UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Magistrsko delo

Integriranje na kolobarjih

(Integrations on rings)

Ime in priimek: Jana Kosec
Študijski program: Matematične znanosti, 2. stopnja
Mentor: izr. prof. dr. Iztok Banič

Koper, september 2015

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK:	Jana KOSEC
Naslov magistrskega dela:	Integriranje na kolobarjih
Kraj:	Koper
Leto:	2015
Število listov: 62 Število slik: 1 Število referenc: 5	
Mentor:	izr. prof. dr. Iztok Banič
UDK:	512.552(043.2)
Ključne besede:	kolobar, integriranje, jordansko integriranje, odvajanje, jordansko odvajanje
Math. Subj. Class. (2010):	16W25, 16W99

Izvleček

V magistrskem delu bomo posplošili pojem integriranja s kolobarja realnih funkcij na poljuben kolobar. Natančno bodo predstavljene osnovne lastnosti integriranja na kolobarjih: integral kot večlična funkcija, struktura integrala, homogenost ter aditivnost integrala, integriranje po delih, integriranje potenc ter jordanska integriranja.

Key words documentation

Name and SURNAME:	Jana KOSEC
Title of Master's degree:	Integrations on rings
Place:	Koper
Year:	2015
Number of pages: 62	Number of figures: 1 Number of references: 5
Mentor:	Assoc. Prof. Iztok Banič, PhD
UDK:	512.552(043.2)
Key words:	ring, integration, Jordan integration, derivation, Jordan derivation
Math. Subj. Class. (2010):	16W25, 16W99

Abstract

In this work we generalize the concept of integration from the ring of real functions to arbitrary rings. We present the following basic properties of integration on rings: integration as a set-valued function, structure of integrals, homogeneity and additivity of integrations, integration by parts, integration of powers of elements, and Jordan integrations.

Kazalo vsebine

Kazalo slik

Zahvala

Za pomoč pri izdelavi magistrske naloge se iskreno zahvaljujem mentorju, izr. prof. dr. Iztoku Baniču.

Poglavje 1

UVOD

V magistrskem delu bomo posplošili pojem integriranja s kolobarja realnih funkcij na poljuben kolobar. Natančno bodo predstavljene osnovne lastnosti integriranja na kolobarjih, ki so predstavljene v [1]:

1. integral kot večlična funkcija,
2. struktura integrala,
3. homogenost in aditivnost integrala,
4. integriranje po delih,
5. integriranje potenc,
6. lastnosti integrala, porojene iz ustreznega odvajanja,
7. jordanska integriranja.

Medtem ko so posplošitve odvajanj s kolobarja realnih funkcij na poljuben kolobar predmet številnih raziskav že desetletja (glej na primer [2], [3], kjer se nahaja več virov), je bila podobna posplošitev integriranja predstavljena šele pred kratkim [1].

Tako to področje še ni obširneje raziskano. Z uvedbo integriranj v teorijo kolobarjev se odpirajo vrata novim raziskavam, kot so:

1. nov pogled na odvajanja na kolobarjih (prava odvajanja),
2. nov pogled na že poznan nedoločeni integral funkcij,
3. raziskave lastnosti integriranj na kolobarjih,
4. posplošitev pojma diferencialnih enačb s kolobarja realnih funkcij na poljuben kolobar.

Magistrsko delo je sestavljeno iz štirih poglavij, katerih struktura je v nadaljevanju podrobneje predstavljena. V drugem poglavju si ogledamo osnovne pojme matematične analize (odvod in nedoločeni integral realnih funkcij) in algebre (kolobarji in njihove lastnosti), ki so potrebni za nadaljnje delo. V tretjem poglavju najprej predstavimo odvajanja na kolobarjih in nato z njihovo pomočjo definiramo integriranja na kolobarjih ter predstavimo njihove glavne lastnosti. V četrtem poglavju so predstavljena še jordanska integriranja in njihove lastnosti.

Poglavje 2

OSNOVNI POJMI

V tem poglavju bomo opisali in predstavili osnovne pojme, ki jih bomo potrebovali pri obravnavi glavnih rezultatov. Najprej si bomo ogledali odvod funkcije, nato nedoločeni integral funkcije in nazadnje še osnovne lastnosti kolobarjev.

2.1 ODVOD FUNKCIJE

Naj bodo $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$. Če obstaja limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

rečemo, da je funkcija v točki x_0 odvedljiva. Tej limiti pravimo odvod funkcije f v točki x_0 ter jo označimo z $f'(x_0)$.

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je odvedljiva, če je odvedljiva v vsaki točki $x \in D$.

Primer 2.1 Po definiciji izračunajmo odvod funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom $f(x) = x^3$. Za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2. \end{aligned}$$

Naj bosta f in g funkciji $D \to \mathbb{R}$. Dogovorimo se, da je funkcija f odvod funkcije g, če za poljuben $x \in D$ velja, da je $g'(x) = f(x)$. V tem primeru pišemo

$$g' = f.$$

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$. V tem primeru bomo z $O(D)$ označevali družino vseh odvedljivih funkcij $D \to \mathbb{R}$ in z $\mathbb{R}^D$ družino vseh funkcij $D \to \mathbb{R}$. Očitno je $O(D)$ poddružina družine $\mathbb{R}^D$. Za poljubni funkciji $f, g \in \mathbb{R}^D$ in za poljuben $c \in \mathbb{R}$ naj bodo $f + g, f \cdot g, c \cdot f : D \to \mathbb{R}$ funkcije, definirane s predpisi:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{za vsak } x \in D,$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \text{za vsak } x \in D,$$

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x), \quad \text{za vsak } x \in D.$$

V posebnem primeru, če je $g(x) \neq 0$ za vsak $x \in D$, je funkcija $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{za vsak } x \in D.$$

Definicija 2.1. *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$. Preslikavi*

$$d : O(D) \to \mathbb{R}^D,$$

ki je definirana s predpisom $d(f) = f'$, pravimo odvajanje.

Primer 2.2 Ker je za vsak $x \in \mathbb{R}$, $(\sin x)' = \cos x$, velja

$$d(\sin) = \cos .$$

2.2 PRAVILA ZA ODVAJANJE

V tem razdelku si bomo ogledali osnovne lastnosti preslikave d, ki smo jo definirali zgoraj.

Naslednji izrek pove, da je odvod konstantne funkcije enak ničelni funkciji.

Izrek 2.1. *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ odprt interval. Naj bo še $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija, definirana s predpisom $f(x) = c$ za vsak $x \in D$, kjer je $c \in \mathbb{R}$. Potem je f odvedljiva funkcija in velja $d(f) = 0$, kjer je $0 : D \to \mathbb{R}$ funkcija, definirana s predpisom $0(x) = 0$ za vsak $x \in D$.*

Dokaz. Naj bo $x \in D$. Tedaj je

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

To pomeni, da je $d(f) = 0$.

$\square$

Izrek 2.2. *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ odprt interval. Naj bosta še $f, g : D \to \mathbb{R}$ odvedljivi funkciji. Potem je $f \pm g$ odvedljiva funkcija in velja $d(f \pm g) = d(f) \pm d(g)$.*

Dokaz. Označimo $F = f \pm g$. Naj bo $x \in D$. Tedaj je

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right).$$

Ker sta f in g odvedljivi (tudi v x), obstajata limiti $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ter $\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ in velja

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \pm \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

To pomeni, da je $d(f \pm g) = d(f) \pm d(g)$.

□

Izrek 2.3. *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ odprt interval. Naj bosta še $f, g : D \to \mathbb{R}$ odvedljivi funkciji. Potem je $f \cdot g$ odvedljiva funkcija in velja $d(f \cdot g) = d(f) \cdot g + f \cdot d(g)$.*

Dokaz. Naj bo $F = f \cdot g$. Tedaj za vsak $x \in D$ velja:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right).$$

Ker limiti $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)\right)$ in $\lim\limits_{h\to 0}\left(f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$ obstajata (saj sta f in g odvedljivi), velja

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h) + \lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Tako smo dokazali, da je $d(f \cdot g) = d(f) \cdot g + f \cdot d(g)$.

□

Posledica 2.1. *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ odprt interval. Naj bosta še $f, g : D \to \mathbb{R}$ odvedljivi funkciji. Če je $g(x) = c$ za vsak $x \in D$, kjer je c realno število, tedaj je $d(g \cdot f) = g \cdot d(f)$.*

Dokaz. Posledica sledi neposredno iz izrekov 2.3 ter 2.1.

□

Izrek 2.4. *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ odprt interval. Naj bosta še $f, g : D \to \mathbb{R}$ odvedljivi funkciji. Če je za vsak $x \in D$, $g(x) \neq 0$, tedaj je $\frac{f}{g}$ odvedljiva funkcija in velja*

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{d(f) \cdot g - f \cdot d(g)}{g^2}.$$

Dokaz. Naj bo $F = \frac{f}{g}$. Tedaj za vsak $x \in D$ velja:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x) - f(x)(g(x+h) - g(x))}{hg(x)g(x+h)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x) - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x)g(x+h)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Tako smo dokazali, da je $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{d(f) \cdot g - f \cdot d(g)}{g^2(x)}$.

□

Razdelek bomo zaključili z nekaj preprostimi zgledi.

Primer 2.3 Naj bosta funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podani s predpisoma $f(x) = x^2$ in $g(x) = \sin x$. Izračunajmo odvod funkcije $f + g$.

$$d(f + g)(x) = (x^2 + \sin x)' = 2x + \cos x.$$

Primer 2.4 Naj bosta funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podani s predpisoma $f(x) = x^2$ in $g(x) = \sin x$. Izračunajmo odvod funkcije $f \cdot g$.

$$d(f \cdot g)(x) = (x^2 \cdot \sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

Primer 2.5 Naj bosta funkciji $f, g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, podani s predpisoma $f(x) = \sin x$

in $g(x) = x^2$. Izračunajmo odvod funkcije $\frac{f}{g}$.

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\frac{\sin x}{x^2}\right)' = \frac{\cos x \cdot x^2 - \sin x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x^2 \cos x - 2x \sin x}{x^4}.$$

2.3 NEDOLOČENI INTEGRAL

V tem razdelku bomo predstavili osnovne pojme v povezavi z nedoločenim integralom. Sama definicija nedoločenega integrala se bo v formulaciji malce razlikovala od standardnih formulacij, ki jih ponavadi najdemo v literaturi. V literaturi namreč ponavadi naletimo na naslednja pristopa:

1. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ ter naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija. Vsaka funkcija $F : D \to \mathbb{R}$, za katero velja, da je $F' = f$ (oziroma $d(F) = f$), se imenuje nedoločeni integral funkcije f.

2. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ ter naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija. Naj bo še $F : D \to \mathbb{R}$ taka funkcija, da je $d(F) = f$. Nedoločeni integral funkcije f je družina funkcij

$$\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Opomba 2.1. *Za vsako realno število c, $F + c$ označuje funkcijo $F + c : D \to \mathbb{R}$, definirano s predpisom*

$$(F + c)(x) = F(x) + c.$$

V primeru, ko je D povezan interval, sta zgornja pristopa ekvivalentna, saj velja naslednji izrek.

Izrek 2.5. *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ (povezan) interval ter naj bodo $f, F, G : D \to \mathbb{R}$ funkcije, kjer sta F in G odvedljivi funkciji. Velja, da je $d(F) = d(G) = f$ natanko tedaj, ko obstaja taka konstanta $c \in \mathbb{R}$, da je $G = F + c$.*

Dokaz. Dokaz najdemo na strani 213 v [5].

□

V magistrskem delu nas bodo zanimale tudi funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, kjer D ni nujno (povezan) interval – zanimali nas bodo primeri, kjer je D na primer nepovezana unija paroma disjunktnih odprtih intervalov. Glej naslednje primere.

Primer 2.6 Naj bo $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ funkcija, definirana s predpisom $f(x) = \frac{1}{x}$. Opazimo, da je funkcija f definirana na uniji dveh disjunktnih odprtih intervalov $(-\infty, 0)$ in $(0, \infty)$ – njeno definicijsko območje ni povezano. V literaturi pogosto naletimo na formulo, ki pravi

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln |x| + c.$$

Ker definicijsko območje funkcije f ni povezano, opisana formula ne poda vseh nedoločenih integralov dane funkcije. Namreč, funkcija $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, ki je definirana s predpisom

$$g(x) = \ln |x| + \begin{cases} 1; & x > 0 \\ 2; & \text{sicer} \end{cases}$$

je tudi funkcija, katere odvod je enak f in ni oblike $\ln |x| + c$. Izkaže se, da je s formulo

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln |x| + \begin{cases} c_1; & x > 0 \\ c_2; & \text{sicer} \end{cases}$$

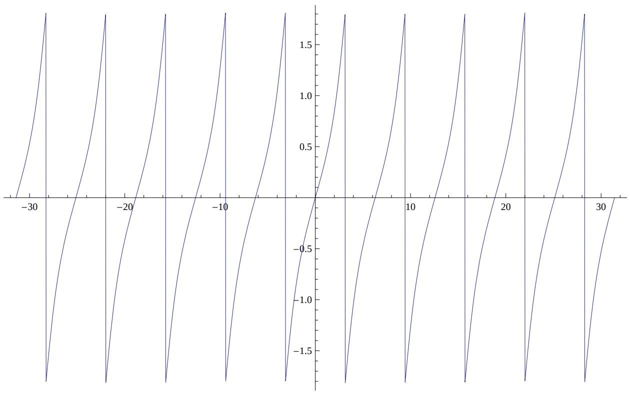
opisana družina vseh takih funkcij $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, katerih odvod je funkcija f.

V naslednjem primeru bomo uporabili znano metodo univerzalne substitucije.

Primer 2.7 Pri računanju integrala $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$ z uvedbo nove spremenljivke $t = \tan \frac{x}{2}$ (glej [5], stran 264) dobimo, da je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2 + \cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + c.$$

Označimo $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$ in $g_c(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + c$ za vsak x. Opazimo, da je definicijsko območje funkcije f enako $\mathbb{R}$, definicijsko območje funkcije g_c pa ni enako $\mathbb{R}$ za noben c, saj na primer funkcija g_c ni definirana pri $x_0 = \pi$. To pomeni, da (če upoštevamo definicijo nedoločenega integrala po prvem ali drugem pristopu, ki sta opisana zgoraj) funkcija g_c ni nedoločeni integral funkcije f za noben c. Graf funkcije g_c za $c = 0$ prikazuje naslednja slika.



Slika 2.1: Graf funkcije g_0.

Če povezane veje grafa funkcije g_0 na zgornji sliki premaknemo za ustrezne konstante tako, da lahko dobljeno funkcijo razširimo do zvezne funkcije g na celi realni osi $\mathbb{R}$, tedaj lahko hitro ugotovimo, da je dobljena funkcija g nedoločeni integral funkcije f. Družina vseh nedoločenih integralov funkcije f je v tem primeru $\{g + c \mid c \in \mathbb{R}\}$.

Naša definicija nedoločenega integrala bo zajemala tudi primere funkcij, ki so definirane na nepovezanih množicah $D \subseteq \mathbb{R}$.

Definicija 2.2. *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ ter naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija. Nedoločeni integral funkcije f je družina funkcij*

$$\{F : D \to \mathbb{R} \mid d(F) = f\}.$$

Oznaka 2.1. *Nedoločeni integral funkcije f bomo označevali takole:*

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

ali krajše

$$\int f.$$

Definicija 2.3. *Naj bosta $A, B \subseteq \mathbb{R}^D$ in naj bo $c \in \mathbb{R}$. Tedaj definiramo*

$$A + B = \{f + g \mid f \in A, g \in B\}$$

ter

$$c \cdot A = \{c \cdot f \mid f \in A\}.$$

Naslednji izrek med drugim pove, da če integral neke funkcije ni prazna družina, tedaj vsebuje neštevno mnogo paroma različnih funkcij.

Izrek 2.6. *Naj bo $F \in \int f$. Tedaj je za vsako konstanto $c \in \mathbb{R}$ tudi $F + c \in \int f$.*

Dokaz. Ker je $d(F + c) = d(F) + d(c) = d(F)$, sledi, da je $F + c \in \int f$, za poljuben $c \in \mathbb{R}$.

□

2.4 PRAVILA ZA INTEGRIRANJE

V tem razdelku bomo preučili linearnost nedoločenega integrala in si ogledali integracijo po delih. Najprej bomo dokazali, da je nedoločeni integral aditivna preslikava.

Izrek 2.7. *Naj bosta f in g funkciji $D \to \mathbb{R}$, taki, da sta $\int f$ in $\int g$ neprazni množici.*

Tedaj je tudi $\int(f+g)$ *neprazna množica ter velja*

$$\int(f+g) = \int f + \int g.$$

Dokaz. Naj bo $F \in \int f$ in $G \in \int g$. Najprej dokažimo, da je $\int(f+g) \neq \emptyset$. Ker je $d(F+G) = d(F) + d(G) = f + g$, sledi, da je $F + G \in \int(f+g)$. Dokažimo še enakost množic

$$\int(f+g) = \int f + \int g.$$

Naj bo $H \in \int(f+g)$. Dokazali bomo, da je $H \in \int f + \int g$ tako, da bomo poiskali funkciji $H_1 \in \int f$ in $H_2 \in \int g$, za kateri je $H = H_1 + H_2$. Definirajmo $H_1 = F$ in $H_2 = H - F$. Očitno je $H_1 + H_2 = H$. Ker je $d(H_1) = d(F) = f$ in $d(H_2) = d(H - F) = d(H) - d(F) = f + g - f = g$, velja $H \in \int f + \int g$. Tako smo dokazali $\int(f+g) \subseteq \int f + \int g$. Dokažimo še obratno inkluzijo. Naj bo $H \in \int f + \int g$. To pomeni, da obstajata taka $H_1 \in \int f$ ter $H_2 \in \int g$, da je $H_1 + H_2 = H$. Ker je $d(H) = d(H_1 + H_2) = d(H_1) + d(H_2) = f + g$, sledi, da je $H \in \int(f+g)$.

□

Naslednji izrek govori o homogenosti nedoločenega integrala.

Izrek 2.8. *Naj bo* f *funkcija* $D \to \mathbb{R}$*, taka, da je* $\int f$ *neprazna množica in naj bo* $c \in \mathbb{R}$ *poljuben od* 0 *različen element. Tedaj je tudi* $\int(c \cdot f)$ *neprazna množica ter velja*

$$\int(c \cdot f) = c \cdot \int f.$$

Dokaz. Naj bo $F \in \int f$. Najprej dokažimo, da je $\int(c \cdot f) \neq \emptyset$. Ker je $d(c \cdot F) = c \cdot d(F) = c \cdot f$, sledi, da je $c \cdot F \in \int(c \cdot f)$, kar pomeni, da je $\int(c \cdot f) \neq \emptyset$. Dokažimo še, da velja $\int(c \cdot f) = c \cdot \int f$. Najprej dokažimo $\int(c \cdot f) \subseteq c \cdot \int f$. Naj bo $H \in \int(c \cdot f)$. Poiskali bomo tak $H_1 \in \int f$, da bo veljalo, da je $H = c \cdot H_1$. Naj bo $H_1 = \frac{1}{c} \cdot H$. Očitno je $c \cdot H_1 = c \cdot \frac{1}{c} \cdot H = H$. Ker je $d(H_1) = d(\frac{1}{c} \cdot H) = \frac{1}{c} \cdot d(H) = \frac{1}{c} \cdot c \cdot f = f$, sledi, da je

$H_1 \in \int f$. Dokažimo še obratno inkluzijo. Naj bo $H \in c \cdot \int f$. Tedaj obstaja $H_1 \in \int f$, tako da je $H = c \cdot H_1$. Ker je $d(H) = d(c \cdot H_1) = c \cdot d(H_1) = c \cdot f$, od tod sledi, da je $H \in \int (c \cdot f)$.

□

Opomba 2.2. *Če je $c = 0$, tedaj množici $\int (c \cdot f)$ in $c \cdot \int f$ nista nujno enaki. Naj bosta $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirani s predpisoma $f(x) = 1$ ter $g(x) = x$. Tedaj je*

$$\int (0 \cdot f) = \int 0 = \{0 + a \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Po drugi strani pa velja

$$0 \cdot \int f = 0 \cdot \{g + a \mid a \in \mathbb{R}\} = \{0\}.$$

To pomeni, da

$$\int (0 \cdot f) \neq 0 \cdot \int f.$$

Na koncu tega razdelka si bomo ogledali še metodo integriranja po delih.

Izrek 2.9. *Naj bosta u in v odvedljivi funkciji $D \to \mathbb{R}$. Če sta $\int (d(u) \cdot v), \int (u \cdot d(v)) \neq \emptyset$, tedaj velja*

$$u \cdot v \in \int (d(u) \cdot v) + \int (u \cdot d(v)).$$

Dokaz. Ker je po izreku 2.3 $d(u \cdot v) = d(u) \cdot v + u \cdot d(v)$, sledi, da $u \cdot v \in \int (d(u) \cdot v + u \cdot d(v))$. Po izreku 2.7 je $\int (d(u) \cdot v + u \cdot d(v)) = \int (d(u) \cdot v) + \int (u \cdot d(v))$. Torej je $u \cdot v \in \int (d(u) \cdot v) + \int (u \cdot d(v))$.

□

2.5 KOLOBARJI

V zadnjem razdelku tega poglavja bomo predstavili osnovne pojme iz teorije kolobarjev, ki jih bomo kasneje potrebovali pri posplošitvi pojmov odvajanja in integriranja s kolobarja realnih funkcij na poljuben kolobar. Najprej bomo predstavili, kaj je to grupa.

Definicija 2.4. *Binarna operacija na množici A je vsaka preslikava*

$$\circ : A \times A \to A.$$

Množico A z dano binarno operacijo imenujemo grupoid.

Definicija 2.5. *Grupoid je asociativen, če za vse elemente $a, b, c \in A$ velja:*

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

Asociativen grupoid imenujemo polgrupa.

Definicija 2.6. *Naj bo G množica z dano binarno operacijo $\circ$. Par $(G, \circ)$ je grupa, če velja:*

1. *$\circ$ je asociativna operacija: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, za poljubne elemente $a, b, c, \in G$.*

2. *Obstaja tak element $0 \in G$, da za vsak $a \in G$ velja*

$$a \circ 0 = 0 \circ a = a.$$

Element 0 imenujemo nevtralni element ali enota za operacijo $\circ$.

3. *Za vsak $a \in G$ obstaja element b, da velja*

$$b \circ a = a \circ b = 0.$$

Element b imenujemo nasprotni element elementa a. Rečemo tudi, da je a obrnljiv element.

Izrek 2.10. *Naj bo $(G, \circ)$ grupa in naj bo $a \in G$ obrnljiv element. Tedaj obstaja natanko en nasprotni element elementa a.*

Dokaz. Recimo, da sta b_1 in b_2 nasprotna elementa elementa a. Dokažimo, da je $b_1 = b_2$. Ker sta b_1 in b_2 nasprotna elementa elementa a, velja

$$b_1 \circ a = a \circ b_1 = 0 = b_2 \circ a = a \circ b_2.$$

Torej je $a \circ b_1 = a \circ b_2$. Od tod sledi, da je $b_1 \circ (a \circ b_1) = b_1 \circ (a \circ b_2)$. Ker je $\circ$ asociativna operacija, je $(b_1 \circ a) \circ b_1 = (b_1 \circ a) \circ b_2$. Ker je $b_1 \circ a = 0$, sledi, da je $b_1 = b_2$.

□

Nasprotni element obrnljivega elementa a bomo ponavadi označevali z $-a$.

Definicija 2.7. *Naj bo $(G, \circ)$ grupa. Če je $\circ$ komutativna operacija (za poljubna elementa $a, b \in G$ velja $a \circ b = b \circ a$), potem $(G, \circ)$ imenujemo Abelova grupa.*

Definicija 2.8. *Naj bosta $(G, \circ)$ in $(G', +)$ grupi. Preslikavo $f : G \to G'$ imenujemo homomorfizem grup, če za poljubna elementa $a, b \in G$ velja:*

$$f(a \circ b) = f(a) + f(b).$$

Definicija 2.9. *Naj bo $f : G \to G'$ homomorfizem grup in 0 nevtralni element v grupi G'. Množico*

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in G \mid f(x) = 0\}$$

imenujemo jedro homomorfizma f.

Sledi definicija kolobarja.

Definicija 2.10. *Na množici K naj bosta definirani binarni operaciji $+$ (seštevanje) ter $\cdot$ (množenje). Trojka $(K, +, \cdot)$ je kolobar, če velja:*

1. *$(K, +)$ je Abelova grupa,*
2. *$(K, \cdot)$ je polgrupa,*
3. *Seštevanje in množenje vežeta distributivnostna zakona:*

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{ter} \quad c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$$

   za poljubne $a, b, c \in K$.

Primer 2.8 Našteti so osnovni primeri kolobarjev:

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je kolobar, imenujemo ga kolobar realnih števil.
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je kolobar, imenujemo ga kolobar racionalnih števil.
- $(\mathbb{R}^D, +, \cdot)$ je kolobar, imenujemo ga kolobar realnih funkcij.
- $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ je kolobar, imenujemo ga kolobar $n \times n$ realnih matrik.

Hitro lahko ugotovimo, da je operacija $\cdot$ v prvih treh primerih zgornjega zgleda komutativna operacija, v zadnjem primeru pa ne.

Definicija 2.11. *Naj bo $(K, +, \cdot)$ kolobar. Če je $\cdot$ komutativna operacija (za poljubna elementa $a, b \in K$ velja, da je $a \cdot b = b \cdot a$), potem $(K, +, \cdot)$ imenujemo komutativen kolobar.*

Primer 2.9 Naj bo $K = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ opremljena s standardnim seštevanjem $+$ in s standardnim množenjem $\cdot$. Tedaj je očitno $(K, +, \cdot)$ kolobar. Opazimo lahko tudi, da za operacijo $\cdot$ ne obstaja nevtralni element, oziroma enota.

Definicija 2.12. *Naj bo $(K, +, \cdot)$ kolobar. Če obstaja tak element $1 \in K$, tako da je za vsak $a \in K$*

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a,$$

potem se ta element imenuje enota za $\cdot$, $(K, +, \cdot)$ pa imenujemo kolobar z enoto.

Definicija 2.13. *Naj bo $(K, +, \cdot)$ kolobar z enoto 1 in $a \in K$. Rečemo, da je a obrnljiv element, če obstaja tak element $b \in K$, da velja $a \cdot b = b \cdot a = 1$.*

Izrek 2.11. *Naj bo $(K, +, \cdot)$ kolobar z enoto 1 in $a \in K$ obrnljiv element. Tedaj obstaja natanko en tak element $b \in K$, tako da velja $a \cdot b = b \cdot a = 1$.*

Dokaz. Recimo, da sta b_1 in b_2 taka elementa iz K, da je

$$b_1 \cdot a = a \cdot b_1 = 1 = b_2 \cdot a = a \cdot b_2.$$

Dokažimo, da je $b_1 = b_2$. Opazimo, da je $a \cdot b_1 = a \cdot b_2$. Od tod sledi, da je $b_1 \cdot (a \cdot b_1) = b_1 \cdot (a \cdot b_2)$. Ker je $\cdot$ asociativna operacija, je $(b_1 \cdot a) \cdot b_1 = (b_1 \cdot a) \cdot b_2$. Ker je $b_1 \cdot a = 1$, sledi, da je $b_1 = b_2$.

$\square$

Naj bo $(K, +, \cdot)$ kolobar z enoto 1 in $a \in K$ obrnljiv element. Enoličnemu elementu b, za katerega velja $a \cdot b = b \cdot a = 1$, rečemo inverz elementa a in ga označimo z a^{-1}.

Definicija 2.14. *Naj bo $(K, +, \cdot)$ kolobar in naj bo $K' \subseteq K$. Če je tudi $(K', +, \cdot)$ kolobar, tedaj pravimo, da je $(K', +, \cdot)$ podkolobar kolobarja $(K, +, \cdot)$.*

Enostavno lahko dokažemo, da je $(K', +, \cdot)$ podkolobar kolobarja $(K, +, \cdot)$ natanko tedaj, ko za poljubna elementa $a, b \in K'$ velja

$$a - b \in K' \quad \text{ter} \quad a \cdot b \in K',$$

dokaz najdemo na strani 93 v [4].

Sledita definiciji homomorfizma ter izomorfizma kolobarjev.

Definicija 2.15. *Naj bosta $(K, +, \cdot)$ in $(K', \oplus, \otimes)$ kolobarja. Preslikavo $f : K \to K'$ imenujemo homomorfizem kolobarjev, če za poljubna elementa $a, b \in K$ velja:*

1. $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$,
2. $f(a \cdot b) = f(a) \otimes f(b)$.

Jasno je, da je vsak homomorfizem kolobarjev $(K, +, \cdot) \to (K', \oplus, \otimes)$ tudi homomorfizem grup $(K, +) \to (K', \oplus)$.

V nadaljevanju bomo kolobar $(K, +, \cdot)$ označevali tudi samo s K, ne da bi eksplicitno navedli tudi operaciji.

Definicija 2.16. *Homomorfizem kolobarjev $f : K \to K'$ imenujemo izomorfizem kolobarjev, če je f bijektivna preslikava. Kadar med dvema kolobarjema obstaja izomorfizem, rečemo, da sta izomorfna (v algebrskem smislu enaka).*

Na koncu razdelka bomo preučili še primer komutativnega kolobarja.

Primer 2.10 Naj bo $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ množica vseh pozitivnih realnih števil. Operaciji $\oplus$ in $\otimes$ definirajmo na naslednji način:

$$x \oplus y = xy,$$

$$x \otimes y = x^{\log y},$$

za poljubna $x, y \in M$. Pokažimo, da je $(M, \oplus, \otimes)$ komutativen kolobar.

Najprej pokažimo, da je $(M, \oplus)$ Abelova grupa.

- Ker za poljubne $x, y, z \in M$ velja

$$(x \oplus y) \oplus z = (xy) \oplus z = (xy)z = xyz,$$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (yz) = x(yz) = xyz,$$

je $\oplus$ asociativna operacija.

- Ker za poljubna $x, y \in M$ velja

$$x \oplus y = xy = yx = y \oplus x,$$

je $\oplus$ komutativna operacija.

- Nevtralni element za $\oplus$ je 1, saj za vsak $x \in M$ velja

$$x \oplus 1 = x \cdot 1 = x.$$

- Naj bo $x \in M$ poljuben element. Tedaj je njegov nasprotni element $-x = \frac{1}{x}$, saj velja

$$x \oplus (-x) = x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$

Pokažimo še, da je $(M, \otimes)$ polgrupa.

- Ker za poljubne $x, y, z \in M$ velja

$$(x \otimes y) \otimes z = (x^{\log y}) \otimes z = (x^{\log y})^{\log z} = x^{\log y \cdot \log z},$$

$$x \otimes (y \otimes z) = x \otimes (y^{\log z}) = x^{\log y^{\log z}} = x^{\log z \cdot \log y} = x^{\log y \cdot \log z},$$

je $\otimes$ asociativna operacija.

- Ker za poljubna $x, y \in M$ velja

$$x \otimes y = x^{\log y} = y^{\log x} = y \otimes x,$$

je $\otimes$ komutativna operacija (iz $\log y \cdot \log x = \log x \cdot \log y$ sledi $\log x^{\log y} = \log y^{logx}$ in od tod $x^{\log y} = y^{logx}$).

- Ker za poljubne $x, y, z \in M$ velja

$$(x \oplus y) \otimes z = (x \cdot y)^{\log z} = x^{\log z} \cdot y^{\log z} = x \otimes z \oplus y \otimes z,$$

operaciji $\oplus$ in $\otimes$ povezuje tudi distributivnostni zakon.

Tako smo pokazali, da je $(M, \oplus, \otimes)$ komutativen kolobar, še več, je tudi komutativen kolobar z enoto (enota za operacijo $\otimes$ je e), saj za vsak $x \in M$ velja

$$e \otimes x = e^{\log x} = x,$$

$$x \otimes e = x^{\log e} = x.$$

Poglavje 3

INTEGRIRANJA NA KOLOBARJIH

Glavni rezultati tega poglavja so rezultati, ki so opisani v članku [1]. Pred predstavitvijo teh rezultatov bomo predstavili pojem odvajanja na kolobarju. Nato bomo s pomočjo takih odvajanj definirali še pojem integriranja na kolobarju in predstavili osnovne lastnosti takih integriranj.

3.1 ODVAJANJA NA KOLOBARJIH

Najprej bomo posplošili pojem odvajanja s kolobarja odvedljivih funkcij na poljuben kolobar.

Definicija 3.1. *Naj bo K kolobar (ne nujno kolobar z enoto). Funkciji $d : K \to K$ pravimo odvajanje na K, če za poljubna $x, y \in K$ velja:*

1. $d(x + y) = d(x) + d(y)$,
2. $d(x \cdot y) = d(x) \cdot y + x \cdot d(y)$.

Sledi nekaj primerov odvajanj.

Primer 3.1 Naj bo K množica vseh realnih polinomov. Tedaj je za standardno seštevanje $+$ ter standardno množenje $\cdot$, $(K, +, \cdot)$ očitno kolobar. Naj bo še $d : K \to K$ definirana s predpisom $d(p) = p'$. Potem je d odvajanje na K.

Primer 3.2 Naj bo $(K, +, \cdot)$ poljuben kolobar in naj bo preslikava $d : K \to K$ definirana s predpisom $d(x) = 0$, za vsak $x \in K$. Ker je

1. za poljubna $x, y \in K$,
$$d(x + y) = 0$$
in
$$d(x) + d(y) = 0 + 0 = 0,$$

2. za poljubna $x, y \in K$,
$$d(x \cdot y) = 0$$
in
$$d(x) \cdot y + x \cdot d(y) = 0 \cdot y + x \cdot 0 = 0 + 0 = 0,$$

je preslikava d odvajanje.

Primer 3.3 Naj bo K kolobar 2×2 realnih matrik in naj bo $A \in K$. Definirajmo preslikavo $d : K \to K$ s predpisom $d(X) = X \cdot A - A \cdot X$. Dokazali bomo, da je d odvajanje na K.

1. Očitno je $d(X+Y) = (X+Y) \cdot A - A \cdot (X+Y) = X \cdot A + Y \cdot A - A \cdot X - A \cdot Y = X \cdot A - A \cdot X + Y \cdot A - A \cdot Y = d(X) + d(Y)$.

2. Ker je $d(X \cdot Y) = X \cdot Y \cdot A - A \cdot X \cdot Y$ in $d(X) \cdot Y + X \cdot d(Y) = (X \cdot A - A \cdot X) \cdot Y + X \cdot (Y \cdot A - A \cdot Y) = X \cdot A \cdot Y - A \cdot X \cdot Y + X \cdot Y \cdot A - X \cdot A \cdot Y = X \cdot Y \cdot A - A \cdot X \cdot Y$, sledi, da je $d(X \cdot Y) = d(X) \cdot Y + X \cdot d(Y)$.

Izrek 3.1. *Naj bo $d : K \to K$ odvajanje na kolobarju. Tedaj je $d(0) = 0$.*

Dokaz. Očitno je

$$d(0) = d(0 + 0) = d(0) + d(0).$$

Od tod sledi, da je

$$d(0) - d(0) = d(0) + d(0) - d(0).$$

To dokazuje, da je $d(0) = 0$.

□

Definicija 3.2. *Naj bo K kolobar. Funkciji $d : K \to K$ pravimo notranje odvajanje na K, če obstaja tak $a \in K$, da za vsak $x \in K$ velja:*

$$d(x) = x \cdot a - a \cdot x.$$

Izrek 3.2. *Vsako notranje odvajanje je tudi odvajanje.*

Dokaz. Naj bo $d : K \to K$ notranje odvajanje. To pomeni, da obstaja tak $a \in K$, da je $d(x) = x \cdot a - a \cdot x$. Dokažimo, da je d odvajanje.

1. Za poljubna $x, y \in K$ velja $d(x+y) = (x+y)\cdot a - a\cdot(x+y) = x\cdot a + y\cdot a - a\cdot x - a\cdot y = x \cdot a - a \cdot x + y \cdot a - a \cdot y = d(x) + d(y)$.

2. Ker je $d(x\cdot y) = x\cdot y\cdot a - a\cdot x\cdot y$ in $d(x)\cdot y + x\cdot d(y) = (x\cdot a - a\cdot x)\cdot y + x\cdot(y\cdot a - a\cdot y) = x\cdot a\cdot y - a\cdot x\cdot y + x\cdot y\cdot a - x\cdot a\cdot y = x\cdot y\cdot a - a\cdot x\cdot y$, sledi, da je $d(x\cdot y) = d(x)\cdot y + x\cdot d(y)$ za poljubna $x, y \in K$.

□

Pravkar smo dokazali, da je vsako notranje odvajanje tudi odvajanje, vendar pa obstajajo odvajanja, ki niso notranja odvajanja (tak primer je standardno odvajanje funkcij).

V nadaljevanju bomo definirali jordanska odvajanja. V ta namen si najprej oglejmo, kako v danem kolobarju definiramo jordanski produkt.

Definicija 3.3. *Naj bo $(K, +, \cdot)$ kolobar. Operaciji $\circ$ pravimo jordanski produkt na K, če za poljubna $x, y \in K$ velja:*

$$x \circ y = x \cdot y + y \cdot x.$$

Sledi definicija jordanskega odvajanja.

Definicija 3.4. *Naj bo $(K, +, \cdot)$ kolobar. Funkciji $\delta : K \to K$ pravimo jordansko odvajanje na K, če za poljubna $x, y \in K$ velja:*

1. $\delta(x + y) = \delta(x) + \delta(y)$.
2. $\delta(x \circ y) = \delta(x) \circ y + x \circ \delta(y)$.

V nadaljevanju bomo pokazali, da je vsako odvajanje tudi jordansko odvajanje. Izkaže se, da obrat nujno ne velja, glej primer 4.4.

Izrek 3.3. *Vsako odvajanje je jordansko odvajanje.*

Dokaz. Naj bo $d : (K, +, \cdot) \to (K, +, \cdot)$ odvajanje. Dokažimo, da je d jordansko odvajanje. Vse, kar je potrebno dokazati je, da za poljubna $x, y \in K$ velja $d(x \circ y) = d(x) \circ y + x \circ d(y)$, kjer je $\circ$ jordanski produkt na K. Ker za poljubna $x, y \in K$ velja

1. $d(x \circ y) = d(x \cdot y + y \cdot x) = d(x \cdot y) + d(y \cdot x) = d(x) \cdot y + x \cdot d(y) + d(y) \cdot x + y \cdot d(x)$,
2. $d(x) \circ y + x \circ d(y) = d(x) \cdot y + y \cdot d(x) + x \cdot d(y) + d(y) \cdot x$,

je d tudi jordansko odvajanje.

$\square$

3.2 INTEGRIRANJA IN d-INTEGRIRANJA

V tem razdelku bomo predstavili nov koncept integriranja na kolobarju ter dokazali nekaj lastnosti takih integriranj. Definicija integriranja na kolobarjih izhaja iz definicije nedoločenega integrala, kot smo jo navedli v prejšnjem poglavju in jo posplošuje.

Vemo, da ima lahko ena funkcija neštevno družino nedoločenih integralov, zato bomo integriranje na kolobarju definirali kot večlično funkcijo – funkcijo, ki enemu elementu priredi množico elementov. V ta namen bomo uvedli naslednje oznake:

- 2^K označuje družino vseh podmnožic neke množice K,
- za poljubna $A, B \in 2^K \setminus \{\emptyset\}$ definiramo $A + B$ in $A \cdot B$ na naraven način, torej

  $$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

  in

  $$A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}.$$

  V posebnem primeru, ko je $A = \{a\}$, bomo namesto $A + B$ ali $A \cdot B$ zapisali $a + B$ ali $a \cdot B$.

Sledi definicija integriranja na kolobarju.

Definicija 3.5. *Naj bo K kolobar, $x \in K$ in $d : K \to K$ odvajanje na K. Naj bo*

$$i_d(x) = \{y \in K \mid x = d(y)\}.$$

Rečemo, da je $y \in K$ d-primitiven element elementa $x \in K$, če je

$$y \in i_d(x).$$

Funkciji $i_d : K \to 2^K$, $x \mapsto i_d(x)$ *rečemo d-integriranje na* K*, množici* $i_d(x)$ *pa rečemo d-integral elementa* x.

Funkcija $i : K \to 2^K$ *je integriranje na* K*, če obstaja tako odvajanje* d *na* K*, da velja* $i = i_d$*. Množici* $i(x)$ *v tem primeru rečemo integral elementa* x*, za vsak element* $x \in K$.

Oglejmo si nekaj osnovnih primerov integriranj na kolobarjih.

Primer 3.4 Naj bo K kolobar in $d : K \to K$ trivialno odvajanje ($d(x) = 0$ za vsak $x \in K$). Potem je:

- $i_d(x) = K$ če je $x = 0$,
- $i_d(x) = \emptyset$ če je $x \neq 0$.

Kot je razvidno iz zgornjega primera, se lahko zgodi, da so d-integrali nekaterih elementov tudi prazne množice.

Primer 3.5 Naj bo K kolobar polinomov in d odvajanje na K, ki je definirano s predpisom $d(p) = p'$ za vsak $p \in K$. Tedaj je preslikava $i_d : K \to 2^K$, definirana s predpisom $i_d(p) = \int p$, primer d-integriranja na K.

Primer 3.6 Naj bo K kolobar funkcij $D \to \mathbb{R}$ in d odvajanje na K, ki je definirano s predpisom $d(f) = f'$ za vsak $f \in K$. Tedaj je preslikava $i_d : K \to 2^K$, definirana s predpisom $i_d(f) = \int f$, primer d-integriranja na K.

V nadaljevanju si bomo ogledali nekaj osnovnih lastnosti integriranj na kolobarjih. Čeprav nekatere lastnosti sledijo neposredno iz definicije integriranja, bomo zaradi lažje predstavljivosti dokaze podali v celoti.

Trditev 3.1. *Naj bo* K *kolobar in* $d : K \to K$ *odvajanje na* K*. Potem velja:*

1. $0 \in i_d(0)$.
2. $x \in i_d(d(x))$*, za vsak* $x \in K$.

3. Če je $i_d(x) \neq \emptyset$, potem je $d(i_d(x)) = \{x\}$ za vsak $x \in K$.

Dokaz.

1. Ker je po izreku 3.1 $d(0) = 0$, sledi, da je $0 \in i_d(0)$.

2. Naj bo $y = d(x)$. Iz definicije 3.5 sledi, da je $x \in i_d(y) = i_d(d(x))$.

3. Naj bo $z \in i_d(x)$ poljuben. Potem je $d(z) = x$ in od tod je $d(i_d(x)) = \{x\}$.

□

Naslednja trditev karakterizira surjektivnost (injektivnost) odvajanja s pomočjo lastnosti integriranja.

Trditev 3.2. *Naj bo K kolobar in $d : K \to K$ odvajanje na K. Potem velja:*

1. Funkcija d je surjektivna natanko tedaj, ko je $i_d(x) \neq \emptyset$ za vsak $x \in K$.

2. Funkcija d je injektivna natanko tedaj, ko je $|i_d(x)| = 1$ za vsak $x \in K$.

Dokaz.

1. Recimo, da je d surjektivna funkcija in naj bo $x \in K$. Potem obstaja tak $y \in K$, da je $x = d(y)$. Iz tega sledi, da $y \in i_d(x)$ in $i_d(x)$ ni prazna množica. Recimo, da $i_d(x) \neq \emptyset$ za vsak $x \in K$. Naj bosta $x \in K$ in $y \in i_d(x)$ Od tod sledi, da je $x = d(y)$.

2. Recimo, da je d injektivna funkcija, $x \in K$ in $y, z \in i_d(x)$. Potem je $d(y) = d(z) = x$. Ker je d injektivna, sledi da je $y = z$ in zato je množica $i_d(x)$ sestavljena le iz enega elementa. Recimo, da je $|i_d(x)| = 1$ za vsak $x \in K$. Naj bodo $x, y, z \in K$ taki elementi, da je $x = d(y) = d(z)$. Od tod sledi, da sta $y, z \in i_d(x)$ in ker je $|i_d(x)| = 1$, je $y = z$.

□

V nadaljevanju si bomo ogledali nekaj lastnosti integrala $i_d(0)$.

Izrek 3.4. *Naj bo K kolobar in $d : K \to K$ odvajanje na K. Tedaj je $i_d(0) = \mathrm{Ker}(d)$.*

Dokaz. Ker je $i_d(0) = \{x \in K \mid d(x) = 0\} = \mathrm{Ker}(d)$, je izrek dokazan.

$\square$

Definicija 3.6. *Naj bo K kolobar z enoto $1 \in K$. Za vsako naravno število n, bo oznaka $\mathbf{n}$ vedno pomenila element $\mathbf{n} = n \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n} \in K$. Če je celo število $k = -n$ za neko naravno število n, tedaj $\mathbf{k}$ označuje nasprotni element elementa $\mathbf{n}$.*

Izrek 3.5. *Naj bo K kolobar z enoto $1 \in K$ in naj bo $d : K \to K$ odvajanje na K. Potem velja:*

1. *$-\mathbf{n}, \mathbf{n} \in i_d(0)$ za vsako število $n \in \mathbb{N}$.*

2. *Če je $\mathbf{n}$ obrnljiv, potem je*

$$\mathbf{n}^{-1} \cdot \mathbf{m},\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}^{-1} \in i_d(0)$$

za vsa cela števila m, n.

Dokaz.

1. Iz $d(1) = d(1 \cdot 1) = d(1) \cdot 1 + 1 \cdot d(1) = 2d(1)$ sledi, da je $d(1) = 0$. Torej je $1 \in i_d(0)$. Ker je

$$d(\mathbf{n}) = d(\underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n}) = \underbrace{d(1) + d(1) + d(1) + \ldots + d(1)}_{n} = 0,$$

sledi, da je $\mathbf{n} \in i_d(0)$. Iz $d(-\mathbf{n}) = -d(\mathbf{n}) = 0$ sledi, da je $-\mathbf{n} \in i_d(0)$.

2. Najprej opazimo, da je $d(\mathbf{n}^{-1}) = 0$. To sledi iz dejstva, da je $0 = d(1) = d(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^{-1}) = d(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}^{-1} + \mathbf{n} \cdot d(\mathbf{n}^{-1}) = 0 + \mathbf{n} \cdot d(\mathbf{n}^{-1}) = \mathbf{n} \cdot d(\mathbf{n}^{-1})$. Ker je $\mathbf{n}$ obrnljiv,

je $d(\mathbf{n}^{-1}) = 0$. Iz $d(\mathbf{n}^{-1} \cdot \mathbf{m}) = d(\mathbf{n}^{-1}) \cdot \mathbf{m} + \mathbf{n}^{-1} \cdot d(\mathbf{m}) = 0 + 0 = 0$ sledi, da je $\mathbf{n}^{-1} \cdot \mathbf{m} \in i_d(0)$. Podoben razmislek nam pove $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}^{-1} \in i_d(0)$.

□

Posledica 3.1. *Naj bo K kolobar z enoto $1 \in K$ in naj bo $d : K \to K$ odvajanje na K. Če je $y \in i_d(x)$ in če je $\mathbf{n}$ obrnljiv, potem je*

$$y + \mathbf{n}^{-1} \cdot \mathbf{m},\ y + \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}^{-1} \in i_d(x)$$

za vsa cela števila m, n in za vse $x, y \in K$.

Dokaz. Ta rezultat sledi iz izreka 3.5: $d(y + \mathbf{n}^{-1} \cdot \mathbf{m}) = d(y) + d(\mathbf{n}^{-1} \cdot \mathbf{m}) = x + 0 = x$.

□

Lema 3.1. *Naj bo K kolobar in naj bo $d : K \to K$ odvajanje na K. Če sta elementa $y, z \in i_d(x)$, potem je njuna razlika $y - z \in i_d(0)$ za vse $x, y, z \in K$.*

Dokaz. Lema sledi iz dejstva, da je $d(y - z) = d(y) - d(z) = x - x = 0$.

□

Naslednji izrek posplošuje že znani izrek iz analize, ki pravi, da če je g nedoločeni integral funkcije f, potem je tudi $g + c$ nedoločeni integral funkcije f, kjer je c poljubna konstantna funkcija.

Izrek 3.6. *Naj bo K kolobar in naj bodo $x, z \in K$, $d : K \to K$ odvajanje na K ter $y \in i_d(x)$. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

1. *$z \in i_d(x)$,*
2. *obstaja enoličen element $w_0 \in \mathrm{Ker}(d)$, takšen, da velja $z = y + w_0$.*

Dokaz. Recimo, da je $z \in i_d(x)$ in naj bo $w_0 = z - y$. Po lemi 3.1 je očitno, da je $z = y + w_0$ in $d(w_0) = d(z - y) = 0$. Če je $z = y + w_0 = y + w_1$ za $w_0, w_1 \in \mathrm{Ker}(d)$, potem je $0 = z - z = w_0 - w_1$ in od tod sledi, da je $w_0 = w_1$.

Dokažimo še obrat. Naj bo $z = y + w_0$ za $w_0 \in \mathrm{Ker}(d)$. Potem velja $d(z) = d(y+w_0) = d(y) + d(w_0) = x + 0 = x$ in od tod sledi, da je $z \in i_d(x)$.

□

Posledica 3.2. *Naj bo K kolobar in naj bodo $x \in K$, $d : K \to K$ odvajanje na K ter $y \in i_d(x)$. Potem je*

$$i_d(x) = \{y + z \mid z \in \mathrm{Ker}(d)\}.$$

Dokaz. Ta rezultat sledi direktno iz izreka 3.6.

□

Primer 3.7 Naj bo $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \text{ je celo število}\}$ in naj bo K kolobar vseh odvedljivih funkcij na D s standardnim seštevanjem ter množenjem funkcij ($(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ in $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ za vsak $x \in D$). Naj bo d standardno odvajanje na D ($d(f) = f'$ za vsak $f \in K$). Definirajmo $h \in K$ na naslednji način:

$$h(x) = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \text{ če je } x \in \left(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right).$$

Potem je $h \in \mathrm{Ker}(d)$. Definirajmo še $f, g \in K$ in sicer $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ter $g(x) = \tan x$ za vsak $x \in D$. Ker je $g \in i_d(f)$, je tudi $g + h \in i_d(f)$, kar sledi iz izreka 3.6.

V nadaljevanju bomo znano formulo iz analize

$$\int c \cdot f(x)\ \mathrm{d}x = c \cdot \int f(x)\ \mathrm{d}x$$

($c \neq 0$) razširili na poljuben kolobar.

Izrek 3.7. *Naj bo K kolobar in naj bosta $d : K \to K$ odvajanje na K ter $w \in \mathrm{Ker}(d)$. Potem za vsak $x \in K$ velja:*

1. $w \cdot i_d(x) \subseteq i_d(w \cdot x)$ *in* $i_d(x) \cdot w \subseteq i_d(x \cdot w)$.

2. *Če je* $i_d(x) \neq \emptyset$, *potem je* $i_d(w \cdot x), i_d(x \cdot w) \neq \emptyset$.

3. *Če je* K *kolobar z enoto* $1 \in K$, w *obrnljiv element in* $i_d(x) \neq \emptyset$, *potem je* $i_d(w \cdot x) = w \cdot i_d(x)$ *in* $i_d(x \cdot w) = i_d(x) \cdot w$.

Dokaz. Če je $i_d(x) = \emptyset$, potem točka 1. očitno velja. Recimo, da je $i_d(x) \neq \emptyset$. Dokazati moramo, da je $w \cdot i_d(x) \subseteq i_d(w \cdot x)$ ($i_d(x) \cdot w \subseteq i_d(x \cdot w)$ dokažemo na podoben način). Naj bo $z \in i_d(x)$. Potem je $d(w \cdot z) = d(w) \cdot z + w \cdot d(z) = 0 + w \cdot x = w \cdot x$ in od tod sledi $w \cdot z \in i_d(w \cdot x)$. S tem smo dokazali točki 1. in 2. Dokažimo še točko 3. Recimo, da je w obrnljiv in da je $i_d(x) \neq \emptyset$. Najprej opazimo, da iz izraza $0 = d(1) = d(w \cdot w^{-1}) = d(w) \cdot w^{-1} + w \cdot d(w^{-1}) = w \cdot d(w^{-1})$ dobimo $d(w^{-1}) = 0$. Iz točke 2. sledi tudi, da je $i_d(w \cdot x) \neq \emptyset$. Vzemimo poljuben $y \in i_d(w \cdot x)$ in naj bo $z = w^{-1} \cdot y$. Potem je

$$d(z) = d(w^{-1} \cdot y) = d(w^{-1}) \cdot y + w^{-1} \cdot d(y) = 0 + w^{-1} \cdot w \cdot x = x.$$

To pomeni, da je $z \in i_d(x)$ in od tod sledi, da je $y = w \cdot z \in w \cdot i_d(x)$. Podobno dokažemo tudi $i_d(x \cdot w) = i_d(x) \cdot w$.

□

Primer 3.8 Če uporabimo izrek 3.7 na primeru 3.7, dobimo $i_d(h \cdot f) = h \cdot i_d(f)$. Izraz lahko predstavimo s standardnim integralskim zapisom:

$$\int h(x) f(x) \, \mathrm{d}x = h(x) \int f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Opazimo, da h ni konstantna funkcija (je pa konstantna na vsaki povezani komponenti njenega definicijskega območja D).

Naslednji izrek opisuje lastnosti integrala vsote elementov, produkta elementov ter integral inverznega elementa.

Izrek 3.8. *Naj bo K kolobar in naj bo $d : K \to K$ odvajanje na K.*

1. *Če je $y_1 \in i_d(x_1)$ in če je $y_2 \in i_d(x_2)$, potem je $y_1 + y_2 \in i_d(x_1 + x_2)$ za vse $x_1, x_2, y_1, y_2 \in K$.*
2. *Če je $y_1 \in i_d(x_1)$ in če je $y_2 \in i_d(x_2)$, potem je $y_1 \cdot y_2 \in i_d(x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)$ za vse $x_1, x_2, y_1, y_2 \in K$.*
3. *Če je K kolobar z enoto $1 \in K$ in če je $y \in i_d(x)$, potem je $y^{-1} \in i_d(-y^{-1} \cdot x \cdot y^{-1})$ za vsak $x \in K$ in za vsak obrnljiv $y \in K$.*

Dokaz.

1. Prva trditev sledi iz $d(y_1 + y_2) = d(y_1) + d(y_2) = x_1 + x_2$.
2. Druga trditev sledi iz $d(y_1 \cdot y_2) = d(y_1) \cdot y_2 + y_1 \cdot d(y_2) = x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2$.
3. Opazimo, da je $0 = d(1) = d(y \cdot y^{-1}) = d(y) \cdot y^{-1} + y \cdot d(y^{-1})$, torej je $d(y^{-1}) = -y^{-1} \cdot x \cdot y^{-1}$. Od tod sledi, da je $y^{-1} \in i_d(-y^{-1} \cdot x \cdot y^{-1})$.

□

Posledica 3.3. *Naj bo K kolobar in naj bo $d : K \to K$ odvajanje na K. Potem za poljubne $x, y, z \in K$ velja, da če sta $y, z \in i_d(x)$, potem je*

1. *$y + z \in i_d(2x)$,*
2. *$y \cdot z \in i_d(x \cdot z + y \cdot x)$.*

Dokaz. Rezultat sledi direktno iz izreka 3.8.

□

Posledica 3.4. *Naj bo K komutativen kolobar z enoto $1 \in K$ in naj bo $d : K \to K$ odvajanje na K. Če je $y \in i_d(x)$, potem je $y^{-1} \in i_d(-y^{-2} \cdot x)$ za vsak $x \in K$ in za vsak obrnljiv $y \in K$.*

Dokaz. Po izreku 3.8 je $y^{-1} \in i_d(-y^{-1} \cdot x \cdot y^{-1})$. Ker je K komutativen kolobar, velja, da je $-y^{-1} \cdot x \cdot y^{-1} = -y^{-2} \cdot x$. Od tod sledi, da je $y^{-1} \in i_d(-y^{-2} \cdot x)$.

□

Lema 3.2. *Naj bo K kolobar in naj bo $d : K \to K$ odvajanje na K. Če sta $i_d(x), i_d(y) \neq \emptyset$, potem je $i_d(x + y) = i_d(x) + i_d(y)$ za vse $x, y \in K$.*

Dokaz. Naj bo $z \in i_d(x) + i_d(y)$. Potem obstajata taka $a, b \in K$, $a \in i_d(x)$, $b \in i_d(y)$, da velja $z = a + b$. Potem je $d(z) = d(a + b) = d(a) + d(b) = x + y$ in od tod sledi, da je $z \in i_d(x + y)$ (to tudi dokazuje, da iz $i_d(x), i_d(y) \neq \emptyset$ sledi $i_d(x + y) \neq \emptyset$).
Naj bo $z \in i_d(x+y)$. Potem je $d(z) = x+y$. Ker je $i_d(x) \neq \emptyset$, lahko izberemo $a \in i_d(x)$. Potem je $d(z - a) = d(z) - d(a) = d(z) - x = y$ in od tod sledi, da je $z - a \in i_d(y)$. S tem smo dokazali, da je $z = a + (z - a) \in i_d(x) + i_d(y)$.

□

V naslednjem izreku bomo posplošili metodo za integriranje po delih (glej izrek 2.9), ki jo v mnogih virih navajajo s formulo

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Izrek 3.9. *(Integriranje po delih) Naj bo K kolobar in naj bo $d : K \to K$ odvajanje na K. Če je $i_d(d(x) \cdot y), i_d(x \cdot d(y)) \neq \emptyset$, potem je $x \cdot y \in i_d(d(x) \cdot y) + i_d(x \cdot d(y))$ za vse $x, y \in K$.*

Dokaz. Iz trditve 3.1 in definicije odvoda sledi, da je $x \cdot y \in i_d(d(x \cdot y)) = i_d(d(x) \cdot y + x \cdot d(y))$, torej je $x \cdot y \in i_d(d(x) \cdot y + x \cdot d(y))$. Po lemi 3.2 sledi, da je $i_d(d(x) \cdot y + x \cdot d(y)) = i_d(d(x) \cdot y) + i_d(x \cdot d(y))$.

□

V izreku 3.9 smo videli, da integriranje po delih deluje le, če velja

$$i_d(d(x) \cdot y), i_d(x \cdot d(y)) \neq \emptyset.$$

Po drugi strani pa drži, da množica $i_d(d(x) \cdot y + x \cdot d(y))$ ni nikoli prazna (v njej vedno lahko najdemo $x \cdot y$). Zato se pojavi naslednje vprašanje: ali je možno, da je $i_d(d(x) \cdot y), i_d(x \cdot d(y)) = \emptyset$? V naslednjem primeru se lahko prepričamo, da se to lahko zgodi.

Primer 3.9 Naj bo K kolobar 2×2 realnih matrik $M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in naj bo $d : K \to K$ notranje odvajanje na K, definirano s predpisom $d(X) = X \cdot A - A \cdot X$. Naj bosta $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in $Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Potem sta $d(X) = -X$ in $d(Y) = Y$. Iz

$$d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix},$$

$d(X) \cdot Y = -A$ in $X \cdot d(Y) = A$ sledi, da sta $i_d(d(X) \cdot Y) = \emptyset$ in $i_d(X \cdot d(Y)) = \emptyset$.

V naslednjih izrekih je predstavljenih nekaj rezultatov, ki posplošujejo formulo

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

Lema 3.3. *Naj bo K kolobar z enoto $1 \in K$ in naj bo $d : K \to K$ odvajanje na K. Potem velja:*

1. *Če je $x \in i_d(\mathbf{n} \cdot y)$ in je $\mathbf{n}$ obrnljiv, potem je $\mathbf{n}^{-1} \cdot x \in i_d(y)$ za vse $x, y \in K$ in za vsako celo število n.*

2. *Če je $\mathbf{n} \cdot x \in i_d(y)$ in je $\mathbf{n}$ obrnljiv, potem je $x \in i_d(\mathbf{n}^{-1} \cdot y)$ za vse $x, y \in K$ in vsako celo število n.*

Dokaz.

1. Iz $d(\mathbf{n}^{-1} \cdot x) = d(\mathbf{n}^{-1}) \cdot x + \mathbf{n}^{-1} \cdot d(x) = 0 + \mathbf{n}^{-1} \cdot d(x) = \mathbf{n}^{-1} \cdot d(x) = \mathbf{n}^{-1} \cdot \mathbf{n} \cdot y = y$

sledi $\mathbf{n}^{-1} \cdot x \in i_d(y)$.

2. Iz $d(x) = d(\mathbf{n}^{-1} \cdot \mathbf{n} \cdot x) = d(\mathbf{n}^{-1}) \cdot (\mathbf{n} \cdot x) + \mathbf{n}^{-1} \cdot d(\mathbf{n} \cdot x) = 0 + \mathbf{n}^{-1} \cdot d(\mathbf{n} \cdot x) = \mathbf{n}^{-1} \cdot y$ sledi $x \in i_d(\mathbf{n}^{-1} \cdot y)$.

□

Izrek 3.10. *Naj bo K komutativen kolobar z enoto $1 \in K$ in naj bo $d : K \to K$ odvajanje na K. Potem je*

$$x^n \in i_d(\mathbf{n} \cdot x^{n-1} \cdot d(x))$$

za vsak $x \in K$ ter za vsako naravno število n.

Dokaz. Izrek bomo dokazali z indukcijo po n.

- Naj bo $n = 1$. Iz trditve 3.1 očitno sledi, da je $x \in i_d(d(x))$.
- Naj bo $n = 2$. Dokazati moramo, da je $x^2 \in i_d(x \cdot d(x))$. Velja, da je $d(x^2) = d(x) \cdot x + x \cdot d(x) = \mathbf{2} \cdot x \cdot d(x)$ in od tod sledi $x^2 \in i_d(\mathbf{2} \cdot x \cdot d(x))$.
- Recimo, da je $x^n \in i_d(\mathbf{n} \cdot x^{n-1} \cdot d(x))$. Dokazati moramo, da je $x^{n+1} \in i_d((\mathbf{n}+1) \cdot x^n \cdot d(x))$. Izračunajmo $d(x^{n+1}) = d(x \cdot x^n) = d(x) \cdot x^n + x \cdot d(x^n) = d(x) \cdot x^n + x \cdot (\mathbf{n} \cdot x^{n-1} \cdot d(x)) = x^n \cdot d(x) + \mathbf{n} \cdot x^n \cdot d(x) = (\mathbf{n} + 1) \cdot x^n \cdot d(x)$. Od tod sledi, da je $x^{n+1} \in i_d((\mathbf{n} + 1) \cdot x^n \cdot d(x))$.

□

Posledica 3.5. *Naj bo K komutativen kolobar z enoto $1 \in K$ in naj bo $d : K \to K$ odvajanje na K. Če je $\mathbf{n}$ obrnljiv, potem za vsak $x \in K$ in za vsako naravno število n velja*

$$\mathbf{n}^{-1} \cdot x^n \in i_d(x^{n-1} \cdot d(x)).$$

Dokaz. Dokaz sledi direktno iz izreka 3.10 in leme 3.3.

□

Izrek 3.11. *Naj bo K komutativen kolobar z enoto $1 \in K$ in naj bo $d : K \to K$ odvajanje na K. Potem za vsak obrnljiv $x \in K$ ter vsako naravno število n velja*

$$x^{-n} \in i_d(-\mathbf{n} \cdot x^{-n-1} \cdot d(x)).$$

Dokaz. Izrek bomo dokazali z indukcijo po n.

- Naj bo $n = 1$. Iz $0 = d(1) = d(x \cdot x^{-1}) = d(x) \cdot x^{-1} + x \cdot d(x^{-1})$ sledi, da je $d(x^{-1}) = -x^{-2} \cdot d(x)$. Torej je $x^{-1} \in i_d(-x^{-2} \cdot d(x))$.
- Recimo, da je $x^{-n} \in i_d(-\mathbf{n} \cdot x^{-n-1} \cdot d(x))$. Dokazati moramo, da je $x^{-n-1} \in i_d((-\mathbf{n} - 1) \cdot x^{-n-2} \cdot d(x))$. Izračunajmo $d(x^{-n-1}) = d(x^{-n} \cdot x^{-1}) = d(x^{-n}) \cdot x^{-1} + x^{-n} \cdot d(x^{-1}) = (-\mathbf{n} \cdot x^{-n-1} \cdot d(x)) \cdot x^{-1} + x^{-n} \cdot (-x^{-2} \cdot d(x)) = -\mathbf{n} \cdot x^{-n-2} \cdot d(x) - x^{-n-2} \cdot d(x) = (-\mathbf{n} - 1) \cdot x^{-n-2} \cdot d(x)$. Od tod sledi, da je $x^{-n-1} \in i_d((-\mathbf{n} - 1) \cdot x^{-n-2} \cdot d(x))$.

□

Posledica 3.6. *Naj bo K komutativen kolobar z enoto $1 \in K$ in naj bo $d : K \to K$ odvajanje na K. Potem za vsak obrnljiv $x \in K$ in za vsako celo število n velja*

$$x^{n} \in i_d(\mathbf{n} \cdot x^{n-1} \cdot d(x)).$$

Dokaz. Če je $n \neq 0$, potem rezultat sledi iz izrekov 3.10 in 3.11. Če je $n = 0$, potem je po izreku 3.5 $x^0 = 1 \in i_d(0)$.

□

Posledica 3.7. *Naj bo K komutativen kolobar z enoto $1 \in K$ in naj bo $d : K \to K$ odvajanje na K. Če je $\mathbf{n}$ obrnljiv, potem je*

$$\mathbf{n}^{-1} \cdot x^{n} \in i_d(x^{n-1} \cdot d(x))$$

za vsak obrnljiv $x \in K$ in vsako celo število n.

Dokaz. Rezultat sledi direktno iz posledice 3.6 in leme 3.3.

□

3.3 KOLOBARJI INTEGRALOV

V tem razdelku bomo iz kolobarja K in odvajanja d na K konstruirali nov kolobar $\mathcal{K}_d$ ter opisali nekaj njegovih lastnosti.

Izrek 3.12. *Naj bo K kolobar in naj bo $d : K \to K$ odvajanje na K. Družina*

$$\mathcal{K}_d = \{i_d(x) \mid i_d(x) \neq \emptyset, x \in K\}$$

je particija kolobarja K.

Dokaz. To bomo dokazali v dveh korakih.

- Najprej dokažimo, da je $\bigcup \mathcal{K}_d = K$. Očitno je, da je $\bigcup \mathcal{K}_d \subseteq K$. Da bi dokazali $\bigcup \mathcal{K}_d \supseteq K$, vzemimo poljuben $x \in K$. Ker po trditvi 3.1 velja $x \in i_d(d(x))$, sledi, da je $x \in \bigcup \mathcal{K}_d$.
- Zdaj pa bomo dokazali še, da je $i_d(x) \cap i_d(y) = \emptyset$ natanko tedaj, ko je $x \neq y$ za vse $x, y \in K$, za katere velja $i_d(x), i_d(y) \neq \emptyset$. Recimo, da je $i_d(x) \cap i_d(y) \neq \emptyset$. Potem za vsak $z \in i_d(x) \cap i_d(y)$ velja $x = d(z) = y$. Recimo še, da je $x = y$ in da je $i_d(x) \neq \emptyset$. Očitno je $i_d(x) = i_d(y)$ in od tod sledi $i_d(x) \cap i_d(y) = i_d(x) \neq \emptyset$.

□

Naj bo d odvajanje na kolobarju K. Na $\mathcal{K}_d = \{i_d(x) \mid i_d(x) \neq \emptyset, x \in K\}$ definirajmo operaciji $\oplus$ in $\odot$ na naslednji način:

1. $i_d(x) \oplus i_d(y) = i_d(x + y)$,
2. $i_d(x) \odot i_d(y) = i_d(x \cdot y)$,

za vse $i_d(x), i_d(y) \in \mathcal{K}_d$. Najprej bomo obravnavali dobro definiranost operacij $\oplus$ in $\odot$ na $\mathcal{K}_d$.

Naj bosta $i_d(x), i_d(y) \in \mathcal{K}_d$. Če je $i_d(x) = i_d(y)$, od tod sledi, da je $x = y$ (saj za vsak $w \in i_d(x) \cap i_d(y)$ velja $x = d(w) = y$). Tedaj za operaciji $\oplus$ in $\odot$ velja

1. $i_d(x) \oplus i_d(z) = i_d(y) \oplus i_d(z)$,
2. $i_d(x) \odot i_d(z) = i_d(y) \odot i_d(z)$,
3. $i_d(z) \odot i_d(x) = i_d(z) \odot i_d(y)$,

za vsak $i_d(z) \in \mathcal{K}_d$.

Trditev 3.3. *Naj bo d odvajanje na K. Če sta $i_d(x), i_d(y) \in \mathcal{K}_d$, potem je tudi $i_d(x) \oplus i_d(y) \in \mathcal{K}_d$.*

Dokaz. Naj bosta $i_d(x), i_d(y) \in \mathcal{K}_d$ (to pomeni, da $i_d(x), i_d(y) \neq \emptyset$). Da bi dokazali, da je $i_d(x) \oplus i_d(y) \in \mathcal{K}_d$, moramo dokazati, da je $i_d(x + y) \neq \emptyset$ – to pa sledi direktno iz leme 3.2.

□

Dokazovanje take lastnosti za operacijo $\odot$ se izkaže za bolj zahtevno. Zato se zastavlja naslednje vprašanje.

Vprašanje 3.1. *Naj bo d odvajanje na kolobarju K in naj bosta $x, y \in K$. Ali je naslednja izjava resnična: če sta $i_d(x), i_d(y) \in \mathcal{K}_d$, potem je tudi $i_d(x) \odot i_d(y) \in \mathcal{K}_d$ (to pomeni $i_d(x \cdot y) \neq \emptyset$)?*

Definicija 3.7. *Naj bo d odvajanje na kolobarju K. Odvajanje d imenujemo pravo odvajanje, če za vse $x, y \in K$ velja, da iz $i_d(x), i_d(y) \in \mathcal{K}_d$ sledi, da je $i_d(x \cdot y) \in \mathcal{K}_d$.*

Če uporabimo definicijo 3.7 pri vprašanju 3.1, lahko vprašanje malce preoblikujemo.

Vprašanje 3.2. *Ali je vsako odvajanje na kolobarjih pravo odvajanje?*

V naslednjem primeru bomo ugotovili, da obstaja odvajanje na kolobarju, ki ni pravo odvajanje.

Primer 3.10 Naj bodo K, d ter $A, X, Y \in K$ taki, kot v primeru 3.9. Potem je $X \cdot Y = A$, $d(-X) = X$ in $d(Y) = Y$ in od tod sledi (po podobnem razmisleku, kot v primeru 3.9), da je $i_d(X \cdot Y) = \emptyset$, čeprav je $i_d(X), i_d(Y) \neq \emptyset$.

V naslednjih primerih si bomo ogledali nekaj pravih odvajanj.

Primer 3.11 Naj bo K kolobar in naj bo $d : K \to K$ trivialno odvajanje na K. Očitno je, da je d pravo odvajanje.

Primer 3.12 Naj bo K kolobar polinomov $\mathbb{R}[X]$ in naj bo $d : K \to K$ standardno odvajanje $d(p) = p'$. Potem za vse $p_1, p_2 \in K$ velja, da je $p_1 \cdot p_2 \in K$ in vedno obstaja tak polinom $p \in K$, da je $d(p) = p_1 \cdot p_2$. Torej je d pravo odvajanje.

V nadaljevanju bomo opisali prava odvajanja.

Izrek 3.13. *Naj bo d odvajanje na kolobarju K. Naslednji trditvi sta ekvivalentni:*

1. *d je pravo odvajanje.*
2. *$d(K)$ je podkolobar kolobarja K.*

Dokaz. Naj bo d pravo odvajanje na K. Dokazati moramo, da je $d(K)$ podkolobar kolobarja K. Vse kar moramo videti je, da če sta $x, y \in d(K)$, potem je tudi $x \cdot y \in d(K)$. Ker je d pravo odvajanje, sledi, da obstaja element $z \in i_d(x \cdot y)$, kar pomeni, da je $d(z) = x \cdot y$. Od tod sledi, da je $x \cdot y \in d(K)$.

Dokažimo še obrat. Recimo, da je $d(K)$ podkolobar kolobarja K. Naj bosta $x, y \in K$ poljubna elementa, taka, da velja $i_d(x), i_d(y) \neq \emptyset$. Dokazati moramo, da je $i_d(x \cdot y) \neq \emptyset$. Jasno je, da za poljubna $a \in i_d(x)$ in $b \in i_d(y)$ velja, da je $d(a) = x$ in $d(b) = y$. Torej sta $x, y \in d(K)$. Ker je $d(K)$ podkolobar kolobarja K, sledi, da je $x \cdot y \in d(K)$. To pomeni, da obstaja tak element $z \in K$, da je $x \cdot y = d(z)$. Od tod sledi, da je $z \in i_d(x \cdot y)$ in $i_d(x \cdot y) \neq \emptyset$.

$\square$

Primer 3.13 Za taka K in d kot v primeru 3.12, je $d(K) = K$ podkolobar kolobarja K, vendar pa ni pravi podkolobar kolobarja K.

V naslednjem primeru bomo obravnavali tak kolobar K in odvajanje d na K, da bo $d(K)$ pravi podkolobar kolobarja K ($d(K) \subseteq K$ in $d(K) \neq K$).

Primer 3.14 Naj bo

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$$

podkolobar realnih 3×3 matrik $M_3(\mathbb{R})$ in naj bo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Naj bo še $d : K \to K$ notranje odvajanje na K, definirano s predpisom $d(X) = X \cdot A - A \cdot X$. Hitro lahko opazimo, da je

$$d(K) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

pravi podkolobar kolobarja K. Po izreku 3.13 je d pravo odvajanje na K.

Izrek 3.14. *Naj bo d pravo odvajanje na K. Potem je tudi $(\mathcal{K}_d, \oplus, \odot)$ kolobar.*

Dokaz. To, da je $(\mathcal{K}_d, \oplus, \odot)$ kolobar, bomo dokazali v naslednjih korakih. Naj bodo $i_d(x)$, $i_d(y)$, in $i_d(z)$ poljubni elementi iz $\mathcal{K}_d$. Potem velja:

1. $\oplus$ je komutativna operacija:

$i_d(x) \oplus i_d(y) = i_d(x+y) = i_d(y+x) = i_d(y) \oplus i_d(x)$,

2. $\oplus$ je asociativna operacija:

   $(i_d(x) \oplus i_d(y)) \oplus i_d(z) = i_d(x+y) \oplus i_d(z) = i_d((x+y)+z) = i_d(x+(y+z)) = i_d(x) \oplus i_d(y+z) = i_d(x) \oplus (i_d(y) \oplus i_d(z))$,

3. $i_d(0)$ je nevtralni element za $\oplus$:

   $i_d(0) \oplus i_d(x) = i_d(0+x) = i_d(x) = i_d(x+0) = i_d(x) \oplus i_d(0)$,

4. $i_d(-x)$ je nasprotni element elementa $i_d(x)$ za operacijo $\oplus$:

   $i_d(x) \oplus i_d(-x) = i_d(x-x) = i_d(0) = i_d(-x+x) = i_d(-x) \oplus i_d(x)$ (očitno je, da če je $i_d(x) \neq \emptyset$, potem je tudi $i_d(-x) \neq \emptyset$),

5. $\odot$ je asociativna operacija:

   $(i_d(x) \odot i_d(y)) \odot i_d(z) = i_d(x \cdot y) \odot i_d(z) = i_d((x \cdot y) \cdot z) = i_d(x \cdot (y \cdot z)) = i_d(x) \odot i_d(y \cdot z) = i_d(x) \odot (i_d(y) \odot i_d(z))$,

6. množenje $\odot$ ter seštevanje $\oplus$ povezuje distributivnostni zakon:

   $(i_d(x) \oplus i_d(y)) \odot i_d(z) = i_d(x+y) \odot i_d(z) = i_d((x+y) \cdot z) = i_d(x \cdot z + y \cdot z) = i_d(x \cdot z) \oplus i_d(y \cdot z) = i_d(x) \odot i_d(z) \oplus i_d(y) \odot i_d(z)$.

   Podobno dokažemo tudi, da je $i_d(x) \odot (i_d(y) \oplus i_d(z)) = i_d(x) \odot i_d(y) \oplus i_d(y) \odot i_d(z)$.

Od tod sledi, da je $(\mathcal{K}_d, \oplus, \odot)$ kolobar.

□

Definicija 3.8. *Naj bo d pravo odvajanje na kolobarju K. Potem $(\mathcal{K}_d, \oplus, \odot)$ imenujemo kolobar d-integralov na K oziroma kolobar integralov na K.*

Primer 3.15 Naj bo K kolobar in $d : K \to K$ trivialno odvajanje na K. Očitno je, da je d pravo odvajanje. Potem je $\mathcal{K}_d = \{K\}$, $i_d(0) = K$, kolobar d-integralov na K, $(\mathcal{K}_d, \oplus, \odot)$, pa je trivialen kolobar.

V primeru 3.16 bomo obravnavali tak kolobar K in tako pravo (notranje) odvajanje d na K, da $(\mathcal{K}_d, \oplus, \odot)$ ni trivialen kolobar, niti ni trivialno množenje $\odot$.

Primer 3.16 Naj bosta K in d taka kot v primeru 3.14. Hitro vidimo, da je

$$i_d(O) = \left\{ \begin{bmatrix} a & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

kjer je O ničelna matrika v K. Naj bosta

$$X = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ in } Y = \begin{bmatrix} 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matriki iz K. Sledi, da sta $i_d(X), i_d(Y) \neq \emptyset$ in od tod sledi $i_d(X), i_d(Y) \in \mathcal{K}_d$. Potem je

$$i_d(X) \odot i_d(Y) = i_d(X \cdot Y) = i_d\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 d_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Ker je matrika

$$B(b_1, b_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}b_1 b_2 & \frac{1}{2}b_1 b_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in i_d\,(X \cdot Y)$$

pomeni, da je $i_d(X \cdot Y) \neq \emptyset$. Za $b_1 = b_2 = 1$, $B(b_1, b_2) \notin i_d(O)$ in zato v tem primeru velja, da $i_d(X) \odot i_d(Y) \neq i_d(O)$.

Na koncu tega razdelka si bomo ogledali še nekaj lastnosti kolobarjev integralov.

Izrek 3.15. *Naj bo K kolobar in naj bo $d : K \to K$ pravo odvajanje na K. Če je K kolobar z enoto $1 \in K$ in če je $i_d(1) \in \mathcal{K}_d$, potem je tudi $(\mathcal{K}_d, \oplus, \odot)$ kolobar z enoto —*

$i_d(1)$ je enota za množenje.

Dokaz. Naj bo $i_d(x) \in \mathcal{K}_d$ poljuben element. Potem velja $i_d(x) \odot i_d(1) = i_d(x \cdot 1) = i_d(x) = i_d(1 \cdot x) = i_d(1) \odot i_d(x)$.

□

Izrek 3.16. *Naj bo K kolobar in naj bo $d : K \to K$ pravo odvajanje na K. Če je K komutativen kolobar, potem je tudi $(\mathcal{K}_d, \oplus, \odot)$ komutativen kolobar.*

Dokaz. Naj bosta $i_d(x), i_d(y) \in \mathcal{K}_d$ poljubna elementa. Potem velja $i_d(x) \odot i_d(y) = i_d(x \cdot y) = i_d(y \cdot x) = i_d(y) \odot i_d(x)$.

□

Izrek 3.17. *Naj bodo K kolobar z enoto $1 \in K$, $d : K \to K$ pravo odvajanje na K, $i_d(1) \in \mathcal{K}_d$ ter $i_d(x) \in \mathcal{K}_d$ za nek $x \in K$. Če je x obrnljiv v K in je $i_d(x^{-1}) \in \mathcal{K}_d$, potem je $i_d(x)$ obrnljiv v $\mathcal{K}_d$ — $i_d(x^{-1})$ je inverz za množenje elementa $i_d(x)$.*

Dokaz. Naj bo $i_d(x) \in \mathcal{K}_d$ poljuben element, tak, da je x obrnljiv v K. Če je $i_d(x^{-1}) \in \mathcal{K}_d$, potem je $i_d(x) \odot i_d(x^{-1}) = i_d(x \cdot x^{-1}) = i_d(1) = i_d(x^{-1} \cdot x) = i_d(x^{-1}) \odot i_d(x)$.

□

Lema 3.4. *Naj bo K kolobar in naj bo $d : K \to K$ odvajanje na K. Potem je $i_d(x) \neq \emptyset$ natanko takrat, ko je $x \in d(K)$ za vsak $x \in K$.*

Dokaz. Recimo, da je $i_d(x) \neq \emptyset$ in naj bo $y \in i_d(x)$. Potem je $d(y) = x$ in od tod sledi, da je $x \in d(K)$. Dokažimo še obrat. Recimo, da je $x \in d(K)$. Vzemimo nek element $y \in K$ tak, da je $x = d(y)$. Potem je $y \in i_d(x)$ in od tod sledi, da je $i_d(x) \neq \emptyset$.

□

Izrek 3.18. *Naj bo K kolobar in naj bo $d : K \to K$ pravo odvajanje na K. Kolobar $(\mathcal{K}_d, \oplus, \odot)$ je izomorfen podkolobarju $d(K)$ kolobarja K.*

Dokaz. Naj bo $f : d(K) \to \mathcal{K}_d$ funkcija, definirana s predpisom $f(x) = i_d(x)$ za vsak $x \in d(K)$. Dokazati moramo, da je f izomorfizem kolobarjev.

- Najprej dokažimo, da je f bijektivna. Jasno je, da je f surjektivna: naj bo $i_d(y) \in \mathcal{K}_d$ poljuben. Dokazali bomo, da je $y \in d(K)$ tak, da je $f(y) = i_d(y)$. Ker je $i_d(y)$ neprazna množica, obstaja nek $z \in i_d(y)$, od tod pa sledi, da je $d(z) = y$. To pomeni, da je $y \in d(K)$. Videti moramo še, da je f injektivna. Recimo, da je $f(x) = f(y)$, to pomeni $i_d(x) = i_d(y)$. Za poljuben $z \in i_d(x) = i_d(y)$ velja, da je $x = d(z) = y$. Torej je f tudi injektivna.

- Iz izreka 3.13 sledi, da je $d(K)$ kolobar. Naj bosta $x, y \in d(K)$ poljubna elementa. Potem sta $i_d(x)$ in $i_d(y)$ neprazni množici po lemi 3.4. Iz leme 3.2 sledi, da je tudi $i_d(x + y)$ neprazna množica ($i_d(x + y) = i_d(x) + i_d(y)$). Od tod sledi, da je

$$f(x + y) = i_d(x + y) = i_d(x) + i_d(y) = i_d(x) \oplus i_d(y) = f(x) \oplus f(y).$$

  Ker je d pravo odvajanje, pomeni, da je $i_d(x \cdot y) \neq \emptyset$. Od tod sledi, da je

$$f(x \cdot y) = i_d(x \cdot y) = i_d(x) \odot i_d(y) = f(x) \odot f(y).$$

□

Primer 3.17 Naj bo K kolobar polinomov $\mathbb{R}[X]$ in $d : K \to K$ standardno odvajanje $d(p) = p'$. Potem je očitno, da je $d(K) = K$ in ker je d pravo odvajanje, iz izreka 3.18 sledi, da je v tem primeru $(\mathcal{K}_d, \oplus, \odot)$ izomorfen kolobarju K.

Primer 3.18 Naj bosta K kolobar in d odvajanje, taka, kot v primeru 3.14. Potem je

$(\mathcal{K}_d, \oplus, \odot)$ po izreku 3.18 izomorfen

$$d(K) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Poglavje 4

JORDANSKA INTEGRIRANJA

V zadnjem poglavju bomo predstavili nov koncept jordanskih integriranj na kolobarjih ter opisali njihove osnovne lastnosti.

Definicija 4.1. *Naj bodo K kolobar, $x \in K$ in $\delta : K \to K$ jordansko odvajanje na K. Naj bo*

$$j_\delta(x) = \{y \in K \mid x = \delta(y)\}.$$

Rečemo, da je $y \in K$ jordanski δ-primitiven element elementa $x \in K$, če je

$$y \in j_\delta(x).$$

Funkciji $j_\delta : K \to 2^K$, $x \mapsto j_\delta(x)$, rečemo jordansko δ-integriranje na K, množici $j_\delta(x)$ pa jordanski δ-integral elementa x.
Funkcija $j : K \to 2^K$ je jordansko integriranje na K, če obstaja jordansko odvajanje δ na K, tako, da je $j = j_\delta$. Za vsak $x \in K$ rečemo, da je $j(x)$ jordanski integral elementa x.

Ker je vsako odvajanje d tudi jordansko odvajanje, sledi, da je vsako d-integriranje tudi jordansko d-integriranje. Obstajajo kolobarji K ter jordanska odvajanja δ na K, ki niso odvajanja, zato od tod sledi, da za taka jordanska odvajanja δ, ustrezna jordanska δ-integriranja j_δ niso nikoli δ-integriranja. Vendar pa, ali je res, da za vsako tako jordansko odvajanje δ obstaja tako odvajanje d, da je $j_\delta = i_d$? Iz naslednjega izreka bomo ugotovili, da je odgovor negativen.

Izrek 4.1. *Obstaja kolobar K in tako jordansko odvajanje δ na K, da za vsako odvajanje d na K velja $i_d \neq j_\delta$.*

Dokaz. Naj bosta K kolobar in δ jordansko odvajanje na K, ki ni odvajanje. Denimo, da obstaja tako odvajanje d na K, da je $i_d(x) = j_\delta(x)$ za vsak $x \in K$. Naj bo $y \in K$ poljuben element. Potem obstaja tak $x \in K$, da je $y \in i_d(x) = j_\delta(x)$. Od tod sledi, da je $d(y) = x = \delta(y)$. Dobimo $d = \delta$, kar je protislovje.

□

Sedaj bomo natančno opisali jordanski integral nekega elementa.

Izrek 4.2. *Naj bodo K kolobar, $x, z \in K$, $\delta : K \to K$ jordansko odvajanje na K ter $y \in j_\delta(x)$. Naslednji trditvi sta ekvivalentni:*

1. *$z \in j_\delta(x)$.*
2. *Obstaja tak enoličen element $w_0 \in \mathrm{Ker}(\delta)$, da je $z = y + w_0$.*

Dokaz. Recimo, da je $z \in j_\delta(x)$. Naj bo $w_0 = z - y$. Očitno je, da je $z = y + w_0$ in $\delta(w_0) = \delta(z - y) = \delta(z) - \delta(y) = x - x = 0$. Če je $z = y + w_0 = y + w_1$ za $w_0, w_1 \in \mathrm{Ker}(\delta)$, potem je $0 = z - z = w_0 - w_1$ in od tod sledi $w_0 = w_1$. Dokažimo še obrat. Naj bo $z = y + w_0$ za poljuben $w_0 \in \mathrm{Ker}(\delta)$. Potem je $\delta(z) = \delta(y + w_0) = \delta(y) + \delta(w_0) = x + 0 = x$ in od tod sledi, da je $z \in j_\delta(x)$.

□

Posledica 4.1. *Naj bodo K kolobar, $x \in K$, $\delta : K \to K$ jordansko odvajanje na K ter $y \in j_\delta(x)$. Potem je*

$$j_\delta(x) = \{y + z \mid z \in \mathrm{Ker}(\delta)\}.$$

Dokaz. Rezultat sledi direktno iz izreka 4.2.

□

Za jordanska integriranja lahko opišemo podobne lastnosti, kot smo jih za navadna integriranja opisali v razdelku 3.2.

Izrek 4.3. *Naj bosta K kolobar ter $\delta : K \to K$ jordansko odvajanje na K. Potem veljajo naslednje trditve:*

1. $0 \in j_\delta(0)$.
2. *Če sta* $y, z \in j_\delta(x)$, *potem je* $y - z \in j_\delta(0)$ *za vse* $x, y, z \in K$.
3. *Za vsak* $x \in K$ *je* $x \in j_\delta(\delta(x))$.
4. *Če je* $j_\delta(x) \neq \emptyset$, *potem je* $\delta(j_\delta(x)) = \{x\}$ *za vsak* $x \in K$.
5. *Če sta* $j_\delta(x), j_\delta(y) \neq \emptyset$, *potem je* $j_\delta(x + y) = j_\delta(x) + j_\delta(y)$ *za vse* $x, y \in K$.
6. *(jordansko integriranje po delih)*

   Če so $j_\delta(\delta(x) \cdot y), j_\delta(x \cdot \delta(y)), j_\delta(\delta(y) \cdot x), j_\delta(y \cdot \delta(x)) \neq \emptyset$, *potem je*

   $$x \circ y \in j_\delta(\delta(x) \cdot y) + j_\delta(x \cdot \delta(y)) + j_\delta(\delta(y) \cdot x) + j_\delta(y \cdot \delta(x))$$

   za vse $x, y \in K$.
7. *Če sta* $y_1 \in j_\delta(x_1)$ *in* $y_2 \in j_\delta(x_2)$, *potem je* $y_1 + y_2 \in j_\delta(x_1 + x_2)$ *za vse* $x_1, x_2, y_1, y_2 \in K$.
8. *Če sta* $y_1 \in j_\delta(x_1)$ *in* $y_2 \in j_\delta(x_2)$, *potem je* $y_1 \circ y_2 \in j_\delta(x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot y_1 + y_2 \cdot x_1)$ *za vse* $x_1, x_2, y_1, y_2 \in K$.
9. *Jordansko odvajanje* δ *je surjektivno natanko tedaj, ko je* $j_\delta(x) \neq \emptyset$ *za vsak* $x \in K$.
10. *Jordansko odvajanje* δ *je injektivno natanko tedaj, ko je* $|j_\delta(x)| = 1$ *za vsak* $x \in K$.

Dokaz. Dokazi so zelo podobni ustreznim dokazom iz razdelka 3.2, zato podrobnosti prepuščamo bralcu.

□

V nadaljevanju bomo iz kolobarja K ter jordanskega odvajanja δ na K konstruirali nova kolobarja $(\mathcal{K}_\delta, \oplus, \odot)$ in $(\mathcal{K}_\delta, \oplus, \boxdot)$.

Izrek 4.4. *Naj bosta K kolobar in $\delta : K \to K$ jordansko odvajanje na K. Družina*

$$\mathcal{K}_\delta = \{j_\delta(x) \mid j_\delta(x) \neq \emptyset, x \in K\}$$

je particija kolobarja K.

Dokaz. Izrek dokažemo na enak način, kot smo dokazali izrek 3.12, le da zamenjamo i_d z j_δ.

□

Naj bo δ jordansko odvajanje na kolobarju K: Definirajmo operacije $\oplus$, $\odot$ ter $\boxdot$ na $\mathcal{K}_\delta$ na naslednji način. Za vse $j_\delta(x), j_\delta(y) \in \mathcal{K}_\delta$, naj bo:

1. $j_\delta(x) \oplus j_\delta(y) = j_\delta(x + y)$,
2. $j_\delta(x) \odot j_\delta(y) = j_\delta(x \cdot y)$,
3. $j_\delta(x) \boxdot j_\delta(y) = j_\delta(x \circ y)$.

Podobno kot za operaciji $\oplus$ in $\odot$ na $\mathcal{K}_d$, je operacija $\oplus$ vedno dobro definirana, vendar pa operaciji $\odot$ ter $\boxdot$ nista nujno dobro definirani operaciji. Naj izpostavimo, da kadar je $\boxdot$ dobro definirana operacija, ni nujno vedno asociativna, to pa zato, ker operacija $\circ$ ni nujno asociativna.

Trditev 4.1. *Naj bo δ jordansko odvajanje na kolobarju K. Če sta $j_\delta(x), j_\delta(y) \in \mathcal{K}_\delta$, potem je tudi $j_\delta(x) \oplus j_\delta(y) \in \mathcal{K}_\delta$.*

Dokaz. Rezultat sledi direktno iz 5. točke izreka 4.3.

$\square$

Obstajajo primeri kolobarjev in jordanskih odvajanj δ, za katere operaciji $\odot$ ter $\boxdot$ nista dobro definirani (glej primer 4.1). Najprej bomo vpeljali naslednjo definicijo.

Definicija 4.2. *Naj bo δ jordansko odvajanje na kolobarju K. Potem je δ*

1. *pravo jordansko odvajanje, če $j_\delta(x), j_\delta(y) \in \mathcal{K}_\delta$ implicira $j_\delta(x \cdot y) \in \mathcal{K}_\delta$,*

2. *J-pravo jordansko odvajanje, če $j_\delta(x), j_\delta(y) \in \mathcal{K}_\delta$ implicira $j_\delta(x \circ y) \in \mathcal{K}_\delta$*

za vse $x, y \in K$.

V naslednjem primeru bomo videli, da obstaja jordansko odvajanje, ki ni pravo jordansko odvajanje.

Primer 4.1 Naj bodo K, d ter $A, X, Y \in K$ taki, kot v primeru 3.9 in naj bo $\delta = d$. Ker je δ odvajanje, je tudi jordansko odvajanje. Po primeru 3.9 lahko hitro ugotovimo, da je $j_\delta(X \cdot Y) = \emptyset$, čeprav $j_\delta(X), j_\delta(Y) \neq \emptyset$. Od tod sledi, da δ ni pravo jordansko odvajanje.
Podobno sledi iz $j_\delta(X \circ Y) = j_\delta\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \emptyset$, da δ ni J-pravo jordansko odvajanje.

V naslednjih primerih si bomo ogledali prava in J-prava jordanska odvajanja.

Primer 4.2 Naj bosta K kolobar in $\delta : K \to K$ trivialno jordansko odvajanje na K. Očitno je, da je δ pravo in tudi J-pravo jordansko odvajanje.

Primer 4.3 Naj bosta K kolobar polinomov $\mathbb{R}[X]$ ter $d : K \to K$ standardno odvajanje $d(p) = p'$. Potem je $\delta = d$ jordansko odvajanje. Očitno je, da za poljubna $p_1, p_2 \in K$ velja $p_1 \cdot p_2, p_1 \circ p_2 \in K$ ter vedno obstajata taka polinoma $p, q \in K$, da je $\delta(p) = p_1 \cdot p_2$ in $\delta(q) = p_1 \circ p_2$. Od tod sledi, da je δ pravo, kot tudi J-pravo jordansko odvajanje.

V naslednjih izrekih bomo opisali prava jordanska odvajanja in J-prava jordanska odvajanja ter si ogledali nekaj njunih lastnosti.

Izrek 4.5. *Naj bo δ odvajanje na kolobarju K. Naslednji trditvi sta ekvivalentni.*

1. *δ je pravo jordansko odvajanje.*

2. *$\delta(K)$ je podkolobar kolobarja $(K, +, \cdot)$.*

Dokaz. Dokaz je podoben dokazu izreka 3.13, zato podrobnosti prepuščamo bralcu.

□

Izrek 4.6. *Naj bo δ odvajanje na kolobarju K. Naslednji trditvi sta ekvivalentni.*

1. *δ je J-pravo jordansko odvajanje.*

2. *$\delta(K)$ je podkolobar kolobarja $(K, +, \circ)$ (ki ni nujno asociativen).*

Dokaz. Dokaz je podoben dokazu izreka 3.13.

□

Izrek 4.7. *Vsako pravo jordansko odvajanje je tudi J-pravo jordansko odvajanje.*

Dokaz. Naj bosta K kolobar in $\delta : K \to K$ pravo jordansko odvajanje na K. Naj bosta še $j_\delta(x), j_\delta(y) \in \mathcal{K}_\delta$. Ker je δ pravo jordansko odvajanje, sta $j_\delta(x \cdot y), j_\delta(y \cdot x) \neq \emptyset$. Naj bosta $a \in j_\delta(x \cdot y)$ ter $b \in j_\delta(y \cdot x)$. Potem je

$$a + b \in j_\delta(x \cdot y) + j_\delta(y \cdot x) = j_\delta(x \cdot y + y \cdot x) = j_\delta(x \circ y).$$

Od tod sledi, da je $j_\delta(x \circ y) \neq \emptyset$.

□

Naslednji primer opisuje jordansko odvajanje, ki je pravo jordansko odvajanje ter tudi J-pravo jordansko odvajanje, vendar pa ni odvajanje.

Primer 4.4 Naj bodo $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in naj bosta

$$X = \{xI + yA_0 \mid x, y \in \mathbb{R}\} \text{ in } Y = \{xA_0 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

podkolobarja kolobarja realnih 2×2 matrik $M_2(\mathbb{R})$. Naj bo še

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \mid A, B, D \in X, C \in Y \right\}.$$

Če K opremimo z naslednjim seštevanjem in množenjem:

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 \\ C_1 + C_2 & D_1 + D_2 \end{bmatrix}$$

in

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{bmatrix},$$

potem je $(K, +, \cdot)$ kolobar. Definirajmo še preslikavo $\delta : K \to K$ kot

$$\delta\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} O & C \\ O & O \end{bmatrix}.$$

Preprosto lahko pokažemo, da je δ jordansko odvajanje, vendar pa ni odvajanje. Ker je

$$\delta(K) = \left\{ \begin{bmatrix} O & C \\ O & O \end{bmatrix} \mid C \in Y \right\}$$

podkolobar kolobarja $(K, +, \cdot)$, sledi, da je δ pravo jordansko odvajanje. Po izreku 4.7 je celo J-pravo jordansko odvajanje.

Vsi primeri J-pravih jordanskih odvajanj, ki smo jih preučili do sedaj, so pokazali, da je J-pravo jordansko odvajanje tudi pravo jordansko odvajanje. Primer, ki bi dokazoval nasprotno, zaenkrat še ni znan, zato se poraja naslednje vprašanje.

Vprašanje 4.1. *Ali obstaja J-pravo jordansko odvajanje, ki ni pravo jordansko odvajanje?*

Izrek 4.8. *Naj bo δ jordansko odvajanje na kolobarju K.*

1. *Če je δ pravo jordansko odvajanje, potem je $(\mathcal{K}_\delta, \oplus, \odot)$ kolobar.*

2. *Če je δ J-pravo jordansko odvajanje, potem je $(\mathcal{K}_\delta, \oplus, \boxdot)$ kolobar (ki ni nujno asociativen).*

Dokaz. Dokaz je enak kot dokaz izreka 3.14, s tem, da zamenjamo i_d z j_δ (ter $\odot$ z $\boxdot$). $\square$

Sledita definiciji kolobarja jordanskih δ-integralov na K ter jordanskega kolobarja jordanskih δ-integralov na K.

Definicija 4.3. *Naj bo δ jordansko odvajanje na kolobarju K.*

1. *Če je δ pravo jordansko odvajanje, potem kolobar $(\mathcal{K}_\delta, \oplus, \odot)$ imenujemo kolobar jordanskih δ-integralov na K, oziroma kolobar jordanskih integralov na K.*

2. *Če je δ J-pravo jordansko odvajanje, potem kolobar $(\mathcal{K}_\delta, \oplus, \boxdot)$ imenujemo jordanski kolobar jordanskih δ-integralov na K, oziroma jordanski kolobar jordanskih integralov na K.*

Primer 4.5 Če vzamemo $\delta = d$ kot v primeru 3.16, dobimo tako pravo jordansko odvajanje, da $(\mathcal{K}_\delta, \oplus, \odot)$ ni trivialen kolobar.

Lema 4.1. *Naj bosta K kolobar in $\delta : K \to K$ jordansko odvajanje na K. Potem je $j_\delta(x) \neq \emptyset$ natanko tedaj, ko je $x \in \delta(K)$ za vsak $x \in K$.*

Dokaz. Naj bosta $j_\delta(x) \neq \emptyset$ in $y \in j_\delta(x)$. Potem je $\delta(y) = x$ in od tod sledi, da je $x \in \delta(K)$. Dokažimo še obrat. Recimo, da je $x \in \delta(K)$. Vzemimo poljuben $y \in K$, tak, da je $x = \delta(y)$. Potem je $y \in j_\delta(x)$ in zato je $j_\delta(x) \neq \emptyset$.

□

V izreku 4.9 bomo opisali kolobarja $(\mathcal{K}_\delta, \oplus, \odot)$ in $(\mathcal{K}_\delta, \oplus, \boxdot)$.

Izrek 4.9. *Naj bosta $K = (K, +, \cdot)$ kolobar in $\delta : K \to K$ jordansko odvajanje na K.*

1. *Če je δ pravo jordansko odvajanje, potem je $(\mathcal{K}_\delta, \oplus, \odot)$ izomorfen podkolobarju $\delta(K)$ kolobarja $(K, +, \cdot)$.*
2. *Če je δ J-pravo jordansko odvajanje, potem je $(\mathcal{K}_\delta, \oplus, \boxdot)$ izomorfen podkolobarju $\delta(K)$ kolobarja $(K, +, \circ)$ (ki ni nujno asociativen).*

Dokaz. Naj bo $f : \delta(K) \to \mathcal{K}_\delta$ funkcija, definirana s predpisom $f(x) = j_\delta(x)$ za vsak $x \in \delta(K)$. Najprej dokažimo, da je f bijektivna. Jasno je, da je f surjektivna, ker je $j_\delta(x) \neq \emptyset$ za vsak $x \in \delta(K)$. Dokazati moramo še, da je f injektivna. Recimo, da je $f(x) = f(y)$ $(j_\delta(x) = j_\delta(y))$. Za poljuben $z \in j_\delta(x) = j_\delta(y)$ velja, da je $x = \delta(z) = y$. Torej je f bijektivna.

1. Recimo, da je δ pravo jordansko odvajanje. Iz izreka 4.5 sledi, da je $\delta(K)$ podkolobar kolobarja $(K, +, \cdot)$. Naj bosta $x, y \in \delta(K)$ poljubna elementa. Potem sta $j_\delta(x)$ ter $j_\delta(y)$ po lemi 4.1 neprazni množici. Iz 5. točke izreka 4.3 sledi, da $j_\delta(x + y)$ ni prazna množica $(j_\delta(x + y) = j_\delta(x) + i_d(y))$. Od tod sledi

$$f(x + y) = j_\delta(x + y) = j_\delta(x) + j_\delta(y) = j_\delta(x) \oplus j_\delta(y) = f(x) \oplus f(y).$$

Ker je δ pravo jordansko odvajanje, je $j_\delta(x \cdot y) \neq \emptyset$. Od tod sledi

$$f(x \cdot y) = j_\delta(x \cdot y) = j_\delta(x) \odot j_\delta(y) = f(x) \odot f(y).$$

2. Če je δ J-pravo jordansko odvajanje, je dokaz podoben kot v zgornjem primeru.

$\square$

V zaključku poglavja si bomo ogledali še primer izomorfizma kolobarjev, kot smo ga opisali v izreku 4.9.

Primer 4.6 Naj bo K kolobar, definiran kot v primeru 4.4. Po 1. točki izreka 4.9 je $(\mathcal{K}, \oplus, \odot)$ izomorfen

$$\delta(K) = \left\{ \begin{bmatrix} O & C \\ O & O \end{bmatrix} \mid C \in Y \right\}$$

(podkolobar kolobarja $(K, +, \cdot)$), ki je izomorfen kolobarju Y. Od tod sledi, da je tudi $(\mathcal{K}, \oplus, \odot)$ izomorfen Y.

Po 2. točki izreka 4.9 je $(\mathcal{K}, \oplus, \boxdot)$ izomorfen $\delta(K)$ (podkolobar kolobarja $(K, +, \circ)$), ki je izomorfen kolobarju Y.

Literatura

[1] I. Banič, Integrations and Jordan integrations on rings, arXiv:1406.3061v1 [math.RA], 2014.

[2] J. Cusak, Jordan derivations on rings, Proc. Amer. Math. Soc. **53** (1975), 321 – 324.

[3] E. C. Posner, Derivations in prime rings, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 1093 – 1100.

[4] I. Vidav, *Algebra*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1989.

[5] I. Vidav, *Višja matematika I*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1985.