (zaradi simetrije) tudi $y' \nsim b$. Toda sedaj imamo induciran graf $H_1$ na množici točk $\{y, a, b, x, a', b', y'\}$, kar nas privede do protislovja. Zaradi simetrije velja tudi, da $\{a', b'\} \nsubseteq N(y)$, $\{a, b\} \nsubseteq N(x')$, in $\{a, b\} \nsubseteq N(y')$. Slednje dalje implicira, da je $\{x, y\} \cap S' = \emptyset$ in, da je $\{x', y'\} \cap S = \emptyset$.

Naj bo $K$ tista komponenta grafa $G - S'$ za katero velja, da je $S \setminus S' \subseteq V(K)$. Ker sta $x'$ in $y'$ v različnih povezanih komponentah grafa $G - S'$ lahko brez škode za splošnost privzamemo, da $y' \notin V(K)$. Glede na lemo 5.12 sedaj v grafu $K$ obstaja točka $w' \in V(K)$, ki dominira množico $S'$. Ker nobena izmed točk $a$, $b$, $x$ in $y$ ne dominira množice $S'$, velja $w' \notin \{a, b, x, y\}$. Predpostavimo lahko, da $w' \notin S$, saj bi sicer lahko, da bi prišli do protislovja, uporabili enake argumente kot v primeru 3, le da bi množici $C = \{a, b\}$ in $Z' = \{x', y'\}$ zamenjali z množicama $\tilde{C} = \{a, w'\}$ in $\tilde{Z}' = \{w', y'\}$ v tem vrstnem redu. Naj bo $K'$ tista komponenta grafa $G - S$ za katero velja $S' \setminus S \subseteq V(K')$. Ker sta $x$ in $y$ v različnih povezanih komponentah grafa $G - S$, lahko brez škode za splošnost privzamemo, da $y \notin V(K')$. Glede na lemo 5.12 sedaj v grafu $K'$ obstaja točka $w \in V(K')$, ki dominira $S$. Podobno kot zgoraj trdimo, da $w \notin \{a', b', x', y'\}$, in lahko privzamemo, da $w \notin S'$.

Opazimo, da $w \neq w'$ saj bi sicer graf $G$ vseboval induciran graf $H_1$ na množici točk $\{y, a, b, w = w', a', b', y'\}$. Dalje lahko privzamemo, da je $\{yw', ww', wy'\} \cap E(G) = \emptyset$ saj bi sicer lahko, da bi prišli do protislovja, uporabili enake argumente kot v primerih 5.4.1,5.4.2 ali 5.4.3, s tem da bi množici $Z = \{x, y\}$ in $Z' = \{x', y'\}$ zamenjali z množicama $\tilde{Z} = \{w, y\}$ in $\tilde{Z}' = \{w', y'\}$, v tem vrstnem redu. Poleg tega nam podobni argumenti kot zgoraj za točki $x$ in $x'$ implicirajo, da $\{a', b'\} \nsubseteq N(w)$ in $\{a, b\} \nsubseteq N(w')$.

Naj bo $P = (w_1 = w', w_2, \ldots, w_p)$ najkrajša $w' - (S \setminus S')$ pot v grafu $K$ in naj bo $P' = (w'_1 = w, w'_2, \ldots, w'_q)$ najkrajša $w - (S' \setminus S)$ pot v grafu $K'$. Privzamemo lahko, da je $w_p = b$ in je $w'_q = a'$. Ker $w' \notin S$, je $p \geq 2$ in podobno je $q \geq 2$. Poleg tega, če je $p = q = 2$, velja tudi, da je $w' \sim b$ in $w \sim a'$, kar implicira induciran cikel $C_4$ na množici točk $\{w, a', w', b\}$. Zato lahko privzamemo, da je $p \geq 3$.

Predpostavimo, da je $q = 2$. Potem je $w \sim a'$ in posledično $w \nsim b'$. Opazimo, da lahko privzamemo, da $w_{p-1} \neq w$, saj bi sicer morala točka $a'$ biti sosednja z vsemi točkami $w_j$ za $j \in \{1, \ldots, p-1\}$ (da bi se izognili induciranemu $C_j$ z $j \geq 4$), toda sedaj imamo induciran graf $H_1$ na množici točk $\{y, a, b, w = w_{p-1}, w_{p-2}, w_{p-3}, a'\}$ (ker $w_1 = w' \nsim w = w_{p-1}$, opazimo, da mora biti $p > 3$, in je zato točka $w_{p-3}$ dobro definirana). V izogib dolgemu induciranemu ciklu trdimo, da $w_{p-1} \neq y$, $w_{p-1} \sim w$ in $w_{p-1} \sim a'$. Poleg tega je $w_{p-1} \sim y$, saj bi sicer množica točk $\{y, a, b, w, w_{p-1}, a'\}$ inducirala bodisi graf $F_{12}$ (če $a \nsim w_{p-1}$) bodisi graf $F_{13}$ (sicer). Opazimo, da $w_{p-1} \notin S$, saj bi sicer bila točka vsebovana v množici $S \setminus S'$, kar bi bilo v nasprotju z minimalnostjo poti $P$. Zato je $(y, w_{p-1}, a')$ taka $y - a'$ pot, ki se izogne točkam množice $S$, kar je v nasprotju z dejstvom, da sta točki $y$ in $a'$ v različnih povezanih komponentah grafa $G - S$. Protislovje implicira, da je $q \geq 3$.

Predpostavimo, da je $w_{p-1} = w$. Zaradi minimalnosti poti $P$ velja, da $a \nsim w_j$ in $b \nsim w_j$ za vsak $j \in \{1, \ldots, p-1\}$. Dalje, ker $w_1 = w' \nsim w = w_{p-1}$, velja tudi, da je $p \geq 4$. Če je $a' \sim w_3$ dobimo induciran graf $H_i$ (za nek $i \geq 1$) na množici točk $\{y, a, b, w = w_{p-1}, w_{p-2}, \ldots, w_j, w_{j-1}, w_{j-2}, a'\}$, kjer je $j \in \{3, \ldots, p\}$ največji tak indeks, da je $a' \sim w_j$. Zato $a' \nsim w_3$ in, da bi se izognili dolgemu induciranemu ciklu, velja tudi, da $a' \nsim w_j$ za $j > 4$. Podoben argument pokaže, da $b' \nsim w_j$ za $j \geq 3$. Če $a' \nsim w_2$ in $b' \nsim w_2$, potem imamo induciran graf $H_i$ (za nek $i \geq 1$) na množici točk $V(P) \cup \{a, b, y, a', b', y'\}$. Če je $a' \sim w_2$ in $b' \nsim w_2$ (ali obratno), potem imamo induciran graf $H_i$ (za nek $i \geq 1$) na množici točk $V(P) \cup \{a, b, y, a', b'\}$ in če je $a' \sim w_2$ in je $b' \sim w_2$, potem imamo induciran graf $H_i$ (za nek $i \geq 1$) na množici točk $V(P) \cup \{a, b, y, a', b', y'\} \setminus \{w'\}$. To protislovje nam pokaže, da lahko privzamemo, da $w_{p-1} \neq w$.

Z uporabo podobnih argumentov kot zgoraj lahko privzamemo, da $w'_{q-1} \neq w'$.

Predpostavimo, da je $V(P) \cap V(P') = \emptyset$. Naj bo $r \in \{1, \ldots, p-1\}$ največji tak indeks, da je $a' \sim w_r$. Podobno, naj bo $s \in \{1, \ldots, q-1\}$ največji tak indeks, da je $b \sim w'_s$. Da bi se izognili induciranemu ciklu $C_j$ za nek $j \geq 4$, trdimo, da je $a' \sim w_i$ za vse $i \in \{1, \ldots, r\}$ in $b \sim w'_i$ za vse $i \in \{1, \ldots, s\}$.

Predpostavimo, da je $r = p - 1$. Obravnavali bomo različne primere glede na vrednost indeksa $s$.

- Predpostavimo, da je $s = q - 1$. Potem je $w_{p-1} \sim w'_{q-1}$ (sicer bi množica točk $\{b, w'_{q-1}, w'_q, w_{p-1}\}$ inducirala cikel $C_4$). Če je $p \geq 4$, imamo induciran graf $F_{12}$ na množici točk $\{b, w'_{q-1}, a', w_{p-1}, w_{p-2}, w_{p-3}\}$. Torej je $p = 3$. Če je $q \geq 4$, potem množica točk $\{w'_{q-3}, w'_{q-2}, w'_{q-1}, w'_q = a', w_2, b = w_3\}$ inducira bodisi graf $F_{12}$ (če $w_2 \sim w'_{q-2}$) bodisi graf $F_{13}$ (sicer). Torej je $q = 3$. Ker morata biti točka $y$ in pot $P'$ v različnih komponentah grafa $G - S$ in ker $w_2 \notin S$, zaradi minimalnosti poti $P$ opazimo, da $y \nsim w_2$ ter, zaradi simetrije, tudi $y' \nsim w'_2$. Da bi se izognili induciranim grafom $F_{12}$ ali $F_{13}$ na množici točk $\{a, b = w_3, w = w'_1, w_2, w'_2, w'_3 = a'\}$, velja, da je $a \sim w_2$. Toda sedaj imamo induciran graf $H_1$ na množici točk $\{y, a, b, w_2, w' = w_1, a', b'\}$ (če $w_2 \nsim b'$) ali $\{y, a, b, w_2, a', b', y'\}$ (sicer).

- Predpostavimo sedaj, da je $s = q - 2$. Potem je $w_{p-1} \sim w'_{q-2}$ in je $w_{p-1} \sim w'_{q-1}$ (sicer bi množica točk $\{b, w'_{q-2}, w'_{q-1}, w'_q, w_{p-1}\}$ vsebovala induciran cikel $C_4$ ali $C_5$). Če je $q > 3$, potem imamo induciran graf $F_{12}$ na množici točk $\{w'_{q-3}, w'_{q-2}, w'_{q-1}, b, w_{p-1}, a'\}$. Zato je $q = 3$, toda sedaj množica točk $\{y, a, b, w = w'_1, w'_2, w_{p-1}\}$ inducira bodisi graf $F_{12}$ (če $a \nsim w_{p-1}$) bodisi graf $F_{13}$ (sicer).

- Predpostavimo, da je $s < q - 2$. Da bi se izognili induciranemu ciklu $C_j$ za nek $j \geq 4$, trdimo, da je $w_{p-1} \sim w'_i$ za vsak $i \in \{s, s+1, \ldots, q\}$. Toda sedaj je pot $\tilde{P} = (w = w'_1, \ldots, w'_s, w_{p-1}, a')$ $w-(S' \setminus S)$ pot v grafu $K'$, krajša od poti $P'$, protislovje.

Predpostavimo, da je $r < p-1$ in da je $s < q-1$. Da bi se izognili induciranemu ciklu $C_j$ za nek $j \geq 4$, trdimo, da je $w'_s \sim w_{p-1}$ in je $w_r \sim w'_{q-1}$. Minimalnost poti $P$ implicira, da $w'_s \nsim w_j$ za $j \in \{1, \ldots, p-3\}$. Opazimo, da $a \nsim w_{p-1}$, saj bi sicer lahko našli induciran graf $H_i$ (za nek $i \geq 1$) na množici točk $F$, kjer je

$$F = \begin{cases} \{y, a, b, w_{p-1}, \ldots, w_r, w_{r-1}, w_{r-2}, a'\}, & \text{če je } r \geq 3; \\ \{y, a, b, w_{p-1}, \ldots, w_2, w_1 = w', b', a'\}, & \text{če je } r = 2 \text{ in } w_2 \nsim b'; \\ \{y, a, b, w_{p-1}, \ldots, w_2, y', b', a'\}, & \text{če je } r = 2 \text{ in je } w_2 \sim b'; \\ \{y, a, b, w_{p-1}, \ldots, w_1 = w', y', b', a'\}, & \text{če je } r = 1. \end{cases}$$

Na zgornjo analizo primerov se bomo nanašali kot na *konstrukcijo grafa $H_i$ iz množice $D$*, kjer je $D$ množica točk $\{y, a, b, w_{p-1}\}$, ki inducirajo diamant (skupen vsem štirim primerom).

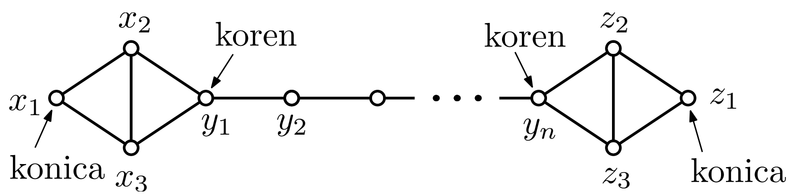
Poleg tega je $w = w'_1 \nsim w_{p-1}$, saj bi sicer lahko konstruirali $H_i$ bodisi iz množice $\{w = w'_1, a, b = w_p, w_{p-1}\}$ (če $w \nsim w_{p-2}$), bodisi iz množice $\{w = w'_1, b = w_p, w_{p-1}, w_{p-2}\}$ (sicer). Ker je $w'_s \sim w_{p-1}$ in $w = w'_1 \nsim w_{p-1}$ velja, da je $s \geq 2$. Toda sedaj lahko konstruiramo $H_i$ bodisi iz množice $\{w'_{s-1}, w'_s, b = w_p, w_{p-1}\}$ (če $w'_s \nsim w_{p-2}$), bodisi iz množice $\{w'_s, b = w_p, w_{p-1}, w_{p-2}\}$ (sicer).

Predpostavimo sedaj, da $V(P) \cap V(P') \neq \emptyset$. Naj bo $i \in \{1, \ldots, q\}$ največji tak indeks, za katerega velja, da je $w'_i \in V(P)$. Naj bo $j \in \{1, \ldots, p\}$ tak indeks, da je $w'_i = w_j$. Opazimo, da je $i \geq 2$ in je $j \geq 2$. Vzemimo pot $Q = (w = w'_1, \ldots, w'_i = w_j, w_{j-1}, \ldots, w_1 = w')$.

Naj bosta $D = \{y, a, b, w = w'_1\}$ in $D' = \{y', a', b', w' = w_1\}$. Točki $w$ in $w'$ bomo imenovali *korena* množic $D$ in $D'$ medtem ko bomo točki $y$ in $y'$ imenovali *konici* množice $D$ in $D'$. Opazimo, da obe množici $D$ in $D'$ inducirata diamant in, da je $Q$ pot, ki povezuje oba korena. Poleg tega bomo sedaj pokazali, da konici množic $D$ in $D'$ nimata sosedov v poti $Q$. Zaradi simetrije zadostuje že, da trditev dokažemo za konico množice $D$, tj. za $y$. Ker množica $S$ loči točko $y$ od množice $S' \setminus S$, točka $y$ nima sosedov na poti $P'$; v našem primeru torej nima sosedov v množici $\{w'_1, \ldots, w'_i\}$. Poleg tega, če ima točka $y$ kakšnega soseda v množici $\{w_{j-1}, \ldots, w_1\}$, recimo, da je $y \sim w_r$ za nek $r \in \{2, \ldots, j-1\}$, potem dejstvi, da je graf $G$ tetiven in je $w_p = b \sim y$, implicirata, da je točka $y$ sosedna s točko $w_s$ za vsak $s \in \{r+1, \ldots, p\}$. V vsakem primeru bi to impliciralo, da je $y \sim w_j = w'_i$, kar nas privede do protislovja.

Predpostavimo lahko tudi, da je pot $Q$ inducirana, sicer bi lahko pot $Q$ zamenjali s krajšo $y - y'$ potjo v grafu $G[V(Q)]$.

Zgornji premislek pokaže, da podgraf grafa $G$ induciran na točkah $D \cup D' \cup V(Q)$ vsebuje (ne nujno induciran) podgraf izomorfen enemu izmed grafov v družini $H_i$ (torej sestoji iz dveh diamantov in poti, ki ju povezuje preko njunih korenov) z naslednjimi lastnostmi: (i) vsak izmed dveh diamantov je induciran; (ii) med diamantoma ni nobene povezave, z izjemo povezav, ki so incidenčne z njunima korenoma (v primeru, ko korena sovpadata) ali edine povezave na poti med obema korenoma (v primeru, ko je pot, ki povezuje diamanta dolžine 1); (iii) pot, ki povezuje diamanta, je inducirana; in (iv) konici diamantov nimata sosedov na poti, ki diamanta povezuje. Podgraf, ki zadošča lastnostim (i)–(iv) bomo imenovali *šibko induciran* $H_i$. Med vsemi podgrafi grafa $G[D \cup D' \cup V(Q)]$, ki so izomorfni šibko induciranemu $H_i$ izberimo tistega z najmanjšim številom točk, recimo mu $H$. V nadaljevanju bomo pokazali, da je graf $H$ induciran podgraf grafa $G$, natančneje, da je podgraf grafa $G$, induciran na $V(H)$ izomorfen nekemu grafu iz družine $H_i$. Označimo točke grafa $H$ kot na sliki 5.2 spodaj. Naj bo $H'$ podgraf grafa $G$ induciran na $V(H)$.




Slika 5.2: Šibko induciran $H_n$

Predpostavimo, da $H \neq H'$. Potem v grafu $H'$ obstaja povezava, ki je v grafu $H$ ni. Edine možne povezave, prisotne v garfu $H'$, toda ne v grafu $H$, so tiste, ki povezujejo eno izmed točk $x_2, x_3, z_2, z_3$ z eno izmed točk iz množice $\{y_2, \ldots, y_{n-1}\}$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da ima točka $x_2$ soseda v množici točk $\{y_2, \ldots, y_{n-1}\}$. Ker je graf $G$ tetiven, je tudi podgraf $H'$ tetiven in zato je, če je $x_2 \sim y_j$ za nek $j \in \{2, \ldots, n-1\}$, tudi $x_2 \sim x_{j'}$ za vse

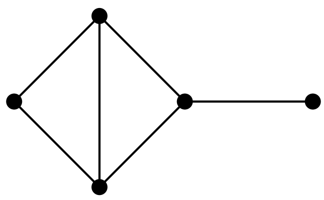
$j' \in \{2, \ldots, j\}$. Naj bo $j \in \{2, \ldots, n-1\}$ največji indeks, za katerega velja, da je $x_2 \sim y_j$. Če je $j \geq 3$, potem lahko graf $H$ zamenjamo z grafom, ki ga dobimo iz (induciranega) diamanta na množici točk $\{x_2, y_{j-2}, y_{j-1}, y_j\}$ skupaj z (inducirano) potjo $(y_j, \ldots, y_n)$ in (induciranim) diamantom na točkah $\{y_n, z_1, z_2, z_3\}$.

Posledično dobimo šibko induciran graf $H_i$ z manjšim številom točk, kot jih je imel graf $H$, kar je v nasprotju z začetno izbiro grafa $H$. Torej je $j = 2$. Če $x_3 \nsim y_2$, potem bi lahko dobili šibko induciran graf $H_i$, ki je manjši od grafa $H$, tako da bi vzeli (induciran) diamant na množici točk $\{x_2, x_3, y_1, y_2\}$ skupaj z (inducirano) potjo $(y_2, \ldots, y_n)$ in (induciranim) diamantom na množici točk $\{y_n, z_1, z_2, z_3\}$. Zato je $x_3 \sim y_2$. Ker konice diamantov nimajo sosedov na poti, ki diamanta povezuje, trdimo, da $x_1 \nsim y_2$. Toda sedaj dobimo šibko induciran $H_i$ manjši od grafa $H$ tako, da vzamemo (induciran) diamant na množici točk $\{x_1, x_2, x_3, y_2\}$ skupaj z (inducirano) potjo $(y_2, \ldots, y_n)$ in (induciranim) diamantom na množici točk $\{y_n, z_1, z_2, z_3\}$. Slednje protislovje pokaže, da mora dejansko veljati enakost $H = H'$ in s tem se tudi dokaz zaključi.

S tem smo zaključili dokaz primera 5 in z njim tudi dokaz izreka 5.13. □

## 5.3 Posledice karakterizacij HPDP in PDP grafov

V tem podpoglavju bomo preučili nekaj posledic karakterizacije HPDP grafov s pomočjo prepovedanih induciranih podgrafov, podanih v izreku 5.13. Ekvivalenca med trditvama 1 in 4 v izreku 5.13 implicira, da je razred HPDP grafov posplošitev razreda tetivnih grafov brez zmajev, kjer je *zmaj* graf na sliki 5.3.



Slika 5.3: Zmaj.

**Posledica 5.14.** *Vsak tetiven graf brez induciranih zmajev je HPDP.*

Posledica 5.14 dalje implicira, da je razred HPDP grafov posplošitev dveh dobro znanih razredov grafov in sicer bločnih grafov in trivialno popolnih grafov. Spomnimo, da so *bločni grafi* tisti grafi, v katerih je vsak maksimalen povezan podgraf brez prereznih točk poln graf. Znano je, da razred bločnih grafov sovpada z razredom tetivnih grafov brez diamantov (diamant je prikazan na sliki 2.3 na strani 12). Pravimo, da je graf $G$ *trivialno popoln* [44], če za vsak induciran podgraf $H$ grafa $G$ velja, da je $\alpha(H) = |\mathcal{C}(H)|$, kjer $\mathcal{C}(H)$ označuje množico vseh maksimalnih klik grafa $H$. Razred trivialno popolnih grafov sovpada tako z razredom ti. kvazi-pragovnih grafov [98] kot z razredom $\{P_4, C_4\}$-prostih grafov [44].

**Posledica 5.15.** *Vsak bločen graf je HPDP. Vsak trivialno popoln graf je HPDP.*

Spomnimo, da so bili tudi HTDP grafi v izreku 3.20 karakterizirani s pomočjo prepovedanih induciranih podgrafov (slika 3.2 na strani 35). Opazimo lahko, da je vsak $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$-prost graf tetiven in da je vsak $F_7$-prost graf tudi $H_i$-prost graf za vsak $i \geq 1$. Ob upoštevanju izreka 5.13 to pomeni, da je vsak $\{F_1, F_2, F_3, F_4, F_7, F_{12}, F_{13}\}$-prost graf HPDP. Torej izrek 3.20 implicira naslednjo posledico:

**Posledica 5.16.** *Vsak HTDP graf je HPDP.*

Poglavje bomo zaključili s posledicama, ki zadevata prepoznavanje HPDP in PDP grafov. Naslednja posledica je direktna posledica karakterizacije HPDP grafov s pomočjo prepovedanih induciranih podgrafov.

**Posledica 5.17.** *HPDP grafe lahko prepoznamo v polinomskem času.*

*Dokaz.* Da je graf $G$ tetiven, lahko preverimo v linearnem času [45]. Ali graf $G$ nima induciranega kakšnega od grafov $F_{12}, F_{13}, H_1$ in $H_2$, lahko preverimo v času $\mathcal{O}(|V(G)|^8)$. Pokazati moramo torej samo, da lahko v polinomskem času preverimo tudi, da graf $G$ ne vsebuje induciranega nobenega grafa $H_i$ za vsak $i > 2$. Opazimo, da ima za vse $i > 2$ graf $H_i$ induciran podgraf, izomorfen grafu $2D$, disjunktni uniji dveh diamantov. V grafu $G$ torej v času $\mathcal{O}(|V(G)^8|)$ poiščemo vse podgrafe na 8 točkah, izomorfne grafu $2D$. Za vsak tak podgraf, recimo mu $H$, preverimo, ali se ga da dopolniti do grafa oblike $H_i$ za nek $i > 2$, kot sledi. Naj bosta $D_1$ in $D_2$ povezani komponenti (diamanta) grafa $H$. Dalje, naj bosta $u_1, u_2$ točki stopnje 2 v diamantu $D_1$ in podobno naj bosta $v_1, v_2$ točki stopnje 2 v diamantu $D_2$. Sedaj lahko preverimo, da $H$ ni vsebovan v nobenem induciranem podgrafu grafa $G$ izomorfnemu kakšnemu $H_i$ (za $i > 2$) tako, da za vsak par $u_i, v_j$, $i, j \in \{1, 2\}$, preverimo, da sta točki $u_i$ in $v_j$ v različnih povezanih komponentah grafa

$$G - (N_{G-u_i}[V(D_1) \setminus \{u_i\}] \cup N_{G-v_j}[V(D_2) \setminus \{v_j\}]).$$

Sledi, da lahko za vsak graf $H$ omenjeno preverbo opravimo v polinomskem času. Posledično je prepoznavanja HPDP grafov polinomsko rešljiv problem. □

Dalje, ker lahko množico vseh minimalnih točkovnih prerezov danega grafa izračunamo v izhodno-polinomskem času [91], imamo sledečo posledico za prepoznavanje PDP grafov:

**Posledica 5.18.** *V polinomskem času lahko prepoznamo PDP grafe v poljubnem razredu grafov, ki imajo polinomsko mnogo minimalnih točkovnih prerezov. Pravtako lahko v tovrstnih razredih grafov v polinomskem času izračunamo (celoštevilsko) povezano dominantno pragovno strukturo PDP grafa $G$.*

Slednje lahko storimo z uporabo trditve 5.9 in preverbo, da je tako dobljena funkcija minimalnih točkovnih prerezov $f_G^{mtp}$ pragovna. Ker so HPDP grafi tetivni in imajo tetivni grafi polinomsko mnogo minimalnih točkovnih prerezov [20], lahko omenjeni pristop uporabimo tudi za izračun PDP strukture danega HPDP grafa. Problem določitve računske zahtevnosti problema prepoznavanja PDP grafov v splošnem pa ostaja odprt.

# 6
# EKVISTARABILNI GRAFI

V tem poglavju bomo karakterizirali ekvistarabilne dvodelne grafe. Pokazali bomo, da je dvodelen graf ekvistarabilen če in samo če lahko vsako 2-prirejanje grafa razširimo do popolnega notranjega prirejanja. Dalje, ekvistarabilne grafe bomo povezali še s trikotniškim pogojem, kombinatoričnim pogojem, ki je potreben (toda v splošnem ne zadosten) za ekvistabilnost, ter konstruirali neskončno družino trikotniških ne-ekvistabilnih grafov znotraj razreda komplementov povezavnih grafov dvodelnih grafov.

Pred tem si bomo, v naslednjem razdelku, poleg definicije ekvistarabilnih grafov in motivacije za študij le teh, pogledali še njihovo povezavo z nekaterimi drugimi grafovskimi razredi.

## 6.1 Ekvistarabilni grafi in nekateri z njimi povezani grafovski razredi

V danem grafu $G$ in točki $x \in V(G)$ je *zvezda s središčem v točki* $x$ množica vseh povezav $E(x)$, ki so incidenčne s točko $x$. *Zvezda* v grafu $G$ je zvezda s središčem v poljubni točki $x \in V(G)$, pravimo, da je zvezda *maksimalna*, če ni vsebovana (kot prava podmnožica) v nobeni drugi zvezdi. Unijo zvezd s središči v točkah iz množice $U \subseteq V(G)$ bomo označili z $E(U) := \cup_{u \in U} E(u)$. V [78] sta Milanič in Trotignon uvedla ekvistarabilne grafe kot grafe $G = (V, E)$ brez izoliranih točk, za katere obstaja taka preslikava $w : E \to \mathbb{R}_+$ na povezavah grafa $G$, da je podmnožica povezav $F \subseteq E$ maksimalna zvezda v grafu $G$ če in samo če je $w(F) := \sum_{e \in F} w(e) = 1$. Taki funkciji $w$ pravimo *ekvistarabilna utežna funkcija* grafa $G$. Takoj lahko opazimo, da za vsako ekvistarabilno utežno funkcijo $w$ velja, da je $w(e) > 0$ za vse povezave $e \in E(G)$, saj bi sicer lahko imeli težo enako 1 na neki podmnožici povezav, ki ne inducira maksimalne zvezde v grafu $G$.

**Primer 6.1.** *Pot na štirih točkah je ekvistarabilen graf. Naj bo* $E(P_4) = \{e_1, e_2, e_3\}$. *Tedaj* $w(e_1) = w(e_3) = x$ *in* $w(e_2) = 1 - x$ *predstavlja ekvistarabilno utežno funkcijo grafa* $P_4$ *za vsak* $x \in (0, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

**Primer 6.2.** *Pot na petih točkah ni ekvistarabilen graf. Označimo povezave poti po vrsti,* $E(P_5) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, *in naj bo* $w(e_1) = x \in (0, 1)$. *Ker vsaki dve zaporedni povezavi na poti* $P_5$ *predstavljata maksimalno zvezdo, mora veljati* $w(e_2) = 1 - x$, $w(e_3) = x$ *in* $w(e_4) = 1 - x$. *Toda sedaj imamo skupno težo enako* 1 *na množici povezav, ki ne inducira maksimalne zvezde v grafu* $P_5$, *namreč na množici* $\{e_1, e_4\}$, *kar implicira, da* $P_5$ *ni ekvistarabilen graf.*

V [78], kjer sta Milanič in Trotignon uvedla ekvistarabilne grafe, najdemo tudi povezavo med ekvistarabilnimi grafi in *ekvistabilnimi grafi*. Spomnimo, da je graf $G = (V, E)$ ekvistabilen če in samo če obstaja taka preslikava $w : V \to \mathbb{R}_+$ na točkah grafa $G$, da za vse podmnožice $S \subseteq V$ velja, da je $S$ neodvisna množica v grafu $G$ če in samo če je $w(S) := \sum_{v \in S} w(v) = 1$ [82]. Milanič in Trotignon sta v [78] pokazala naslednjo lemo.

**Lema 6.3** (Milanič in Trotignon [78])**.** *Naj bo* $G$ *graf brez trikotnikov. Potem je graf* $G$ *ekvistarabilen če in samo če je graf* $\overline{L(G)}$ *ekvistabilen.*

Leta 1994 so v [73] Mahadev idr. uvedli podrazred ekvistabilnih grafov, t.i. *krepko ekvistabilne grafe*. Za dani graf $G$ označimo s $\mathcal{S}(G)$ množico vseh neodvisnih množic grafa $G$ in s $\mathcal{T}(G)$ množico vseh ostalih nepraznih podmnožic točk grafa $G$. Pravimo, da je graf krepko ekvistabilen, če za vsako množico $T \in \mathcal{T}(G)$ in za vsak $\gamma \leq 1$ obstaja taka preslikava $w : V \to \mathbb{R}_+$, da je $w(S) = 1$ za vsak $S \in \mathcal{S}(G)$ in $w(T) \neq \gamma$. Na podoben način sta Milanič in Trotignon v [78] definirala tudi krepko ekvistarabilne grafe. Za dani graf $G$ označimo s $\mathcal{S}^*(G)$ množico vseh maksimalnih zvezd grafa $G$ in s $\mathcal{T}^*(G)$ množico vseh ostalih nepraznih podmnožic množice povezav $E(G)$. Pravimo, da je graf brez izoliranih točk *krepko ekvistarabilen*, če za vsako množico $T \in \mathcal{T}^*(G)$ in za vsak $\gamma \leq 1$ obstaja taka preslikava

$w : E \to \mathbb{R}_+$, da je $w(S) = 1$ za vsak $S \in \mathcal{S}^*(G)$ in $w(T) \neq \gamma$. Pokazala sta, da je vsak graf $G$ brez trikotnikov krepko ekvistarabilen natanko tedaj, ko je komplement njegovega povezavnega grafa $\overline{L(G)}$ krepko ekvistabilen.

Zgoraj omenjene rezultate lahko povzamemo z naslednjo tabelo:

| lastnost grafa $G$, ki ne vsebuje trikotnikov | | ustrezna lastnost grafa $\overline{L(G)}$ |
|---|---|---|
| $G$ je krepko ekvistarabilen | $\stackrel{[78]}{\Longleftrightarrow}$ | $\overline{L(G)}$ je krepko ekvistabilen |
| $\Downarrow$ | | $\Downarrow$ [73] |
| $G$ je ekvistarabilen | $\stackrel{[78]}{\Longleftrightarrow}$ | $\overline{L(G)}$ je ekvistabilen |

Tabela 6.1: Povezave med lastnostmi grafa $G$ brez trikotnikov in grafa $\overline{L(G)}$.

Posledično nam do sedaj znane ekvivalence in implikacije z desne strani tabele 6.1 direktno podajo tudi implikacijo na levi strani tabele 6.1.

**Posledica 6.4.** *Vsak krepko ekvistarabilen graf $G$, ki ne vsebuje trikotnikov, je ekvistarabilen.*

Dejansko nam neposredna prilagoditev bodisi geometrijskega dokaza rezultata Mahadeva idr. iz [73] bodisi alternativnega dokaza podanega v [78] na krepko ekvistarabilne grafe pokaže, da trditev velja za splošne grafe (ne nujno brez trikotnikov), tj. vsak krepko ekvistarabilen graf je ekvistarabilen.

Poleg zgoraj navedenih lastnosti in grafovskih razredov lahko desno stran tabele 6.1 še dodatno razširimo. Najprej s podrazredom krepko ekvistabilnih grafov, s t.i. *splošno particijskimi grafi*, ki so jih v [75] uvedli McAvaney idr. Pravimo, da je graf $G = (V, E)$ splošno particijski, če obstaja množica $U$ in taka dodelitev nepraznih podmnožic $U_x \subseteq U$ točkam grafa $G$, da sta točki $x$ in $y$ sosednji če in samo če velja $U_x \cap U_y \neq \emptyset$ in za vsako maksimalno neodvisno množico $S$ grafa $G$ velja, da je množica $\{U_x : x \in S\}$ particija množice $U$.

Desno stran tabele 6.1 lahko razširimo tudi z nadrazredom ekvistabilnih grafov, s t.i. *trikotniškimi grafi*. Trikotniški grafi so grafi, ki zadoščajo trikotniškemu pogoju, ki je bil uveden v [75] in navaja, da za vsako maksimalno neodvisno množico $S$ grafa $G = (V, E)$ in za vsako povezavo $uv$ v $G - S$ obstaja taka točka $s \in S$, da množica točk $\{u, v, s\}$ inducira trikotnik v grafu $G$.

Obe zgoraj omenjeni vsebovanosti sta v [76] pokazala Miklavič in Milanič.

Sledi dokaj naravno vprašanje, kako bi lahko dopolnili tudi levo stran tabele in tu nam bodo v pomoč naslednje zveze (v katere se bo bralec zlahka prepričal):

1. Točka v grafu $\overline{L(G)}$ = povezava v grafu $G$.
2. Maksimalna neodvisna množica v grafu $\overline{L(G)}$ = maksimalna zvezda v grafu $G$.
3. Klika v grafu $\overline{L(G)}$ = prirejanje v grafu $G$.
4. Klika, ki vsebuje točko iz vsake maksimalne neodvisne množice grafa $\overline{L(G)}$ = prirejanje, ki pokrije vse točke stopnje vsaj 2 v grafu $G$.
5. $\overline{L(G)}$ zadošča trikotniškemu pogoju $\Leftrightarrow$ za vsako 2-prirejanje $M = \{e, f\}$ v grafu $G = (V, E)$ in vsako točko $v \in V$ stopnje 2, ki ni incidenčna niti s povezavo $e$ niti s povezavo $f$, lahko $M$ razširimo do 3-prirejanja $M' = \{e, f, g\}$ tako, da je točka $v$ incidenčna s povezavo $g$.

Iz tega lahko izpeljemo (razširjeno) tabelo 6.2. Za razumevanje ekvivalenc potrebujemo še dve definiciji.

Najprej se spomnimo, da je povezan graf $G$ *k-razširljiv*, če graf $G$ vsebuje $k$-prirejanje in lahko vsako $k$-prirejanje razširimo do popolnega prirejanja grafa $G$ [85].

**Definicija 6.5.** *Naj bo $k \geq 0$. Pravimo, da je povezan graf $G$* $k$-notranje razširljiv, *če graf $G$ vsebuje $k$-prirejanje in lahko vsako $k$-prirejanje razširimo do popolnega notranjega prirejanja (tj. do prirejanja, ki pokrije vse točke stopnje vsaj 2).*

**Definicija 6.6.** *Graf $G$ je $P_5$-omejen, če je sredinska točka vsake (ne nujno inducirane) poti na petih točkah stopnje vsaj 3 v grafu $G$.*

Kot smo že omenili, sta bili druga in tretja ekvivalenca iz tabele 6.2 vzpostavljeni že v [78], dalje, prva in tretja implikacija na desni strani sta bili pokazani s strani Miklaviča in Milaniča v [76] (tretja je bila v osnovi opažena že v [73]), drugo implikacijo na desni strani tabele pa so pokazali Mahadev idr. v [73].

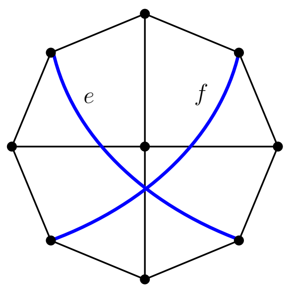
Prvo in četrto ekvivalenco iz tabele 6.2 bomo dokazali v lemah 6.12 in 6.13 (v tem vrstnem redu) v poglavju 6.2. S tem bomo utemeljili tudi prvo in tretjo implikacijo na levi strani tabele 6.2.

| lastnost grafa $G$, ki ne vsebuje trikotnikov | | ustrezna lastnost grafa $\overline{L(G)}$ |
|---|---|---|
| Vsaka povezana komponenta grafa $G$ je bodisi zvezda bodisi 2-notranje razširljiva | $\Longleftrightarrow$ | graf $\overline{L(G)}$ je splošno particijski |
| $\Downarrow$ | | $\Downarrow$ [76] |
| $G$ je krepko ekvistarabilen | $\overset{[78]}{\Longleftrightarrow}$ | $\overline{L(G)}$ je krepko ekvistabilen |
| $\Downarrow$ | | $\Downarrow$ [73] |
| $G$ je ekvistarabilen | $\overset{[78]}{\Longleftrightarrow}$ | $\overline{L(G)}$ je ekvistabilen |
| $\Downarrow$ | | $\Downarrow$ [73, 76] |
| $G$ je $P_5$-omejen | $\Longleftrightarrow$ | $\overline{L(G)}$ je trikotniški |

Tabela 6.2: Povezave med lastnostmi grafa $G$ brez trikotnikov in grafa $\overline{L(G)}$.

## 6.2 Splošni rezultati, primeri in protiprimeri

Kot so pokazali Korach idr. v [64], je graf $G$ ekvistabilen natanko tedaj, ko je vsaka povezana komponenta grafa $G$ ekvistabilna. V lemi 6.8, ki sledi, bomo pokazali, da za ekvistarabilne grafe podoben sklep velja samo v eno smer. To bomo storili s pomočjo grafa $H$ s slike 6.1. Ta graf je ekvistarabilen, ni pa krepko ekvistarabilen [78]. Dejstvo, da graf $H$ ni krepko ekvistarabilen, sledi iz naslednje leme.



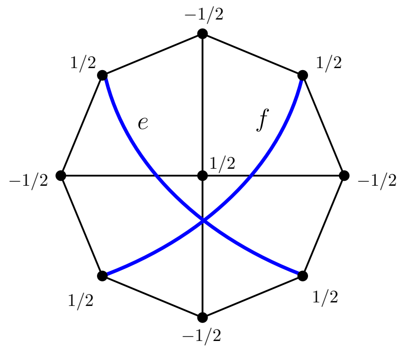

Slika 6.1: Ekvistarabilen graf $H$, ki ni krepko ekvistarabilen.

**Lema 6.7.** *Naj bo $H$ graf, prikazan na sliki 6.1, in naj bo $w : E(H) \to \mathbb{R}_+$ poljubna taka utežna funkcija na povezavah grafa $H$, da je $w(E(v)) = 1$ za vsako točko $v \in$*

$V(H)$. *Potem 2-prirejanju* $\{e,f\}$ *(glej sliko 6.1) ustreza enakost* $w(\{e,f\}) = 1/2$.

Trditev iz leme 6.7 se pojavi v dokazu trditve 2 v [78] (kjer je graf $H$ označen z $G^*$) in je bila vzpostavljena s pomočjo baze jedra incidenčne matrike grafa. Sledi alternativni, krajši dokaz s pomočjo metode, ki se je bomo poslužili tudi kasneje (v dokazu izreka 6.16).

*Dokaz leme 6.7.* Naj preslikava $\lambda : V(H) \to \mathbb{R}$ ustreza preslikavi, prikazani na sliki 6.2.




Slika 6.2: Preslikava $\lambda : V(H) \to \{-1/2, 1/2\}$.

Točkam iz večjega dela dvodelnega grafa $H - \{e,f\}$ je dodeljena teža $1/2$, ostalim točkam je dodeljena teža $-1/2$. Z uporabo koeficientov, ki nam jih poda preslikava $\lambda$, lahko karakteristični vektor $x^M$ 2-prirejanja $M = \{e,f\}$ izrazimo kot linearno kombinacijo karakterističnih vektorjev maksimalnih zvezd, tj. $x^M = \sum_{v\in V(H)} \lambda(v)\cdot x^{E(v)}$. Ker je $\sum_{v\in V(H)} \lambda(v) = 1/2$ in $w(E(v)) = 1$ za vsak $v \in V(H)$, od tod sledi $w(M) = 1/2$. □

**Lema 6.8.** *Če je graf* $G$ *ekvistarabilen, potem je vsaka povezana komponenta grafa* $G$ *ekvistarabilna. Po drugi strani pa razred ekvistarabilnih grafov ni zaprt za disjunktno unijo grafov.*

*Dokaz.* Če je $w$ ekvistarabilna utežna funkcija grafa $G$ in je $C$ njegova povezana komponenta, potem je $w'$, zožitev preslikave $w$ na $E(C)$, ekvistarabilna utežna funkcija grafa $C$. To sledi neposredno iz definicij z uporabo dejstva, da je za vsako podmnožico povezav $F \subseteq E(C)$ množica $F$ maksimalna zvezda v grafu $C$ če in samo če je tudi maksimalna zvezda v grafu $G$.

Da razred ekvistarabilnih grafov ni zaprt za disjunktno unijo grafov, lahko sedaj utemeljimo s pomočjo leme 6.7. Dejansko, omenjena lema implicira, da disjunktna unija dveh kopij grafa $H$ vsebuje 4-prirejanje skupne teže 1, neodvisno od uporabljene ekvistarabilne utežne funkcije in zato ne predstavlja ekvistarabilnega grafa. □

Mahadev idr. so v [73] pokazali, da je razred krepko ekvistabilnih grafov zaprt za spoj grafov, naslednja posledica leme 6.8 pa nam pove, da za nadrazred krepko ekvistabilnih grafov to ne velja.

**Posledica 6.9.** *Razred ekvistabilnih grafov ni zaprt za spoj grafov.*

*Dokaz.* Ker je graf $H$ na sliki 6.1 ekvistarabilen in brez trikotnikov, je komplement njegovega povezavnega grafa $\overline{L(H)}$ ekvistabilen (glej tabelo 6.2). Označimo z $2H$ disjunktno unijo dveh kopij grafa $H$. Opazimo lahko, da je graf $\overline{L(2H)}$ izomorfen spoju dveh grafov $\overline{L(H)}$. Vendar graf $2H$ ni ekvistarabilen in posledično graf $2\overline{L(H)}$ ni ekvistabilen. □

Sledeča lema je iz [78].

**Lema 6.10.** *Naj bo $G$ graf brez trikotnikov z $\delta(G) \geq 2$. Potem je $\overline{L(G)}$ splošno particijski graf če in samo če lahko vsako 2-prirejanje grafa $G$ razširimo do popolnega prirejanja grafa $G$.*

S posplošitvijo leme 6.10 bomo sedaj dokazali prvo ekvivalenco iz tabele 6.2. V dokazu bomo uporabili razultat McAvaneya idr. (izrek 6.11), za kar potrebujemo še definicijo krepke klike. *Krepka klika* v grafu $G$ je klika, ki vsebuje vsaj eno (ali ekvivalentno, natanko eno) točko iz vsake maksimalne neodvisne množice.

**Izrek 6.11** (McAvaney idr. [75])**.** *Naj bo $G$ graf. Potem je $G$ splošno particijski graf če in samo če vsaka povezava grafa $G$ pripada neki krepki kliki.*

**Lema 6.12.** *Za vsak graf $G$ brez trikotnikov so naslednje trditve ekvivalentne:*

1. *$\overline{L(G)}$ je splošno particijski graf.*
2. *Vsako 2-prirejanje grafa $G$ lahko razširimo do popolnega notranjega prirejanja.*
3. *Vsaka povezana komponenta grafa $G$ je bodisi zvezda bodisi 2-notranje razširljiva.*

*Dokaz.* Najprej bomo pokazali, da sta trditvi 1 in 2 ekvivalentni in nato bomo pokazali ekvivalenco tudi med trditvama 2 in 3.

Za dokaz ekvivalence 1 $\Leftrightarrow$ 2 bomo najprej s pomočjo izreka 6.11 utemeljili, da je dovolj pokazati, da vsaka povezava grafa $\overline{L(G)}$ pripada krepki kliki če in samo če lahko vsako 2-prirejanje v grafu $G$ razširimo do popolnega notranjega prirejanja. Iz definicij komplementa in operacij povezavnega grafa sledi, da je podmnožica $M \subseteq E(G)$ 2-prirejanje grafa $G$ natanko tedaj, ko v grafu $\overline{L(G)}$ tvori povezavo. Dalje, predstavlja množica $F \subseteq E(G) = V(\overline{L(G)})$ krepko kliko v grafu $\overline{L(G)}$ natanko tedaj, ko predstavlja množica $F$ tako neodvisno množico v grafu $L(G)$, ki ima neprazen presek z vsemi maksimalnimi klikami v grafu $L(G)$. Ker je graf $G$ brez trikotnikov, obstaja bijekcija med maksimalnimi klikami v grafu $L(G)$ in maksimalnimi zvezdami v grafu $G$. Zato je neodvisna množica točk $F$ v grafu $L(G)$, ki seka vse maksimalne klike grafa $L(G)$, natanko prirejanje v grafu $G$, ki seka vse maksimalne zvezde grafa $G$. Ekvivalentno, množica $F$ je popolno notranje prirejanje grafa $G$, ki dodatno vsebuje tudi vse povezave komponent grafa $G$, ki so izomorfne grafu $K_2$ (saj so zvezde s središčem v poljubni točki grafa $K_2$ maksimalne zvezde).

Zgornje implicira, da vsaka povezava grafa $\overline{L(G)}$ pripada neki krepki kliki natanko tedaj, ko lahko vsako 2-prirejanje grafa $G$ razširimo do popolnega notranjega prirejanja, ki vsebuje tudi vse povezave komponent grafa $G$, ki so izomorfne grafu $K_2$. Opazimo lahko, da je zadnji pogoj ekvivalenten pogoju, da lahko vsako 2-prirejanje grafa $G$ razširimo do popolnega notranjega prirejanja in s tem je ekvivalenca 1 $\Leftrightarrow$ 2 dokazana.

Za dokaz implikacije 2 $\Rightarrow$ 3 predpostavimo, da lahko vsako 2-prirejanje grafa $G$ razširimo do popolnega notranjega prirejanja, naj bo $C$ poljubna komponenta grafa $G$, ki ni izomorfna zvezdi, in naj bo $M$ poljubno 2-prirejanje v grafu $G$. Po predpostavki lahko $M$ razširimo do popolnega notranjega prirejanja $M'$. Potem je prirejanje $M' \cap E(C)$ popolno notranje prirejanje komponente $C$, ki razširi $M$.

Pokazati moramo še implikacijo $3 \Rightarrow 2$. Predpostavimo, da je vsaka povezana komponenta grafa $G$ bodisi zvezda bodisi 2-notranje razširljiva. Potem vsebuje vsaka komponenta $C$ grafa $G$ popolno notranje prirejanje $M_C$. Naj bo $M = \{e, f\}$ 2-prirejanje v grafu $G$. Če je $M$ v celoti vsebovan v eni povezani komponenti grafa $G$, recimo v $C$, potem je $M$ vsebovan v popolnem notranjem prirejanju komponente $C$, recimo mu $M'$, in je popolno notranje prirejanje grafa $G$, ki razširi $M$ podano z $M' \cup \bigcup_{C' \in \mathcal{C} \setminus \{C\}} M_{C'}$, kjer $\mathcal{C}$ označuje množico vseh povezanih komponent grafa $G$.

Predpostavimo sedaj, da pripadata povezavi iz $M$ dvema različnima povezanima komponentama grafa $G$, recimo $e \in C_e$ in $f \in C_f$. Trdimo, da je povezava $e$ vsebovana v popolnem notranjem prirejanju komponente $C_e$ (in simetrično je povezava $f$ vsebovana v popolnem notranjem prirejanju komponente $C_f$). Če lahko $e$ razširimo do 2-prirejanja v komponenti $C_e$, lahko uporabimo predpostavko, da je $C_e$ 2-notranje razširljiva in trditev sledi. Zato predpostavimo, da je $\{e\}$ maksimalno prirejanje v komponenti $C_e$. Potem predstavlja množica točk $V(C_e) \setminus \{x, y\}$, kjer je $e = xy$, neodvisno množico in ker $C_e$ ne vsebuje trikotnikov, je vsaka točka iz množice $V(C_e) \setminus \{x, y\}$ stopnje 1. To pa implicira, da je množica $\{e\}$ popolno notranje prirejanje komponente $C_e$.

Označimo z $M_e$ in $M_f$ popolni notranji prirejanji komponent $C_e$ in $C_f$, v tem vrstnem redu. Tedaj je popolno notranje prirejanje grafa $G$, ki razširi $M$, podano z $M_e \cup M_f \cup \bigcup_{C' \in \mathcal{C} \setminus \{C_e, C_f\}} M_{C'}$. S tem smo pokazali implikacijo $3 \Rightarrow 2$ in zaključili dokaz. $\square$

Zadnja ekvivalenca iz tabele 6.2 je dokazana v naslednji lemi. Spomnimo, da je graf $P_5$-omejen, če je sredinska točka vsake (ne nujno inducirane) poti $P$ na petih točkah v grafu $G$ incidenčna z vsaj eno povezavo, ki ne pripada poti $P$.

**Lema 6.13.** *Naj bo $G$ graf brez trikotnikov in z vsaj eno povezavo. Potem $\overline{L(G)}$ zadošča trikotniškemu pogoju če in samo če je graf $G$ $P_5$-omejen.*

*Dokaz.* Predpostavimo naprej, da graf $\overline{L(G)}$ zadošča trikotniškemu pogoju vendar graf $G$ ni $P_5$-omejen. Torej obstaja pot $P_5 = (v_1, \ldots, v_5)$ v grafu $G$ z $d_G(v_3) =$

2. Množica $E(v_3) = \{v_2v_3, v_3v_4\}$ je maksimalna zvezda v grafu $G$ in zato tudi maksimalna neodvisna množica v grafu $\overline{L(G)}$, saj graf $G$ ne vsebuje trikotnikov. Označimo $e = v_1v_2$ in $f = v_4v_5$. Ker je v grafu $\overline{L(G)}$ točka $v_2v_3 \in V(\overline{L(G)})$ sosedna s točko $f$ in nesosedna s točko $e$ in je točka $v_3v_4 \in V(\overline{L(G)})$ sosedna s točko $e$ in nesosedna s točko $f$ sklepamo, da povezave $\{e, f\}$ v $E(\overline{L(G)})$ ne moremo razširiti do trikotnika s točko iz maksimalne neodvisne množice $E(v_3)$, kar je v protislovju s trikotniškim pogojem.

Predpostavimo sedaj, da je graf $G$ $P_5$-omejen. Preverili bomo, da v tem primeru graf $\overline{L(G)}$ zadošča trikotniškemu pogoju. Vzemimo maksimalno neodvisno množico $S$ v grafu $\overline{L(G)}$ in par sosednih točk $e, f \in V(\overline{L(G)}) \setminus S$. Opazimo, da množica $S$ predstavlja maksimalno zvezdo v grafu $G$, s središčem v neki točki $v$ in da je množica $\{e, f\}$ 2-prirejanje v grafu $G$. Opazimo tudi, da iz $e, f \notin S$ sledi dejstvo, da povezavi $e$ in $f$ nista incidenčni s točko $v$ v grafu $G$. Dovolj je pokazati, da obstaja taka povezava $g \in S \subseteq E(G)$, da predstavlja množica $\{e, f, g\}$ 3-prirejanje v grafu $G$. Ekvivalentno je pokazati, da ima točka $v$ soseda, ki ni pokrit s prirejanjem $\{e, f\}$. Če je $d_G(v) = 1$, je $|S| = 1$ in ker je $S$ maksimalna zvezda v grafu $G$, sestoji povezana komponenta grafa $G$, ki vsebuje točko $v$, iz ene same povezave, $g \in E(G)$. Torej nobena povezava iz grafa $G$ ni incidenčna s povezavo $g$ in predstavlja zato množica $\{e, f, g\}$ 3-prirejanje v grafu $G$. Če je $d_G(v) = 2$, potem iz dejstva, da graf $G$ ne vsebuje trikotnikov in je $P_5$-omejen sledi, da je največ en sosed točke $v$ pokrit s prirejanjem $\{e, f\}$ in zato v tem primeru obstaja nepokrit sosed točke $v$. Podobno, če je $d_G(v) \geq 3$, dejstvo, da je graf $G$ brez trikotnikov, implicira, da $e$ in $f$ pokrijeta največ dva soseda točke $v$ in v tem primeru zagotovo obstaja še tretja, nepokrita točka. Torej lahko v vsakem primeru razširimo $\{e, f\}$ do 3-prirejanja z uporabo povezave incidenčne s točko $v$. S tem smo pokazali, da graf $\overline{L(G)}$ zadošča trikotniškemu pogoju. □

V nadaljevanju podajamo še protiprimere za obrate implikacij iz tabele 6.2. Lemi 6.12 in 6.13 skupaj z že znanimi rezultati zadoščajo za dokaz vseh implikacij in ekvivalenc v tabeli 6.2. V [78] so bili cirkulanti oblike $C_n(\{1, 3\})$ za $n \geq 11$ podani kot primer povezanih grafov brez trikotnikov, ki so krepko ekvistarabilni in niso 2-razširljivi. Ker so ti grafi 4-regularni, tudi niso 2-notranje razširljivi. To nam pokaže, da prva implikacija (na levi in na desni strani) tabele 6.2 ni obrnljiva.

Graf $H$ na sliki 6.1 je bil v [78] podan kot primer ekvistarabilnega grafa, ki ni krepko ekvistarabilen. Opazimo, da graf $H$ ne vsebuje trikotnikov, in s tem vidimo, da tudi druga implikacija (na levi in na desni strani) tabele 6.2 ni obrnljiva.

V nadaljevanju si bomo pogledali, kako je s tretjo implikacijo (na obeh straneh) v tabeli 6.2. Kar zadeva primere neekvistabilnih grafov, ki zadoščajo trikotniškemu pogoju, so nam znani samo primeri iz [76]. Ti so:

- Specifičen primer, ki so ga odkrili že DeTemple idr. [31]: graf $G^*$ na 9 točkah, podan z $V(G) = \{1, \ldots, 9\}$ in z družino maksimalnih neodvisnih množic $\mathcal{S}(G) = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \{1, 4, 7\}, \{3, 6, 9\}\}$ (glej sliko 6.3).

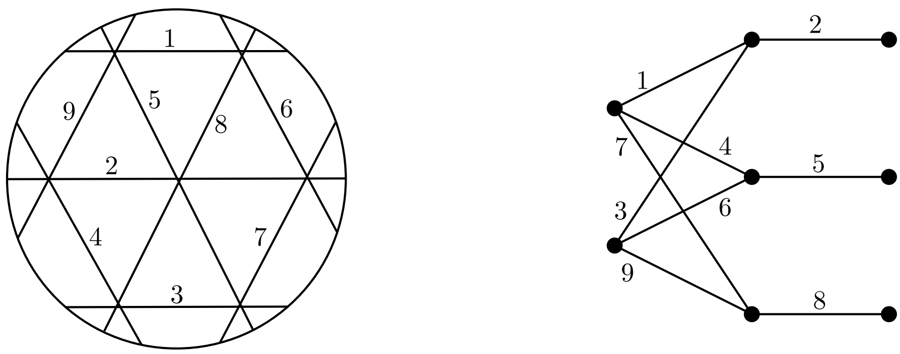
- Neskončna družina grafov, ki sestoji iz direktnih produktov polnih grafov, natančneje, grafov oblike $K_m \times K_n$ z $m > n \geq 3$.

Zlahka lahko preverimo, da za vsak $m, n$ velja $K_m \times K_n \cong \overline{L(K_{m,n})}$. Zaradi dejstva, da grafi $K_{m,n}$ ne vsebujejo trikotnikov, lema 6.13 implicira, da so grafi $K_{m,n}$, z $m > n \geq 3$, $P_5$-omejeni in niso ekvistarabilni. V naslednji trditvi bomo podali kratek direkten dokaz tega dejstva.

**Trditev 6.14.** *Za vsak $m > n \geq 3$ je poln dvodelen graf $K_{m,n}$ $P_5$-omejen in ni ekvistarabilen.*

*Dokaz.* Vzemimo graf $G = (A \cup B, E) = K_{m,n}$ z $3 \leq n < m$. Ker je $\delta(G) = n \geq 3$, je graf $G$ $P_5$-omejen. Predpostavimo, da je graf $G$ ekvistarabilen in vzemimo poljubno ekvistarabilno utežno funkcijo $w : E(G) \to \mathbb{R}_+$. Opazimo, da je vsaka točka grafa $G$ tudi središče neke (enolično določene) maksimalne zvezde. Zato je $n = w(E(A)) = w(E) = w(E(B)) = m$, kar nas privede do protislovja. □

Pri specifičnem primeru zgoraj omenjenega grafa $G^*$, ki so ga odkrili DeTemple idr. [31] gre za presečni graf sistema tetiv v krožnici (predstavljenega levo na sliki 6.3). Izkaže se, da je tudi omenjeni graf $G^*$ oblike $G^* = \overline{L(G)}$, kjer je $G$ dvodelen, $P_5$-omejen graf, ki ni ekvistarabilen. Dejansko graf $G$ predstavlja najmanjšega predstavnika neskončne družine grafov $\mathcal{B}$, ki sestoji iz dvodelnih, $P_5$-omejenih grafov, ki niso ekvistarabilni, in ki jo bomo sedaj definirali. Naj bo $K_{m,n}$ poln dvodelen graf z biparticijo $\{A, B\}$, pri čemer je $|A| = m$ in $|B| = n$. Naj bo $K^+_{m,n}$ graf, ki ga dobimo tako, da vsaki točki iz množice $B$ dodamo zasebnega soseda (list). Potem je $\mathcal{B} = \{K^+_{m,n} \mid 3 \leq n \leq m+1\}$. Graf $K^+_{2,3}$ je prikazan (desno) na sliki 6.3.




Slika 6.3: Levo: sistem tetiv v krožnici, čigar presečni graf je $G^* = \overline{L(K^+_{2,3})}$; desno: $K^+_{2,3}$

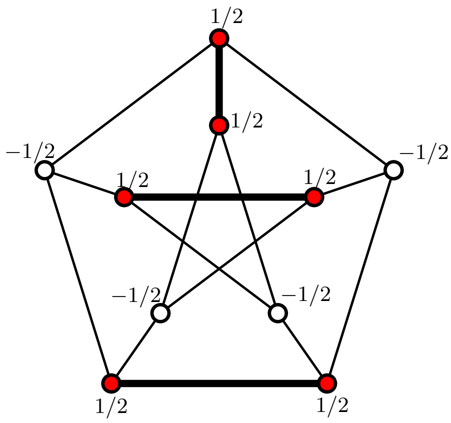
**Trditev 6.15.** *Vsi grafi iz $\mathcal{B}$ so $P_5$-omejeni in niso ekvistarabilni.*

*Dokaz.* Naj bo $G \in \mathcal{B}$ graf s tako razdelitvijo točk v množici $\{A', B\}$, da je $A' = A \cup L$, kjer je $L$ množica listov in naj bo $|A| = m$ ter $|B| = |L| = n$. Ker je $n \geq 3$, nimamo točk stopnje 2 in je posledično graf $G$ $P_5$-omejen. Predpostavimo, da je graf $G$ ekvistarabilen in vzemimo neko ekvistarabilno utežno funkcijo $w : E(G) \to \mathbb{R}_+$. Opazimo, da je vsaka točka iz množice $A \cup B$ središče neke maksimalne zvezde. Če sedaj "seštejemo" maksimalne zvezde iz vsake particije, dobimo $n = w(E(B)) = w(E(A)) + w(E(L)) = m + w(E(L))$, kar implicira, da je $w(E(L)) = n - m$. Ker je $w(e) > 0$ za vsako povezavo $e \in E(G)$, je tudi $w(E(L)) > 0$ in posledično je $n > m$. Slednje skupaj s pogojem, da je $n \leq m + 1$ implicira, da je $n = m+1$ in posledično je $w(E(L)) = 1$. To pa je protislovje, saj množica povezav v $E(L)$ ne inducira zvezde v grafu $G$. $\square$

Vsi do sedaj omenjeni primeri $P_5$-omejenih neekvistarabilnih grafov brez trikotnikov so bili dvodelni grafi. V naslednji trditvi predstavljamo še graf, ki ni take oblike.

**Trditev 6.16.** *Petersenov graf ne vsebuje trikotnikov, je $P_5$-omejen in ni ekvistarabilen.*

*Dokaz.* Naj bo $G$ Petersenov graf. Očitno je graf $G$ brez trikotnikov in $P_5$-omejen (saj je 3-regularen). Da bi prišli do protislovja, predpostavimo, da je graf $G$ ekvistarabilen in naj bo $w : E(G) \to \mathbb{R}_+$ neka njegova ekvistarabilna utežna funkcija. Vzemimo tako 3-prirejanje $M$ v grafu $G$, da bo podgraf, ki ga inducira $M$, 1-regularen (npr. naj $M$ sestoji iz treh odebeljenih povezav na sliki 6.4) in naj bo $\lambda : V(G) \to \mathbb{R}$ preslikava, podana s predpisom $\lambda(v) = \begin{cases} 1/2, & \text{če je } v \in V(M); \\ -1/2, & \text{sicer.} \end{cases}$




Slika 6.4: Petersenov graf z označenim 3-prirejanjem in $\{-1/2, 1/2\}$-utežitvijo točk.

Opazimo, da lahko karakteristični vektor $x^M$ prirejanja $M$ zapišemo v sledeči obliki:

$$x^M = \sum_{v \in V(G)} \lambda(v) \cdot x^{E(v)}.$$

Ker pa je vsota $\sum_{v \in V(G)} \lambda(v) = 1$, smo s tem izrazili karakteristični vektor prirejanja $M$ kot afino kombinacijo karakterističnih vektorjev (maksimalnih) zvezd v grafu $G$. Ker je $w(E(v)) = 1$ za vsako točko $v \in V(G)$, to implicira, da je $w(M) = 1$, kar je v nasprotju z dejstvoma, da je $w$ ekvistarabilna utežna funkcija grafa $G$ in da $M$ ni zvezda. S tem smo pokazali, da Petersenov graf ni ekvistarabilen. $\square$

**Posledica 6.17.** *Komplement povezavnega grafa Petersenovega grafa zadošča trikotniškemu pogoju, ni pa ekvistabilen.*

Omenjeni protiprimeri ovržejo tudi Orlinovo domnevo, da je vsak ekvistabilen graf splošno particijski [76]. Čeprav v splošnem domneva ne drži [78], pa obstaja kar nekaj razredov grafov, kjer se domneva izkaže za pravilno, npr. povezavni grafi, simplicialni grafi, zelo dobro pokriti grafi, AT-prosti grafi, nekateri produktni grafi, tetivni grafi itd. [67,76,83]. V naslednjem podpoglavju bomo pokazali, da domneva drži tudi za komplemente povezavnih grafov dvodelnih grafov.

## 6.3 Dvodelni grafi

Če se omejimo na komplemente povezavnih grafov, ki ne vsebujejo trikotnikov in so minimalne stopnje vsaj 2, potem lahko Orlinovo domnevo preoblikujemo, kot sledi: vsaka povezana komponenta ekvistarabilnega grafa $G$, ki ne vsebuje trikotnikov in je minimalne stopnje vsaj 2, je 2-razširljiva. Graf na sliki 6.1 nam pokaže, da domneva v tem primeru ne drži. V članku [78] ostaja pravilnost Orlinove domneve za razred popolnih grafov odprta. V tem poglavju bomo pokazali, da Orlinova domneva drži za komplemente povezavnih grafov dvodelnih grafov (ki tvorijo podrazred razreda popolnih grafov). To bomo dosegli z uporabo 1- in 2-notranje razširljivosti (glej definicijo 6.5). Pokazali bomo, da v primeru dvodelnih grafov razredi: (i) grafov, kjer je vsaka povezana komponenta bodisi zvezda bodisi 2-notranje razširljiva, (ii) krepko ekvistarabilnih grafov in (iii) ekvistarabilnih grafov, sovpadajo (glej tabelo 6.2).

**Lema 6.18.** *Naj bo $G$ povezan ekvistarabilen dvodelen graf z $\delta(G) \geq 2$. Potem je graf $G$ 1-razširljiv.*

Podali bomo dva dokaza zgornje leme. Prvi dokaz temelji na klasičnem Birkhoff – von Neumannovem izreku o dvojno stohastičnih matrikah.

Matrika velikosti $n \times n$ z nenegativnimi realnimi koeficienti $a_{ij}$ je *dvojno stohastična*, če je vsota koeficientov v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu enaka 1. Formalno, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ za vsak $j \in [n]$ in $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ za vsak $i \in [n]$. *Permutacijska matrika* velikosti $n \times n$ je dvojno stohastična matrika z $a_{ij} \in \{0, 1\}$ za vse $i, j \in [n]$.

**Izrek 6.19** (**Birkhoff – von Neumannov izrek**, [9] in [95])**.** *Vsako dvojno stohastično matriko lahko zapišemo kot konveksno kombinacijo permutacijskih matrik.*

*Prvi dokaz leme 6.18.* Vzemimo biparticijo $\{A, B\}$ točk $V(G)$ in neko ekvistarabilno funkcijo $w : E(G) \to \mathbb{R}_+$. Ker je $\delta(G) \geq 2$, je vsaka zvezda v grafu maksimalna. Velja, da je $|A| = w(E(A)) = w(E(G)) = w(E(B)) = |B|$. Naj bo $n = |A| = |B|$ in naj bo $Q$ matrika velikosti $n \times n$, katere indeksi vrstic ustrezajo točkam iz množice $A$, indeksi stolpcev pa točkam iz množice $B$, ter s koeficienti

$$Q_{a,b} = \begin{cases} w(ab), & \text{če je } ab \in E(G); \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Za vsak $a \in A$ sedaj velja $\sum_{b \in B} Q_{a,b} = \sum_{b \in N_G(a)} w(ab) = w(E(a)) = 1$ in podobno je $\sum_{a \in A} Q_{a,b} = 1$ za vsak $b \in B$. Ker so vsi koeficienti v matriki $Q$ nenegativni, je matrika dvojno stohastična. Po izreku 6.19 lahko matriko $Q$ zapišemo kot konveksno kombinacijo permutacijskih matrik, recimo $Q = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P^i$, kjer je $\lambda_i \geq 0$ za vsak $i$ in je $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Da bi pokazali, da je graf $G$ 1-razširljiv, moramo pokazati, da je vsaka povezava $ab \in E(G)$ vsebovana v nekem popolnem prirejanju. Opazimo, da je $w(ab) > 0$ (sicer bi imela množica povezav $E(a) \setminus \{ab\}$, ki ni zvezda, skupno težo 1). Posledično je $Q_{a,b} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P^i_{a,b} > 0$, torej obstaja nek tak indeks $j \in \{1, \ldots, k\}$, da je $\lambda_j > 0$ in $P^j_{a,b} > 0$. Trdimo, da je $M = \{xy\,;\, P^j_{x,y} > 0\}$ popolno prirejanje grafa $G$. Da bi to dokazali, je dovolj, da dokažemo, da je $M \subseteq E(G)$. Toda to sledi iz dejstva, da $xy \in M$ implicira $Q_{x,y} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P^i_{x,y} \geq \lambda_j P^j_{x,y} > 0$. Zaključimo s sklepom, da je graf $G$ 1-razširljiv. $\square$

Naš drugi dokaz leme 6.18 sloni na naslednji karakterizaciji $k$-razširljivih dvodelnih grafov.

**Izrek 6.20** (Plummer [86]). *Naj bo $k \geq 1$ in naj bo $G = (V, E)$ povezan dvodelen graf z biparticijo množice točk $A \cup B$ ter $|V| \geq 2k$. Potem je graf $G$ $k$-razširljiv če in samo če je $|A| = |B|$ in za vse neprazne podmnožice $X \subseteq A$ z $|X| \leq |A| - k$ velja, da je $|N(X)| \geq |X| + k$.*

*Drugi dokaz leme 6.18.* Da bi prišli do protislovja, predpostavimo, da je graf $G$ ekvistarabilen, vendar ne 1-razširljiv. Naj bo $\{A, B\}$ biparticija točk grafa $G$ in $w : E(G) \to \mathbb{R}_+$ njegova ekvistarabilna utežna funkcija. Ker je $\delta(G) \geq 2$, je vsaka zvezda v grafu maksimalna in zato velja, da je $|A| = w(E(A)) = w(E(G)) =$

$w(E(B)) = |B|$. Ker pa $G$ ni 1-razširljiv, izrek 6.20 implicira, da v grafu $G$ obstaja taka podmnožica $X \subseteq A$ z $|X| \leq |A| - 1$, da je $|N(X)| < |X| + 1$. Ker je graf $G$ povezan, obstaja povezava $e \in E(G)$, ki povezuje točko iz $N(X)$ s točko iz $A \setminus X$, kar nam da naslednjo verigo enakosti in neenakosti:

$$|X| = w(E(X)) < w(E(X)) + w(e) \leq w(E(N(X))) = |N(X)| \leq |X|,$$

ki nas privede do protislovja. □

V dokazu leme 6.22, ki sledi, bomo uporabili naslednji rezultat o prirejanjih.

**Izrek 6.21** (Dulmage-Mendelsohn, glej [71] in [16])**.** *Naj bo $G$ dvodelen graf z biparticijo $V = A \cup B$ in predpostavimo, da sta $M_A$ in $M_B$ prirejanji v grafu $G$. Potem obstaja prirejanje $M \subseteq M_A \cup M_B$, ki pokrije vse točke iz $A$, ki so pokrite z $M_A$, in vse točke iz $B$, ki so pokrite z $M_B$.*

**Lema 6.22.** *Vsaka povezana komponenta ekvistarabilnega dvodelnega grafa je bodisi zvezda bodisi 2-notranje razširljiva.*

*Dokaz.* Naj bo $G'$ ekvistarabilen dvodelen graf in naj bo $G = (V, E)$ povezana komponenta grafa $G'$. Potem je povezana komponenta $G$ ekvistarabilna po lemi 6.8. Naj bo $A \cup B$ biparticija množice točk $V(G)$ in naj bo $w : E \to \mathbb{R}_+$ ekvistarabilna utežna funkcija grafa $G$.

Predpostavimo, da graf $G$ ni zvezda. Naj bo $L$ množica listov grafa $G$ in recimo točki $v \in V$ *notranja točka*, če ni list ali sosedna z listom.

V dokazu bomo ločili dva primera.

*Primer 1:* $L = \emptyset$.

Ker je v tem primeru $G$ graf brez listov, lema 6.18 implicira, da je graf $G$ 1-razširljiv. Trdimo, da je graf $G$ tudi 2-razširljiv. Predpostavimo, da to ne drži in da je $\{ab, a'b'\}$ (kjer sta $a, a' \in A$ in $b, b' \in B$) neko 2-prirejanje, ki ni vsebovano v nobenem popolnem prirejanju. Po Hallovem izreku [51] tedaj obstaja taka množica $S \subseteq A \setminus \{a, a'\}$, da je $|N(S) \cap (B \setminus \{b, b'\})| < |S|$. Ker je graf $G$ 1-razširljiv, mora množica $S$ vsebovati povezavi, incidenčni s točkama $b$ in $b'$, ter mora veljati, da je $|N(S) \cap (B \setminus \{b, b'\})| = |S| - 1$.

Posledično vsota karakterističnih vektorjev zvezd, ki ustrezajo $N(S) \cup \{b, b'\}$, ki ji odštejemo vsoto karakterističnih vektorjev zvezd s središči v točkah iz $S$, definira podmnožico $F$ povezav grafa $G$, za katero velja $\{ab, a'b'\} \subseteq F$, torej $F$ ni zvezda. Ker je $|N(S) \cup \{b, b'\}| = |S| + 1$, velja, da je $w(F) = 1$, kar je v nasprotju s tem, da je $w$ ekvistarabilna utežna funkcija grafa $G$. Torej je graf $G$ 2-razširljiv, kar je ekvivalentno pogoju, da je graf $G$ 2-notranje razširljiv.

*Primer 2:* $L \neq \emptyset$.

Najprej bomo pokazali, da za vsako podmnožico $S$ notranjih točk v $A$ (ali v $B$) velja neenakost: $|N(S)| \geq |S| + 2$.

Ker je vsaka točka iz $S \cup N(S)$ središče neke maksimalne zvezde, velja $|S| = w(E(S)) \leq w(E(N(S))) = |N(S)|$ in je zato potrebno obravnavati samo primera: $|N(S)| \in \{|S|, |S| + 1\}$.

Če je $|N(S)| = |S|$, potem zaradi dejstev, da je graf $G$ povezan in da $S \neq A$ (saj $L \neq \emptyset$), obstaja povezava, ki je incidenčna z $N(S)$, toda ne s $S$. Ker je funkcija $w$ strogo pozitivna na vseh povezavah, velja $|S| = w(E(S)) < w(E(N(S))) = |N(S)|$, protislovje. Predpostavimo sedaj, da je $|N(S)| = |S| + 1$ za neko podmnožico $S \subseteq A$ notranjih točk in naj bo $F = E(N(S)) \setminus E(S)$. Očitno je $w(F) = 1$ in ker je $w$ ekvistarabilna utežna funkcija grafa $G$, predstavlja množica $F$ maksimalno zvezdo. Ker je vsaka točka iz $N(S)$, ki je incidenčna z neko povezavo iz množice $F$, incidenčna tudi z neko povezavo, ki ni iz množice $F$, vidimo, da središče zvezde ne pripada množici $N(S)$. Torej je središče zvezde neka točka $x \in A \setminus S$ z $d_G(x) \geq 2$. Ker gre za maksimalno zvezdo, velja vsebovanost $N(x) \subseteq N(S)$. Ker je graf povezan, to dalje implicira, da je $A = S \cup \{x\}$ in $B = N(S)$, torej so vse točke v množici $A$ stopnje najmanj 2. Torej ima graf $G$ vsaj en list v množici $B = N(S)$, kar pa je v protislovju s predpostavko, da sestoji $S$ samo iz notranjih točk. S tem smo pokazali, da je $|N(S)| \geq |S| + 2$.

Naj bo sedaj $M$ 2-prirejanje v grafu $G$. Pokazana neenakost implicira, da za vsako podmnožico notranjih točk $S$ iz $A - V(M)$ (ali $B - V(M)$), velja $|N_{G-V(M)}(S)| \geq |S|$. Po Hallovem izreku torej obstajata prirejanje $M_A$ v grafu $G - V(M)$, ki pokrije vse notranje točke v $A - V(M)$ in prirejanje $M_B$ v grafu $G - V(M)$, ki pokrije vse notranje točke v $B - V(M)$. Po izreku 6.21 vsebuje graf $G$ prirejanje $M' \subseteq M_A \cup M_B$, ki pokrije vse notranje točke v grafu $V(G) \setminus V(M)$. To prirejanje skupaj s prirejanjem $M$ pokrije vse notranje točke grafa $G$. Nekaj točk, ki so incidenčne z listi, je lahko še vedno nepokritih, vendar lahko vsako pokrijemo s po eno povezavo, da na koncu dobimo popolno notranje prirejanje, ki vsebuje $M$. S tem smo pokazali, da je graf $G$ 2-notranje razširljiv in zaključili dokaz leme. □

Sedaj lahko podamo karakterizacije ekvistarabilnih dvodelnih grafov.

**Izrek 6.23.** *Za vsak dvodelen graf $G$ brez izoliranih točk so naslednje trditve ekvivalentne:*

1. *Vsaka povezana komponenta grafa $G$ je bodisi zvezda bodisi 2-notranje razširljiva.*
2. *Vsako 2-prirejanje v garfu $G$ lahko razširimo do popolnega notranjega prirejanja grafa $G$.*
3. *Graf $G$ je krepko ekvistarabilen.*
4. *Graf $G$ je ekvistarabilen.*

*Dokaz.* Ker dvodelni grafi ne vsebujejo trikotnikov, velja po lemi 6.12 ekvivalenca 1⇔2 in iz tabele 6.2 vemo, da veljajo implikacije 1⇒3⇒4. Nazadnje, lema 6.22 vzpostavi implikacijo 4⇒1 in s tem je izrek dokazan. □

V nadaljevanju bomo opisali posledico tabele 6.2 in izreka 6.23.

**Posledica 6.24.** *Orlinova domneva velja za komplemente povezavnih grafov dvodelnih grafov: v razredu komplementov povezavnih grafov dvodelnih grafov je vsak ekvistabilen graf tudi splošno particijski graf.*

Iz leme 6.8 in njenega dokaza sledi, da ekvistarabilni grafi brez trikotnikov niso zaprti za operacijo unije grafov. Vendar izrek 6.23, konkretneje, ekvivalenca med pogojema 4 in 1, kaže, da v primeru dvodelnih grafov omenjena lastnost drži.

**Posledica 6.25.** *Dvodelen graf $G$ je ekvistarabilen natanko tedaj, ko je vsaka povezana komponenta grafa $G$ ekvistarabilna.*

Poglavje bomo zaključili z algoritmično opazko. Kolikor nam je znano, je računska zahtevnost problema prepoznavanja grafov iz poljubnega od naslednjih razredov grafov odprt problem: (krepko) ekvistabilni grafi, splošno particijski grafi, trikotniški grafi, (krepko) ekvistarabilni grafi. Karakterizacija ekvistarabilnih dvodelnih grafov, ki je podana v izreku 6.23, implicira učinkovit algoritem za prepoznavanje grafov v tem razredu.

**Trditev 6.26.** *Ekvistarabilne dvodelne grafe je moč prepoznati v polinomskem času. V polinomskem času lahko prepoznamo tudi krepko ekvistarabilne grafe.*

*Dokaz.* Za dani graf $G$ lahko v linearnem času določimo, ali je dvodelen. Poleg tega lahko predpostavimo, da graf $G$ ne vsebuje izoliranih točk. Po izreku 6.23 je za določitev, ali je graf $G$ ekvistarabilen, dovolj, da obravnavamo vseh $\mathcal{O}(|E(G)|^2)$ 2-prirejanj v grafu $G$ in za vsakega preverimo, ali ga lahko razširimo do popolnega notranjega prirejanja grafa $G$. Za dano 2-prirejanje $M$ lahko to naredimo kot sledi. Z definiranjem množice $U = \{u \in V(G) \setminus V(M) \mid d_G(u) > 1\}$ problem postane ekvivalenten problemu, ali obstaja v grafu $G-V(M)$ prirejanje, ki pokrije vse točke iz množice $U$. Problem je rešljiv v polinomskem času bodisi preko matroidov (grej, npr. [89]), bodisi s prevedbo problema na instanco problema najtežjega prirejanja. Slednje lahko storimo tako, da vsaki povezavi $e$ iz grafa $G - V(M)$ dodelimo utež $w(e) = |e \cap U| \in \{0, 1, 2\}$. V tem primeru graf $G - V(M)$ vsebuje prirejanje, ki pokrije vse točke iz množice $U$ natanko tedaj, ko graf $G-V(M)$ vsebuje prirejanje $M'$ skupne teže $w(M') \geq |U|$. Ker je problem najtežjega prirejanja polinomsko rešljiv [39], je s tem prva trditev dokazana. Pravilnost druge trditve sedaj sledi iz ekvivalence med točkama 3 in 4 izreka 6.23. □

## 6.4 Gozdovi

Spomnimo, da je gozd acikličen graf. V tem poglavju bomo pokazali, da razredi: (i) gozdov, v katerih je vsaka povezana komponenta bodisi zvezda bodisi 2-notranje razširljiva, (ii) krepko ekvistarabilnih gozdov (iii) ekvistarabilnih gozdov, in (iv) $P_5$-omejenih gozdov, sovpadajo (glej tabelo 6.2).

**Lema 6.27.** *Vsako drevo $T$ z vsaj eno povezavo je* 1*-notranje razširljivo.*

*Dokaz.* Dokaz gre z indukcijo po številu točk. Za $n = 2$ trditev drži, saj ima drevo z dvema točkama eno samo povezavo. Naj bo $n \geq 3$, naj bo $T$ drevo na $n$ točkah in naj bo $e \in E(T)$ povezava, ki jo želimo razširiti do popolnega notranjega prirejanja drevesa $T$. Predpostavimo, da trditev iz leme drži za vsa drevesa na največ $n-1$ točkah. Pokazali bomo, da drži tudi za drevo $T$. Po odstranitvi krajišč povezave $e$ (in vseh povezav, incidenčnih z njima) iz drevesa $T$ dobimo gozd, ki sestoji iz povezanih komponent $T_1, \ldots, T_k$, s $k \geq 1$. Naj bo $I = \{1 \leq i \leq k \mid E(T_i) \neq \emptyset\}$. Za vsak $i \in I$ ima drevo $T_i$ največ $n-1$ točk (in vsaj eno povezavo) in je zato 1-notranje razširljivo po indukcijski predpostavki. Za vsak tak $i$ naj bo $v_i \in V(T_i)$ tista (edina) točka, povezana z enim od krajišč povezave $e$, in naj bo $e_i$ povezava iz $T_i$, incidenčna z $v_i$. Naj bo $M_i$ popolno notranje prirejanje drevesa $T_i$, ki vsebuje $e_i$. Po naši indukcijski predpostavki tak $M_i$ obstaja. Z uporabo dejstva, da je vsak list v grafu $T$ tudi list v enem izmed poddreves, lahko popolno notranje prirejanje $M$ grafa $T$, ki vsebuje povezavo $e$ konstruiramo kot $M = \{e\} \cup \bigcup_{i \in I} M_i$. Zaključimo torej, da je drevo $T$ 1-notranje razširljivo. $\square$

S pomočjo zgornje leme bomo sedaj dokazali sledečo karakterizacijo.

**Izrek 6.28.** *Za vsak gozd $F$ brez izoliranih točk so naslednje trditve ekvivalentne:*

1. *Vsaka povezana komponenta gozda $F$ je bodisi zvezda bodisi 2-notranje razširljiva.*
2. *Vsako 2-prirejanje v gozdu $F$ lahko razširimo do popolnega notranjega prirejanja gozda $F$.*
3. *Gozd $F$ je krepko ekvistarabilen.*
4. *Gozd $F$ je ekvistarabilen.*
5. *Gozd $F$ je $P_5$-omejen.*

*Dokaz.* Ekvivalence med točkami 1, 2, 3 in 4 sledijo iz izreka 6.23, saj so gozdovi dvodelni grafi, ki ne vsebujejo trikotnikov. Implikacija 4⇒5 sledi iz tabele 6.2.

Pokazati moramo še implikacijo 5⇒1. Naj bo $F$ gozd, ki je $P_5$-omejen, in naj bo $T$ povezana komponenta gozda $F$. Potem je tudi komponenta $T$ $P_5$-omejena. Predpostavimo, da $T$ ni zvezda (sicer smo končali), vzemimo 2-prirejanje $M = \{e, f\}$ v grafu $T$ in upoštevajmo (edino) najkrajšo pot $P$ v grafu $F$ med povezavama

$e$ in $f$. Sedaj konstruiramo prirejanje $M'$ tako, da za vsako točko na poti $P$, ki ni pokrita s prirejanjem $M$, v $M'$ damo poljubno povezavo, ki je incidenčna s točko na poti $P$, vendar ne leži na poti $P$. Ker je drevo $T$ $P_5$-omejeno, taka povezava zagotovo obstaja, saj so vse točke $v \in P$ stopnje vsaj 3. Z odstranitvijo vseh povezav iz poti $P$ dobimo sedaj gozd $F'$, ki sestoji iz dreves, in vsako izmed teh dreves vsebuje natanko po eno povezavo iz $M' \cup M$. Po lemi 6.27 lahko to povezavo razširimo do popolnega notranjega prirejanja ustreznega drevesa. To pomeni, da lahko prirejanje $M \cup M'$ razširimo do popolnega notranjega prirejanja drevesa $T$ in torej je gozd $F$ 2-notranje razširljiv. □

Ker so gozdovi dvodelni grafi, lahko po trditvi 6.26 v polinomskem času določimo, ali je dani gozd ekvistarabilen. Izrek 6.28 implicira, da lahko to storimo celo v linearnem času.

**Trditev 6.29.** *Ekvistarabilne gozdove je moč prepoznati v linearnem času.*

*Dokaz.* Odsotnost ciklov lahko, z iskanjem v globino, preverimo v linearnem času. Da določimo, ali je dan gozd $F$ ekvistarabilen, je dovolj, da preverimo, ali je vsaka povezana komponenta $C$ gozda $F$ $P_5$-omejena (po izreku 6.28). To pomeni, da zadostuje že, da identificiramo vse točke $v \in V(F)$, za katere velja $d_F(v) = 2$ in preverimo, da ima vsaka od njih v soseščini vsaj en list. □

# 7
# 2-RAZŠIRLJIVI KARTEZIČNI PRODUKTI GRAFOV

V tem poglavju se bomo posvetili tistim kartezičnim produktom grafov, ki so 2-razširljivi. Spomnimo, da je kartezični produkt grafov $G$ in $H$ graf z $V(G\Box H) = \{(u,x)\,;\, u \in V(G) \text{ in } x \in V(H)\}$ in $E(V\Box H) = \{(u,x)(v,y)\,;\,(u,x),(v,y) \in V(G) \times V(H) \text{ in } u = v \text{ ter } xy \in E(H) \text{ ali } x = y \text{ ter } uv \in E(G)\}$. Pravimo, da je graf $G$ *netrivialen*, če je $|V(G)| \geq 2$ in da je kartezični produkt $G\Box H$ *netrivialen*, če sta oba faktorja netriviala. Spomnimo tudi, da je po definiciji 2-razširljiv graf povezan. Opazimo, da je kartezični produkt grafov $G\Box H$ povezan natanko tedaj ko sta oba faktorja povezana. Omejili se bomo torej na obravnavo netrivialnih kartezičnih produktov povezanih grafov $G$ in $H$. Za začetek bomo navedli nekaj splošnih rezultatov, sledilo bo podpoglavje, v katerem bomo karakterizirali 2-razširljive kartezične produkte 0-razširljivih grafov, temu pa bo sledilo podpoglavje z nekaj posebnimi primeri, v katerem bodo obravnavani 2-razširljivi kartezični produkti grafov, ko nista oba faktorja 0-razširljiva.

## 7.1 Splošni rezultati

O razširljivosti kartezičnih produktov je v literaturi na voljo nekaj splošnih rezultatov, ki jih podajamo v nadaljevanju in na katere se bomo naslonili pri obravnavi naših primerov.

Naslednja podana rezultata obravnavata razširljivost kartezičnega produkta grafov glede na razširljivost faktorjev.

**Izrek 7.1** (Györi, Plummer [49]). *Za vsak par nenegativnih celih števil $k, \ell$ je kartezični produkt $k$-razširljivega grafa na $2k+2$ točkah in $\ell$-razširljivega grafa na $2\ell+2$ točkah $(k+\ell+1)$-razširljiv.*

**Izrek 7.2** (Liu, Yu [69]). *Naj bo graf $G$ $k$-razširljiv in naj bo $H$ povezan graf. Potem je kartezični produkt $G \square H$ $(k+1)$-razširljiv.*

Sledeč rezultat pa vzpostavi povezavo med razširljivostjo in povezanostjo grafa.

**Izrek 7.3** (Plummer [85]). *Naj bo $k$ pozitivno celo število. Če je $G$ $k$-razširljiv graf z $|V(G)| \geq 2k+2$, potem je graf $G$ $(k+1)$-povezan.*

Glede na izrek 7.3 lahko torej našo pozornost omejimo na kartezične produkte $G \square H$, ki so 3-povezani, in na poseben primer, ko je $|V(G \square H)| = 4$. Za slednjega opazimo, da velja (ker smo se omejili na netrivialne produkte) $G \square H \cong C_4$. Za cikel $C_4$ pa zlahka preverimo, da je 2-razširljiv.

Spomnimo, da $\kappa(G)$ označuje povezanost grafa $G$ in $\delta(G)$ najmanjšo stopnjo točke v grafu $G$. Z naslednjim izrekom lahko dodatno omejimo množico grafov, ki jo bomo preučili.

**Izrek 7.4** (Govorčin idr. [46], Špacapan [92], Xu idr. [97]). *Za vsaka dva netrivialna grafa $G$ in $H$ je $\kappa(G \square H) = \min\{\kappa(G) \cdot |V(H)|, \kappa(H) \cdot |V(G)|, \delta(G \square H)\}$.*

Za 3-povezan kartezični produkt grafov $G$ in $H$ torej velja naslednje:

- $\kappa(G) \cdot |V(H)| \geq 3$,
- $\kappa(H) \cdot |V(G)| \geq 3$,
- $\delta(G \square H) \geq 3$.

Pogoja iz prvih dveh točk sta izpolnjena, čim je $|V(G)| \geq 3$ oz. $|V(H)| \geq 3$. Ker je $\delta(G \square H) = \delta(G) + \delta(H)$, je pogoj v tretji točki enakovreden pogoju $\delta(G) + \delta(H) \geq 3$. Slednjemu ni zadoščeno samo, ko vsebujeta tako graf $G$ kot graf $H$ list. V tem primeru je namreč $\delta(G \square H) = 2$, torej graf $G \square H$ ni 3-povezan in posledično tudi ni 2-razširljiv. Naslednje leme nam podajo še nekaj primerov, ko je sicer zgornjim pogojem zadoščeno, vendar graf $G \square H$ ni 2-razširljiv.

**Lema 7.5.** *Naj bosta $G$ in $H$ povezana grafa in naj graf $H$ vsebuje prerezno povezavo $e$, ki v grafu $H - e$ izolira sodo komponento ter naj bo $|V(G)| = 3$. Potem graf $G\Box H$ ni 2-razširljiv.*

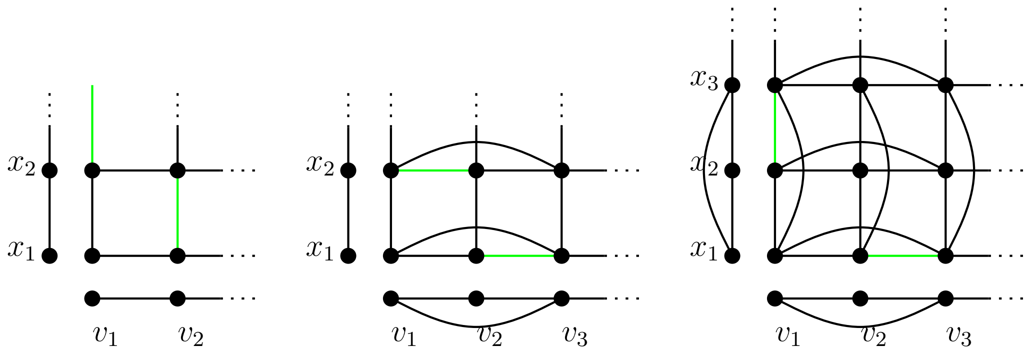
*Dokaz.* Naj bo $e = xy$ in naj bo $uv \in E(G)$ ter $v' \in V(G) \setminus \{u, v\}$. Naj bo $C$ soda komponenta v grafu $H - e$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $y \in V(C)$. Trdimo, da 2-prirejanje $M_0 = \{(u, x)(v, x), (v', x)(v', y)\}$ ni vsebovano v nobenem popolnem prirejanju grafa $G\Box H$. Naj bo $C^*$ podgraf grafa $G\Box H$ induciran na točkah $(V(C) \times V(G)) \setminus \{(v', y)\}$. Trdimo, da je $C^*$ komponenta grafa $(G\Box H) - V(M_0)$, kjer je $V(M_0)$ množica krajišč povezav prirejanja $M_0$. Predpostavimo, da je $(z', x')(w', y')$ povezava v grafu $G\Box H$, ki povezuje točko $(z', x') \in V(C^*)$ s točko $(w', y') \in V(G\Box H) \setminus (V(M_0) \cup V(C^*))$. Opazimo, da je $V(G\Box H) \setminus (V(M_0) \cup V(C^*)) = (V(H) \setminus (V(C) \cup \{x\})) \times V(G)$. Ker je točka $x' \in V(C)$ in je točka $y' \in V(H) \setminus V(C)$, zagotovo velja, da $x' \neq y'$. Toda, ker je tudi $y' \neq x$ in je $C$ komponenta grafa $H - e$, to implicira, da $x'y' \notin E(H)$. Torej $(z', x')(w', y')$ ni povezava v grafu $G\Box H$ in to protislovje nam pokaže, da je $C^*$ komponenta grafa $(G\Box H) - V(M_0)$. Ker je $|V(C^*)|$ liha, to implicira, da prirejanje $M_0$ ni vsebovano v nobenem popolnem prirejanju grafa $G\Box H$. $\Box$

**Lema 7.6.** *Naj bosta $G$ in $H$ povezana grafa, ne oba izomorfna grafu $K_2$, ter naj vsak izmed njiju vsebuje simplicialno točko stopnje največ 2. Potem graf $G\Box H$ ni 2-razširljiv.*

*Dokaz.* Naj bosta $G$ in $H$ povezana grafa, ki vsebujeta simplicialno točko stopnje največ 2. Obravnavali bomo 3 primere, ki pokrijejo vse možne kombinacije med stopnjama in so prikazani na sliki 7.1. Za vsakega izmednjih bomo podali 2-prirejanje (na sliki obarvano z zeleno), ki ga ni možno dopolniti do popolnega prirejanja grafa $G\Box H$.

*Primer 1:* Oba grafa vsebujeta list – simplicialno točko stopnje 1.

Ker je v tem primeru $\delta(G) = \delta(H) = 1$, je $\kappa(G\Box H) \leq 2$. Ker po predpostavki nista oba grafa $G$ in $H$ izomorfna grafu $K_2$, je $|V(G\Box H)| \geq 6$ in po izreku 7.3 graf $G\Box H$ ni 2-razširljiv. Primer 2-prirejanja, ki ga v tem primeru ni mogoče razširiti do popolnega prirejanja grafa $G\Box H$ predstavljata zeleno obarvani povezavi na sliki 7.1.




Slika 7.1: Izseki kartezičnih produktov, ko imata oba faktorja simplicialno točko stopnje največ 2.

*Primer 2:* En graf vsebuje list, drugi pa simplicialno točko stopnje 2.

Naj bo $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V(G)$ in naj bo $\{x_1, x_2\} \subseteq V(H)$ ter naj velja $N_G(v_1) = \{v_2, v_3\}$, $v_2 \sim v_3$ in $N_H(x_1) = \{x_2\}$. Trdimo, da v tem primeru prirejanja $M_0 = \{(v_2, x_1)(v_3, x_1), (v_1, x_2)(v_2, x_2)\}$ ni mogoče razširiti do popolnega prirejanja grafa $G \Box H$. Res, s tako izbiro začetnega 2-prirejanja smo v grafu $G \Box H$ pokrili vse sosede točke $(v_1, x_1)$, ki ostane v grafu $G \Box H$ izolirana in je zato ni mogoče pokriti z nobenim popolnim prirejanjem $M \supseteq M_0$.

*Primer 3:* Oba grafa vsebujeta simplicialno točko stopnje 2.

Naj bo $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V(G)$ in naj bo $\{x_1, x_2, x_3\} \subseteq V(H)$ ter naj velja $N_G(v_1) = \{v_2, v_3\}$ in $v_2 \sim v_3$ ter $N_H(x_1) = \{x_2, x_3\}$ in $x_2 \sim x_3$. Trdimo, da v tem primeru prirejanja $M_0 = \{(v_2, x_1)(v_3, x_1), (v_1, x_2)(v_1, x_3)\}$ ni mogoče razširiti do popolnega prirejanja grafa $G \Box H$. Res, s tako izbiro začetnega 2-prirejanja smo v grafu $G \Box H$ ponovno pokrili vse sosede točke $(v_1, x_1)$, ki ostane v grafu $G \Box H$ izolirana in je zato ne bomo mogli pokriti z nobenim popolnim prirejanjem $M \supseteq M_0$. □

**Lema 7.7.** *Naj bosta $G$ in $H$ povezana grafa in naj bo en izmed grafov $G$ in $H$ izomorfen grafu $K_2$ ter naj v drugem grafu obstaja pot $P$ na treh točkah, ki ni vsebovana v nobenem sodem ciklu. Tedaj graf $G \Box H$ ni 2-razširljiv.*

*Dokaz.* Predpostavimo, da je graf $G \Box H$ 2-razširljiv in da je en izmed grafov $G$ in $H$ izomorfen grafu $K_2$ ter da drugi vsebuje pot $P$ na treh točkah. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $H \cong K_2$. Naj bo $V(H) = \{x, y\}$ in naj bo $V(P) = \{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V(G)$. Predpostavimo, da pot $P$ ni vsebovana v nobenem sodem ciklu v grafu $G$ in naj bo $M_0 = \{(v_1, y)(v_2, y), (v_2, x)(v_3, x)\}$ 2-prirejanje. Ker je graf $G \Box H$ 2-razširljiv, je 2-prirejanje $M_0$ vsebovano v nekem popolnem prirejanju $M$. Dalje, označimo z $m(v_1, x)$ tistega (edinega) soseda točke $(v_1, x)$, da je $(v_1, x)m(v_1, x) \in M$. Analizirajmo sedaj popolno prirejanje $M$. Ker točka $(v_3, y)$ ni pokrita s prirejanjem $M_0$, v prirejanju $M$ obstaja povezava $\{(v_3, y), m(v_3, y) = (v_4, y)\}$. Točka $(v_4, y)$ je zagotovo različna od točk $(v_1, y), (v_2, y)$ in $(v_3, x)$, saj so te že pokrite s prirejanjem $M_0$, torej je točka $v_4$ "nova" točka v grafu $G$ in ravno tako velja, da točka $(v_4, y) \nsim (v_1, y)$, saj bi sicer bila pot $P$ vsebovana v sodem ciklu $C_4$ na množici točk $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Sedaj imamo v grafu $G \Box H$ točko $(v_4, x)$, ki ni pokrita z nobeno od povezav $\{(v_1, y)(v_2, y), (v_2, x)(v_3, x), (v_3, y)(v_4, y)\}$, zato v prirejanju $M$ obstaja povezava $\{(v_4, x), m(v_4, x) = (v_5, x)\}$. Točka $(v_5, x)$ je zagotovo različna od točk $(v_2, x), (v_3, x)$ in $(v_4, y)$, saj so te že pokrite z dosedaj omenjenimi povezavami prirejanja $M$. Zagotovo je različna tudi od točke $(v_1, x)$, saj smo v prejšnjem koraku pokazali, da $v_1 \nsim v_4$. Torej je tudi $v_5$ "nova" točka v grafu $G$, kar pomeni, da imamo sedaj v grafu $G \Box H$ točko $(v_5, y)$, ki ni pokrita z nobeno od povezav $\{(v_1, y)(v_2, y), (v_2, x)(v_3, x), (v_3, y)(v_4, y), (v_4, x)(v_5, x)\}$. Z enakim argumentom kot zgoraj (za točko $(v_3, y)$) lahko pokažemo, da $m(v_5, y) = (v_6, y)$ predstavlja "novo" točko $v_6$ v grafu $G$. Induktivna uporaba zgornjih argumentov implicira sklep, da je graf $G$ neskončen, kar nas privede do protislovja. $\square$

Ob koncu splošnega dela navedimo še nekaj definicij in oznak, ki bodo uporabljene v poglavjih, ki sledijo.

Za dana grafa $G$ in $H$ in točko $w \in V(H)$ je *$G$-sloj skozi $w$* podgraf grafa $G \Box H$, induciran na množici točk $\{(v, w)\,;\, v \in V(G)\}$, označimo ga z $G(w)$. Podobno je za $z \in V(G)$ *$H$-sloj skozi $z$* podgraf grafa $G \Box H$, induciran na množici točk $\{(z, x)\,;\, x \in V(H)\}$, označili go bomo z $H(z)$. Za poljuben induciran podgraf $K$ grafa $G$ in poljubno točko $t \in V(H)$ (ali obratno) bomo z $M_{K(t)}$ označili poljubno (a fiksno) popolno prirejanje $K$ sloja skozi $t$.

## 7.2 Karakterizacija 2-razširljivih kartezičnih produktov, ko sta oba faktorja 0-razširljiva

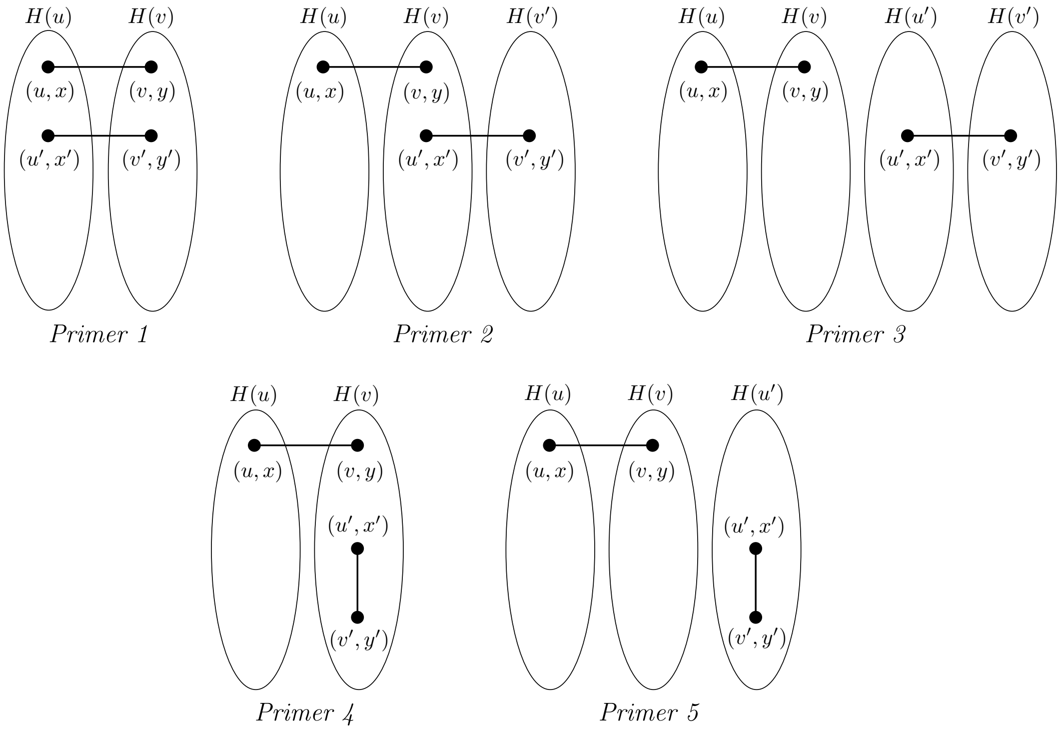
Po izreku 7.1 bo kartezični produkt $G\Box H$ 2-razširljiv, čim bo vsaj en izmed faktorjev 1-razširljiv. Zato lahko našo pozornost usmerimo na kartezične produkte grafov, ki niso 1-razširljivi. V tem podpoglavju bomo obravnavali primer, ko v grafih $G$ in $H$ obstaja popolno prirejanje.

**Izrek 7.8.** *Naj bosta grafa $G$ in $H$ 0-razširljiva. Potem je graf $G\Box H$ 2-razširljiv če in samo če je $G \cong H \cong K_2$ ali pa veljata naslednja pogoja:*

1. *Vsaj eden od grafov $G$ in $H$ ne vsebuje simplicialne točke stopnje največ 2.*
2. *Če je en izmed grafov $G$ in $H$ izomorfen grafu $K_2$, potem je v drugem grafu vsaka (ne nujno inducirana) pot $P_3$ vsebovana v nekem sodem ciklu.*

*Dokaz.* Enostavno lahko preverimo, da je v primeru, ko je $G \cong H \cong K_2$, graf $G\Box H \cong C_4$ 2-razširljiv. Potrebnost obeh pogojev, če $G \ncong K_2$ ali $H \ncong K_2$, pa sledi iz lem 7.6 in 7.7. Pokazati moramo še, da sta podana pogoja tudi zadostna za to, da je $G\Box H$ 2-razširljiv.

V nadaljevanju bomo privzeli, da nista oba grafa $G$ in $H$ izomorfna grafu $K_2$ in da veljata pogoja 1 in 2. Iz 1. pogoja sledi, da je $\delta(G) \geq 2$ ali $\delta(H) \geq 2$. Naj bo $M_0 = \{(u,x)(v,y),(u',x')(v',y')\}$ 2-prirejanje v grafu $G\Box H$. Pokazali bomo, da obstaja popolno prirejanje $M \supseteq M_0$. Ločili bomo 5 primerov, v odvisnosti od tega, kako se izbrane povezave pojavijo v grafu $G\Box H$. Primeri (do simetrije natančno) so prikazani na sliki 7.2. V nadaljevanju dokaza privzemamo, da so vse točke $u,u',v,v' \in V(G)$ in $x,x',y,y' \in V(H)$ različne, razen ko opis primera določa drugače.




Slika 7.2: Možne izbire začetnega 2-prirejanja v grafu $G\Box H$, ko oba faktorja vsebujeta popolno prirejanje.

*Primer 1:* $u = u', v = v', uv \in E(G), x = y, x' = y'$.

V tem primeru lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(u,w)(v,w)\,;\, w \in V(H)\} \text{ in} \\ M_2 &= \bigcup_{z \in V(G)\setminus\{u,v\}} M_{H(z)}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

*Primer 2:* $v = u', \{uv, vv'\} \subseteq E(G), x = y, x' = y'$.

Predpostavimo najprej, da je $H \cong K_2$. Potem je po 2. pogoju izreka vsaka pot $P_3$ v grafu $G$ vsebovana v nekem sodem ciklu. Označimo s $C$ sod cikel v grafu $G$, ki vsebuje pot $u, v, v'$ in naj bo $V(C) = \{u_1 = u, u_2 = v, u_3 = v', u_4, \ldots, u_k\}$.

Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(u_1,x)(u_2,x),(u_3,x)(u_4,x),\ldots,(u_{k-1},x)(u_k,x)\}, \\ M_2 &= \{(u_2,x')(u_3,x'),(u_4,x')(u_5,x'),\ldots,(u_k,x')(u_1,x')\} \text{ in} \\ M_3 &= \{(z,x)(z,x')\,;\, z \in V(G) \setminus V(C_k)\}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Obravnavajmo sedaj še primer, ko $G \ncong K_2$ in $H \ncong K_2$.

Predpostavimo najprej, da v grafu $H$ obstaja popolno prirejanje, ki ne vsebuje povezave $xx'$. Potem obstajata taki različni točki $a, a' \in V(H)$, da je $\{ax, a'x'\} \subseteq E(H)$. V tem primeru lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(v,x')(v',x'),(v,a')(v',a')\} \cup \{(z,x')(z,a')\,;\, z \in V(G) \setminus \{v,v'\}\}, \\ M_2 &= \{(u,a)(v,a),(u,x)(v,x)\} \cup \{(z,a)(z,x)\,;\, z \in V(G) \setminus \{u,v\}\} \text{ in} \\ M_3 &= \bigcup_{w \in V(H)\setminus\{a,a',x,x'\}} M_{G(w)}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Ostane nam še primer, ko popolno prirejanje grafa $H$ vsebuje povezavo $xx'$. To med drugim implicira, da povezava $xx'$ ni sredinska povezava nobene poti $P_4$ v grafu $H$. Dalje to implicira, da sta zaprti soseščini $N_H[x]$ in $N_H[x']$ primerljivi in da je $|N_H(x) \cap N_H(x')| \leq 1$. Brez škode za splošnost je $N_H[x'] \subseteq N_H[x]$, kar implicira, da je točka $x'$ v grafu $H$ simplicialna stopnje največ 2.

Trdimo, da obstaja taka točka $b \in V(G)\setminus\{v,v'\}$, da je $b \sim u$. Res, če taka točka $b$ ne obstaja to implicira, da je $N_G(u) \subseteq \{v,v'\}$, kar nas privede do protislovja s 1. pogojem izreka, saj imamo v grafih $G$ in $H$ dve simplicialni točki stopnje največ 2 (ti točki sta $x'$ in $u$).

Naj bo sedaj točka $b$ kot zgoraj in naj bo točka $a \in V(H) \setminus \{x'\}$ taka, da je $a \sim x$ (taka točka zagotovo obstaja, ker $H \ncong K_2$). Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(b,a)(b,x),(u,a)(v,a),(u,x)(v,x),(v,a)(v',x)\}, \\ M_2 &= \bigcup_{w \in V(H)\setminus\{x,a\}} \{(b,w)(u,w),(v,w)(v',w)\} \text{ in} \\ M_3 &= \bigcup_{z \in V(G)\setminus\{b,u,v,v'\}} M_{H(z)}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

*Primer 3:* $\{uv, u'v'\} \subseteq E(G), x = y, x' = y'$.

V tem primeru lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 &= \bigcup_{w \in V(H)} \{(u,w)(v,w), (u',w)(v',w)\} \text{ in} \\ M_2 &= \bigcup_{z \in V(G) \setminus \{u,v,u',v'\}} M_{H(z)}. \end{aligned} \tag{7.5}$$

*Primer 4:* $v = v' = u', uv \in E(G), x = y, x'y' \in E(H)$.

V tem primeru lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 =& \{(u,x')(u,y'), (v,x')(v,y')\}, \\ M_2 =& \{(u,w)(v,w)\,;\, w \in V(H) \setminus \{x',y'\}\} \text{ in} \\ M_3 =& \bigcup_{z \in V(G) \setminus \{u,v\}} M_{H(z)}. \end{aligned} \tag{7.6}$$

*Primer 5:* $u' = v', uv \in E(G), x = y, x'y' \in E(H)$.

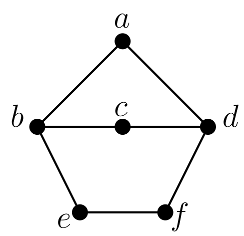
Če je $N_H(x) \subseteq \{x', y'\}$ in $N_G(u) \subseteq \{u', v'\}$, potem pridemo do protislovja s 1. pogojem izreka, saj ima vsak izmed grafov $G$ in $H$ simplicialno točko stopnje največ 2 (ti točki sta ravno $x$ in $u$). Zato lahko, brez škode za splošnost, predpostavimo, da ima točka $x$ soseda v $V(H) \setminus \{x', y'\}$, recimo mu $a$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 =& \{(z,x')(z,y')\,;\, z \in V(G)\}, \\ M_2 =& \{(u,a)(v,a), (u,x)(v,x)\} \cup \{(z,a)(z,y)\,;\, z \in V(G) \setminus \{u,v\}\} \text{ in} \\ M_3 =& \bigcup_{w \in V(H) \setminus \{x,x',y',a\}} M_{G(w)}. \end{aligned} \tag{7.7}$$

□

## 7.3 Primeri 2-razširljivih kartezičnih produktov, ko nista oba faktorja 0-razširljiva

Karakterizacija kartezičnih produktov grafov v primeru, ko nista oba faktorja 0-razširljiva, je mnogo bolj zapletena, saj o strukturi grafov, ki imajo popolno prirejanje, a niso 1-razširljivi, ne vemo veliko. Čeprav lahko, z uporabo leme 7.5 takoj sklepamo, da npr. graf $K_3\Box P_4$ ni 2-razširljiv, se izkaže, da je predpostavka o prerezni povezavi bistvenega pomena, medtem ko število točk drugega faktorja v produktu ni. Vzemimo na primer graf na sliki 7.3. Zanj lahko enostavno preverimo, da ima popolno prirejanje in ker z odstranitvijo točk $b, c$ in $f$ dobimo 3 lihe povezane komponente, po izreku 2.7 ni 1-razširljiv (enostavno lahko tudi opazimo, da tako povezave $be$ kot povezave $df$ ni možno razširiti do popolnega prirejanja grafa $H_1$).

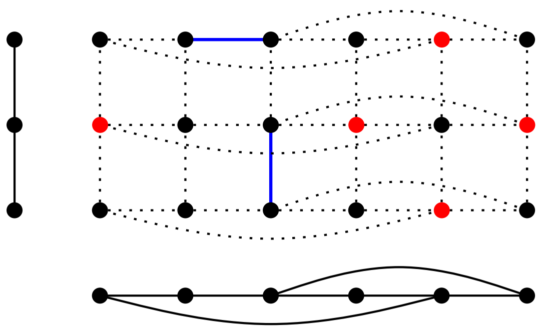



Slika 7.3: Graf $H_1$.

Opazimo lahko, da graf $G = P_3\Box H_1$ ni 2-razširljiv, primer 2-prirejanja $M_0$, ki ga ne moremo razširiti do popolnega prirejanja, je podan na sliki 7.4. Če z $G'$ označimo graf $G - V(M_0)$ in tvorijo rdeče obarvane točke množico $S$, opazimo, da je $c_\ell(G' - S) > |S|$. Po izreku 2.6 torej graf $G'$ ne vsebuje popolnega prirejanja.

Po drugi strani pa sta tako graf $C_3\Box H_1$ kot graf $P_5\Box H_1$ 2-razširljiva, o čemer se lahko (z nekoliko truda) bralec enostavno prepriča. Omenjena primera nakazujeta, da 2-razširljivost kartezičnega produkta, ko eden izmed faktorjev nima popolnega prirejanja, v splošnem ni odvisna ne od števila točk ne od obstoja morebitnih listov v faktorju brez popolnega prirejanja.

Zato se bomo v nadaljevanju omejili na nekaj posebnih primerov kartezičnih produktov 0-razširljivega grafa in grafa, ki ne vsebuje popolnega prirejanja.



Slika 7.4: Kartezični produkt $P_3 \square H_1$

Najprej bomo obravnavali kartezične produkte lihih ciklov in sodih poti.

**Trditev 7.9.** *Za vse $k \geq 1$ in $s \geq 1$ je graf $C_{2k+1} \square P_{2s}$ 2-razširljiv če in samo če je $k \geq 2$ in $s \geq 2$.*

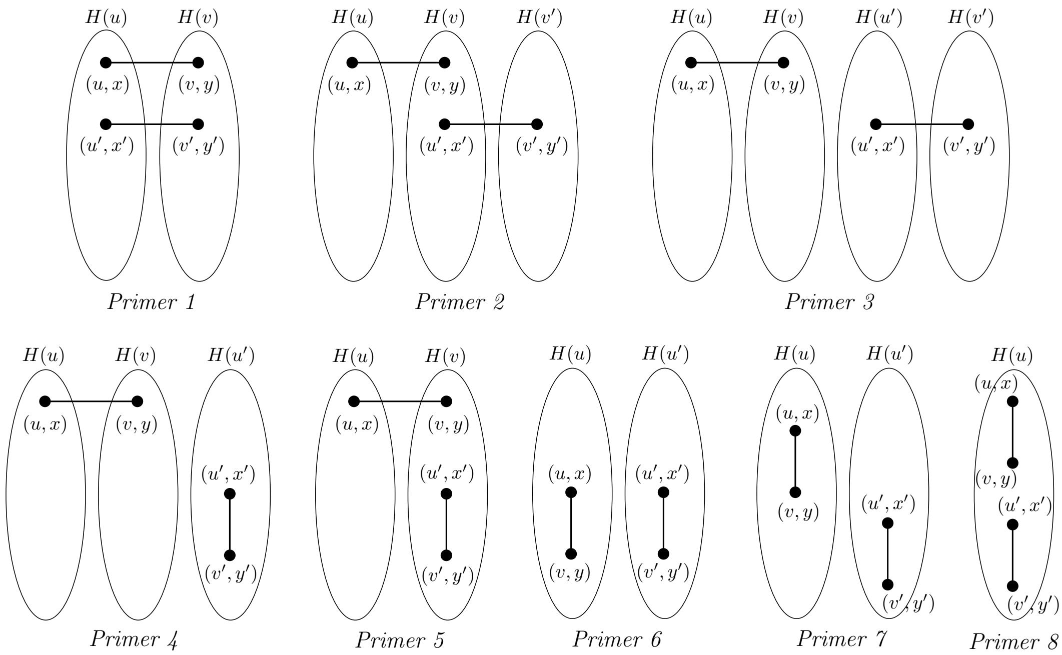
*Dokaz.* Naj bo $G = C_{2k+1}$ in $H = P_{2s}$. Pokažimo najprej, da sta podana pogoja potrebna za to, da je graf $G \square H$ 2-razširljiv. Predpostavimo najprej, da je $k = 1$ in posledično je $G \cong C_3$. V tem primeru lema 7.6 implicira, da $G \square H$ ni 2-razširljiv, saj so v grafu $G$ vse tri točke simplicialne z $|N_G(v)| = 2$ $(\forall v \in V(G))$ in imamo v grafu $H$ dve simplicialni točki stopnje 1 (končni točki poti). Predpostavimo sedaj, da je $s = 1$. Posledično je $H \cong P_2 \cong K_2$. V tem primeru lema 7.7 implicira, da $G \square H$ ni 2-razširljiv, saj je graf $G$ lih cikel, kar implicira, da vsaka pot $P_3$ v grafu $G$ ni vsebovana v sodem ciklu.

Sedaj moramo še pokazati, da sta dana pogoja tudi zadostna za to, da je graf $G \square H$ 2-razširljiv. Naj bo $M_0 = \{(u, x)(v, y), (u', x')(v', y')\}$ 2-prirejanje v grafu $G \square H$ in predpostavimo, da je $k \geq 2$ in $s \geq 2$. Pokazali bomo, da obstaja popolno prirejanje $M$ grafa $G \square H$, ki vsebuje $M_0$. Ločili bomo 8 primerov, v odvisnosti od tega, kako se izbrane povezave pojavijo v grafu $G \square H$. Primeri (do simetrije natančno) so prikazani na sliki 7.5.

Spomnimo, da $H(z)$ označuje $H$-sloj skozi $z \in V(G)$ in $M_{H(z)}$ označuje njegovo (poljubno, a fiksno) popolno prirejanje.

*Primer 1:* $u = u', v = v', uv \in E(G), x = y, x' = y'$.

V tem primeru lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G \square H$ dobimo s pomočjo množic $M_1$ in $M_2$, kot so opisane v (7.1).




Slika 7.5: Možne izbire začetnega 2-prirejanja v grafu $G\Box H$, ko je $G$ lih cikel, $H$ pa soda pot.

*Primer 2:* $v = u', u \neq v', \{uv, vv'\} \subseteq E(G), x = y, x' = y'$.

Ločili bomo 2 primera.

*Primer 2.1:* $x \sim x'$.

Predpostavimo najprej, da je povezava $e = xx'$ vsebovana v popolnem prirejanju grafa $H$. Potem ima graf $H - e$ dve lihi komponenti. Označimo s $C^x$ komponento, ki vsebuje točko $x$ in s $C^{x'}$ komponento, ki vsebuje točko $x'$. Če $|C^x| = |C^{x'}| = 1$, pridemo do protislovja s predpostavko, da je $s \geq 1$. Torej lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je $|C^x| \geq 3$. Naj bosta $b, b' \in V(C^x) \setminus \{x\}$ in brez škode za splošnost lahko privzamemo tudi, da je $x \sim b$ in $b \sim b'$. Ker je $k \geq 2$, obstajata tudi taki različni točki $a, a' \in V(G) \setminus \{u, v\}$, da je $u \sim a$ in $a \sim a'$. Označimo z $H'$ podgraf grafa $H$, induciran z množico točk $V(H) \setminus \{x, x', b, b'\}$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G\Box H$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 =&\{(a',x')(a',x),(a',b)(a',b'),(a,x')(u,x'),(a,x)(a,b),(a,b')(u,b'),\\ &(u,b)(v,b),(u,x)(v,x),(v,x')(v',x'),(v,b')(v',b'),(v',x)(v',b)\},\\ M_2 =& \bigcup_{z'\in\{u,v,v',a,a'\}} M_{H'(z')} \text{ in} \\ M_3 =& \bigcup_{z\in V(G)\setminus\{u,v,v',a,a'\}} M_{H(z)}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Torej lahko predpostavimo, da povezava $e = xx'$ ni vsebovana v popolnem prirejanju grafa $H$, kar pomeni, da ima graf $H - e$ dve sodi komponenti, recimo jima (kot prej) $C^x$ in $C^{x'}$. Naj bosta $bx \in E(C^x)$ in $b'x' \in E(C^{x'})$ ter naj bo graf $H'$ kot prej. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G\Box H$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 =&\{(u,b)(v,b),(u,x)(v,x),(u,x')(u,b'),\\ &(v,x')(v',x'),(v,b')(v',b'),(v',x)(v',b)\},\\ M_2 =& \bigcup_{z'\in\{u,v,v'\}} M_{H'(z')} \text{ in} \\ M_3 =& \bigcup_{z\in V(G)\setminus\{u,v,v'\}} M_{H(z)}. \end{aligned} \tag{7.9}$$

*Primer 2.2:* $x \nsim x'$.

Označimo s $P$ (edino) $x - x'$ pot v grafu $H$. Če ima pot $P$ sodo mnogo točk, ker $x \nsim x'$, obstajata točki $b, b' \in V(P) \setminus \{x, x'\}$ za kateri velja $b \sim x$ in $b' \sim x'$. Naj bo, kot prej, $H' = H - \{x, x', b, b'\}$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G\Box H$ dobimo s pomočjo množic $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kot so opisane v (7.9). Torej ima pot $P$ liho mnogo točk, kar implicira, da ima graf $H - x'$ eno liho komponento, označimo jo s $C$. Predpostavimo najprej, da je $x \in V(C)$. To implicira, da obstaja točka $b \in N(x)$, ki ni vsebovana na poti $P$. Naj bo dalje $b' \in V(P)$ točka, ki je povezana s točko $x'$ v grafu $H$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G\Box H$ dobimo s pomočjo množic $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kot so opisane v (7.9) in na enak način dobimo popolno prirejanje če $x \notin C$. To namreč implicira obstoj točke $b' \in N(x')$, ki ni vsebovana na poti $P$ in za $b$ vzamemo točko na poti $P$ za katero velja $b \in N(x)$.

*Primer 3:* $\{uv, u'v'\} \subseteq E(G), \{u, v\} \cap \{u', v'\} = \emptyset, x = y, x' = y'$.

V tem primeru lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G \Box H$ dobimo s pomočjo množic $M_1$ in $M_2$, kot so opisane v (7.5).

*Primer 4:* $u' = v', u' \notin \{u, v\}, uv \in E(G), x = y, y' \notin \{x, y\}, x'y' \in E(H)$.

Če je povezava $x'y'$ vsebovana v popolnem prirejanju grafa $H$, lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G \Box H$ dobimo s pomočjo množic $M_1$ in $M_2$, kot so opisane v (7.1). Torej lahko privzamemo, da povezava $x'y'$ ni vsebovana v popolnem prirejanju grafa $H$. Trdimo, da v grafu $G$ obstaja točka $a' \in N(v')$, različna od točk $u, v$. Res, če taka točka $a'$ ne obstaja, je $N(v') = \{u, v\}$, kar nas privede do protislovja s predpostavko, da je $k \geq 2$. Naj bo točka $a' \in N(v')$ kot zgoraj, sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G \Box H$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 = &\{(v', x')(v', y'), (a', x')(a', y')\} \\ &\cup \{(v', w)(a', w)\,;\, w \in V(H) \setminus \{x', y'\}\}, \\ M_2 = &\{(u, w')(v, w')\,;\, w' \in V(H)\} \text{ in} \\ M_3 = &\bigcup_{z \in V(G) \setminus \{u, v, v', a'\}} M_{H(z)}. \end{aligned} \tag{7.10}$$

*Primer 5:* $v = v' = u', uv \in E(G), x = y, x \notin \{x', y'\}, x'y' \in E(H)$.

V tem primeru lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G \Box H$ dobimo s pomočjo množic $M_1, M_2$ in $M_3$, kot so opisane v (7.6).

*Primer 6:* $u = v, u' = v', x = x', y = y', xy \in E(H)$.

Če je $u \sim u'$, lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G \Box H$ dobimo s pomočjo množic $M_1$ in $M_2$, ki so opisane v (7.1) (s tem da točki $v$ in $x'$ zamenjamo s točkama $u'$ in $y$, v tem vrstnem redu). Torej lahko privzamemo, da $u \nsim u'$. Ker je $s \geq 2$, obstajata različni točki $a, a' \in V(G) \setminus \{u, u'\}$, da velja $a \sim u$ in $a' \sim u'$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G \Box H$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$,

kjer je

$$\begin{aligned} M_1 =& \{(a,x)(a,y),(u,x)(u,y)\} \cup \{(a,w)(u,w)\,;\, w \in V(H) \setminus \{x,y\}\}, \\ M_2 =& \{(a',x)(a',y),(u',x)(u',y)\} \cup \{(u',w)(a',w)\,;\, w \in V(H) \setminus \{x,y\}\}, \\ M_3 =& \bigcup_{z \in V(G)\setminus\{u,u',a,a'\}} M_{H(z)}. \end{aligned} \tag{7.11}$$

*Primer 7:* $u = v, u' = v', u \neq u', \{xy, yy'\} \subseteq E(H), x \neq y'$.

Ker je $G$ lih cikel dolžine vsaj 5, obstajata taki različni točki $a, a' \in V(G) \setminus \{u, u'\}$, da velja $a \sim u$ in $a' \sim u'$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G \square H$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 =& \{(a,x)(a,y),(u,x)(u,y)\} \cup \{(a,w)(u,w)\,;\, w \in V(H) \setminus \{x,y\}\}, \\ M_2 =& \{(a',x')(a',y'),(u',x')(u',y')\} \\ & \cup \{(u',w')(a',w')\,;\, w' \in V(H) \setminus \{x',y'\}\} \text{ in} \\ M_3 =& \bigcup_{z \in V(G)\setminus\{u,u',a,a'\}} M_{H(z)}. \end{aligned} \tag{7.12}$$

*Primer 8:* $u = v = u' = v', \{xy, x'y'\} \subseteq E(H)$.

Naj bo $a \in N_G(u)$. Tedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G \square H$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 =& \{(u,x)(u,y),(u,x')(u,y'),(a,x)(a,y),(a,x')(a,y')\}, \\ M_2 =& \{(u,w)(a,w)\,;\, w \in V(H) \setminus \{x,x',y,y'\}\} \text{ in} \\ M_3 =& \bigcup_{z \in V(G)\setminus\{u,a\}} M_{H(z)}. \end{aligned} \tag{7.13}$$

□

Naslednji poseben primer, ki ga bomo obravnavali, je kartezični produkt polnega dvodelnega grafa in poti.

**Trditev 7.10.** *Za vse $n \geq m \geq 1$ in $k \geq 1$ je graf $K_{m,n} \square P_k$ 2-razširljiv če in samo če velja naslednje:*

*1.* $m \geq 2$.

*2. Bodisi je* $m = n$ *ali pa je* $k$ *sod.*

*Dokaz.* Naj bo $G = K_{m,n}$ poln dvodelen graf z biparticijo $V(G) = A \cup B$, kjer je $|A| = m \leq n = |B|$ in naj bo $H = P_k$ pot na $k$ točkah.

Pokažimo najprej, da sta podana pogoja potrebna za to, da je graf $G \Box H$ 2-razširljiv. Potrebnost 1. pogoja sledi iz leme 7.6. Da bi dokazali potrebnost 2. pogoja, predpostavimo, da je $m \neq n$ in da je $k$ lih. Ker je po predpostavki $m \leq n$, to implicira, da je $n \geq m + 1$. Označimo točke na poti $H$ po vrsti $x_1, x_2 \ldots, x_k$, kjer sta $x_1$ in $x_k$ lista. Trdimo, da graf $G' = G \Box H$ nima popolnega prirejanja. Trditev bomo dokazali z uporabo Tutte-ovega izreka (izrek 2.6) tako, da bomo podali ustrezno množico $S$. Naj bo $S = \{(x_i, w)\,;\, i \text{ lih in } w \in A\} \cup \{(x_j, z)\,;\, j \text{ sod in } z \in B\}$. Torej je $|S| = \frac{k+1}{2} \cdot m + \frac{k-1}{2} \cdot n \geq \frac{k+1}{2} \cdot m + \frac{k-1}{2} \cdot (m+1) = k \cdot m + \frac{k-1}{2}$. Graf $G' - S$ pa ima le izolirane točke, teh je $c_\ell(G' - S) = \frac{k-1}{2} \cdot m + \frac{k+1}{2} \cdot n \geq \frac{k-1}{2} \cdot m + \frac{k+1}{2} \cdot (m+1) = k \cdot m + \frac{k+1}{2}$. Sledi $c_\ell(G' - S) > |S|$. Po Tutte-ovem izreku graf $G'$ ne vsebuje popolnega prirejanja in posledično tudi ni 2-razširljiv.

Sedaj moramo še pokazati, da so dani pogoji tudi zadostni za to, da je graf $G \Box H$ 2-razširljiv. Predpostavimo, da je graf $G \Box H$ 2-razširljiv in naj bo $M_0 = \{(u, x)(v, y), (u', x')(v', y')\}$ 2-prirejanje v grafu $G \Box H$, ki ga želimo razširiti do popolnega prirejanja $M$. Ločili bomo 9 primerov, v odvisnosti od tega, kako se izbrane povezave pojavijo v grafu $G \Box H$. Primeri so (do simetrije natančno) prikazani na sliki 7.6.

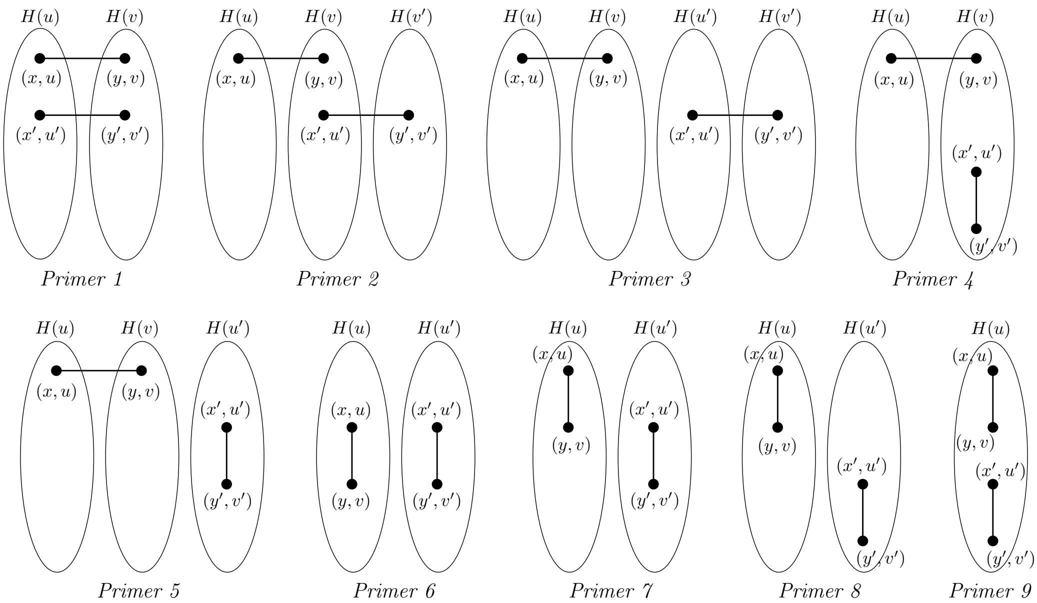
Spomnimo, da $H(z)$ označuje $H$-sloj skozi $z \in V(G)$ in $M_{H(z)}$ označuje njegovo (poljubno, a fiksno) popolno prirejanje.

*Primer 1:* $u = u', v = v', uv \in E(G), x = y, x' = y'$.

Recimo najprej, da je $k$ sod. V tem primeru lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G \Box H$ dobimo, kot je to opisano z množicami v (7.1).

Recimo sedaj, da je $k$ lih. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $u \in A$ in $v \in B$. Ker je $k$ lih, je $m = n$. Označimo z $M_G$ popolno prirejanje grafa $G$, ki vsebuje povezavo $uv$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G \Box H$ dobimo kot

$$M = \bigcup_{w \in V(H)} M_{G(w)} \tag{7.14}$$




Slika 7.6: Možne izbire začetnega 2-prirejanja v grafu $G\Box H$, ko je $G$ poln dvodelen graf in $H$ pot.

*Primer 2:* $v = u', u \neq v', \{uv, vv'\} \subseteq E(G), x = y, x' = y'$.

Recimo, da je $k$ sod. Obravnavajmo najprej primer, ko je $v \in A$ in $u, v' \in B$. Ker je $m \geq 2$, obstaja točka $a \in A$, različna od točke $v$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G\Box H$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 =& \{(a,x)(u,x), (v,x)(v',x)\}, \\ M_2 =& \bigcup_{w \in V(H)\setminus\{x\}} \{(a,w)(v',w) \cup (v,w)(u,w)\} \text{ in} \\ M_2 =& \bigcup_{z \in V(G)\setminus\{a,u,v,v'\}} M_{H(z)}. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Primer, ko je $u, v' \in A$ in $v \in B$, je simetričen zgornjemu. Obstoj točke $a \in B\setminus\{v\}$ nam zagotavlja predpostavka, da je $m \leq n$.

Recimo sedaj, da je $k$ lih in posledično je $m = n$. Označimo z $M_G$ poljubno popolno prirejanje grafa $G$, ki vsebuje povezavo $uv$ ter z $M'_G$ poljubno popolno prirejanje grafa $G$, ki vsebuje povezavo $vv'$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq$

$M_0$ grafa $G\Box H$ dobimo kot

$$M = M'_{G(x)} \cup \bigcup_{w\in V(H)\setminus\{x\}} M_{G(w)} \tag{7.16}$$

*Primer 3:* $\{uv, u'v'\} \subseteq E(G), \{u,v\} \cap \{u'v'\} = \emptyset, x = y, x' = y'$.

Recimo najprej, da je $k$ sod. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da $u, u' \in A$ in $v, v' \in B$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G\Box H$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 &= \bigcup_{w\in V(H)} \{(u,w)(v,w), (u',w)(v',w)\} \text{ in} \\ M_2 &= \bigcup_{z\in V(G)\setminus\{u,u',v,v'\}} M_{H(z)}. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Recimo sedaj, da je $k$ lih. Ker je $m = n$, lahko popolno prirejanje grafa $G\Box H$ dobimo z množico, kot je opisano v (7.14).

*Primer 4:* $v = v' = u', uv \in E(G), x = y, x \notin \{x', y'\}, x'y' \in E(H)$.

Recimo najprej, da je $k$ sod. V tem primeru lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G\Box H$ dobimo z množicami, kot so opisane v (7.6).

Recimo sedaj, da je $k$ lih in ker je $m = n$, lahko brez škode za splošnost privzamemo, da $u \in A$ in $v \in B$. Naj bo $M_G$ poljubno popolno prirejanje grafa $G$, ki vsebuje povezavo $uv$ in naj bo $G' = G - \{u, v\}$ ter označimo z $M_{G'}$ popolno prirejanje grafa $G'$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G\Box H$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(u,x')(u,y'), (v,x')(v,y')\} \cup \bigcup_{w'\in\{x',y'\}} M_{G'(w')} \text{ in} \\ M_2 &= \bigcup_{w\in V(H)\setminus\{x',y'\}} M_{G(w)}. \end{aligned} \tag{7.18}$$

*Primer 5:* $u' = v', u' \notin \{u, v\}, uv \in E(G), x = y, y' \notin \{x, y\}, x'y' \in E(H)$.

Recimo, da je $k$ sod. Obravnavajmo najprej primer, ko je $u \in A$ in $v, v' \in B$. Ker je $m \geq 2$, obstaja točka $a \in A$, ki je različna od točke $u$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G\Box H$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 =& \{(a,x')(a,y'),(u,x')(v,x'),(u,y')(v,y'),(v',x')(v',y')\}, \\ M_2 =& \bigcup_{w\in V(H)\setminus\{x',y'\}} \{(a,w)(v',w) \cup (u,w)(v,w)\} \text{ in} \\ M_3 =& \bigcup_{z\in V(G)\setminus\{a,u,v,v'\}} M_{H(z)}. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Primer, ko je $u, v' \in A$ in $v \in B$, je simetričen zgornjemu. Obstoj točke $a \in B\setminus\{v\}$ nam zagotavlja predpostavka, da je $m \leq n$.

Recimo sedaj, da je $k$ lih; posledično je $m = n$. Naj bo $a, u \in A$, $a \neq u$, in naj bo $M_G$ poljubno popolno prirejanje grafa $G$. Dalje, naj bo $G' = G - \{a, u, v, v'\}$ in naj bo $M_{G'}$ popolno prirejanje grafa $G'$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G\Box H$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 =& \{(a,x')(a,y'),(u,x')(v,x'),(u,y')(v,y'),(v',x')(v',y')\}, \\ M_2 =& \bigcup_{w'\in\{x',y'\}} M_{G'(w')}. \text{ in} \\ M_3 =& \bigcup_{w\in V(H)\setminus\{x',y'\}} M_{G(w)}. \end{aligned} \tag{7.20}$$

*Primer 6:* $u = v, u' = v', x = x', y = y', xy \in E(H)$.

Recimo najprej, da je $k$ sod. Če sta točki $u, u'$ v različnih delih biparticije $A \cup B$ grafa $G$, recimo, da je $u \in A$ in $u' \in B$, lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G\Box H$ dobimo kot $M = M_0 \cup M_1 \cup M_2$, kjer je

$$\begin{aligned} M_0 =& \{(u,x)(u,y),(u',x)(u',y)\}, \\ M_1 =& \{(u,w)(u',w)\,;\, w \in V(H) \setminus \{x,y\}\} \text{ in} \\ M_2 =& \bigcup_{z\in V(G)\setminus\{u,u'\}} M_{H(z)}. \end{aligned} \tag{7.21}$$

Če sta točki $u, u'$ v istem delu biparticije $A\cup B$ grafa $G$, recimo najprej, da je $u, u' \in A$. Potem, ker je $m \leq n$, obstajata v grafu $G$ tudi različni točki $a, a' \in B$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G\Box H$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$,

kjer je

$$\begin{aligned} M_1 =& \{(a,x)(a,y),(a',x)(a',y),(u,x)(u,y),(u',x)(u',y)\}, \\ M_2 =& \{(a',w)(u',w) \cup (a,w)(u,w)\,;\, w \in V(H) \setminus \{x,y\}\} \text{ in} \\ M_3 =& \bigcup_{z \in V(G) \setminus \{a,a',u,u'\}} M_{H(z)}. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Primer, ko je $u, u' \in B$, je simetričen zgornjemu. Obstoj različnih točk $a, a' \in A$ nam zagotavlja pogoj, da je $m \geq 2$.

Recimo sedaj, da je $k$ lih; posledično je $m = n$. Obravnavajmo najprej primer, ko sta točki $u, u'$ v različnih delih biparticije $A \cup B$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $u \in A$ in $u' \in B$. Naj bo $M_G$ poljubno popolno prirejanje grafa $G$ in naj bo $G' = G - \{u, u'\}$ ter naj bo $M_{G'}$ poljubno popolno prirejanje grafa $G'$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G \square H$ dobimo kot $M = M_0 \cup M_1 \cup M_2$, kjer je

$$\begin{aligned} M_0 =& \{(u,x)(u,y),(u',x)(u',y)\}, \\ M_1 =& \bigcup_{w' \in \{x,y\}} M_{G'(w')}. \text{ in} \\ M_2 =& \bigcup_{w \in V(H) \setminus \{x,y\}} M_{G(w)}. \end{aligned} \tag{7.23}$$

Ostal nam je še primer, ko sta točki $u, u'$ v istem delu biparticije $A \cup B$. Recimo najprej, da je $u, u' \in A$. Potem, ker je $m \leq n$, obstajata v grafu $G$ tudi različni točki $a, a' \in B$. Naj bo $M_G$ poljubno popolno prirejanje grafa $G$ in naj bo $G' = G - \{a, a', u, u'\}$ ter naj bo $M_{G'}$ poljubno popolno prirejanje grafa $G'$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G \square H$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 =& \{(u,x)(u,y),(u',x)(u',y),(a,x)(a,y),(a',x)(a',y)\}, \\ M_2 =& \bigcup_{w' \in \{x,y\}} M_{G'(w')}. \text{ in} \\ M_3 =& \bigcup_{w \in V(H) \setminus \{x,y\}} M_{G(w)}. \end{aligned} \tag{7.24}$$

Primer, ko je $u, u' \in B$, je simetričen zgornjemu. Obstoj različnih točk $a, a' \in A$ nam zagotavlja pogoj, da je $m \geq 2$.

*Primer 7:* $u = v, u' = v', u \neq u', x' = y, \{xy, yy'\} \in E(H), x \neq y'$.

Recimo najprej, da je $k$ sod. Obravnavajmo najprej primer, ko sta točki $u$ in $u'$ v različnih delih biparticije $A \cup B$ grafa $G$. Brez škode za splošnost je $u \in A$ in $u' \in B$. Ker je $2 \leq m \leq n$ v grafu $G$ obstajata tudi točki $a \in A \setminus \{u\}$ in $a' \in B \setminus \{u'\}$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G \Box H$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 =& \{(a,x)(u',x),(a,y)(a,y'),(u,x)(u,y),(u,y')(a',y'),\\ &(u',y)(u',y'),(a',x)(a',y)\},\\ M_2 =& \bigcup_{w \in V(H)\setminus\{x,y,y'\}} \{(a,w)(a',w) \cup (u,w)(u',w)\} \text{ in}\\ M_3 =& \bigcup_{z \in V(G)\setminus\{a,a',u,u'\}} M_{H(z)}. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Predpostavimo sedaj, da sta točki $u$ in $u'$ v istem delu biparticije $A \cup B$ grafa $G$, recimo $u, u' \in A$. Potem, ker je $m \leq n$, obstajata v grafu $G$ tudi različni točki $a, a' \in B$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G \Box H$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 =& \{(a',x)(u',x),(a',y)(a',y'),(a,x)(a,y),(a,y')(u,y'),\\ &(u,x)(u,y),(u',y)(u',y')\},\\ M_2 =& \bigcup_{w \in V(H)\setminus\{x,y,y'\}} \{(a',w)(u',w) \cup (a,w)(u,w)\} \text{ in}\\ M_3 =& \bigcup_{z \in V(G)\setminus\{a,a',u,u'\}} M_{H(z)}. \end{aligned} \tag{7.26}$$

Primer, ko je $u, u' \in B$, je simetričen zgornjemu. Obstoj različnih točk $a, a' \in A$ nam zagotavlja pogoj, da je $m \geq 2$.

Recimo sedaj, da je $k$ lih; posledično je $m = n$. Obravnavajmo najprej primer, ko sta točki $u$ in $u'$ v različnih delih biparticije $A \cup B$ grafa $G$. Brez škode za splošnost je $u \in A$ in $u' \in B$. Ker je $2 \leq m \leq n$ v grafu $G$ obstajata tudi točki $a \in A \setminus \{u\}$ in $a' \in B \setminus \{u'\}$. Naj bo $M_G$ poljubno popolno prirejanje grafa $G$ in naj bo $G' = G - \{a, a', u, u'\}$ ter naj bo $M_{G'}$ poljubno popolno prirejanje grafa $G'$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G \Box H$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$,

kjer je

$$\begin{aligned} M_1 =&\{(a,x)(u',x),(a,x')(a,y'),(u,x)(u,x'),(u,y')(a',y'),\\ &(u',x')(u',y'),(a',x)(a',x')\},\\ M_2 =& \bigcup_{w'\in\{x,x',y'\}} M_{G'(w')} \text{ in}\\ M_3 =& \bigcup_{w\in V(H)\setminus\{a,a',u,u'\}} M_{G(w)}. \end{aligned} \tag{7.27}$$

Predpostavimo sedaj, da sta točki $u$ in $u'$ v istem delu biparticije $A \cup B$ grafa $G$, recimo $u, u' \in A$. Potem, ker je $m \leq n$, obstajata v grafu $G$ tudi različni točki $a, a' \in B$. Naj bo $M_G$ poljubno popolno prirejanje grafa $G$ in naj bo $G' = G - \{a, a', u, u'\}$ ter naj bo $M_{G'}$ poljubno popolno prirejanje grafa $G'$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G\Box H$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 =&\{(u,x)(u,x'),(u,y')(a',y'),(u',x)(a,x),(u',x')(u',y'),\\ &(a,x')(a,y'),(a',x)(a',x')\},\\ M_2 =& \bigcup_{w'\in\{x,x',y'\}} M_{G'(w')} \text{ in}\\ M_3 =& \bigcup_{w\in V(H)\setminus\{a,a',u,u'\}} M_{G(w)}. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Primer, ko je $u, u' \in B$, je simetričen zgornjemu. Obstoj različnih točk $a, a' \in A$ nam zagotavlja pogoj, da je $m \geq 2$.

*Primer 8:* $u = v, u' = v', u \neq u', \{xy, x'y'\} \in E(H), \{x, y\} \cap \{x', y'\} = \emptyset$.

Recimo najprej, da je $k$ sod. Obravnavajmo najprej primer, ko sta točki $u$ in $u'$ v različnih delih biparticije $A \cup B$ grafa $G$. Brez škode za splošnost je $u \in A$ in $u' \in B$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G\Box H$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 =&\{(u,x)(u,y),(u,x')(u,y'),(u',x)(u',y),(u',x')(u',y')\},\\ M_2 =&\{(u,w)(u',w)\,;\, w \in V(H) \setminus \{x,x',y,y'\}\} \text{ in}\\ M_3 =& \bigcup_{z\in V(G)\setminus\{u,u'\}} M_{H(z)}. \end{aligned} \tag{7.29}$$

Predpostavimo sedaj, da sta točki $u$ in $u'$ v istem delu biparticije $A \cup B$ grafa $G$, recimo $u, u' \in A$. Potem, ker je $m \leq n$, obstajata v grafu $G$ tudi različni točki $a, a' \in B$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G \square H$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 =& \{(a', x)(a', y), (a', x')(a', y'), (a, x)(a, y), (a, x')(a, y'), \\ & (u, x)(u, y), (u, x')(u, y'), (u', y)(u', x), (u', x')(u', y')\}, \\ M_2 =& \bigcup_{w \in V(H) \setminus \{x, x', y, y'\}} \{(a', w)(u', w) \cup (a, w)(u, w)\} \text{ in} \\ M_3 =& \bigcup_{z \in V(G) \setminus \{a, a', u, u'\}} M_{H(z)}. \end{aligned} \tag{7.30}$$

Primer, ko je $u, u' \in B$, je simetričen zgornjemu. Obstoj različnih točk $a, a' \in A$ nam zagotavlja pogoj, da je $m \geq 2$.

Recimo sedaj, da je $k$ lih in posledično je $m = n$. Obravnavajmo najprej primer, ko sta točki $u$ in $u'$ v različnih delih biparticije $A \cup B$ grafa $G$. Brez škode za splošnost je $u \in A$ in $u' \in B$. Naj bo $M_G$ poljubno popolno prirejanje grafa $G$ in naj bo $G' = G - \{u, u'\}$ ter naj bo $M_{G'}$ poljubno popolno prirejanje grafa $G'$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G \square H$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 =& \{(u, x)(u, y), (u, x')(u, y'), (u', x)(u', y), (u', x')(u', y')\}, \\ M_2 =& \bigcup_{w' \in \{x, x', y, y'\}} M_{G'(w')}. \text{ in} \\ M_3 =& \bigcup_{w \in V(H) \setminus \{x, x', y, y'\}} M_{G(w)}. \end{aligned} \tag{7.31}$$

Predpostavimo sedaj, da sta točki $u$ in $u'$ v istem delu biparticije $A \cup B$ grafa $G$, recimo $u, u' \in A$. Potem, ker je $m \leq n$, obstajata v grafu $G$ tudi različni točki $a, a' \in B$. Naj bo $M_G$ poljubno popolno prirejanje grafa $G$ in naj bo $G' = G - \{a, a', u, u'\}$ ter naj bo $M_{G'}$ poljubno popolno prirejanje grafa $G'$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G \square H$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kjer je

$$\begin{aligned} M_1 =& \{(a', x)(a', y), (a', x')(a', y'), (a, x)(a, y), (a, x')(a, y'), \\ & (u, x)(u, y), (u, x')(u, y'), (u', y)(u', x), (u', x')(u', y')\}, \\ M_2 =& \bigcup_{w' \in \{x, x', y, y'\}} M_{G'(w')}. \text{ in} \\ M_3 =& \bigcup_{w \in V(H) \setminus \{x, x', y, y'\}} M_{G(w)}. \end{aligned} \tag{7.32}$$

Primer, ko je $u, u' \in B$, je simetričen zgornjemu. Obstoj različnih točk $a, a' \in A$ nam zagotavlja pogoj, da je $m \geq 2$.

*Primer 9:* $u = v = u' = v', \{xy, x'y'\} \in E(H)$.

Brez škode za splošnost je $u \in A$ in ker je $m \leq n$, obstaja v grafu $G$ tudi točka $a \in B$.

Recimo najprej, da je $k$ sod. V tem primeru lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G \square H$ dobimo z množicama $M = M_1 \cup M_2$, kot sta opisani v (7.29), s tem da točko $u'$ zamenjamo s točko $a$.

Recimo sedaj, da je $k$ lih in posledično je $m = n$. Naj bo $M_G$ poljubno popolno prirejanje grafa $G$ in naj bo $G' = G - \{a, u\}$ ter naj bo $M_{G'}$ poljubno popolno prirejanje grafa $G'$. Sedaj lahko popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ grafa $G \square H$ dobimo kot $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kjer je

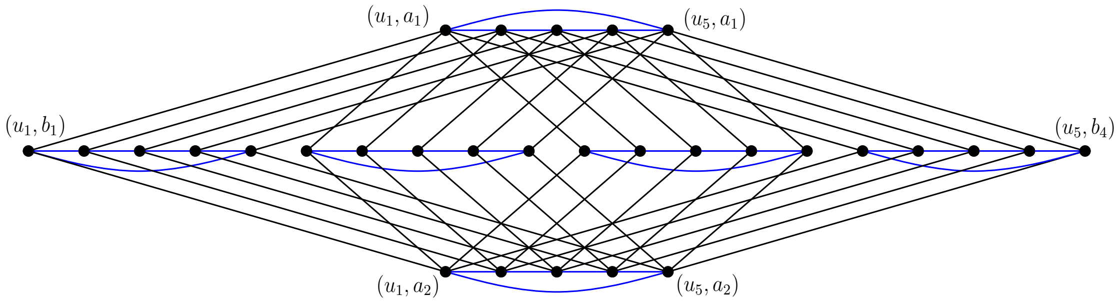
$$\begin{aligned} M_1 =& \{(a,x)(a,y), (a,x')(a,y'), (u,x)(u,y), (u,x')(u,y')\}, \\ M_2 =& \bigcup_{w' \in \{x,x',y,y'\}} M_{G'(w')}. \text{ in} \\ M_3 =& \bigcup_{w \in V(H) \setminus \{x,,x',y,y'\}} M_{G(w)}. \end{aligned} \tag{7.33}$$

□

Iz podanega dokaza opazimo, da je kartezični produkt polnih dvodelnih grafov in poti 2-razširljiv natanko tedaj, ko je vsaj eden izmed faktorjev 0-razširljiv. V nadaljevanju bomo podali še nekaj primerov 2-razširljivih kartezičnih produktov grafov, ko noben od faktorjev ni 0-razširljiv. Te smo poiskali med kartezičnimi produkti lihih ciklov in polnih dvodelnih grafov. Pri iskanju ustreznega primera smo obravnavali različne možnosti. Zaradi leme 7.6 vemo, da če je en faktor izomorfen grafu $C_3$, drugi faktor ne sme imeti simplicialne točke stopnje največ 2. Dalje, ker je cikel $C_3$ lih, mora imeti drugi faktor sodo mnogo točk. Izkaže se, da ima najmnanjši tak poln dvodelen graf 8 točk. (Polni dvodelni grafi brez popolnega prirejanja na 4 in 6 točkah namreč bodisi v večjem delu biparticije vsebujejo simplicialne točke stopnje 1 bodisi gre za graf $K_{2,4}$. Za graf $C_3 \square K_{2,4}$ pa se bralec zlahka prepriča, da ni 2-razširljiv.) Najmanjši primer 2-razširljivega kartezičnega produkta grafov, ko noben od faktorev ni 0-razširljiv, ki ga torej lahko omenimo, je graf $C_3 \square K_{3,5}$ na 24 točkah. Naslednji glede na število točk je graf na 28 točkah $C_7 \square K_{1,3}$, sledita graf na 30 točkah, $C_5 \square K_{2,4}$, in graf na 40 točkah $C_5 \square K_{2,6}$. V nadaljevanju podajamo dokaz, da je predzadnji od omenjenih grafov, $C_5 \square K_{2,4}$, 2-razširljiv.

**Trditev 7.11.** *Kartezični produkt $C_5 \square K_{2,4}$ je 2-razširljiv.*

*Dokaz.* Naj bodo točke cikla označene po vrsti $u_1, \dots, u_5$ in naj bo $A \cup B$ biparticija dvodelnega grafa $K_{2,4}$, kjer je $A = \{a_1, a_2\}$ in $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

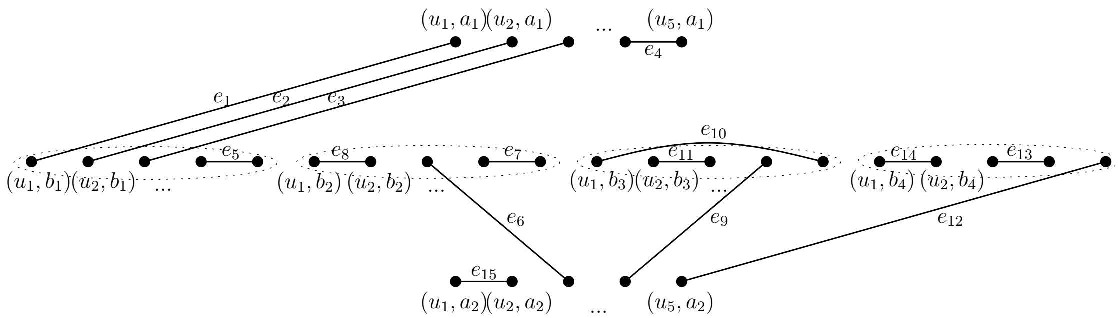



Slika 7.7: Kartezični produkt $C_5 \square K_{2,4}$.

V nadaljevanju so vse vsote obravnavane kot vsote po ustreznem modulu (tj. mod 2 za točke iz $A$, mod 4 za točke iz $B$ in mod 5 za točke 5-cikla). Definirali bomo dve družini popolnih prirejanj in utemeljili, da je vsako 2-prirejanje vsebovano v eni od njiju. Prvo družino tvorijo prirejanja $M(i,j,p,q)$, kjer so $i \in [2]$, $j \in [4]$ in $p, q \in [5]$, podana z izrazom:

$$\begin{aligned} M(i,j,p,q) = \{ & (u_p, a_i)(u_p, b_j), (u_{p+1}, a_i)(u_{p+1}, b_j), (u_{p+1}, a_i)(u_{p+2}, b_j), \\ & (u_{p+3}, a_i)(u_{p+4}, a_i), (u_{p+3}, b_j)(u_{p+4}, b_j), \\ & (u_q, a_{i+1})(u_q, b_{j+1}), (u_{q+1}, b_{j+1})(u_{q+2}, b_{j+1}), (u_{q+3}, b_{j+1})(u_{q+4}, b_{j+1}), \\ & (u_{q+1}, a_{i+1})(u_{q+1}, b_{j+2}), (u_{q+2}, b_{j+2})(u_{q+3}, b_{j+2}), (u_{q+4}, b_{j+2})(u_q, b_{j+2}), \\ & (u_{q+2}, a_{i+1})(u_{q+2}, b_{j+3}), (u_{q+3}, b_{j+3})(u_{q+4}, b_{j+3}), (u_q, b_{j+3})(u_{q+1}, b_{j+3}), \\ & (u_{q+3}, a_{i+1})(u_{q+4}, a_{i+1})\}. \end{aligned}$$

Primer popolnega prirejanja $M(i,j,p,q)$ za $i = j = p = 1$ in $q = 3$ je podan na sliki 7.8. Indeksi povezav so skladni z vrstnim redom povezav, podanih v zgornjem izrazu.




Slika 7.8: Popolno prirejanje $M(1,1,1,3)$ grafa $C_5 \square K_{2,4}$.

Drugo družino tvorijo prirejanja oblike $M(i,j,p)$, kjer so $i \in [2]$, $j \in [4]$ in $p \in [5]$, podana z izrazom:

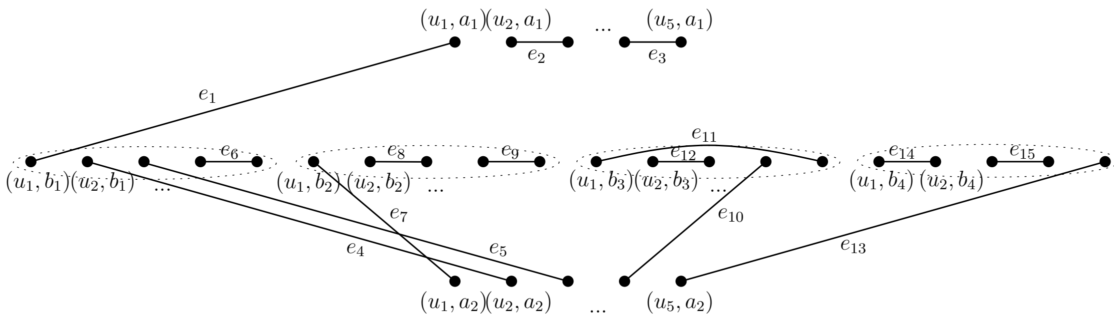
$$\begin{aligned}
M(i,j,p) = \{&(u_p,a_i)(u_p,b_j),(u_{p+1},a_i)(u_{p+2},a_i),(u_{p+3},a_i)(u_{p+4},a_i),\\
&(u_{p+1},a_{i+1})(u_{p+1},b_j),(u_{p+2},a_{i+1})(u_{p+2},b_j),(u_{p+3},b_j)(u_{p+4},b_j),\\
&(u_p,a_{i+1})(u_p,b_{j+1}),(u_{p+1},b_{j+1})(u_{p+2},b_{j+1}),(u_{p+3},b_{j+1})(u_{p+4},b_{j+1})\\
&(u_{p+3},a_{i+1})(u_{p+3},b_{j+2}),(u_{p+4},b_{j+2})(u_p,b_{j+2}),(u_{p+1},b_{j+2})(u_{p+2},b_{j+2}),\\
&(u_{p+4},a_{i+1})(u_{p+4},b_{j+3}),(u_p,b_{j+3})(u_{p+1},b_{j+3}),(u_{p+2},b_{j+3})(u_{p+3},b_{j+3})\}.
\end{aligned}$$

Primer popolnega prirejanja $M(i,j,p)$ za $i=j=p=1$ je podan na sliki 7.9. Indeksi povezav so skladni z vrstnim redom povezav, podanih v zgornjem izrazu.

Preverimo, da lahko vsa možna 2-prirejanja v produktu dopolnimo do popolnega prirejanja oblike $M(i,j,p,q)$ ali $M(i,j,p)$.

V nadaljevanju bomo povezave, ki v kartezičnem produktu ustrezajo povezavam iz cikla, imenovali $C_5$-*slojne povezave* (modro obarvane povezave na sliki 7.7) in podobno bomo povezave, ki v kartezičnem produktu ustrezajo povezavam iz dvodelnega grafa, imenovali $K_{2,4}$-*slojne povezave* (črno obarvane povezave na sliki 7.7).

Analizo bomo razdelili na 3 primere, v odvisnosti od tega, kateremu faktorju pripada vsaka od obeh povezav prirejanja in nato znotraj primera obravnavali različne možnosti za izbiro povezav.




Slika 7.9: Popolno prirejanje $M(1,1,1)$ grafa $C_5 \square K_{2,4}$.

*Primer 1:* Obe povezavi sta $C_5$-slojni.

| | 2-prirejanje $M_0$ | popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ |
|---|---|---|
| 1.1 | $(u_r,a_k)(u_{r+1},a_k),(u_s,a_{k+1})(u_{s+1},a_{k+1})$ | $M(k,1,r+2,s+2)$ |
| 1.2 | $(u_r,a_k)(u_{r+1},a_k),(u_s,b_\ell)(u_{s+1},b_\ell)$ | $M(k,\ell+1,r+2,s+2)$ |
| 1.3 | $(u_r,b_\ell)(u_{r+1},b_\ell),(u_s,b_t)(u_{s+1},b_t)$, z $\ell < t$ | $M(1,\ell,r+2,s+\ell-t+3)$ |
| 1.4 | $(u_r,b_\ell)(u_{r+1},b_\ell),(u_{r+2},b_\ell)(u_{r+3},b_\ell)$ | $M(1,\ell+1,1,r+2)$ |
| 1.5 | $(u_r,a_k)(u_{r+1},a_k),(u_{r+2},a_k)(u_{r+3},a_k)$ | $M(k,1,r+4)$ |

Tabela 7.1: Konstrukcije popolnega prirejanja grafa $C_5 \square K_{2,4}$, ko 2-prirejanje vsebuje dve $C_5$-slojni povezavi.

*Primer 2:* Obe povezavi sta $K_{2,4}$-slojni.

Pri obravnavi naslednjih primerov bomo (brez škode za splošnost) privzeli, da je $r \leq s$.

| | 2-prirejanje $M_0$ | popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ |
|---|---|---|
| 2.1 | $(u_r, a_k)(u_r, b_\ell), (u_s, a_{k+1})(u_s, b_\ell)$ | $M(k, \ell, r)$, če $s - r \leq 2$<br>$M(k+1, \ell, s)$, če $s - r > 2$ |
| 2.2 | $(u_r, a_k)(u_r, b_\ell), (u_s, a_{k+1})(u_s, b_t)$, z $\ell \neq t$ | $M(k, \ell, r, s + \ell - t + 1)$ |
| 2.3 | $(u_r, a_k)(u_r, b_\ell), (u_s, a_k)(u_s, b_\ell)$ | $M(k, \ell, r, 1)$, če $s - r \leq 2$<br>$M(k, \ell, s, 1)$, če $s - r > 2$ |
| 2.4 | $(u_r, a_k)(u_r, b_\ell), (u_s, a_k)(u_s, b_t)$, z $\ell \neq t$ | glej tabelo 7.3 |

Tabela 7.2: Konstrukcije popolnega prirejanja grafa $C_5 \square K_{2,4}$, ko 2-prirejanje vsebuje dve $K_{2,4}$-slojni povezavi.

V zadnjem obravnavanem primeru iz zgornje tabele (primer 2.4 v tabeli 7.2) je konstrukcija popolnega prirejanja odvisna tako od razlike med indeksoma $s$ in $r$ kot od razlike med indeksoma $\ell$ in $t$. Zato konstrukcije za te primere predstavljamo ločeno v naslednji tabeli.

| 2.4 | $t = \ell + 1$ | $t = \ell + 2$ | $t = \ell + 3$ |
|---|---|---|---|
| $s = r + 1$ | $M(k+1, t+1, s+1)$ | $M(k+1, \ell, s+2)$ | $M(k+1, t, s+4)$ |
| $s = r + 2$ | $M(k+1, t, r+1)$ | $M(k+1, \ell, r+4)$ | $M(k+1, \ell, s+1)$ |
| $s = r + 3$ | $M(k+1, \ell, s)$ | $M(k+1, t, s-1)$ | $M(k+1, \ell, s+1)$ |
| $s = r + 4$ | $M(k+1, \ell, s)$ | $M(k+1, t, s-2)$ | $M(k+1, \ell+1, r+1)$ |

Tabela 7.3: Konstrukcije popolnega prirejanja grafa $C_5 \square K_{2,4}$, za primer 2.4 iz tabele 7.2.

*Primer 3:* Ena povezava je $C_5$-slojna, ena pa $K_{2,4}$-slojna.

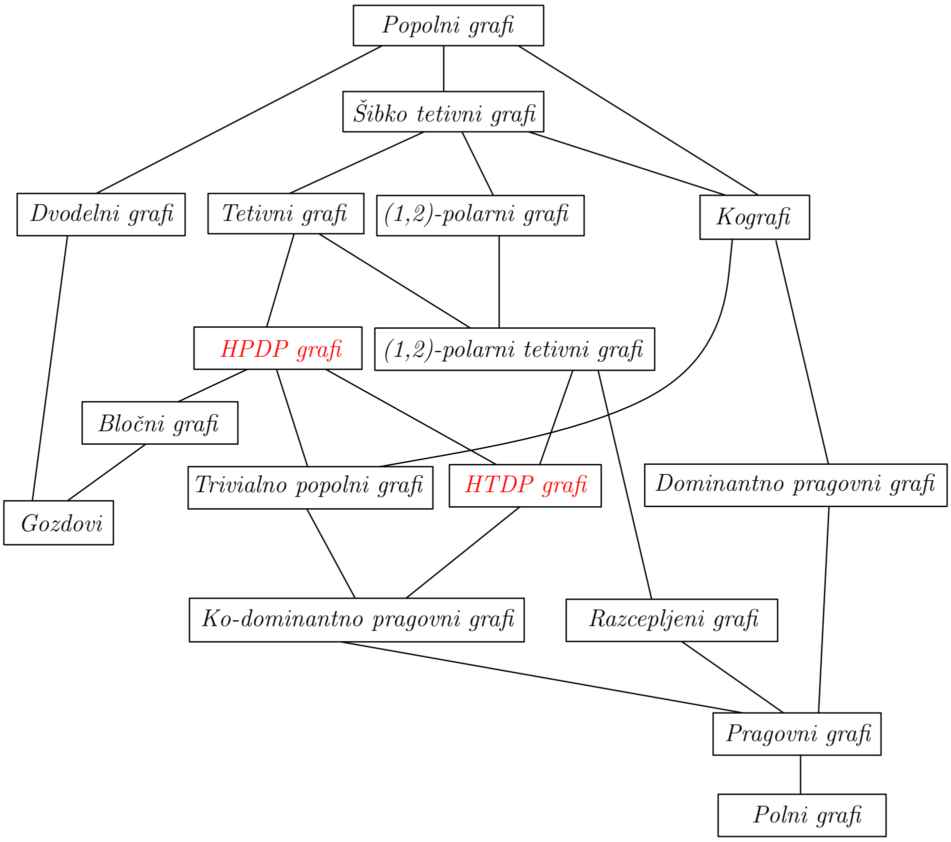
| | 2-prirejanje $M_0$ | popolno prirejanje $M \supseteq M_0$ |
|---|---|---|
| 3.1 | $(u_r, a_k)(u_{r+1}, a_k), (u_s, a_k)(u_s, b_\ell)$ | $M(k, \ell, r+2, 1)$ |
| 3.2 | $(u_r, a_k)(u_{r+1}, a_k), (u_s, a_{k+1})(u_s, b_\ell)$ | $M(k, \ell+3, r+2, s)$ |
| 3.3 | $(u_r, a_k)(u_r, b_\ell), (u_s, b_\ell)(u_{s+1}, b_\ell)$ | $M(k, \ell, s+2, 1)$ |
| 3.4 | $(u_r, a_k)(u_r, b_\ell), (u_s, b_t)(u_{s+1}, b_t)$, z $\ell \neq t$ | $M(k, \ell, r, s+3-\lvert\ell - t\rvert)$ |

Tabela 7.4: Konstrukcije popolnega prirejanja grafa $C_5 \square K_{2,4}$, ko 2-prirejanje vsebuje eno $C_5$-slojno in eno $K_{2,4}$-slojno povezavo.

S tem je dokaz zaključen. $\square$

# 8
# SKLEP

Rezultati, predstavljeni v disertaciji, dodajo in razširijo znanje v teoriji grafov, še posebej z vidika grafovskih razredov, pragovnih konceptov v grafih, povezanih s totalno in povezano dominacijo v grafih, ter z vidika ekvistarabilnih grafov in z njimi povezanih 2-razširljivih grafov in grafovskih produktov. Dodatno izpostavimo poglavji 3 in 5, ki predstavljajo tudi nove aplikacije teorije Boolovih funkcij in hipergrafov v teoriji grafov, obenem pa so algoritmične posledice dobljenih strukturnih rezultatov lahko potencialno zanimive tudi zaradi številnih praktičnih in teoretičnih aplikacij totalno dominantnih in povezano dominantnih množic, ki smo jih že omenili v uvodu. Z umestitvijo obravnavanih hereditarnih različic omenjenih grafovskih razredov v hierarhijo hereditarnih grafovskih razredov (glej Hassejev diagram na sliki 8.1) lahko hitro najdemo tudi nekaj dodatnih možnosti za nadaljnje raziskovanje. Tako za razred HTDP kot za razred HPDP grafov lahko namreč poiščemo optimizacijske ali odločitvene probleme, ki so v nekem podrazredu obravnavanega razreda učinkovito rešljivi, v nekem nadrazredu pa ne (razen če je P=NP), in naravno se pojavi vprašanje, kako je z rešljivostjo teh problemov v novem, vmesnem razredu grafov. Kot primer navedimo odločitveni problem, ali ima dan HPDP graf hamiltonsko pot (tj. pot, ki gre skozi vsako točko grafa natanko enkrat), ki je v razredu bločnih grafov rešljiv v linearnem času [60], medtem ko je v razredu tetivnih (in celo razcepljenih) grafov to NP-poln problem [80]. Enako vprašanje si lahko zastavimo tudi za HTDP grafe.




Slika 8.1: Hassejev diagram, ki prikazuje inkluzije med hereditarnimi grafovskimi razredi, omenjenimi v disertaciji. Pri preverjanju inkluzij nekaterih parov razredov smo si pomagali s spletno stranjo ISGCI [61]. Za več informacij o grafovskih razredih bralca napotujemo na [13, 45].

Poleg zgoraj omenjenih možnosti za nadaljnje raziskovanje pa disertacija pušča še nekaj odprtih vprašanj. Kot prvo omenimo vprašanje obstoja "povsem kombinatoričnega" algoritma polinomske časovne zahtevnosti za prepoznavanje TDP grafov. Odgovor na to vprašanje bi podal odgovor tudi na odprt problem obstoja "povsem kombinatoričnega" algoritma polinomske časovne zahtevnosti za prepoznavanje pozitivnih pragovnih Boolovih funkcij podanih v popolni DNO [29]. Iz rezultatov podanih v poglavju 3 lahko vidimo, da sta problema ekvivalentna. Za oba problema pa so znani le polinomski algoritmi, ki temeljijo na linearnem programiranju.

V luči tega vprašanja si nekaj pozornosti zagotovo zasluži preučitev strukture

TDP grafov. Kot smo pokazali v poglavju 3, je razred HTDP grafov podrazred $(1,2)$-polarnih tetivnih grafov in nadrazred ko-dominantno pragovnih grafov. Dalje izrek 3.20 implicira, da je poljuben razcepljen graf $G$ HTDP graf če in samo če je $F_{13}$-prost. Poleg tega smo v poglavju 4 pokazali, da če na seznamu prepovedanih induciranih podgrafov za razred HTDP grafov grafa $F_{11}$ in $F_{12}$ (glej sliko 3.2 na strani 35) zamenjamo z dvema ustreznima induciranima podgrafoma na 5 točkah (grafa $F_{11}^-$ in $F_{12}^-$ na sliki 4.2, stran 46), dobimo razred grafov, katerega vsak povezan element je z listi razširjen pragovni graf. Struktura slednjega implicira algoritem linearne časovne zahtevnosti za prepoznavanje grafov v tem razredu (glej izrek 4.7). Boljši vpogled v strukturo TDP grafov bi lahko torej impliciral obstoj bolj učinkovitega algoritma za prepoznavanje TDP grafov, kot je algoritem podan v izreku 3.20.

Ravno tako ostaja odprto vprašanje časovne zahtevnosti prepoznavanja PDP grafov. Kot smo pokazali v poglavju 3 (glej posledico 5.17), lahko HPDP grafe prepoznamo v polinomskem času. PDP grafe lahko prepoznamo v polinomskem času v poljubnem razredu grafov, ki ima polinomsko mnogo minimalnih točkovnih prerezov (posledica 5.18), v splošnem pa je problem odprt.

V poglavju 6 smo s pomočjo ekvistarabilnih grafov pokazali, da Orlinova domneva drži za komplemente povezavnih grafov dvodelnih grafov. Omenjeni razred je podrazred popolnih grafov, za katere ostaja Orlinova domneva odprta. Z algoritmičnega vidika pa omenimo, da je časovna zahtevnost problema prepoznavanja grafov odprta za vse naslednje grafovske razrede: ekvistarabilni grafi, krepko ekvistarabilni grafi, ekvistabilni grafi, krepko ekvistabilni grafi, splošno particijski grafi, trikotniški grafi. Rezultati, dobljeni v poglavju 6, pokažejo, da je za prva dva omenjena razreda problem polinomsko rešljiv za dvodelne grafe, za naslednje tri omenjene razrede je problem polinomsko rešljiv za komplemente povezavnih grafov dvodelnih grafov, za zadnji omenjen razred pa je problem polinomsko rešljiv za komplemente povezavnih grafov poljubnih grafov brez trikotnikov (ne nujno dvodelnih). Po lemi 6.12 se namreč omenjeni problem prevede na problem preverjanja $P_5$-omejenosti.

Nazadnje omenimo še nekaj možnosti za nadaljnje raziskovanje 2-razširljivih kartezičnih produktov grafov. V poglavju 7 smo videli, da je karakterizacija 2-

razširljivih kartezičnih produktov grafov, ko oba faktorja ne vsebujeta popolnega prirejanja, zelo odvisna od strukture faktorjev. Karakterizacija splošnega primera se zato zdi malo verjetna. Lahko pa bi raziskovanje nadaljevali v smeri karakterizacije 2-razširljivih kartezičnih produktov, kjer faktorja omejimo s konkretnimi grafovskimi razredi (cikli, potmi, polnimi dvodelnimi grafi itd.). Primer podan v trditvi 7.11 npr. motivira vprašanje karakterizacije 2-razširljivih kartezičnih produktov ciklov in polnih dvodelnih grafov.

Spomnimo, da z $\nu(G)$ označimo velikost največjega prirejanja v grafu $G$. Primeri povezanih grafov brez popolnega prirejanja, katerih kartezični produkt je 2-razširljiv, motivirajo tudi naslednje vprašanje. Ali za vsako naravno število $k$ obstajata povezana grafa $G$ in $H$, za katera velja $\nu(G) < |V(G)|/2 - k$ in $\nu(H) < |V(H)|/2 - k$, njun kartezični produkt $G \Box H$ pa je 2-razširljiv?

# LITERATURA IN VIRI


[1] Ananchuen, W., Ananchuen, N. in Plummer, M. D., Connected domination: vertex criticality and matchings, *Util. Math.* 89 (2012) pp. 141–159.

[2] Ananchuen, N. in Caccetta, L., A note on $k$-extendable graphs and independence number, *Australas. J. Combin.* 12 (1995) pp. 59–65.

[3] Bartha, M. in Gombás, E., A structure theorem for maximum internal matching in graphs, *Inform. Process. Lett.* 40 (1991) pp. 289–294.

[4] Bartha, M. in Krész, M., Tutte type theorems for graphs having a perfect internal matching, *Inform. Process. Lett.* 91 (2004) pp. 277–284.

[5] Bartha, M. in Krész, M., Deciding the deterministic property for soliton graphs, *Ars Math. Contemp.* 2 (2009) pp. 121–136.

[6] Benzaken, C. in Hammer, P. L., Linear separation of dominating sets in graphs, v Bollobás, B. (ed.), Advances in Graph Theory, Ann. Discrete Math., 3, North-Holland, 1978, pp. 1–10.

[7] Berge, C., *Hypergraphs*, vol. 45 of North Holland Math. Library, Horth Holland, Amsterdam, 1989.

[8] Bickle, A., Two short proofs on total domination, *Discuss. Math. Graph Theory* 33 (2013) pp. 457–159.

[9] Birkhoff, G., Three observations on linear algebra, *Univ. Nac. Tucuman. Rev. Ser. A* 5 (1946) pp. 147–151.

[10] Blum, J., Ding, M., Thaeler, A. in Cheng, X., Connected dominating set in sensor networks and MANETs, v Du, D.Z. in Pardalos, P. (eds.), Handbook of Combinatorial Optimization, Kluwer Academic Publishers, 2004, pp. 329–369.

[11] Bondy, J. A. in Murty, U. S. R., *Graph Theory*, Springer, New York, London, 2007.

[12] Boros, E., Gurvich, V. in Milanič, M., 1-Sperner hypergraphs, *arXiv:1510.02438* [math.CO] (2015).

[13] Brandstädt, A., Le, V. B. in Spinrad, J. P., *Graph Classes: A Survey*, SIAM Monogr. Discrete Math. Appl., 1999.

[14] Brešar, B., Dorbec, P., Goddard, W., Hartnell, B. L., Henning, M. A., Klavžar, S. in Rall, D. F., Vizing's conjecture: a survey and recent results, *J. Graph Theory* 69(1) (2012) pp. 46–76.

[15] Brešar, B., Henning, M. A. in Rall, D. F., Paired-domination of Cartesian products of graphs and rainbow domination, *Electron. Notes Discrete Math.* 22 (2005) pp. 233–237.

[16] Brewster, R. C., Hell, P. in Rizzi, R., Oriented star packings, *J. Combon. Theory Ser. B* 98-3 (2008) pp. 558–576.

[17] Butenko, S., Kahruman - Anderoglu, S. in Ursulenko, O., On connected domination in unit ball graphs, *Optim. Lett.* 5(2) (2011) pp. 195–205.

[18] Caro, Y., West, D. B. in Yuster, R., Connected domination and spanning trees with many leaves, *SIAM J. Discrete Math.* 13(2) (2000) pp. 202–211.

[19] Chandran, L. S., Das, A., Rajendraprasad, D. in Varma, N. M., Rainbow connection number and connected dominating sets, *J. Graph Theory* 71(2) (2012) pp. 206–218.

[20] Chandran, L. S. in Grandoni, F., A linear time algorithm to list the minimal separators of chordal graphs, *Discrete Math.* 306(3) (2006) pp. 351–358.

[21] Chellali, M., Favaron, O., Hansberg, A. in Volkmann, L., $k$-Domination and $k$-Independence in Graphs: A Survey, *Graphs Combin.* 28(1) (2012) pp. 1–55.

[22] Chlebík, M. in Chlebíkova, J., Approximation hardness of dominating set problems in bounded degree graphs, *Inform. and Comput.* 206 (2008) pp. 1264–1275.

[23] Chow, C. K., Boolean functions realizable with single threshold devices, *Proc. IRE* 49 (1961) pp. 370–371.

[24] Chvátal, V., *Linear programming*, Freeman, New York, 1983.

[25] Chvátal, V. in Hammer, P. L., Set-packing and threshold graphs, Research Report, Comp. Sci. Dept. University of Waterloo, Canada, 1973.

[26] Chvátal, V. in Hammer, P. L., Aggregation of inequalities in integer programming, v *Studies in integer programming (Proc. Workshop, Bonn, 1975)*, pp. 145–262. Ann. Discrete Math., vol. 1, North Holland, Amsterdam, 1977.

[27] Cicalese, F., Milanič, M. in Vaccaro, U., On the approximability and exact algorithms for vector domination and related problems in graphs, *Discrete Appl. Math.* 161 (2013) pp. 750–767.

[28] Corneil, D. G. in Stewart, L., Dominating sets in perfect graphs, *Discrete Math.* 86 (1990) pp. 145–164.

[29] Crama, Y. in Hammer, P. L., *Boolean Functions – Theory, Algorithms, and Applications*, Cambridge University Press, New York, 2011.

[30] De Jaenisch, C. F., Traité des Applications de l'Analyse mathematique au Jeu des Échecs, *Petrograd* (1862) .

[31] De Temple, D. W., Dineen, M. J., Robertson, J. M. in McAvaney, K. L., Recent examples in the theory of partition graphs, *Discrete Math.* 113(1-3) (1993) pp. 255–258.

[32] DeTemple, D. W. in Robertson, J. M., Graphs associated with triangulations of lattice polygons, *J. Aust. Math. Soc. Ser. A* 47 (1989) pp. 391–398.

[33] Diestel, R., *Graph Theory*, vol. 173 of Graduate texts in mathematics, Springer, New York, 2012.,

[34] Dirac, G. A., On rigid circuit graphs, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 25 (1961) pp. 71–76.

[35] Dorbec, P., Gravier, S., Klavžar, S. in Špacapan, S., Some results on total domination in direct products of graphs, *Discuss. Math. Graph Theory* 26 (2006) pp. 103–112.

[36] Du, D. Z. in Wan, P. J., *Connected Dominating Set: Theory and Applications*, vol. 77 of Springer Optimization and Its Applications, Springer, New York, 2013.

[37] Eiter, T. in Gottlob, G., Identifying the minimal transversals of a hypergraph and related problems, *SIAM J. Comput.* 24(6) (1995) pp. 1278–1304.

[38] Fang, Q., Kim, H. K. in Lee, D. S., Total dominating set games, v Deng, X. in Ye, Y. (eds.), WINE 2005, LNCS, 3828, Springer-Verlag, 2005, pp. 520–530.

[39] Edmonds, J., Maximum matching and a polyhedron with $0,1$-vertices, *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B* 69 (1965) pp. 125–130.

[40] Elgot, C. C., Truth functions realizable by single threshold organs, v IEEE Symposium on Switching Circuit Theory and Logical Design, IEEE Computer Society, 1960, pp. 225–245.

[41] Fomin, F. V., Grandoni, F. in Kratsch, D., Solving connected dominating set faster than $2^n$, *Algorithmica* 52(2) (2008) pp. 153–166.

[42] Gagarin, A. V. in Metelsky, Y. M., Characterization of $(1,2)$-polar graphs, *Vestsi Nats. Akad. Navuk Belarusi Ser. Fiz. - Mat. Navuk* 142(3) (1999) pp. 107–112.

[43] Garey, M. R. in Johnson, D. S., *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*, W.H. Freeman, 1979.

[44] Golumbic, M. C., Trivially perfect graphs, *Discrete Math.* 24(1) (1978) pp. 105–107.

[45] Golumbic, M. C., *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, vol. 57 of Ann. Discrete Math., Elsevier Science B.V., Amsterdam, Second Edition, 2004.

[46] Govorčin, J. in Škrekovski, R., On the connectivity of Cartesian product of graphs, *Ars Math. Contemp.* 7 (2014) pp. 293–297.

[47] Grötschel, M., Lovász, L. in Schrijver, A., *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer, 1993.

[48] Gurvich, V. in Khachiyan, L., On generating the irredundant conjunctive and disjunctive normal forms of monotone Boolean functions, *Discrete Appl. Math.* 96-97 (1999) pp. 363–373.

[49] Győri, E. in Plummer, M. D., The Cartesian product of a $k$-extendable and an $l$-extendable graph is $(k+l+1)$-extendable, *Discrete Math.* 101(1-3) (1992) pp. 87–96.

[50] Hačijan, L. G., A polynomial algorithm in linear programming (v ruščini), *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 244 (5) (1979) pp. 1093–1096.

[51] Hall, P., On Representatives of Subsets, *J. London Math. Soc.* 10 (1) (1935) pp. 26—30.

[52] Hammack, R., Imrich, W. in Klavžar, S., *Handbook of Product Graphs, Second Edition*, CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA, 2011.

[53] Harant, J., Pruchnewski, A. in Voigt, M., On dominating sets and independent sets of graphs, *Combin. Probab. Comput.* 8(06) (1999) pp. 547–553.

[54] Harary, F., The structure of threshold graphs, *Riv. Mat. Sci. Econom. Social.* 2 (1979) pp. 169–172.

[55] Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T. in Slater, P. J., *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.

[56] Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T. in Slater, P. J., *Domination in Graphs: Advanced Topics*, Marcel Dekker, New York 1998.

[57] Heggernes, P., Lokshtanov, D., Mihai, R. in Papadopoulos, C., Cutwidth of split graphs and threshold graphs, *SIAM J. Discrete Math.* 25(3) (2011) pp. 1418–1437.

[58] Henning, M. A., Recent results on total domination in graphs: A survey, *Discrete Math.* 309 (2009) pp. 32–63.

[59] Henning, M. A. in Yeo, A., *Total Domination in Graphs*, Springer, 2013.

[60] Hung, R. W. in Chang, M. S., Linear-time algorithms for the Hamiltonian problems on distance-hereditary graphs, *Theoret. comput. Sci.* 341 (2005) pp. 411–440.

[61] Information System on Graph Classes and their Inclusions (ISGCI) by H.N. Ridder et al. 2001-2014, dostopno na http://www.graphclasses.org [1.1.2016]

[62] Kavvadias, D. J. in Stavropoulos, E. C., An efficient algorithm for the transversal hypergraph generation, *J. Graph Algorithms Appl.* 9(2) (2005) pp. 239–264.

[63] Kanté, M. M., Limouzy, V., Mary, A. in Nourine, L., On the enumeration of minimal dominating sets and related notions, *SIAM J. Discrete Math.* 28-4 (2014) pp. 1916–1929.

[64] Korach, E., Peled, U. N. in Rotics, U., Equistable distance-hereditary graphs, *Discrete Appl. Math.* 156(4) (2008) pp. 462–477.

[65] Kumar, P. S. in Madhavan, C. E. V., Minimal vertex separators of chordal graphs, *Discrete Appl. Math.* 89(1-3) (1998) pp. 155–168.

[66] Kratsch, D., Domination and total domination on asteroidal triple-free graphs, *Discrete Appl. Math.* 99 (2000) pp. 111–123.

[67] Levit, V. E. in Milanič, M., Equistable simplicial, very well-covered, and line graphs, *Discrete Appl. Math.* 165 (2014) pp. 205–212.

[68] Levit, V. E., Milanič, M. in Tankus, D., On the recognition of $k$-equistable graphs, v Proc. 38th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2012), 2012, pp. 286–296.

[69] Liu, J. in Yu, Q. L., Matching extensions and products of graphs, v *Quo vadis, graph theory?*, Ann. Discrete Math. 55, North-Holland, 1993, pp. 191–200.

[70] Little, C., Grant, D. in Holton, D., On defect-$d$ matchings in graphs, *Discrete Math.* 13 (1975) pp. 41–54.

[71] Lovász, L. in Plummer, M. D., *Matching Theory*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986.

[72] Mahadev, N. in Peled, *Threshold Graphs and Related Topics*, Ann. Discrete Math., North Holland, Amsterdam, 1995.

[73] Mahadev, N., Peled, U. N. in Sun, F., Equistable graphs, *J. Graph Theory* 18(3) (1994) pp. 281–299.

[74] Manca, P., On a simple characterisation of threshold graphs, *Riv. Mat. Sci. Econom. Social.* 2 (1979) pp. 3–8.

[75] McAvaney, K. L., Robertson, J. M. in De Temple, D. W., A characterization and hereditary properties for partition graphs, *Discrete Math.* 113(1-3) (1993) pp. 131–142.

[76] Miklavič, Š. in Milanič, M., Equistable graphs, general partition graphs, triangle graphs and graph products, *Discrete Appl. Math.* 159(11) (2011) pp. 1148–1159.

[77] Milanič, M., Orlin, J. in Rudolf, G., Complexity results for equistable graphs and related classes, *Ann. Oper. Res.* 188 (2011) pp. 359–370.

[78] Milanič, M. in Trotignon, N., Equistarable graphs and counterexamples to three conjectures on equistable graphs, *J. Graph Theory,* v tisku ( DOI: 10.1002/jgt.22040) .

[79] Millenium problems. Clay Mathematics Institute, dostopno na http://www.claymath.org/millenium-problems/p-vs-np-problem [8.12.2014]

[80] Müller, H., Hamiltonian circuits in chordal bipartite graphs, *Discrete Math.* 156 (1996) pp. 291–298.

[81] Nandu Kishore, A. H. in Sasireka, A., Applications of dominating set of graph in computer networks, *International J. of Engineering Sciences and Research Technology* 3(1) (2014) pp. 170–173.

[82] Payan, C., A class of threshold and domishold graphs: equistable and equidominating graphs, *Discrete Math.* 29-1 (1980) pp. 47–52.

[83] Peled, U. N. in Rotics, U., Equistable chordal graphs, *Discrete Appl. Math.* 132(1-3) (2003) pp. 203-210.

[84] Peled, U. N. in Simeone, B., Polynomial-time algorithms for regular set-covering and threshold synthesis, *Discrete Appl. Math.* 12(1) (1985) pp. 57–69.

[85] Plummer, M. D., On $n$-extendable graphs, *Discrete Math.* 31(2) (1980) pp. 201–210.

[86] Plummer, M. D., Matching extension in bipartite graphs, v Proceedings of the seventeenth Southeastern International conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Boca Raton, Fla.,1986), vol. 54, (1986), pp. 245–258.

[87] Sarkar, S. in Savarajan, N., Hypergraph models for cellular mobile communication systems, *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 47(2) (1998) pp. 460–471.

[88] Schaudt, O., A note on connected dominating sets of distance-hereditary graphs, *Discrete Appl. Math.* 160(9) (2012) pp. 1394–1398.

[89] Schrijver, A., *Combinatorial Optimization - Polyhedra and Efficinecy*, Springer, 2003.

[90] Schrijver, A., *Theory of Linear and Integer Programming*, John Wiley & Sons, Chichester, 1986.

[91] Shen, H. in Liang, W., Efficient enumeration of all minimal separators in a graph, *Theoret. Comput. Sci.* 180(1-2) (1997) pp. 169–180.

[92] Špacapan, S., Connectivity of Cartesian products of graphs, *Appl. Math. Lett.* 21(7) (2008) pp. 682–685.

[93] Tian, F. in Xu, J. M., A note on distance domination numbers of graphs, *Australas. J. Combin.* 43 (2009) pp. 181–190.

[94] Tutte, W. T., The Factorization of Linear Graphs, *J. London Math. Soc.* 22 (1947) pp. 107–111.

[95] von Neumann, J., A certain zero-sum two-person game equivalent to the optimal assignment problem, Contributions to the theory of games, vol. 2, pp. 5–12. Annals of Mathematics Studies, 28, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., (1953).

[96] West, D. B., *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, 2000.

[97] Xu, J. M. in Yang, C., Connectivity and super-connectivity of Cartesian product graphs, *Ars Combin.* 95 (2010) pp. 235–245.

[98] Yan, J. H., Chen, J. J. in Chang, G. J., Quasi-threshold graphs, *Discrete Appl. Math.* 69(3) (1996) pp. 247–255.

[99] Yu, Q., Characterizations of various matching extensions in graphs, *Australas. J. Combin.* 2 (1993) pp. 55–64.

[100] Zhang, F. in Zhang, H., Construction for bicritical graphs and $k$-extendable bipartite graphs, *Discrete Math.* 306(13) (2006) pp. 1415–1423.

[101] Zhang, Z. B., Zhang, X., Lou, D. in Wen, X., Minimum size of $n$-factor-critical graphs and $k$-extendable graphs, *Graphs Combin.* 28(3) (2012) pp. 433–448.

[102] Zverovich, I. E. in Zverovich, O. I., Independent domination in hereditary classes, *Theoret. Comput. Sci.* 352 (2006) pp. 215–225.

# Kazalo slik

# Kazalo tabel