

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Zaključna naloga

**Karakterizacija ravninskih in prostorskih krivulj s
pitagorejskim hodografom**

(Characterization of planar and spatial Pythagorean-hodograph curves)

Ime in priimek: Nevena Mitrović

Študijski program: Matematika

Mentor: doc. dr. Vito Vitrih

Koper, junij 2015

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Nevena MITROVIĆ

Naslov zaključne naloge: Karakterizacija ravninskih in prostorskih krivulj s pitagorejskim hodografom

Kraj: Koper

Leto: 2015

Število listov: 44

Število slik: 10

Število tabel: 1

Število referenc: 10

Mentor: doc. dr. Vito Vitrih

Ključne besede: polinomi, krivulje, pitagorejski hodograf, interpolacija

Math. Subj. Class. (2010): 65D05, 65D17

Izveček:

Zaključna naloga obravnava polinomske krivulje s pitagorejskim hodografom (PH krivulje). To so krivulje, za katere obstaja nek polinom, ki skupaj s komponentami odvoda krivulje tvori pitagorejsko n -terico.

V uvodnem poglavju so predstavljene osnovne definicije, ki jih potrebujemo v nadaljevanju, kot so: definicija polinomske PH krivulje, regularnost krivulje, različne reprezentacije krivulj (monomska, Bernsteinova ...). Ker je karakterizacija PH krivulj odvisna od dimenzije prostora, v katerem krivulja leži, je jedrni del naloge razdeljen na dva dela. Prvi del naloge je posvečen ravninskim PH krivuljam, kjer so opisane njihove osnovne lastnosti, kot so racionalna tangentna, eksaktno izračunljiva ločna dolžina ter lastnost racionalnih krivulj odmika (offset krivulj). V nadaljevanju je predstavljena kompleksna reprezentacija tovrstnih PH krivulj. Na koncu tega poglavja je izpeljana Bézierova reprezentacija krivulj stopenj 3 in 5 ter obdelan primer interpolacije z ravninskimi PH krivuljami stopnje 5. V drugem delu je naloga posvečena prostorskim PH krivuljam. Lastnosti iz prejšnjega poglavja so posplošene na prostorske krivulje. Z uporabo kvaternionov je pokazano, kako lahko te krivulje definiramo na enostaven način. Poglavje je zaključeno z izpeljavo posebnih lastnosti, ki veljajo za kubične prostorske PH krivulje, in izpeljavo njene Bézierove reprezentacije. Predstavljen je primer interpolacije s kubičnimi prostorskimi PH krivuljami. Primeri v nalogi so narejeni s pomočjo programskega jezika Octave. Večina snovi je povzeta po knjigi Rida T. Farouki, *Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry inseparable*.

Key words documentation

Name and SURNAME: Nevena MITROVIĆ

Title of final project paper: Characterization of planar and spatial Pythagorean-hodograph curves

Place: Koper

Year: 2015

Number of pages: 44

Number of figures: 10

Number of tables: 1

Number of references: 10

Mentor: Assist. Prof. Vito Vitrih, PhD

Keywords: polynomial, curve, Pythagorean-hodograph, interpolation

Math. Subj. Class. (2010): 65D05, 65D17

Abstract:

The final project paper describes subclass of polynomial curves, named Pythagorean-Hodograph curves (PH curves). These are the curves for which there exists some polynomial σ , which together with components of the curve forms Pythagorean n -tuple.

In the introduction some preliminaries, used in the rest of the thesis, such as: definition of a polynomial curve, regularity of a curve, different representation of curves (monomial, Bernstein ...) are recalled. Since the characterization of PH curves is a bit different depending on the dimension of a space in which they are defined, the rest of the project paper is divided in two main parts. In the first one planar PH curves are defined. Some basic properties of such curves, such as rational tangent, exact arc length computation and rational offset curves are derived. Next the relation between the set of complex numbers and planar PH curves is considered. The last part of the chapter considers Bézier representation of low-degree planar PH curves, and solves an interpolation problem with PH curves of degree 5. In the second main part, we focused on spatial PH curves. Some properties from the previous chapter are generalized to spatial PH curves. Furthermore, we considered quaternions and their connection with spatial PH curves. The chapter is concluded with the derivation of the Bézier representation of spatial cubic PH curves and solving an interpolation problem with them. The basic literature used is Rida T. Farouki, Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry inseparable.

Zahvala

Posebno se zahvaljujem mentorju doc. dr. Vitu Vitrihu za strokovno pomoč, za čas in trud, ki ga je vložil pri nastajanju zaključne naloge, kot tudi za spodbudo pri poglobljanju mojega znanja.

Rada bi se zahvalila tudi Fakulteti za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije, ki mi je omogočila študij in dala podporo.

Zahvaljujem se tudi mojim najbližjim, ki so mi v teku študija ves čas stali ob strani.

Kazalo vsebine

1	Uvod	1
2	Osnovne definicije	3
3	Ravninske krivulje s pitagorejskim hodografom	5
3.1	Lastnosti ravninskih PH krivulj	7
3.1.1	Dolžina loka	7
3.1.2	Racionalna tangenta	8
3.1.3	Krivulje odmika	9
3.2	Kompleksna reprezentacija ravninskih PH krivulj	10
3.3	Bézierova reprezentacija regularnih PH krivulj nizkih stopenj	13
3.4	C^1 Hermiteova interpolacija s PH krivuljami stopnje 5	18
4	Prostorske krivulje s pitagorejskim hodografom	22
4.1	Lastnosti prostorskih PH krivulj	24
4.2	Kvaternioni	26
4.3	Reprezentacija PH krivulj s kvaternioni	29
4.4	Kubične prostorske PH krivulje	30
4.4.1	Bézierova reprezentacija	31
4.4.2	G^1 Hermiteova interpolacija s kubičnimi prostorskimi PH krivuljami	32
5	Zaključek	35
6	Literatura in viri	36

Kazalo tabel

1	Predpis preslikave P	12
---	--------------------------------	----

Kazalo slik

1	Primer polinomske krivulje, $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{t^3}{2} + 1, t - 2\right)$	3
2	PH krivulja iz primera (3.2)	6
3	Krivulje odmika PH krivulje.	10
4	Kontrolni poligon iz izreka 3.17.	15
5	Kontrolni poligon krivulje stopnje 5.	18
6	PH krivulje stopnje 5, kot štiri različne rešitve Hermiteovega C^1 interpolacijskega problema.	20
7	Primer prostorske krivulje.	22
8	Frenetovo (levo) in rotacijsko-minimizirajoče ogrodje (desno). [2]	26
9	Primer G^1 Hermiteove interpolacije, ko obstaja ena sama rešitev (točki $\mathbf{p}_0 = (-1, -1, 5)^T$, $\mathbf{p}_3 = (4, 4, 2)^T$ in tangenti $\mathbf{e}_{t_0} = \left(-\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$, $\mathbf{e}_{t_2} = \left(\frac{4}{\sqrt{42}}, -\frac{5}{\sqrt{42}}, -\frac{1}{\sqrt{42}}\right)^T$)	34
10	Primer G^1 Hermiteove interpolacije, ko obstajata dve rešitvi (točki $\mathbf{p}_0 = (1, 1, 3)^T$ in $\mathbf{p}_3 = (1, 5, 4)^T$, ter tangenti $\mathbf{e}_{t_0} = \left(\frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{2}{\sqrt{22}}\right)^T$ in $\mathbf{e}_{t_2} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)^T$), iz različnih zornih kotov.	34

Seznam kratic

<i>tj.</i>	to je
<i>npr.</i>	na primer
<i>in pdb.</i>	in podobno
<i>t.i.</i>	tako imenovani
<i>PH</i>	pitagorejski hodograf
<i>CAGD</i>	Computer Aided Geometric Design
<i>RRMF</i>	racionalno rotacijsko-minimizirajoče ogrodje

1 Uvod

Pojem krivulj s pitagorejskim hodografom se je prvič pojavil leta 1990. Uporaba navadnih polinomskih krivulj v CAGD (Computer Aided Geometric Design) ni vedno prinašala željenih rezultatov v oblikovanju s parametričnimi krivuljami. Ker parametrizacija krivulje ni enolična, so bile z naravno parametrizacijo krivulj (parametrizacija krivulje z njeno ločno dolžino) določene vse geometrijske lastnosti krivulje. Zato je bilo zaželeno poiskati krivulje, pri katerih je naravna parametrizacija racionalna. To sta prva naredila matematika Farouki in Sakkalis, ki sta definirala poseben razred krivulj, za katere velja, da imajo racionalno ali polinomsko naravno parametrizacijo, ter jih poimenovala krivulje s pitagorejskim hodografom (PH krivulje). V tej zaključni nalogi se osredotočamo samo na polinomske PH krivulje. Več o racionalnih PH krivuljah se lahko najde v [2].

Komponente hodografa poljubne polinomske krivulje \mathbf{r} definiramo kot odvode komponent krivulje \mathbf{r} . Za PH krivulje velja, da obstaja nek polinom σ , ki skupaj s komponentami njenega hodografa tvori pitagorejsko n -terico. Dandanes so postale PH krivulje precej uporabne tudi v robotiki, grafiki in animacijah. Poseben pomen pa imajo za uporabo pri računalniško numerično vodenih strojih (CNC stroji). Argumentov za uporabo PH krivulj je veliko. Kot prvega navedimo, da imajo tovrstne krivulje racionalno enotsko tangento. Kadar so definirane v prostoru, jim lahko poiščemo racionalno ortonormirano ogrodje kot tudi rotacijsko minimizirajoče ogrodje. Omenimo še, da lahko poljubno gibanje togega telesa v prostoru definiramo z ortonormiranim ogrođjem, zato nam je pomembno, da je le-to racionalno.

Zaključna naloga je razdeljena na tri dele. V prvem izmed njih so navedene osnovne definicije, potrebne za razumevanje zaključne naloge. V nadaljevanju je podana karakterizacija PH krivulj, sprva ravninskih in nato prostorskih. Le-te imajo različne lastnosti, kakor tudi algebraično karakterizacijo, zato so obravnavane v posebnih poglavjih:

- V poglavju 3 so obdelane ravninske PH krivulje in izpeljane njihove osnovne lastnosti. Izpeljano je, kako lahko tovrstne krivulje predstavimo s kompleksnimi števili, ter kako lahko poljubni polinomski krivulji, zapisani v kompleksni reprezentaciji, priredimo neko polinomsko PH krivuljo. Izpeljana je Bézierova oblika za krivulje stopenj 3 in 5, kakor tudi rešen C^1 Hermiteov interpolacijski problem

s PH krivuljami stopnje 5.

- V zadnjem poglavju je pozornost preusmerjena na prostorske PH krivulje. Lastnosti, ki so veljale za krivulje v ravnini, so posplošene, izpeljane pa so tudi nove, ki niso veljale za ravninske PH krivulje. Izpeljana je povezava med prostorom kvaternionov ter prostorskimi PH krivuljami. Poglavje je zaključeno s posebnostimi, ki veljajo za kubične prostorske PH krivulje, ter z izpeljavo njene Bézierove oblike. Rešili smo tudi G^1 Hermiteov interpolacijski problem z omenjenimi krivuljami.

Krivulje, ki predstavljajo rešitve interpolacijskih problemov so narejene s programskim jezikom Octave, prosto dostopnim na strani www.gnu.org/software/octave/.

2 Osnovne definicije

Polinomske krivulje s pitagorejskim hodografom, ki so obravnavane v tej nalogi, tvorijo poseben podrazred razreda polinomskih krivulj. Zato najprej definirajmo splošno krivuljo \mathbf{r} v prostoru dimenzije d .

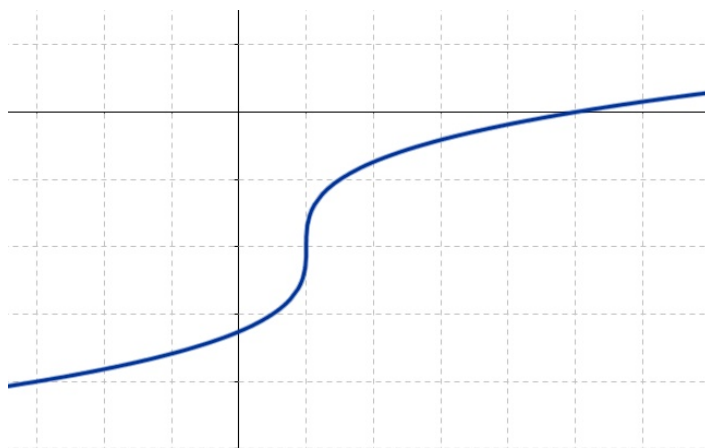
Definicija 2.1. Parametrizirana krivulja v prostoru \mathbb{R}^d je množica $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^d$, za katero obstaja preslikava

$$\mathbf{r} : I \rightarrow \Gamma, \quad I \subseteq \mathbb{R},$$

da velja $\Gamma = \{\mathbf{r}(t); t \in I\}$.

Preslikavi \mathbf{r} pravimo **parametrizacija** krivulje $r(I)$. Parametrizacija je **regularna**, če velja $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ za vsako vrednost parametra t iz množice I .

Če je krivulja \mathbf{r} v prostoru \mathbb{R}^d , potem ima obliko $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t))^T$, kjer izraz x_i imenujemo i -ta komponenta krivulje \mathbf{r} . Če so vse komponente krivulje \mathbf{r} polinomi, potem rečemo, da je \mathbf{r} **polinomska krivulja**.



Slika 1: Primer polinomske krivulje, $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{t^3}{2} + 1, t - 2\right)$.

Polinomske krivulje so zelo uporabne, ker z njimi lažje računamo in so preprosto predstavljive. Tako jih lahko zapišemo v različnih bazah, odvisno od tega, kakšen zapis nam bolj ustreza v določenem času. Navedimo nekaj reprezentacij krivulj v različnih bazah.

1. Monomska baza

Naj bo krivulja \mathbf{r} stopnje n . Komponente krivulje so polinomi, stopnje kvečjemu enake n . Potem lahko vsako komponento krivulje zapišemo v standardni (monomski) bazi:

$$p_i(t) = t^i, \quad i = 0, \dots, n,$$

kot linearno kombinacijo elementov baze:

$$x_j(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i, \quad j = 1, 2, \dots, d.$$

2. Bernsteinova baza

Ko imamo opravka z geometrijskim oblikovanjem krivulj, nam pogosto predstavitev krivulje v Bernsteinovi bazi olajša zadevo ([6]).

Definicija 2.2. Bernsteinovi bazni polinomi so polinomi oblike

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Za vse ostale vrednosti števila k , je Bernsteinov bazni polinom definiran kot ničlen polinom. Bernsteinovi bazni polinomi so linearno neodvisni in sestavljajo Bernsteinovo bazo za polinome stopnje n .

Če je polinom p linearna kombinacija Bernsteinovih baznih polinomov,

$$p(t) = \sum_{k=0}^n c_k B_k^n,$$

potem mu pravimo Bernsteinov polinom. Parametrizirano krivuljo, ki je predstavljena v Bernsteinovi bazi, imenujemo Bézierova krivulja.

Polinome lahko zapišemo tudi v drugih bazah, npr. v Newtonovi ali Langrangeevi bazi. Ker le-teh ne bomo potrebovali, jih ne bomo posebej omenjali.

V nadaljevanju bomo polinome večinoma predstavljali v monomski bazi, razen v primerih, ko bo neko lastnost krivulj s pitagorejskim hodografom lažje pokazati z uporabo Bernsteinove reprezentacije.

Definicija 2.3. Naj bo dana krivulja $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$. **Hodograf** krivulje \mathbf{r} definiramo kot vektorsko polje $\mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), \dots, x_d'(t))^T$.

Definicija 2.4. Polinomsko krivuljo $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t))^T$ v prostoru \mathbb{R}^d imenujemo krivulja s **pitagorejskim hodografom** (PH krivulja), če obstaja polinom σ , tako da velja:

$$\sum_{i=1}^d x_i'^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_d'^2 = \sigma^2(t).$$

PH krivulje imajo različno karakterizacijo, odvisno od dimenzije prostora, v katerem ležijo, tako da bomo posebej predstavili ravninske, ter prostorske PH krivulje.

3 Ravninske krivulje s pitagorejskim hodografom

PH krivulje smo definirali v splošnem prostoru dimenzije d . V tem poglavju bomo posebej predstavili ravninske PH krivulje, zato jih bomo natančno definirali.

Definicija 3.1. Krivuljo $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))^T$ imenujemo ravninska krivulja s pitagorejskim hodografom, če komponente njenega hodografa $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t))^T$ zadoščajo pogoju :

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \sigma(t)^2, \quad (3.1)$$

za nek polinom σ .

Opazimo, da ima za krivuljo \mathbf{r} stopnje n , polinom σ stopnjo $n - 1$.

Primer 3.2. Imejmo podano krivuljo

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 3t^3 - 4t + 5 \\ 6t^2 \end{pmatrix}.$$

Poiščemo njen hodograf

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} 9t^2 - 4 \\ 12t \end{pmatrix}$$

in se prepričamo, da je pitagorejski, saj velja

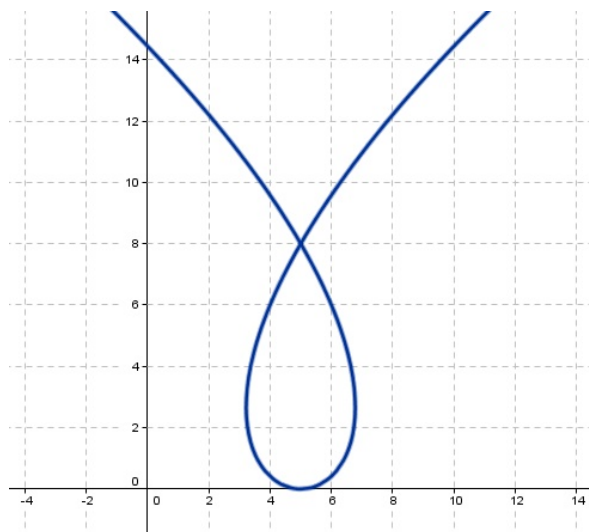
$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 81t^4 + 72t^2 + 16 = (9t^2 + 4)^2,$$

in $\sigma(t) = 9t^2 + 4$. Graf krivulje je narisana na sliki 2.

Sedaj ko poznamo definicijo PH krivulje, nas zanima, kdaj bodo poljubni trije polinomi zadoščali relaciji (3.1). Naslednja trditev nam pove potreben in zadosten pogoj, da polinomi $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ predstavljajo pitagorejsko trojico.

Izrek 3.3. Polinomi $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ zadoščajo pitagorejskemu pogoju

$$a^2(t) + b^2(t) = c^2(t) \quad (3.2)$$



Slika 2: PH krivulja iz primera (3.2)

natanko tedaj, ko obstajajo polinomi $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$, tako da velja

$$\begin{aligned} a(t) &= (u^2(t) - v^2(t))w(t), \\ b(t) &= 2u(t)v(t)w(t), \\ c(t) &= (u^2(t) + v^2(t))w(t), \end{aligned} \quad (3.3)$$

kjer sta $u(t)$, $v(t)$ tuja med seboj.

Dokaz. Ko vstavimo vrednosti za $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ v (3.2), vidimo, da je (3.3) zadosten pogoj. Za drugo smer dokaza, naj bo polinom $w(t)$ definiran kot največji skupni delitelj polinomov a , b , c . Skonstruirajmo nove polinome \tilde{a} , \tilde{b} in \tilde{c} , ki bodo paroma tuji, na naslednji način:

$$\tilde{a}(t) = \frac{a(t)}{w(t)}, \quad \tilde{b}(t) = \frac{b(t)}{w(t)}, \quad \tilde{c}(t) = \frac{c(t)}{w(t)}.$$

Polinomi, ki smo jih skonstruirali, zadoščajo pitagorejskemu pogoju. Iz tega sledi:

$$\tilde{b}^2(t) = \tilde{c}^2(t) - \tilde{a}^2(t) = (\tilde{c}(t) - \tilde{a}(t))(\tilde{c}(t) + \tilde{a}(t)).$$

Če se spomnimo, da so $\tilde{a}(t)$, $\tilde{b}(t)$, $\tilde{c}(t)$ paroma tuji, vemo, da $\tilde{c}(t) - \tilde{a}(t)$ in $\tilde{c}(t) + \tilde{a}(t)$ nimata skupnih ničel. To pomeni, da je vsaka ničla polinoma $\tilde{b}^2(t)$ tudi ničla enega izmed polinomov $\tilde{c}(t) - \tilde{a}(t)$ in $\tilde{c}(t) + \tilde{a}(t)$, in sicer sode večkratnosti.

Brez izgube splošnosti:

$$\tilde{c}(t) - \tilde{a}(t) = 2v^2(t) \quad \text{in} \quad \tilde{c}(t) + \tilde{a}(t) = 2u^2(t), \quad (3.4)$$

kar nam da

$$\tilde{b}^2(t) = 4u^2(t)v^2(t),$$

pri čemer sta $u(t)$ in $v(t)$ tuja polinoma. Rešitev sistema (3.4) in množenje rešitve z $w(t)$ nam da (3.3). \square

Kot neposredna posledica izreka 3.3 sledi, da ima krivulja \mathbf{r} pitagorejski hodograf natanko tedaj, ko za njeni komponenti velja:

$$x'(t) = (u^2(t) - v^2(t))w(t), \quad y'(t) = 2u(t)v(t)w(t), \quad (3.5)$$

za poljubne polinome $u(t), v(t), w(t)$, pri čemer sta $u(t)$ in $v(t)$ tuja med seboj.

V posebnem primeru, ko velja da sta polinoma $u(t)$ in $v(t)$ tuja, ter $w(t) = 1$, krivulji \mathbf{r} pravimo **primitivna** PH krivulja. Očitno za primitivno krivuljo \mathbf{r} velja, da je njen hodograf neničelen na celotnem definicijskem območju in zato je \mathbf{r} regularna krivulja. Če imata polinoma u in v stopnji μ in ν , je stopnja primitivne krivulje \mathbf{r} enaka $n = 2 \max\{\mu, \nu\} + 1$.

Primer 3.4. Spomnimo se primera 3.2, da bi si ogledali uporabo zadnjega izreka. Imeli smo, da je

$$x'(t) = 9t^2 - 4, \quad y'(t) = 6t^2, \quad \sigma(t) = 9t^2 + 4.$$

Če imajo polinomi $u(t), v(t)$ in $w(t)$ vrednosti $3t, 2$ in 1 , v tem vrstnem redu, vidimo da so relacije (3.3) iz prejšnjega izreka izpolnjene.

Pitagorejski hodograf prinaša omenjenim krivuljam veliko lepih lastnosti. V nadaljevanju jih bomo nekaj pokazali.

3.1 Lastnosti ravninskih PH krivulj

Pri obravnavi lastnosti krivulj pogosto privzamemo, da je krivulja regularna.

3.1.1 Dolžina loka

Dolžina loka krivulje je intuitivno povedano dolžina, ki jo dobimo med mejnimi točkami loka, če bi krivuljo raztegnili v premico.

Definicija 3.5. Naj bo $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))^T$ odvedljiva krivulja. **Dolžino loka** krivulje \mathbf{r} med točkama $\mathbf{r}(a)$ in $\mathbf{r}(b)$ dobimo kot

$$s(a, b) = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Potem je odvod dolžine loka te krivulje, s , po parametru t podan kot

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

Funkcijo, ki predstavlja odvod dolžine loka, imenujemo **parametrična hitrost**, in jo označujemo z črko $\sigma(t)$.

Definicija 3.6. Za regularno parametrizacijo krivulje $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))^T$ rečemo, da je **naravna parametrizacija** krivulje, če velja, da je $\sigma(t) = 1$. V tem primeru parametru t pravimo naravni parameter.

Ko upoštevamo definicijo PH krivulje in poskušamo poračunati dolžino loka poljubne tovrstne krivulje \mathbf{r} med točkami $\mathbf{r}(a)$ in $\mathbf{r}(b)$, opazimo prvo lepo lastnost PH krivulj.

Trditev 3.7. Če je $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))^T$ krivulja s pitagorejskim hodografom, potem lahko njeno dolžino loka med poljubnima točkama $\mathbf{r}(a)$ in $\mathbf{r}(b)$ eksaktno določimo.

Dokaz. Ko v formuli za dolžino loka med točkama $\mathbf{r}(a)$ in $\mathbf{r}(b)$ upoštevamo definicijo PH krivulj, dobimo:

$$\int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_a^b |\sigma(t)| dt,$$

in opravka imamo z integracijo odsekoma polinomske funkcije na nekem intervalu, kar znamo eksaktno izračunati. \square

Opomba 3.8. Če je \mathbf{r} regularna PH krivulja, njen odvod ne spreminja predznaka, in zato velja $|\mathbf{r}'(t)| = \sigma(t)$. V tem primeru imamo opravka z integracijo polinoma.

3.1.2 Racionalna tangenta

Definicija 3.9. Enotska tangenta krivulje \mathbf{r} je definirana kot

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

Ena izmed lepih lastnosti PH krivulj se nanaša ravno na enotsko tangento.

Trditev 3.10. Enotska tangenta regularne PH krivulje je racionalna krivulja.

Dokaz. Naj bo $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))^T$ regularna PH krivulja. Enotska tangenta te krivulje je

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{(x'(t), y'(t))^T}{\sigma(t)},$$

kar je racionalna funkcija parametra t . \square

Podobno kot enotska tangenta je tudi enotska normala regularne PH krivulje racionalna funkcija parametra krivulje. Enotska normala krivulje \mathbf{r} je pravokotna na enotsko tangento in jo lahko definiramo kot:

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{z},$$

kjer je \mathbf{z} poljubni enotski vektor, pravokoten na ravnino, v kateri leži krivulja \mathbf{r} . Ker mora veljati, da je skalarni produkt tangente in normale ničlen, imamo naslednjo definicijo.

Definicija 3.11. Enotska normala krivulje \mathbf{r} je oblike

$$\mathbf{n}(t) = \frac{(-y'(t), x'(t))^T}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{(-y'(t), x'(t))^T}{\sigma(t)}.$$

Iz definicije takoj sledi racionalnost enotske normale.

Če je krivulja \mathbf{r} stopnje n , potem sta enotski tangenta in normala te krivulje racionalni krivulji stopnje $n - 1$. Med enotskima tangentno in normalo velja povezava ([2])

$$\mathbf{t}'(t) = -\sigma(t)\kappa(t)\mathbf{n}(t). \quad (3.6)$$

Faktoru κ pravimo **fleksijska ukrivljenost** krivulje \mathbf{r} . Fleksijska ukrivljenost krivulje \mathbf{r} meri spreminjanje smeri tangente. Ko je krivulja enaka premici, bo fleksijska ukrivljenost imela vrednost 0, sicer pa jo poračunamo kot ([4])

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}. \quad (3.7)$$

Če je \mathbf{r} regularna PH krivulja, potem je polinom w v predpisu njenega hodografa (3.5) konstanten polinom. To upoštevamo v zadnji formuli za fleksijsko ukrivljenost krivulje \mathbf{r} in dobimo formulo fleksijske ukrivljenosti regularnih PH krivulj

$$\kappa(t) = 2 \frac{u(t)v'(t) - u'(t)v(t)}{(\sigma(t))^2}. \quad (3.8)$$

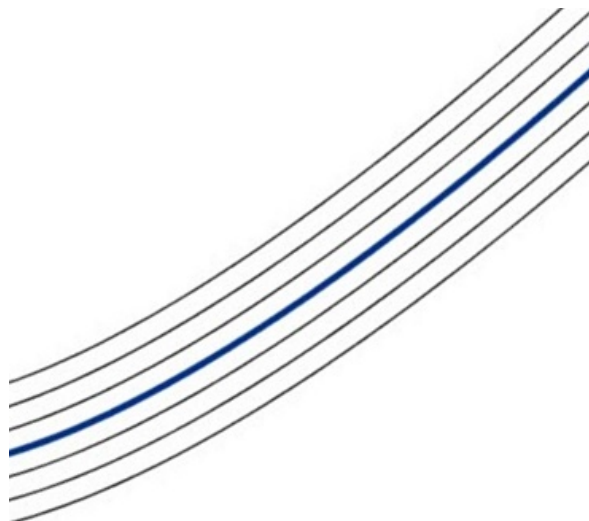
Iz formule je očitno, da je fleksijska ukrivljenost regularne ravninske PH krivulje racionalna krivulja.

3.1.3 Krivulje odmika

Definicija 3.12. Če imamo podano PH krivuljo \mathbf{r} , potem njeno krivuljo odmika (angl. offset) na oddaljenosti d definiramo kot krivuljo, ki je odmaknjena od začetne krivulje \mathbf{r} za konstanten odmik d , pozitiven ali negativen, v smeri normale začetne krivulje:

$$\mathbf{r}_d(t) = \mathbf{r}(t) + d\mathbf{n}(t).$$

Kot vidimo iz definicije, so tangente krivulje \mathbf{r}_d vzporedne s tangentami začetne krivulje \mathbf{r} . Velja tudi, da imata \mathbf{r}_d in \mathbf{r} skupno normalo v vsaki točki. V splošnem krivulja odmika ni polinomska ali racionalna krivulja, tudi če krivulja \mathbf{r} je. Toda če je \mathbf{r} krivulja s pitagorejskim hodografom, pa velja, da je enotska normala tudi racionalna in tako dobimo še eno lastnost PH krivulj.



Slika 3: Krivulje odmika PH krivulje.

Trditev 3.13. *Krivulje odmika regularne polinomske PH krivulje so racionalne krivulje.*

Dokaz. Veljavnost trditve je očitna iz definije:

$$\mathbf{r}_d(t) = \mathbf{r}(t) + d\mathbf{n}(t) = \frac{(x(t), y(t))^T \sigma(t) + d(-y'(t), x'(t))^T}{\sigma(t)}, \quad (3.9)$$

saj sta tako krivulja kot normala racionalni. \square

Če je krivulja \mathbf{r} stopnje n , potem bo pripadajoča krivulja odmika imela stopnjo $2n - 1$.

3.2 Kompleksna reprezentacija ravninskih PH krivulj

Z uvedbo kompleksne reprezentacije ravnine \mathbb{R}^2 se veliko stvari in izračunov v prostoru \mathbb{R}^2 zelo poenostavi. Tako lahko točke, definirane v \mathbb{R}^2 , ko jih identificiramo s kompleksnimi števili, seštevamo, odštevamo, množimo ali delimo, z upoštevanjem aritmetičnih pravil, ki veljajo za kompleksna števila. Na ta način lahko število (x, y) , ki pripada Evklidski ravnini, predstavimo s kompleksnim številom $x + iy$. Če sta $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ kompleksni števili, potem izraze $\mathbf{z}_1 \pm \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2, \frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2}$ poračunamo z navadnimi aritmetičnimi pravili, ki veljajo v kompleksni ravnini. Izraza $\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2$ in $\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2$ predstavljata skalarni ter vektorski produkt.

Tudi ravninske krivulje lahko prestavimo v kompleksni ravnini, kot funkcije realnega

parametra t , ki zavzamejo kompleksne vrednosti. Tako krivuljo $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))^T$ v kompleksni ravnini identificiramo s krivuljo $\mathbf{r}(t) = x(t) + iy(t)$.

Primer 3.14. Krivuljo $\mathbf{r}(t) = (4t^2 + 1, t + 3)$ v kompleksni ravnini predstavimo kot $\mathbf{r}(t) = (4t^2 + 1) + i(t + 3)$.

Ko imamo opravka s PH krivuljami, nam kompleksna reprezentacija pride prav, ker se zapis pitagorejskega hodografa zelo poenostavi. V kompleksni ravnini pitagorejski hodograf krivulje \mathbf{r} predstavimo z enačbo $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{w}(t) = \hat{\mathbf{w}}^2(t)$, kjer je $\hat{\mathbf{w}} = u + iv$, tako da hodograf krivulje \mathbf{r} zadošča enačbi (3.5). Ko ima krivulja \mathbf{r} stopnjo n , je stopnja kompleksnega polinoma \mathbf{w} enaka $n - 1$. V Bézierovi obliki ga lahko predstavimo kot

$$\mathbf{w}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{w}_k \binom{n-1}{k} (1-t)^{n-1-k} t^k, \quad t \in [0, 1].$$

Ko ta hodograf integriramo, dobimo enačbo krivulje \mathbf{r} v Bézierovi obliki

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^n \mathbf{p}_k \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k, \quad t \in [0, 1].$$

Iz teh dveh enačb zaključimo [2], da bodo kontrolne točke hodografa imele obliko

$$\mathbf{w}_k = n\Delta\mathbf{p}_k = n(\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3.10)$$

kar včasih zelo poenostavi zapis pri izpeljavi algoritmov interpolacije.

Najbolj zanimiva stran kompleksne reprezentacije PH krivulj pa je možnost, da naredimo novo krivuljo, ki bo imela pitagorejski hodograf, iz že obstoječe polinomske krivulje.

Naj bo $\mathbf{\Pi}$ množica vseh regularnih polinomskih krivulj in $\hat{\mathbf{\Pi}}$ množica vseh regularnih polinomskih PH krivulj. Vemo že, da so polinomske PH krivulje podrazred vseh polinomskih krivulj, ter zato velja $\hat{\mathbf{\Pi}} \subset \mathbf{\Pi}$. Obratna inkluzija ne velja, saj obstajajo regularne polinomske krivulje, ki nimajo pitagorejskega hodografa. Ena izmed takih krivulj je npr. $\mathbf{r}(t) = (t + 1) + it^3$.

Denimo, da imamo podano ravninsko krivuljo \mathbf{r} . Iz te krivulje bi radi skonstruirali novo krivuljo $\hat{\mathbf{r}}$, ki bo imela pitagorejski hodograf. Natančen opis preslikave P , ki preslika začetno krivuljo \mathbf{r} v PH krivuljo $\hat{\mathbf{r}}$, je podan v tabeli 1.

Primer 3.15. Vzemimo regularno polinomske krivuljo v kompleksni obliki: $\mathbf{r}(t) = t + it^3$. Preslikamo to krivuljo s preslikavo P :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t) &= \mathbf{r}'(t) = 1 + 3t^2 i \\ \hat{\mathbf{w}}(t) &= \mathbf{w}^2(t) = 1 - 9t^4 + 6t^2 i. \end{aligned}$$

Tabela 1: Predpis preslikave P $P : \mathbf{r} \rightarrow \hat{\mathbf{r}}$

1. Določimo hodograf podane krivulje : $\mathbf{w}(t) = \mathbf{r}'(t)$.
2. Dobljeni hodograf kvadriramo, da bi dobili novega : $\hat{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{w}^2(t)$.
3. Transformirani hodograf $\hat{\mathbf{w}}(t)$ integriramo ter dobimo novo krivuljo. Ta bo imela pitagorejski hodograf: $\hat{\mathbf{r}}(t) = \int \hat{\mathbf{w}}(t)dt$.
Ker je takih krivulj več, privzamemo da mora veljati $\mathbf{r}(0) = \hat{\mathbf{r}}(0)$, da dobimo eno samo rešitev.

Z integracijo zadnje krivulje dobimo krivuljo

$$\hat{\mathbf{r}}(t) = \int \hat{\mathbf{w}}(t) = -\frac{9}{5}t^5 + t + 2t^3\mathbf{i} + C,$$

kjer je C neko kompleksno število. Po definiciji mora veljati $\hat{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{r}(0)$, zato dobimo, da je $C = 0$. Končna oblika krivulje je tako

$$\hat{\mathbf{r}}(t) = -\frac{9}{5}t^5 + t + 2t^3\mathbf{i}.$$

Velja tudi:

$$\sigma^2(t) = 1 - 18t^4 + 81t^8 + 36t^4 = (1 + 9t^4)^2,$$

in vidimo, da smo res dobili PH krivuljo.

V prejšnjem primeru smo krivuljo stopnje 3 preslikali v krivuljo stopnje 5, in če pogledamo, kako deluje preslikava P , opazimo, da s to preslikavo krivuljo stopnje n vedno preslikamo v krivuljo stopnje $2n - 1$.

Videli smo, kako preslikava P deluje na poljubni krivulji \mathbf{r} . Naslednji izrek nas prepriča v resničnost povedanega.

Izrek 3.16. *Preslikava P , definirana v tabeli 1, je bijektivna preslikava med množico regularnih polinomskih krivulj in množico regularnih PH krivulj.*

Dokaz. Naj bo $\mathbf{r}(t) = x(t) + iy(t)$ poljubna regularna polinomska krivulja ($\mathbf{r}(t) \in \Pi$). Hodograf te krivulje je: $\mathbf{w}(t) = \mathbf{r}'(t) = x'(t) + iy'(t)$. Ko delujemo s preslikavo P , dobimo transformirani hodograf:

$$\hat{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{w}^2(t) = (x'(t))^2 - (y'(t))^2 + i2x'(t)y'(t).$$

Ta hodograf je pitagorejski, saj imata komponenti $(x'(t))^2 - (y'(t))^2$ in $2x'(t)y'(t)$ obliko, ki nam ga zagotavlja, po izreku 3.3. Ker je krivulja \mathbf{r} regularna, njen hodograf nima

nikjer vrednosti nič, zato sta polinoma $x'(t)$ in $y'(t)$ tuja. Torej, imamo hodograf PH krivulje. Ko ga integriramo, dobimo PH krivuljo, ki je enolično določena do translacije natančno. Drugi del dokaza pokaže surjektivnost. Podano imamo regularno PH krivuljo $\hat{\mathbf{r}} \in \hat{\Pi}$. Po izreku 3.3 ima hodograf te krivulje obliko

$$\hat{\mathbf{w}}(t) = (u^2(t) - v^2(t)) + i2u(t)v(t) = (u(t) + iv(t))^2,$$

kjer sta $u(t)$ in $v(t)$ medsebojno tuja. Obrat koraka 2 nam da

$$\mathbf{w}(t) = \sqrt{\hat{\mathbf{w}}} = \pm((u(t) + iv(t))),$$

kar predstavlja hodograf, ki nikoli nima vrednosti 0. Vstavimo $u(t) = x'(t)$ in $v(t) = y'(t)$. Z integracijo zadnjega hodografa dobimo regularno polinomsko krivuljo, ki je enolično določena do translacije natančno. \square

Iz predpisa preslikave P vidimo, da bo neodvisno od stopnje polinomov $u(t)$ in $v(t)$, regularna PH krivulja vedno imela liho stopnjo, tj. ne obstajajo regularne PH krivulje sodih stopenj.

3.3 Bézierova reprezentacija regularnih PH krivulj nizkih stopenj

Kot posledico zadnjega izreka smo imeli, da ne obstajajo regularne ravninske PH krivulje sodih stopenj. Med regularnimi polinomskimi krivuljami lihih stopenj najbolj enostaven netrivialen primer predstavljajo krivulje stopnje tri. Hodograf krivulje stopnje ena vedno zadošča pitagorejskemu pogoju, saj je konstanten, in zato krivulj stopnje ena ne bomo posebej obravnavali.

Torej, naj bo \mathbf{r} regularna polinomska PH krivulja stopnje tri. Spomnimo se enačb, katerim mora zadoščati hodograf PH krivulje

$$x'(t) = (u^2(t) - v^2(t))w(t), \quad y'(t) = 2u(t)v(t)w(t). \quad (3.11)$$

Najbolj preprosto netrivialno PH krivuljo \mathbf{r} dobimo, ko v (3.11) vstavimo $w(t) = 1$. Če ima krivulja \mathbf{r} stopnjo tri, potem sta polinoma u in v linearne. Lahko jih izrazimo v Bernsteinovi obliki

$$u(t) = u_0B_0^1(t) + u_1B_1^1(t), \quad v(t) = v_0B_0^1(t) + v_1B_1^1(t), \quad (3.12)$$

in ko vstavimo vrednosti Bernsteinovih polinomov, dobimo

$$u(t) = u_0 + t(u_1 - u_0), \quad v(t) = v_0 + t(v_1 - v_0).$$

Pogoj, da sta polinoma u in v medsebojno tuja, dosežemo s pogojem $u_0v_1 \neq u_1v_0$. Velja še, da ne smeta biti oba hkrati konstantna, tj. vsaj eden mora imeti stopnjo ena. Za izpolnitev tega pogoja zadostuje, da velja $(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2 \neq 0$.

Ko vstavimo (3.12) v pogoj (3.11), dobimo obliko hodografa kubične PH krivulje

$$\begin{aligned} x'(t) &= (u_0^2 - v_0^2) B_0^2(t) + (u_0u_1 - v_0v_1) B_1^2(t) + (u_1^2 - v_1^2) B_2^2(t), \\ y'(t) &= 2u_0v_0 B_0^2(t) + (u_0v_1 + u_1v_0) B_1^2(t) + 2u_1v_1 B_2^2(t). \end{aligned}$$

Integracija hodografa nam da enačbo krivulje \mathbf{r} v Bézierovi obliki. Iz lastnosti Bernsteinovih baznih polinomov (glej npr. [1]) vemo, kako zelo enostavno dobimo integral teh polinomov, in sicer kot

$$\int B_k^n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=k+1}^{n+1} B_j^{n+1}.$$

Sledi, da ima krivulja \mathbf{r} obliko

$$\left(\begin{array}{l} \frac{1}{3} B_1^3 (u_0^2 - v_0^2) + \frac{1}{3} B_2^3 q(u_0, u_1, v_0, v_1) + \frac{1}{3} B_3^3 (q(u_0, u_1, v_0, v_1) + u_1^2 - v_1^2) \\ \frac{1}{3} B_1^3 2u_0v_0 + \frac{1}{3} B_2^3 (2u_0v_0 + u_0v_1 + u_1v_0) + \frac{1}{3} B_3^3 (2u_0v_0 + u_0v_1 + u_1v_0 + 2u_1v_1) \end{array} \right),$$

kjer je $q := q(u_0, u_1, v_0, v_1) := u_0^2 - v_0^2 + u_0v_1 - v_0u_1$.

Iz dobljene enačbe krivulje določimo njene kontrolne točke

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{3} (u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0), \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{3} (u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0), \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{3} (u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1), \end{aligned} \tag{3.13}$$

pri čemer kontrolno točko \mathbf{p}_0 izberemo poljubno, tako da zadošča integracijski konstanti. Kot vidimo, lahko kontrolne točke krivulje \mathbf{r} izrazimo s polinomi u in v . Sedaj pa se vprašajmo, ali velja obratno, tj. ali lahko izrazimo polinoma u in v s podanimi kontrolnimi točkami. Če imamo podane štiri kontrolne točke $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ krivulje \mathbf{r} , se lahko zgodi, da ne moremo najti taka polinoma u in v , ki bosta zadoščala pogoju pitagorejskega hodografa krivulje \mathbf{r} , kot tudi enačbam kontrolnih točk. Naslednji izrek nam pove, kakšne morajo biti kontrolne točke, da bi polinoma u in v obstajala in da bi imela krivulja \mathbf{r} pitagorejski hodograf.

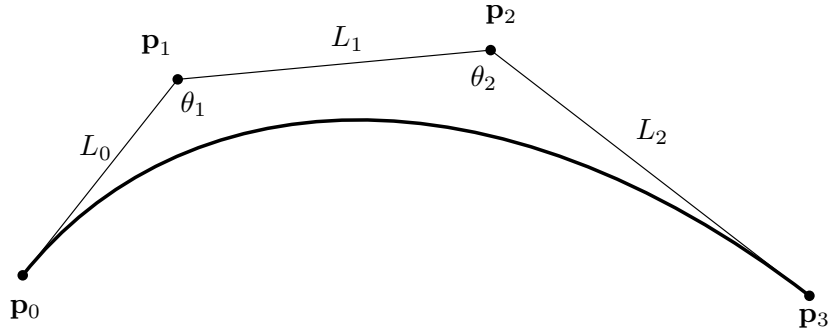
Izrek 3.17. *Naj bo \mathbf{r} krivulja s kontrolnimi točkami $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$. Z L_i označimo dolžino odseka kontrolnega poligona med točkama \mathbf{p}_i in \mathbf{p}_{i+1} ,*

$$L_0 = |\Delta \mathbf{p}_0| = |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0|, \quad L_1 = |\Delta \mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|, \quad L_2 = |\Delta \mathbf{p}_2| = |\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2|,$$

θ_1 in θ_2 pa naj bosta notranja kota kontrolnega poligona pri točkah \mathbf{p}_1 in \mathbf{p}_2 (glej sliko 4). Potem je krivulja \mathbf{r} PH krivulja natanko takrat, ko velja

$$L_1 = \sqrt{L_2 L_0} \quad \text{in} \quad \theta_1 = \theta_2. \quad (3.14)$$

Opomba 3.18. Zahteva (3.14) je ekvivalentna zahtevi, da sta si trikotnika, definirana s točkami $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ in $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$, podobna.



Slika 4: Kontrolni poligon iz izreka 3.17.

Dokaz. Predpostavimo, da je \mathbf{r} PH krivulja stopnje 3. Ko poračunamo dolžine odsekov kontrolnega poligona krivulje \mathbf{r} , z upoštevanjem enačb kontrolnih točk (3.13), dobimo

$$L_0 = \frac{1}{3}(u_0^2 + v_0^2), \quad L_1 = \frac{1}{3}\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)} \quad \text{in} \quad L_2 = \frac{1}{3}(u_1^2 + v_1^2).$$

Vidimo, da velja $L_1 = \sqrt{L_0 L_2}$. Da bi dokazali enakost kotov, poračunamo njuna sinus in kosinus. Iz formule skalarnega produkta vektorjev \mathbf{a} in \mathbf{b} (za lastnosti vektorjev glej npr. [5]), ki jo zapišemo kot $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, z upoštevanjem (3.13) dobimo kosinuse kotov kontrolnega poligona krivulje \mathbf{r}

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= -\frac{\Delta \mathbf{p}_1 \cdot \Delta \mathbf{p}_2}{L_1 L_0} = -\frac{(u_0 u_1 + v_0 v_1)}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}}, \\ \cos \theta_2 &= -\frac{\Delta \mathbf{p}_2 \cdot \Delta \mathbf{p}_1}{L_2 L_1} = -\frac{(u_0 u_1 + v_0 v_1)}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}}. \end{aligned}$$

Z mešanim produktom poračunamo sinus kota. Ko je vektor \mathbf{a} vzporeden z vektorjem $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, ima mešani produkt vrednost $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}| \sin(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, in sinus dobimo kot

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 &= \frac{(\Delta \mathbf{p}_1 \times \Delta \mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{z}}{L_1 L_0} = \frac{u_1 v_0 - u_0 v_1}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}}, \\ \sin \theta_2 &= \frac{(\Delta \mathbf{p}_2 \times \Delta \mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{z}}{L_2 L_1} = \frac{u_1 v_0 - u_0 v_1}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}}. \end{aligned}$$

Pri tem velja, da je \mathbf{z} enotski vektor ortogonalen na ravnino, v kateri ležijo $\Delta\mathbf{p}_0$, $\Delta\mathbf{p}_1$, $\Delta\mathbf{p}_2$. Ker sta sinusa in kosinusa kotov enaka, velja $\theta_1 = \theta_2$. Za dokaz izreka v drugi smeri, predpostavimo, da je \mathbf{r} ravninska krivulja in da za njen kontrolni poligon velja $L_1 = \sqrt{L_0L_2}$ in $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. Z upoštevanjem teh predpostavk, lahko definiramo vektorje kontrolnega poligona krivulje \mathbf{r} kot

$$\Delta\mathbf{p}_0 = L_0(1, 0), \quad \Delta\mathbf{p}_1 = \sqrt{L_0L_2}(-\cos\theta, \sin\theta) \quad \Delta\mathbf{p}_2 = L_2(\cos 2\theta, -\sin 2\theta). \quad (3.15)$$

Če je krivulja \mathbf{r} oblike

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^3 \mathbf{p}_k B_k^3(t),$$

iz (3.10) vemo, da bo veljalo

$$\mathbf{r}'(t) = \sum_{k=0}^2 3\Delta\mathbf{p}_k B_k^2(t).$$

Ko v enačbo odvoda krivulje \mathbf{r} vstavimo (3.15), se izkaže, da velja

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'(t)|^2 &= \left| \sum_{k=0}^2 3\Delta\mathbf{p}_k B_k^2(t) \right|^2 = \\ &= 9\Delta\mathbf{p}_0^2 B_0^4 + 9\Delta\mathbf{p}_0\Delta\mathbf{p}_1 B_1^4 + (6\Delta\mathbf{p}_1^2 + 3\Delta\mathbf{p}_0\Delta\mathbf{p}_2) B_2^4 + 9\Delta\mathbf{p}_1\Delta\mathbf{p}_2 + 9\Delta\mathbf{p}_2^2 \\ &= 9L_0^2 B_0^4 - 9L_0\sqrt{L_2} \cos\theta B_1^4 + 3L_2L_0(2 + \cos 2\theta) B_2^4 \\ &\quad - 9L_2\sqrt{L_0} \cos\theta B_3^4 + 9L_2^2 B_4^4 \\ &= (3L_0 B_0^2(t) - 3\sqrt{L_2L_0} \cos\theta B_1^2(t) + 3L_2 B_2^2(t))^2 \\ &= \sigma(t)^2, \end{aligned}$$

in velja, da je \mathbf{r}' hodograf PH krivulje. □

Vidimo, da mora kontrolni poligon kubične krivulje \mathbf{r} imeti posebno obliko, da bi le-ta bila PH krivulja. Spomnimo se izpeljane formule za ukrivljenost ravninske PH krivulje \mathbf{r} , ki se glasi

$$\kappa = 2 \frac{uv' - u'v}{\sigma^2}.$$

Ko \mathbf{r} definiramo kot kubično PH krivuljo, bo izraz $uv' - u'v$ vedno konstanten, saj sta polinoma u in v linearna in je vodilni koeficient polinoma $uv' - u'v$ ničelen. Sledi, da je ukrivljenost krivulje \mathbf{r} vedno istega predznaka in zaradi tega kubična PH krivulja ne more imeti prevojnih točk, tj. biti mora konveksna na celotnem definicijskem območju. Ker bi mi radi imeli še krivulje z večjo fleksibilnostjo, si oglejmo še krivulje višjih stopenj. Ker so primerne samo krivulje lihih stopenj, bo naslednja stopnja enaka pet.

Naj bo \mathbf{r} PH krivulja stopnje pet. Iz predpisa njenega hodografa opazimo, da sta polinoma u in v kvadratična. V Bernsteinovi bazi ju lahko zapišemo kot

$$u(t) = u_0 B_0^2(t) + u_1 B_1^2(t) + u_2 B_2^2(t), \quad v(t) = v_0 B_0^2(t) + v_1 B_1^2(t) + v_2 B_2^2(t).$$

Pogoj, da sta u in v medsebojno tuja, sedaj dosežemo z

$$(u_2v_0 - u_0v_2)^2 \neq 4(u_0v_1 - u_1v_0)(u_1v_2 - u_2v_1).$$

Podobno kot pri izpeljavi kubičnih PH krivulj, dobimo za krivuljo stopnje pet šest kontrolnih točk, od katerih \mathbf{p}_0 izberemo poljubno, tako da zadošča integracijski konstanti. Ostale se izražajo s polinomi u in v :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0), \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{3}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0), \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{2}{15}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1) + \frac{1}{15}(u_0u_2 - v_0v_2, u_0v_2 + u_2v_0), \\ \mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}_3 + \frac{1}{5}(u_1u_2 - v_1v_2, u_1v_2 + u_2v_1), \\ \mathbf{p}_5 &= \mathbf{p}_4 + \frac{1}{5}(u_2^2 - v_2^2, 2u_2v_2). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ukrivljenost PH krivulj stopnje pet lahko spreminja svoj predznak, kar ni veljalo pri krivuljah stopnje tri. Zato so PH krivulje stopnje pet veliko bolj uporabne, saj predstavljajo najbolj enostavne regularne PH krivulje, ki imajo dovolj fleksibilnosti.

Ko imamo opravka s PH krivuljami stopnje pet, zahteve, katerim mora zadoščati kontrolni poligon, niso več tako očitne, kot pri kubičnih krivuljah. Obstajajo pa vseeno pogoji, ki morajo veljati za kontrolne točke PH krivulje stopnje pet.

Izrek 3.19. *Naj bo \mathbf{r} regularna polinomska krivulja stopnje pet. Krivulja \mathbf{r} bo imela pitagorejski hodograf natanko takrat, ko vektorji $\Delta\mathbf{p}_i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, definirani s kompleksnimi vrednostimi, zadoščajo pogoju*

$$\Delta\mathbf{p}_0(\Delta\mathbf{p}_3)^2 = \Delta\mathbf{p}_4(\Delta\mathbf{p}_1)^2. \quad (3.17)$$

Hkrati mora veljati tudi

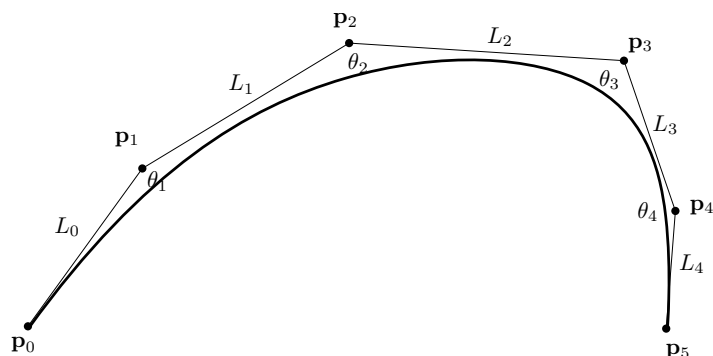
$$3\Delta\mathbf{p}_0\Delta\mathbf{p}_1\Delta\mathbf{p}_2 - (\Delta\mathbf{p}_0)^2\Delta\mathbf{p}_3 - 2(\Delta\mathbf{p}_1)^3 = 0, \quad \text{ko velja } \Delta\mathbf{p}_1 \neq 0 \text{ ali } \Delta\mathbf{p}_3 \neq 0 \quad (3.18)$$

$$9\Delta\mathbf{p}_0(\Delta\mathbf{p}_2)^2 - (\Delta\mathbf{p}_0)^2\Delta\mathbf{p}_4 = 0, \quad \text{ko velja } \Delta\mathbf{p}_1 = \Delta\mathbf{p}_3 = 0. \quad (3.19)$$

Dokaz izreka je na voljo v [2].

Pogoje, ki veljajo za kontrolne točke, lahko tudi predstavimo na kontrolnem poligonu. Ko vektorje kontrolnega poligona izrazimo v polarni obliki kot $\Delta\mathbf{p}_k = L_k e^{i\theta_k}$ in vstavimo v enačbe prejšnjega izreka, dobimo geometrijsko obliko kontrolnega poligona PH krivulje stopnje pet. Tako namesto (3.17) za kontrolni poligon velja ([2])

$$\frac{L_1}{L_3} = \sqrt{\frac{L_0}{L_4}}, \quad \text{in } \theta_1 + \theta_4 = \theta_2 + \theta_3.$$



Slika 5: Kontrolni poligon krivulje stopnje 5.

Privzemimo, da so vse kontrolne točke različne, in namesto druge enačbe izreka dobimo

$$\begin{aligned} 3L_0L_1L_2\cos\theta_2 &= L_0^2L_3\cos\theta_4 + 2L_1^3\cos\theta_1, \\ 3L_0L_1L_2\sin\theta_2 &= L_0^2L_3\sin\theta_4 + 2L_1^3\sin\theta_1. \end{aligned}$$

Sedaj, ko poznamo obliko kontrolnega poligona PH krivulje stopnje pet, lahko gremo k naslednjemu problemu in poskusimo določiti rešitev C^1 interpolacijskega problema s PH krivuljami stopnje 5.

3.4 C^1 Hermiteova interpolacija s PH krivuljami stopnje 5

Videli smo, da zaradi nezadostne fleksibilnosti interpolacije s kubičnimi PH krivuljami le-ta ni povsem ustrezna za praktično uporabo (glej [7]). Naj bo sedaj \mathbf{r} regularna krivulja stopnje pet in imejmo podani kontrolni točki \mathbf{p}_0 in \mathbf{p}_5 kontrolnega poligona krivulje \mathbf{r} . Denimo, da sta podani tudi tangenti krivulje \mathbf{r} v teh dveh točkah, ki ju bomo označili z \mathbf{t}_0 in \mathbf{t}_4 . Radi bi določili enačbo PH krivulje \mathbf{r} , ki bo zadoščala tem pogojem.

Bézierova oblika krivulje \mathbf{r} je

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_i^n(t),$$

in opazimo, da ima krivulja \mathbf{r} v točkah 0 in 1 vrednosti \mathbf{p}_0 in \mathbf{p}_5 , v tem vrstnem redu. Ker nas zanima oblika krivulje med robnima kontrolnima točkama, bomo privzeli, da zavzame parameter t vrednosti iz intervala $[0, 1]$. Tangenta krivulje v robnih točkah je vrednost odvoda krivulje, ko parameter t zavzame robne vrednosti 0 in 1. Če

upoštevamo Bézierovo obliko krivulje \mathbf{r} in jo odvajamo, dobimo enakosti

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_0 &= \mathbf{r}'(0) = 5(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0), \\ \mathbf{t}_4 &= \mathbf{r}'(1) = 5(\mathbf{p}_5 - \mathbf{p}_4).\end{aligned}$$

Iz zadnjih enakosti sledi, da če imamo podani robni kontrolni točki \mathbf{p}_0 in \mathbf{p}_5 in tangenti \mathbf{t}_0 in \mathbf{t}_4 v teh dveh točkah, je isto kot če imamo podane kontrolne točke \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_4 in \mathbf{p}_5 . Da bi določili enačbo krivulje \mathbf{r} , nam manjkata še kontrolni točki \mathbf{p}_2 in \mathbf{p}_3 . Za pitagorejski hodograf krivulje \mathbf{r} sta pomembna polinoma u in v , saj se z njima izražajo komponente PH krivulje, in kot že vemo, sta polinoma u in v določena z (u_0, u_1, u_2) in (v_0, v_1, v_2) , kjer vsi elementi obeh trojic zavzamejo realne vrednosti.

Torej, imamo podane štiri kontrolne točke in nas zanima, ali obstajata polinoma u in v , tako da lahko določimo točki \mathbf{p}_2 in \mathbf{p}_3 z upoštevanjem enačbe (3.16). Ko enkrat določimo vrednosti (u_0, u_1, u_2) in (v_0, v_1, v_2) , bomo imeli določeno tudi samo krivuljo. Do sedaj še ne vemo, ali takšna polinoma vedno obstajata. Da bi spoznali odgovor ter se v njega prepričali, potrebujemo naslednjo lemo.

Lema 3.20. *Za realni števili a in b vedno obstajajo realne rešitve sistema enačb*

$$u^2 - v^2 = a \quad \text{in} \quad 2uv = b,$$

ter se izražajo kot

$$(u, v) = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(c + a)}, \text{sign}(b) \sqrt{\frac{1}{2}(c - a)} \right),$$

pri čemer je $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Dokaz, da lema drži je na voljo v [2]. Nam pa je zaenkrat pomembno, ali rešitev obstaja, ter kako bo izgledala. Dejansko uporabo leme vidimo v naslednjem izreku.

Izrek 3.21. *Naj bosta dani robni kontrolni točki krivulje \mathbf{r} , \mathbf{p}_0 in \mathbf{p}_5 ter pripadajoči tangenti \mathbf{t}_0 in \mathbf{t}_4 . Točki \mathbf{p}_1 in \mathbf{p}_4 dobimo kot*

$$\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1) = \mathbf{p}_0 + \frac{1}{5}\mathbf{t}_0 \quad \text{in} \quad \mathbf{p}_4 = (x_4, y_4) = \mathbf{p}_5 - \frac{1}{5}\mathbf{t}_4.$$

Preostali kontrolni točki \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_3 , tako da bo \mathbf{r} PH krivulja, sta določeni z (3.16), kjer so parametri (u_0, u_1, u_2) in (v_0, v_1, v_2) določeni s $\mathbf{t}_0 = (\Delta x_0, \Delta y_0)$ in $\mathbf{t}_4 = (\Delta x_4, \Delta y_4)$ kot

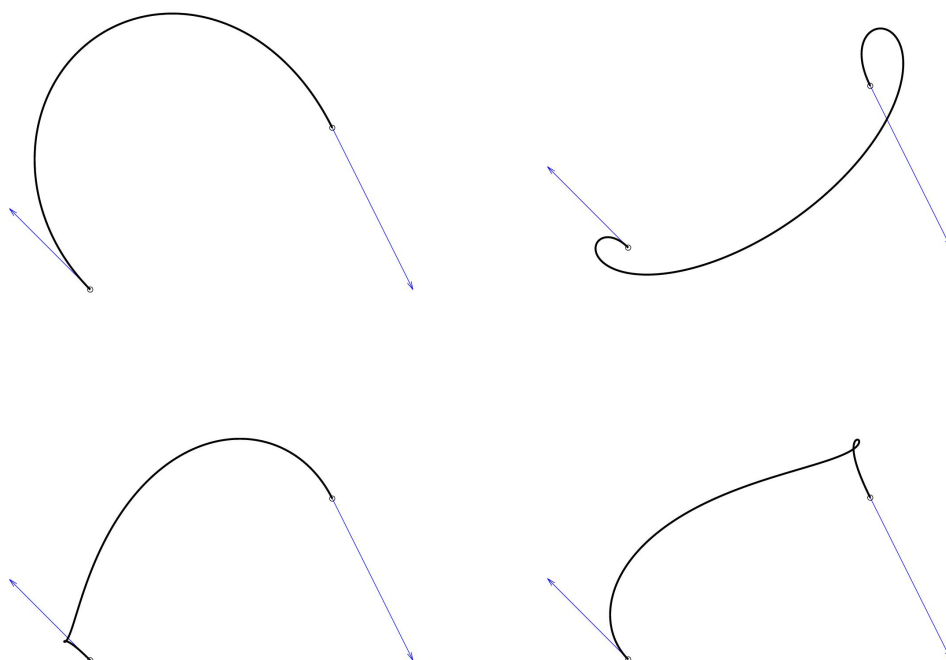
$$\begin{aligned}(u_0, v_0) &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{|\mathbf{t}_0| + \Delta x_0}, \text{sign}(\Delta y_0) \sqrt{|\mathbf{t}_0| - \Delta x_0} \right), \\ (u_2, v_2) &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{|\mathbf{t}_4| + \Delta x_4}, \text{sign}(\Delta y_4) \sqrt{|\mathbf{t}_4| - \Delta x_4} \right), \\ (u_1, v_1) &= -\frac{3}{4}(u_0 + u_2, v_0 + v_2) \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{c + a}, \text{sign}(b) \sqrt{c - a} \right).\end{aligned}\tag{3.20}$$

Pri tem je $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ter sta a in b podana kot

$$a = \frac{9}{16} (u_0^2 - v_0^2 + u_2^2 - v_2^2) + \frac{5}{8} (u_0 u_2 - v_0 v_2) + \frac{15}{2} (x_4 - x_1),$$

$$b = \frac{9}{8} (u_0 v_0 + u_2 v_2) + \frac{5}{8} (u_0 v_2 + u_2 v_0) + \frac{15}{2} (y_4 - y_1).$$

Dokaz. Enačbi za točki \mathbf{p}_1 in \mathbf{p}_4 sta očitni. Ko poznamo točke $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5$, uporabimo prvo in zadnjo enačbo v (3.16). Z uporabo Leme 3.20 dobimo (u_0, v_0) in (u_2, v_2) , ko vstavimo $a = \Delta x_0, b = \Delta y_0$, ter $a = \Delta x_4, b = \Delta y_4$. Da bi določili u_1 in v_1 , izraz $\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1$, čigava vrednost nam je znana, zapišemo kot $(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_3) + (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)$, in dobimo izraz, v katerem sta neznanke u_1 in v_1 . Ko še enkrat uporabimo omenjeno lemo, dobimo rezultat iz izreka. \square



Slika 6: PH krivulje stopnje 5, kot štiri različne rešitve Hermiteovega C^1 interpolacijskega problema.

Zadnji izrek pravi, da ko imamo podani dve kontrolni točki in dve tangenti, vedno obstaja PH krivulja \mathbf{r} stopnje pet, s katero interpoliramo dane podatke. Iz izreka je razvidno tudi, da krivulja \mathbf{r} ni enolično določena. Imamo namreč tri neodvisne izbire predznakov $+$ ali $-$ v (3.20), ki vplivajo na obliko krivulje. Zato se zdi, da imamo skupaj osem možnosti za konstrukcijo krivulje \mathbf{r} . Toda, ko izberemo predznake tako, da dobimo rešitev (u_0, u_1, u_2) in (v_0, v_1, v_2) , z nasprotno izbiro vsakega predznaka dobimo

$(-u_0, -u_1, -u_2)$ in $(-v_0, -v_1, -v_2)$. Ko se vrnemo na enačbo (3.16), s katero dobimo preostali dve kontrolni točki, opazimo, da sta ti točki kvadratno odvisni od (u_0, u_1, u_2) in (v_0, v_1, v_2) in zato predznak ne bo vplival na rezultat. Torej, v eni izmed enačb izreka fiksiramo predznak in nam preostanejo še štiri možnosti. Zato obstajajo štiri rešitve C^1 Hermiteove interpolacije dveh robnih točk in pripadajočih tangent s PH krivuljo stopnje pet.

Krivulje, narisane na sliki 6, imajo enaki robni točki in pripadajoči tangenti, zato predstavljajo rešitev predstavljenega interpolacijskega problema. Očitno je, da se v veliko ostalih lastnostih te krivulje zelo razlikujejo, kot npr. prisotnost zanke, prevojnne točke ... Če lahko izberemo eno izmed rešitev kot najboljšo, bi radi, da ima le-ta čim bolj enostavno obliko. Pojem enostavne oblike krivulje si intuitivno predstavljamo kot čim manjše število zank in prevojnih točk, tj. lahko rečemo, da je krivulja bolj enostavna, ko je bolj podobna premici. V CAGD (*Computer Aided Geometric Design*) obstajajo pojmi, ki matematično izberejo najboljšo rešitev interpolacije, kot npr. rotacijski indeks ter upogibna energija (glej [2]).

4 Prostorske krivulje s pitagorejskim hodografom

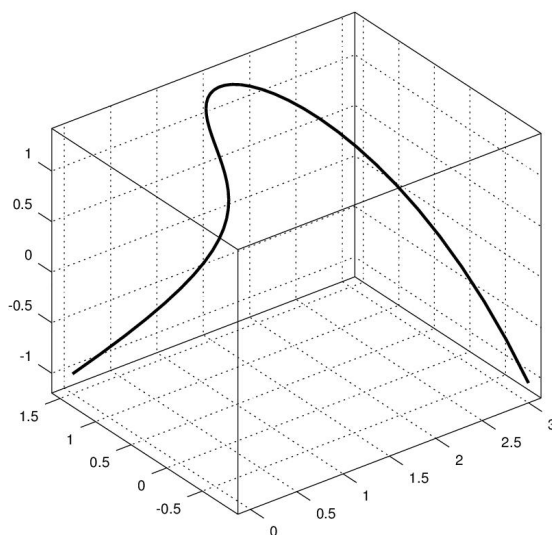
V tem poglavju bomo spoznali prostorske PH krivulje in lastnosti, ki veljajo za njih. Predstavljeni bodo kvaternioni ter njihova uporaba pri zapisu prostorskih PH krivulj, ter tudi pri geometrijskih transformacijah, kot so rotacije in zrcaljenja.

Posplošitev ravninskih polinomskih krivulj na prostorske v splošnem ni težak problem, toda če upoštevamo še lastnost pitagorejskega hodografa, postane ta problem nekoliko težji. Prostorsko krivuljo definiramo kot preslikavo $\mathbf{r}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, kjer je $I \subseteq \mathbb{R}$.

Definicija 4.1. Krivuljo $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ imenujemo prostorska krivulja s pitagorejskim hodografom, če obstaja polinom σ , tako da velja:

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = \sigma^2(t).$$

Opomba 4.2. Ko ima krivulja \mathbf{r} stopnjo n , potem ima polinom σ stopnjo $n - 1$.



Slika 7: Primer prostorske krivulje.

Obliko polinomov, ki sestavljajo pitagorejsko trojico, nam poda naslednji izrek.

Izrek 4.3. Če polinomi a, b, c, d , katerih največji skupni delitelj je konstanta, zadoščajo relaciji

$$a^2(t) + b^2(t) + c^2(t) = d^2(t), \quad (4.1)$$

potem jih lahko izrazimo s polinomi $u(t), v(t), p(t), q(t)$ na naslednji način:

$$\begin{aligned} a(t) &= u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t), \\ b(t) &= 2((u(t)q(t) + v(t)p(t)), \\ c(t) &= 2(v(t)q(t) - u(t)p(t)), \\ d(t) &= u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dokaz. Enačbo (4.1) lahko zapišemo v obliki

$$b^2(t) + c^2(t) = d^2(t) - a^2(t),$$

kar je ekvivalentno z

$$(b(t) + ic(t))(b(t) - ic(t)) = (d(t) - a(t))(d(t) + a(t)). \quad (4.3)$$

Ločimo dve možnosti: ko sta polinoma b in c tuja med seboj, in ko obstaja nekonstanten polinom w , ki je delitelj polinomov b in c .

Naj bosta b in c tuja med seboj. Tedaj polinoma $b(t) + ic(t)$ in $b(t) - ic(t)$ nimata skupnih ničel. Naj bodo $\alpha_i, i \in I$ vse ničle polinoma $b(t) + ic(t)$, ki imajo pozitivno predznačen kompleksni del, in $\beta_j, j \in J$ vse ničle polinoma $b(t) - ic(t)$, ki imajo pozitivno predznačen kompleksni del. Ničle prvega polinoma imajo svojo konjugiranko kot ničlo slednjega, in obratno. Naj bosta $f(t) = \prod_{i \in I} (t - \alpha_i)$ in $g(t) = \prod_{j \in J} (t - \beta_j)$. Z \bar{f} in \bar{g} označimo konjugirane pare polinomov f in g . Tedaj lahko polinoma na levi strani enačbe (4.3) zapišemo kot

$$b(t) + ic(t) = f(t)\bar{g}(t), \quad b(t) - ic(t) = \bar{f}(t)g(t). \quad (4.4)$$

Polinoma $d(t) - a(t)$ in $d(t) + a(t)$ imata realno vrednost, zato imata oba konjugirane pare ničel, po eno iz vsakega izmed polinomov $b(t) + ic(t)$ in $b(t) - ic(t)$. Velja torej

$$d(t) - a(t) = f(t)\bar{f}(t), \quad d(t) + a(t) = g(t)\bar{g}(t). \quad (4.5)$$

Ko polinoma f in g zapišemo tako, da ločimo njuna realna in imaginarna dela, tj. $f(t) = \tilde{p}(t) + i\tilde{q}(t)$ in $g(t) = \tilde{u}(t) + i\tilde{v}(t)$, ter rešimo enačbi (4.4) in (4.5), dobimo obliko polinomov $a(t), b(t), c(t), d(t)$, definirano v izreku, kjer imajo polinomi $p(t), q(t), u(t), v(t)$ vrednosti $\sqrt{2}\tilde{p}(t), \sqrt{2}\tilde{q}(t), \sqrt{2}\tilde{u}(t), \sqrt{2}\tilde{v}(t)$.

V primeru, ko obstaja nekonstanten polinom w , ki je delitelj polinomov b in c , je očitno, da je leva stran enačbe (4.3) deljiva z w^2 . Polinoma a in d nimata skupnega delitelja (saj v nasprotnem predpostavka izreka ni izpolnjena) in zato je eden izmed polinomov

$d - a$ in $d + a$ deljiv z w^2 . Ko izraz (4.3) delimo s polinomom w^2 , bodo pogoji za uporabo prvega dela dokaza izpolnjeni, zato bodo tudi v tem primeru veljale enačbe (4.2). \square

Opomba 4.4. Izrek velja samo v eni smeri, saj dejstvo, da je največji skupni delitelj polinomov u, v, p, q konstanten, ne pomeni, da bo tudi največji skupni delitelj polinomov a, b, c, d konstanten, tj. ne zagotavlja regularnosti krivulje \mathbf{r} .

Zadnji izrek nam pove, da morajo imeti komponente hodografa prostorske PH krivulje $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ obliko:

$$\begin{aligned}x'(t) &= u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t), \\y'(t) &= 2(u(t)q(t) + v(t)p(t)), \\z'(t) &= 2(v(t)q(t) - u(t)p(t)),\end{aligned}\tag{4.6}$$

kjer so $u(t), v(t), p(t), q(t)$ realni polinomi.

4.1 Lastnosti prostorskih PH krivulj

Nekatere izmed lastnosti, ki smo jih izpeljali za ravninske PH krivulje, veljajo tudi za prostorske. Naj bo $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ regularna prostorska PH krivulja. Enotska tangenta krivulje \mathbf{r} ima obliko

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{(x'(t), y'(t), z'(t))^T}{\sigma(t)},$$

kjer je $\sigma(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ parametrična hitrost krivulje \mathbf{r} . Očitno velja, da je enotska tangenta prostorske PH krivulje racionalna krivulja.

Za razliko od ravninskih krivulj, pri krivuljah v treh dimenzijah vektor, pravokoten na tangento, ni enolično določen. Zato pri prostorskih krivuljah definiramo **normalo** in **binormalo**. Enotska normala ima smer odvoda tangente in podobno kot v prejšnjem poglavju velja enačba

$$\mathbf{t}'(t) = \sigma(t)\kappa(t)\mathbf{n}(t),$$

kjer je κ fleksijska ukrivljenost krivulje \mathbf{r} in jo dobimo kot

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

Fleksijska ukrivljenost prostorskih krivulj je po definiciji nenegativna.

Binormala krivulje \mathbf{r} je pravokotna na njeno tangento in normalo, zato jo definiramo kot

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t).$$

Iz tega, kar smo navedli do sedaj, lahko izpeljemo končne formule za enotski normalo in binormalo

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|} \times \mathbf{t}(t), \quad \mathbf{b}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}.$$

Podobno kot fleksijska ukrivljenost z relacijo $\mathbf{t}'(t) = \sigma(t)\kappa(t)\mathbf{n}(t)$ povezuje normalo in odvod tangente krivulje \mathbf{r} , prav tako **torzijska ukrivljenost** τ povezuje normalo in odvod binormale krivulje \mathbf{r} z relacijo

$$\mathbf{b}'(t) = -\sigma(t)\tau(t)\mathbf{n}(t).$$

Torzijska ukrivljenost krivulje \mathbf{r} nam pove koliko “zvita” je krivulja, in je enaka 0, če je \mathbf{r} ravninska krivulja. Sicer pa jo poračunamo kot ([2])

$$\tau(t) = \frac{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \cdot \mathbf{r}'''(t)}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|^2}.$$

Opazimo, da so \mathbf{n} , \mathbf{b} , κ in τ odvisni od faktorja $|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|$ ki z upoštevanjem zvez (4.2) dobi vrednost

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| &= \sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2} \\ &= \sqrt{\sigma^2(t)\psi(t)}, \end{aligned}$$

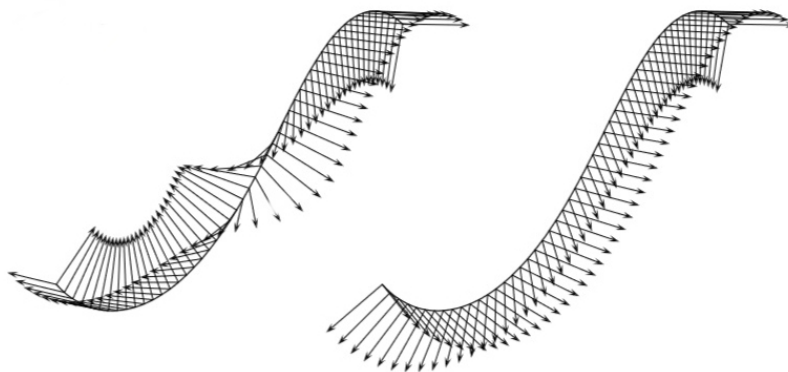
kjer je

$$\begin{aligned} \psi(t) &= 4((up' - u'p)^2 + (uq' - u'q)^2 + vp' - v'p)^2 \\ &\quad + (vq' - v'q)^2 + 2(uv' - u'v)(pq' - p'q). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Sledi, da bo izraz $|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|$ polinomski natanko takrat, ko je ψ popoln kvadrat polinoma. Zato enotski normala in binormala, kot tudi fleksijska ukrivljenost prostorske krivulje niso nujno racionalne funkcije. V formuli za torzijsko ukrivljenost je imenovalec kvadrat izraza $|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|$, zato nimamo opravka s korenem polinoma ψ . Posledično velja, da je torzijska ukrivljenost prostorske PH krivulje racionalna funkcija.

Kot smo že videli, enotska tangenta, normala in binormala prostorske krivulje \mathbf{r} formirajo ortonormirano bazo, znano kot Frenetovo ogrodje. V splošnem, prostorske PH krivulje nimajo racionalnega Frenetovega ogrodja, saj enotski normala in tudi binormala nista nujno racionalni. Toda ko velja, da ima PH krivulja \mathbf{r} celotno Frenetovo ogrodje racionalno, jo imenujemo dvojna PH krivulja (ang. double PH curves, glej [3]). Normala skupaj z binormalo tvorita ravnino, ki ji rečemo **normalna** ravnina krivulje \mathbf{r} . Enotska tangenta PH krivulje \mathbf{r} je vedno racionalna in zato poskušamo poiskati še vektorja \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_2 , ki pripadata normalni ravnini, tako da bosta $\mathbf{e}_1(t)$ in $\mathbf{e}_2(t)$ racionalna

v vsaki točki krivulje. Vektorja \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_2 lahko dobimo z rotacijo normale in binormale v vsaki točki krivulje. Tedaj pravimo, da enotska vektorja \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_2 skupaj z enotsko tangento krivulje \mathbf{r} tvorijo racionalno ortonormirano bazo prostora, t.i. racionalno spremljajoče ogrodje (ang. adapted frame). V CAGD spremljajoče ogrodje krivulje definira gibanje togega telesa v prostoru, zato je ta lastnost prostorskih PH krivulj zelo uporabna.



Slika 8: Frenetovo (levo) in rotacijsko-minimizirajoče ogrodje (desno). [2]

V praksi igra pomembno vlogo t.i. racionalno rotacijsko-minimizirajoče ogrodje (RRMF). Gre za posebno spremljajoče ogrodje, kjer se vektorja \mathbf{e}_1 in \mathbf{e}_2 minimalno vrtita okoli enotske tangente vzdolž celotne krivulje ([2]).

4.2 Kvaternioni

V prejšnjem poglavju smo spoznali povezavo med kompleksnimi števili in urejenimi pari realnih števil. Zato se naravno vprašamo, ali obstaja podobna predstavitev prostora \mathbb{R}^3 ter tudi \mathbb{R}^4 .

Najprej si oglejmo števila oblike $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, tj. števila, ki pripadajo trodimenzionalnemu prostoru \mathbb{R}^3 . Denimo, da obstaja nek vektorski prostor, izomorfen omejenemu prostoru, ki ima dimenzijo enako 3. Potem bazo tega prostora sestavljajo neodvisni enotski vektorji $\mathbf{1}$, \mathbf{i} ter \mathbf{j} , kjer je $\mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}$. Ko upoštevamo, da je ta prostor zaprt za množenje, pridemo do protislovja, saj se izkaže da je tudi vektor \mathbf{j} imaginarna enota, tj. vektorja \mathbf{i} in \mathbf{j} nista medseboj neodvisna in zato ne sestavljata bazo, ter tak prostor dimenzije 3 ne obstaja ([2]).

Sedaj vzemimo prostor \mathbb{R}^4 , čigar elementi so števila oblike $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Da bi definirali prostor, ki je razširitev prostora kompleksnih števil in je izomorfen prostoru \mathbb{R}^4 , definiramo prostor kvaternionov.

Prostor kvaternionov označujemo z črko \mathbf{H} , v prid matematiku Hamiltonu, ki ga je prvi definiral. Kot smo že opazili, ima prostor kvaternionov dimenzijo 4, in zato obstajajo štiri neodvisni vektorji, ki sestavljajo bazo tega prostora. Označimo jih kot $\mathbf{1}$, \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} . Bazne elemente lahko zapišemo v prostoru \mathbb{R}^4 kot

$$\mathbf{1} = (1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{i} = (0, 1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 0, 1).$$

Pri tem med njimi veljajo zveze

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1.$$

Vsak element $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ iz prostora \mathbb{R}^4 zapišemo v množici kvaternionov kot $\mathcal{A} = a_1 + a_2\mathbf{i} + a_3\mathbf{j} + a_4\mathbf{k}$. Kvaternione ponavadi označujemo s kaliografskimi črkami $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$. V množici kvaternionov veljajo operacije seštevanja, skalarnega množenja in množenja kot notranje operacije. Da bi si poenostavili zapis teh operacij, uvedimo skrajšan zapis kvaterniona. Če gledamo na vektorje $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ kot bazne vektorje v prostoru \mathbb{R}^3 , lahko kvaternion $\mathcal{A} = a + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ ločimo na skalarni in vektorski del, in sicer kot $\mathcal{A} = (a, \mathbf{a})$, kjer je $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ vektor v prostoru \mathbb{R}^3 . V moderni matematični literaturi se skalarni in vektorski del pogosto imenujeta realni ter imaginarni del.

Sedaj, ko poznamo obliko kvaternionov, ki je bolj enostavna za zapis algebraičnih operacij, bomo le-te definirali. Denimo, da imamo podana kvaterniona $\mathcal{A} = a + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = (a, \mathbf{a})$ in $\mathcal{B} = b + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} = (b, \mathbf{b})$.

- Kvaterniona \mathcal{A} in \mathcal{B} seštejemo tako, da seštejemo njune komponente. V skrajšanem zapisu seštevanje definiramo kot

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = (a + b, \mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

- Kvaternion \mathcal{A} zmnožimo s skalarjem $\lambda \in \mathbb{R}$ tako, da vsako komponento kvaterniona pomnožimo z skalarjem:

$$\lambda\mathcal{A} = (\lambda a, \lambda\mathbf{a}).$$

- Produkt kvaternionov \mathcal{A} in \mathcal{B} je definiran kot

$$\begin{aligned} \mathcal{AB} &= (a_1 + a_2\mathbf{i} + a_3\mathbf{j} + a_4\mathbf{k})(b_1 + b_2\mathbf{i} + b_3\mathbf{j} + b_4\mathbf{k}) = \\ &= (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4) + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)\mathbf{i} + \\ &+ (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2)\mathbf{j} + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

V krajši obliki ta produkt zapišemo kot

$$\mathcal{AB} = (ab - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, a\mathbf{b} + b\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

kjer sta z $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ in $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ definirana skalarni in vektorski produkt vektorjev \mathbf{a} in \mathbf{b} .

Iz lastnosti, ki veljajo za vektorski produkt vektorjev \mathbf{a} in \mathbf{b} vemo, da ta ni komutativen, in prav tako tudi produkt kvaternionov ni komutativen. Z upoštevanjem pravila za množenje dobimo produkte baznih elementov

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}.$$

Opazimo, da množica kvaternionov, z operacijami definiranimi kot zgoraj, predstavlja algebro nad poljem realnih števil ([10]). Ko kvaternione zapišemo v skrajšani obliki, nas spominjajo na kompleksna števila. Tako pri kvaternionih, kot pri kompleksnih številih, za vsak kvaternion $\mathcal{A} = (a, \mathbf{a})$ obstaja konjugiran kvaternion $\mathcal{A}^* = (a, -\mathbf{a})$. Velikost kvaterniona \mathcal{A} definiramo kot

$$|\mathcal{A}| = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}^*} = \sqrt{\mathcal{A}^*\mathcal{A}} = \sqrt{a^2 + |\mathbf{a}|^2}.$$

Če je velikost kvaterniona enaka številu 1, mu pravimo **enotski** kvaternion, in ga pogosto označimo z \mathcal{U} . Enotski kvaternion ima vedno obliko

$$\mathcal{U} = \left(\cos \frac{1}{2}\alpha, \sin \frac{1}{2}\alpha \mathbf{u} \right), \quad (4.8)$$

kjer je \mathbf{u} vektor dolžine 1, in α poljuben kot. Vsak vektor \mathbf{v} iz prostora \mathbb{R}^3 lahko v množici kvaternionov zapišemo kot $\mathcal{A} = (0, \mathbf{v})$.

Zaradi lastnosti nekomutativnega množenja nam kvaternioni omogočajo enostaven zapis rotacij elementov v prostoru.

Trditev 4.5. Vektor $\tilde{\mathbf{v}}$, dobljen z rotacijo poljubnega vektorja \mathbf{v} v prostoru \mathbb{R}^3 okrog osi, definirane z vektorjem \mathbf{u} , za kot α s pomočjo kvaternionov definiramo kot

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathcal{U}\mathbf{v}\mathcal{U}^* = (0, (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \sin \alpha (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \cos \alpha (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}), \quad (4.9)$$

kjer je \mathcal{U} enotski kvaternion in ima obliko (4.8).

Dokaz. Vektor $\tilde{\mathbf{v}}$, dobljen z rotacijo vektorja \mathbf{v} okrog osi \mathbf{u} za kot α , je definiran kot (glej npr. [9])

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \cos \alpha + (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \sin \alpha + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} (1 - \cos \alpha).$$

Radi bi pokazali, da ima tudi produkt $\mathcal{U}\mathbf{v}\mathcal{U}^*$ takšno obliko, in ga zato razvijemo z upoštevanjem trigonometrijskih enakosti, ter lastnosti skalarnega in vektorskega produkta [5]

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\mathbf{v}\mathcal{U}^* &= \left(\cos \frac{\alpha}{2}, \mathbf{u} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \mathbf{v} \left(\cos \frac{\alpha}{2}, -\mathbf{u} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \mathbf{u} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (\mathbf{uv})\mathbf{u} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \mathbf{v} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ &\quad + 2(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= 0 + (\mathbf{uv})\mathbf{u} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \mathbf{v} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \sin \alpha + \mathbf{u}(\mathbf{uv}) \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \mathbf{v} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= \mathbf{v} \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) + (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \sin \alpha + 2(\mathbf{uv})\mathbf{u} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= \mathbf{v} \cos \alpha + (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \sin \alpha + (\mathbf{uv})\mathbf{u} (1 - \cos \alpha) = \tilde{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

Iz dobljenega zaključimo, da je z (4.9) res definirana rotacija vektorja \mathbf{v} okrog osi \mathbf{u} , za kot α . \square

Kompozitum rotacij v prostoru ni komutativna funkcija, zato lahko rotacijo predstavimo z množenjem kvaternionov. Opazimo še, da kvaternion \mathcal{U} iz Trditve 4.5 ni enolično določen. Lahko vzememo recimo negativno predznačen kvaternion \mathcal{U} in vidimo, da bo tudi ta zadoščal pogoju izreka.

Vsaki rotaciji poljubnega vektorja \mathbf{v} v prostoru \mathbb{R}^3 lahko priredimo nek kvaternion, tako da bo veljalo (4.9). Denimo, da smo enotski vektor \mathbf{i} rotirali okrog osi \mathbf{u} , za kot α in pri tem kot rezultat dobili enotski vektor $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j} + \nu\mathbf{k}$. Če kvaternion $\mathcal{U} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ustreza pogoju $\mathcal{U}\mathbf{i}\mathcal{U}^* = \mathbf{v}$, potem sta z njim določena os rotacije \mathbf{u} in kot α . Kvaternion \mathcal{U} lahko izrazimo s parametri vektorja \mathbf{v} , in sicer kot ([2])

$$\mathcal{U}(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \lambda)} \left(-\sin \phi + \cos \phi \mathbf{i} + \frac{\mu \cos \phi + \nu \sin \phi}{1 + \lambda} \mathbf{j} + \frac{\nu \cos \phi - \mu \sin \phi}{1 + \lambda} \mathbf{k} \right). \quad (4.10)$$

Vidimo, da je vrednost kvaterniona \mathcal{U} odvisna od prostega parametra $\phi \in [0, 2\pi]$, kar pomeni da \mathcal{U} ni enolično določen. Če je \mathcal{Q} kvaternion, za katerega velja, da je $\mathcal{Q}\mathbf{i}\mathcal{Q}^* = \mathbf{i}$ in je \mathcal{U} ena rešitev enačbe $\mathcal{U}\mathbf{i}\mathcal{U}^* = \mathbf{v}$, potem je očitno da je tudi $\mathcal{U}\mathcal{Q}$ rešitev te enačbe, saj velja

$$\mathcal{U}\mathcal{Q}\mathbf{i}(\mathcal{U}\mathcal{Q})^* = \mathcal{U}(\mathcal{Q}\mathbf{i}\mathcal{Q}^*)\mathcal{U}^* = \mathcal{U}\mathbf{i}\mathcal{U}^*.$$

4.3 Reprezentacija PH krivulj s kvaternioni

Sedaj, ko poznamo osnovne lastnosti kvaternionov, jih lahko uporabimo za reprezentacijo prostorskih PH krivulj. Naj bo $\mathcal{A}(t) = u(t) + v(t)\mathbf{i} + p(t)\mathbf{j} + q(t)\mathbf{k}$ kvaternionski polinom. Potem hodograf prostorske PH krivulje \mathbf{r} v pripadajoči kvaternionski reprezentaciji zapišemo kot

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \mathcal{A}(t)\mathbf{i}\mathcal{A}^*(t) = (u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t))\mathbf{i} \\ &\quad + 2(u(t)q(t) + v(t)p(t))\mathbf{j} \\ &\quad + 2(v(t)q(t) - u(t)p(t))\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Kvaternion \mathcal{A} lahko zapišemo kot $\mathcal{A}(t) = |\mathcal{A}(t)|\mathcal{U}(t)$, kjer je \mathcal{U} enotski kvaternion oblike (4.8). Pri tem hodograf krivulje \mathbf{r} iz enačbe (4.11) predstavlja prostorsko rotacijo vektorja \mathbf{i} za kot α okrog osi \mathbf{u} , zmnoženo z $|\mathcal{A}(t)|^2$. Če je \mathcal{A} stopnje n , bo krivulja \mathbf{r} stopnje $2n + 1$.

V kvaternionskem zapisu hodografa krivulje \mathbf{r} lahko izberemo poljuben enotski vektor namesto vektorja \mathbf{i} . To drži, saj poljuben enotski vektor \mathbf{v} lahko z rotacijo preslikamo v vektor \mathbf{i} , tj. vedno obstaja tak \mathcal{U} , za katerega velja $\mathcal{U}\mathbf{v}\mathcal{U}^* = \mathbf{i}$.

Velja tudi, da je kvaternionski zapis hodografa prostorske PH krivulje rotacijsko invarianten. Za lažje razumevanje, naj imamo dano prostorsko PH krivuljo \mathbf{r} v kvaternionski obliki. Želimo se prepričati, da je krivulja $\tilde{\mathbf{r}}$, dobljena z rotacijo krivulje \mathbf{r} za kot α okrog osi \mathbf{u} , tudi PH krivulja. Vzemimo torej PH krivuljo \mathbf{r} , zapisano v kvaternionski reprezentaciji, kjer je $\mathcal{A} = u(t) + v(t)\mathbf{i} + p(t)\mathbf{j} + q(t)\mathbf{k}$. Hodograf krivulje $\tilde{\mathbf{r}}$, dobljene z rotacijo \mathbf{r} , bi radi predstavili v kvaternionski obliki, kjer bo ustrezen kvaternion določen s polinomi \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{p} , \tilde{q} . Pri tem se polinomi \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{p} , \tilde{q} izražajo z $u, v, p, q, \alpha, \mathbf{u}$. Naj bo \mathcal{U} enotski kvaternion definiran s kotom α in osjo $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ rotacije krivulje \mathbf{r} , tj. $\mathcal{U} = (\cos \frac{1}{2}\alpha, \sin \frac{1}{2}\alpha\mathbf{u})$.

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathcal{U}\mathbf{r}(t)\mathcal{U}^* = \mathcal{U}\mathcal{A}(t)\mathbf{i}\mathcal{A}^*(t)\mathcal{U}^* = \mathcal{U}\mathcal{A}(t)\mathbf{i}(\mathcal{U}\mathcal{A}(t))^*$$

Produkt $\mathcal{U}\mathcal{A}(t)$ je tudi kvaternion, označimo ga z $\tilde{\mathcal{A}}(t)$. Ko ta produkt poračunamo, dobimo

$$\tilde{\mathcal{A}}(t) = \left(\cos \frac{1}{2}\alpha + \sin \frac{1}{2}\alpha(u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}) \right) (u(t) + v(t)\mathbf{i} + p(t)\mathbf{j} + q(t)\mathbf{k}). \quad (4.12)$$

Po predpisu kvaterniona $\tilde{\mathcal{A}}$ velja

$$\tilde{\mathcal{A}}(t) = \tilde{u} + \tilde{v}\mathbf{i} + \tilde{p}\mathbf{j} + \tilde{q}\mathbf{k}.$$

Ko poračunamo izraz (4.12) in izenačimo z zadnjo enačbo, vidimo da se komponente kvaterniona $\tilde{\mathcal{A}}$ res izražajo s polinomi u, v, p, q , ter kotom α in vektorjem \mathbf{u} kot

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= \cos \frac{1}{2}\alpha u(t) - \sin \frac{1}{2}\alpha (u_x v(t) + u_y p(t) + u_z q(t)), \\ \tilde{v}(t) &= \cos \frac{1}{2}\alpha v(t) - \sin \frac{1}{2}\alpha (u_x u(t) + u_y q(t) + u_z p(t)), \\ \tilde{p}(t) &= \cos \frac{1}{2}\alpha p(t) - \sin \frac{1}{2}\alpha (u_y u(t) + u_z v(t) + u_x q(t)), \\ \tilde{q}(t) &= \cos \frac{1}{2}\alpha q(t) - \sin \frac{1}{2}\alpha (u_z u(t) + u_x p(t) + u_y v(t)). \end{aligned}$$

Pokazali smo, da je hodograf PH krivulje \mathbf{r} rotacijsko invarianten, tj., da ko rotiramo krivuljo \mathbf{r} , spet dobimo prostorsko PH krivuljo.

4.4 Kubične postorske PH krivulje

Med lastnostmi, ki smo jih izpeljali za prostorske PH krivulje, smo navedli, da enotski normala in binormala PH krivulje \mathbf{r} v splošnem nista racionalni krivulji. Toda, ko imamo opravka s PH krivuljo stopnje 3, se zadeva poenostavi.

Naj bo \mathbf{r} prostorska PH krivulja stopnje 3. Takšna krivulja predstavlja najbolj enostavno netrivialno prostorsko PH krivuljo. Polinomi u , v , p , q , s katerimi je določen hodograf krivulje v (4.6) so linearni. Velja še, da so vodilni koeficienti polinomov oblike $uv' - vu'$, $up' - pu'$ in pdb . ničelni, zato imajo ti polinomi konstantno vrednost. Polinom ψ , definiran v (4.7), je sestavljen iz vsote konstantnih polinomov in zato ima tudi on konstantno vrednost. Lahko zapišemo $\psi = k^2$, kjer je k neka konstanta. Tako se v predpisu enotskih normale in binormale krivulje \mathbf{r} koren polinoma ψ spremeni v konstanto in zato velja, da sta enotski normala in binormala prostorske PH krivulje stopnje 3 racionalni. Iz racionalnosti enotske normale in binormale takoj sledi, da je tudi Frenetovo ogrodje omenjene krivulje racionalno, zato so prostorske kubične PH krivulje tudi dvojno PH krivulje.

4.4.1 Bézierova reprezentacija

Naj bo \mathbf{r} kubična PH krivulja. V kvaternionski reprezentaciji njen hodograf zapišemo kot

$$\mathbf{r}'(t) = \mathcal{A}(t) \mathbf{i} \mathcal{A}^*(t),$$

kjer je \mathcal{A} linearen kvaternionski polinom in zato velja

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0(1-t) + \mathcal{A}_1 t. \quad (4.13)$$

Da bi dobili enačbe kontrolnih točk \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_3 krivulje \mathbf{r} , vstavimo (4.13) v kvaternionsko reprezentacijo krivulje

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= (\mathcal{A}_0(1-t) + \mathcal{A}_1 t) \mathbf{i} (\mathcal{A}_0(1-t) + \mathcal{A}_1 t)^* \\ &= (\mathcal{A}_0(1-t) + \mathcal{A}_1 t) \mathbf{i} (\mathcal{A}_0^*(1-t) + \mathcal{A}_1^* t) \\ &= \mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^* (1-t)^2 + \mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^* (1-t)t + \mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^* (1-t)t + \mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^* t^2 \\ &= \mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^* B_0^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^*) B_1^2 + \mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^* B_2^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Enačbo krivulje \mathbf{r} dobimo z integracijo njenega hodografa

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \frac{1}{3} \mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^* B_1^3 + \left(\frac{1}{3} \mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^* + \frac{1}{6} \mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^* + \frac{1}{6} \mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^* \right) B_2^3 \\ &\quad + \left(\frac{1}{3} \mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^* + \frac{1}{6} \mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^* + \frac{1}{6} \mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^* + \frac{1}{3} \mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^* \right) B_3^3 + \mathbf{p}_0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ko enkrat imamo določeno krivuljo, lahko zapišemo njene kontrolne točke

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{3} \mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^*, \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{6} (\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^*), \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{3} \mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^*, \end{aligned} \quad (4.16)$$

kjer točka \mathbf{p}_0 zadošča integracijski konstanti.

4.4.2 G^1 Hermiteova interpolacija s kubičnimi prostorskimi PH krivuljami

Sedaj, ko poznamo enačbe kontrolnih točk kubične prostorske PH krivulje, lahko izpeljemo algoritem, ki določa enačbo kubične krivulje \mathbf{r} , če imamo podani robni kontrolni točki in pripadajoči tangenti.

Denimo, da imamo podani kontrolni točki \mathbf{p}_0 in \mathbf{p}_3 krivulje \mathbf{r} , ter smeri pripadajočih tangent \mathbf{t}_0 in \mathbf{t}_2 . Vemo že, da kontrolni točki predstavljata vrednost krivulje \mathbf{r} ko je parameter t enak 0 in 1. Na podoben način predstavljata tangenti \mathbf{t}_0 in \mathbf{t}_2 vrednost odvoda krivulje \mathbf{r}' ko ima parameter t vrednosti 0 in 1.

Mi bi radi določili enačbo kubične PH krivulje \mathbf{r} , ki bo zadoščala danim pogojem. Iz (4.15) vidimo, da bo enačba krivulje določena, ko določimo vrednosti \mathcal{A}_0 in \mathcal{A}_1 . Vstavimo robni vrednosti parametra t v enačbo (4.14), da dobimo enačbe tangent

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_0 &= |\mathbf{t}_0|(t_{0x}, t_{0y}, t_{0z}) = \mathbf{r}'(0) = \mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^*, \\ \mathbf{t}_2 &= |\mathbf{t}_2|(t_{2x}, t_{2y}, t_{2z}) = \mathbf{r}'(1) = \mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^*,\end{aligned}\quad (4.17)$$

kjer sta (t_{0x}, t_{0y}, t_{0z}) in (t_{2x}, t_{2y}, t_{2z}) enotska vektorja, ki jih označimo z \mathbf{e}_{t_1} in \mathbf{e}_{t_2} .

Kvaternion \mathcal{U} , ki reši enačbo $\mathcal{U} \mathbf{i} \mathcal{U}^* = \mathbf{v}$, ko je vektor $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{i} + \mu \mathbf{j} + \nu \mathbf{k}$ znan, ima obliko (4.10), ki je odvisna od parametra ϕ . Na ta način dobimo vrednosti \mathcal{A}_0 in \mathcal{A}_1 kot rešitve enačb (4.17), in sicer odvisne od prostih parametrov ϕ_0 in ϕ_2 , v tem vrstnem redu:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + t_{0x})|\mathbf{t}_0|} \left(-\sin \phi_0 + \cos \phi_0 \mathbf{i} \right. \\ &\quad \left. + \frac{t_{0y} \cos \phi_0 + t_{0z} \sin \phi_0}{1 + t_{0x}} \mathbf{j} + \frac{t_{0z} \cos \phi_0 - t_{0y} \sin \phi_0}{1 + t_{0x}} \mathbf{k} \right),\end{aligned}\quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + t_{2x})|\mathbf{t}_2|} \left(-\sin \phi_2 + \cos \phi_2 \mathbf{i} \right. \\ &\quad \left. + \frac{t_{2y} \cos \phi_2 + t_{2z} \sin \phi_2}{1 + t_{2x}} \mathbf{j} + \frac{t_{2z} \cos \phi_2 - t_{2y} \sin \phi_2}{1 + t_{2x}} \mathbf{k} \right).\end{aligned}\quad (4.19)$$

Parametra ϕ_0 in ϕ_2 imata poljubno vrednost, zato je krivulja \mathbf{r} določena z izpeljanimi vrednostmi \mathcal{A}_0 in \mathcal{A}_1 . Pogoj, da sta \mathbf{p}_0 in \mathbf{p}_3 znani, še nismo upoštevali. V preostanku bomo brez podrobnosti vseh izračunov navedli število krivulj \mathbf{r} , dobljenih kot rešitev predstavljenega interpolacijskega problema.

Ko zapišemo $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0$, dobimo

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{r}(1) - \mathbf{r}(0) = \frac{1}{3} \mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^* + \frac{1}{6} (\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^*) + \frac{1}{3} \mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^*. \quad (4.20)$$

Vstavljanje (4.17) v (4.20) nam da pogoj

$$\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^* = 6\Delta \mathbf{p} - 2\mathbf{t}_0 - 2\mathbf{t}_1. \quad (4.21)$$

Po drugi strani, iz enačb (4.18) in (4.19), dobimo vrednost izraza $\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^*$

$$\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^* = \sqrt{|\mathbf{t}_0||\mathbf{t}_2|} (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \quad (4.22)$$

Pri tem velja

$$a_x = \frac{((1 + t_{0x})(1 + t_{2x}) - (t_{0y}t_{2y} + t_{0z}t_{2z})) \cos \phi - (t_{0y}t_{2z} - t_{2y}t_{0z}) \sin \phi}{\sqrt{(1 + t_{0x})(1 + t_{2x})}},$$

$$a_y = \frac{((1 + t_{2x})t_{0y} + (1 + t_{0x})t_{2y}) \cos \phi + ((1 + t_{0x})t_{2z} - (1 + t_{2x})t_{0z}) \sin \phi}{\sqrt{(1 + t_{0x})(1 + t_{2x})}},$$

$$a_z = \frac{((1 + t_{2x})t_{0z} + (1 + t_{0x})t_{2z}) \cos \phi + ((1 + t_{0x})t_{2y} - (1 + t_{2x})t_{0y}) \sin \phi}{\sqrt{(1 + t_{0x})(1 + t_{2x})}},$$

kjer je $\phi = \phi_2 - \phi_0$ prosti parameter.

Vektor $(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k})$ lahko zapišemo kot funkcijo odvisno od $\cos \phi$ in $\sin \phi$

$$(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) = \mathbf{l}_1 \cos \phi + \mathbf{l}_2 \sin \phi.$$

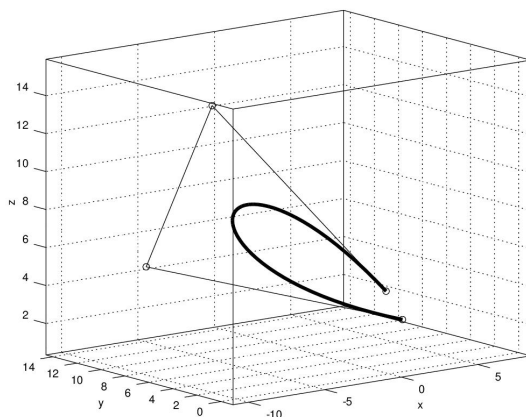
Tedaj iz (4.21) in (4.22) sledi

$$2\mathbf{t}_0 + \sqrt{|\mathbf{t}_0||\mathbf{t}_2|} (\mathbf{l}_1 \cos \phi + \mathbf{l}_2 \sin \phi) + 2\mathbf{t}_2 = 6\Delta \mathbf{p}, \quad (4.23)$$

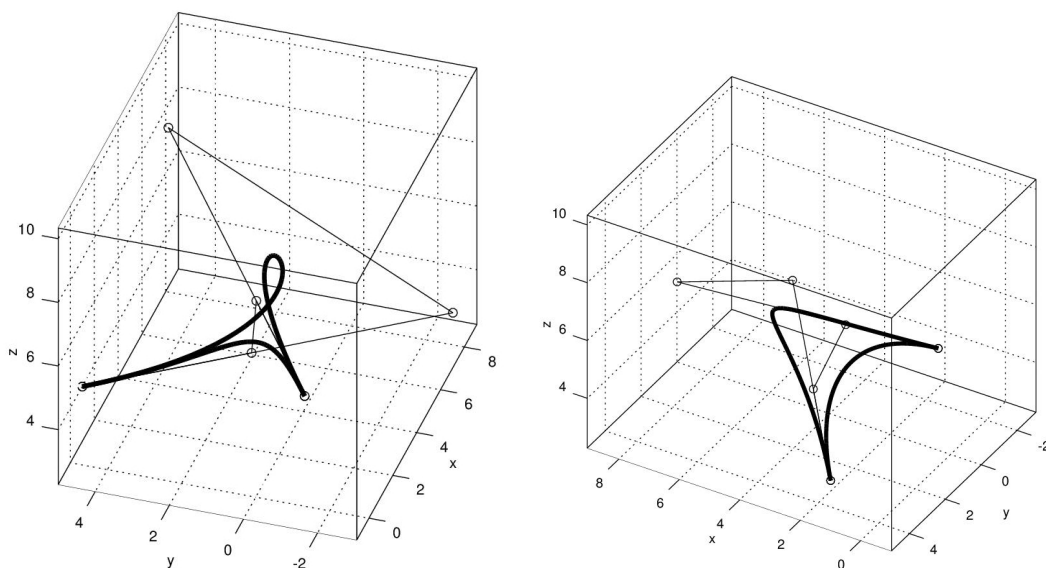
kar nam da sistem treh enačb s tremi neznankami. Ko ta sistem rešimo po $|\mathbf{t}_0|$, $|\mathbf{t}_2|$, dobimo rešitve odvisne od kota ϕ (glej [8]). Zanj dobimo enačbo stopnje 4, oblike

$$\tau^4 - 2\alpha\tau^3 + 2\beta\tau^2 + 2\alpha\tau + 1 = 0,$$

kjer je $\tau = \tan \frac{1}{2}\phi$, ter se α in β izražata z znanimi vektorji iz enačbe (4.23). Omenjena enačba stopnje 4 ima sodo število realnih rešitev. Ko rešitve vstavimo v enačbo krivulje \mathbf{r} , se izkaže, da pari rešitev, ki smo jih dobili, dajo isto krivuljo. Brez izgube splošnosti lahko v (4.18) in (4.19) vstavimo $\phi_0 = 0$ in $\phi_2 = \phi$. Sledi, da ko imamo podani robni kontrolni točki kubične prostorske PH krivulje \mathbf{r} , ter pripadajoči tangenti, se lahko zgodi, da interpolacijska rešitev tega problema ne obstaja, je enolična, ali ostajata dve krivulji, ki rešita ta interpolacijski problem.



Slika 9: Primer G^1 Hermiteove interpolacije, ko obstaja ena sama rešitev (točki $\mathbf{p}_0 = (-1, -1, 5)^T$, $\mathbf{p}_3 = (4, 4, 2)^T$ in tangenti $\mathbf{e}_{\mathbf{t}_0} = (-\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$, $\mathbf{e}_{\mathbf{t}_2} = (\frac{4}{\sqrt{42}}, -\frac{5}{\sqrt{42}}, -\frac{1}{\sqrt{42}})^T$)



Slika 10: Primer G^1 Hermiteove interpolacije, ko obstajata dve rešitvi (točki $\mathbf{p}_0 = (1, 1, 3)^T$ in $\mathbf{p}_3 = (1, 5, 4)^T$, ter tangenti $\mathbf{e}_{\mathbf{t}_0} = (\frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{2}{\sqrt{22}})^T$ in $\mathbf{e}_{\mathbf{t}_2} = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)^T$), iz različnih zornih kotov.

5 Zaključek

V zaključni nalogi smo spoznali teoretično ozadje polinomskih krivulj s pitagorejskim hodografom. Kot smo videli, predstavljajo le-te poseben podrazred vseh polinomskih krivulj. Spoznali smo tudi povezavo geometrije ravninskih PH krivulj z algebrsko strukturo množice kompleksnih števil. Z uporabo kompleksnega zapisa smo izpeljali algoritem za konstrukcijo PH krivulje iz poljubne dane polinomske krivulje. S tem smo definirali korespondenco med množico regularnih polinomskih PH krivulj in vseh regularnih polinomskih krivulj. Nato smo pozornost preusmerili na prostorske PH krivulje. Spoznali smo množico kvaternionov in videli, kako lahko prostorske PH krivulje zapišemo s pomočjo kvaternionijske reprezentacije. Ko smo govorili o prostorskih PH krivuljah, nismo podali bijektivne preslikave med množico vseh regularnih prostorskih polinomskih krivulj in tistih, ki imajo pitagorejski hodograf. Takšna preslikava namreč še ni znana, in na tem področju zaenkrat še ni dovolj raziskanega, da bi trdili, ali takšna preslikava obstaja ali ne. Z uporabo kvaternionijskega zapisa prostorskih PH krivulj je delo z njimi zelo poenostavljeno, postale so zelo uporabne v robotiki, grafiki, animacijah ... Omenimo še enkrat, da je z rotacijskim minimizirajočim ogrođjem (RMF) določeno prostorsko gibanje togega telesa. Mogoče je ena najpomembnejših lastnosti prostorskih PH krivulj prav ta, da imajo eksaktno izračunljivo RMF, čeprav so takšne krivulje v resnici zelo težko dosegljive.

Skratka, PH krivulje predstavljajo zelo uporabno strukturo v CAGD, vendar ko govorimo o prostorskih, ali višje dimenzionalnih krivuljah, obstaja veliko stvari, ki še niso raziskane. Kar je znano, je, da so vsi izračuni z njimi zelo poenostavljeni in zato so PH krivulje doživele velik razvoj, ki bo verjetno še večji v prihodnosti.

6 Literatura in viri

- [1] G. FARIN, *Curves and surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Morgan Kaufmann publishers, Fifth edition, Berkeley, 2006. (*Citirano na strani 14.*)
- [2] R. T. FAROUKI, *Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and geometry inseparable*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008. (*Citirano na straneh VII, 1, 9, 11, 17, 19, 21, 25, 26 in 29.*)
- [3] R. FAROUKI, C. GIANNELLI in A. SESTINI, Helical polynomial curves and double Pythagorean hodographs I. Quaternion and Hopf map representation. *Journal of Symbolic Computation* 44 (2009) 161–179. (*Citirano na strani 25.*)
- [4] J. GLOBEVNIK in M. BROJAN, *Analiza II, skripta*. Fakulteta za matematiko in fiziko, Ljubljana, 2010. (*Citirano na strani 9.*)
- [5] T. GRBIĆ, S. LIKAVEC, T. LUKIĆ, J. PANTOVIĆ, N. SLADOJE in LJ. TE-OFANOV, *Zbirka rešenih zadataka iz Matematike I*. Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, VI. el. izdanje, Novi Sad, 2014. (*Citirano na straneh 15 in 28.*)
- [6] J. KOZAK, *Numerična analiza*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Volume 1, DMFA Ljubljana, 2008. (*Citirano na strani 4.*)
- [7] D.S. MEEK in D.J. WALTON, Geometric Hermite interpolation with Tschirnhausen cubics. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 81 (1997) 299–309. (*Citirano na strani 18.*)
- [8] F. PELOSI, RIDA T. FAROUKI, C. MANNI in A. SESTINI, Geometric Hermite interpolation by spatial Pythagorean-hodograph cubics. *Springer* 22 (2005) 325–352. (*Citirano na strani 33.*)
- [9] JOHAN ERNEST MEBIUS, *Euler-Rodrigues formula*, <http://arxiv.org/>. (Datum ogleda: 15. 6. 2015.) (*Citirano na strani 28.*)
- [10] SAŠA KREŠIĆ-JURIĆ, *Algebarske strukture*, <http://www.pmfst.unist.hr>. (Datum ogleda: 15. 6. 2015.) (*Citirano na strani 28.*)