UNIVERZA NA PRIMORSKEM
Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

Matematika – 1. stopnja

Urška Pangerc

Karakterizacije popolnih grafov

Zaključna naloga

Koper, julij 2012

Mentor: doc. dr. Martin Milanič

Povzetek

Graf je popoln, če za vsak njegov induciran podgraf velja, da je kromatično število enako kličnemu številu. V nalogi obravnavamo popolne grafe in nekatere njihove osnovne lastnosti. Najprej predstavimo motivacijo za raziskovanje popolnih grafov. Izrek o popolnih grafih pravi, da je razred popolnih grafov zaprt za operacijo komplementa grafa. Zapišemo dva dokaza izreka o popolnih grafih–Lovászovega in Gasparianovega. Gasparianov dokaz temelji na linearni algebri. Obravnavamo povezavo med popolnimi grafi in poliedrsko kombinatoriko. Brez uporabe izreka o popolnih grafih in krepkega izreka o popolnih grafih preverimo popolnost štirih osnovnih razredov popolnih grafov: dvodelnih grafov, povezavnih grafov dvodelnih grafov, komplementov dvodelnih grafov in komplementov povezavnih grafov dvodelnih grafov. Navedemo krepki izrek o popolnih grafih in opišemo idejo dokaza Chudnovsky, Robertsona, Seymourja in Thomasa tega znamenitega izreka. Za konec omenimo še nekaj znanih rezultatov o popolnih grafih.

Abstract

A graph is perfect if in all its induced subgraphs the clique number is equal to the chromatic number. The main goal of this project is to give an overview of some of the main properties of perfect graphs. First, we state the motivation for studying perfect graphs. The perfect graph theorem states that the class of perfect graphs is closed under taking complements. We give two proofs of this result, one due to Lovász and one, based on linear algebra, due to Gasparian. We explain how perfect graphs are connected to polyhedral combinatorics. Without using the Perfect Graph Theorem and the Strong Perfect Graph Theorem, we verify the perfectness of four basic perfect graph classes: bipartite graphs, line graphs of bipartite graphs, complements of bipartite graphs, and complements of line graphs of bipartite graphs. We state the Strong Perfect Graph Theorem and sketch the idea of the proof of this famous theorem due to Chudnovsky, Robertson, Seymour and Thomas. In conclusion, we mention some other known results about perfect graphs.

Math. Subj. Class. (2010): 05C17, 90C57

Ključne besede: popolni grafi, izrek o popolnih grafih, osnovni razredi popolnih grafov.
Keywords: perfect graphs, perfect graph theorem, basic classes of perfect graphs.

Zahvala

Zahvaljujem se mentorju doc. dr. Martinu Milaniču za pomoč, nasvete in potrpežljivost pri izdelavi zaključne naloge. Hvala tudi staršem za podporo.

Kazalo

Slike

Poglavje 1

Uvod

Popolne grafe je prvi predstavil francoski matematik Claude Berge v šestdesetih letih prejšnjega stoletja. Definiral je, da je graf popoln, če sta velikost največje klike in kromatično število enaka za vsak njegov induciran podgraf. Njegova motivacija za uveljavitev pojma popolnih grafov je bil problem računanja Shannonove kapacitete grafa. Ta se nahaja med velikostjo največje klike in kromatičnim številom. V splošnem je računanje Shannonove kapacitete težek problem. Ker pri popolnih grafih med tema količinama velja enakost, je določanje Shannonove kapacitete za popolne grafe trivialno.

Za številne razrede grafov se lahko pokaže, da so popolni. Berge je opazil pomembno lastnost, da so tudi komplementi teh grafov popolni. Podal je dve domnevi. Prva govori, da je graf popoln natanko takrat, ko je njegov komplement popoln. Druga pa, da je graf popoln, če in samo če ne vsebuje lihih ciklov dolžine pet ali več ali njihovih komplementov kot induciranih podgrafov. Graf, pri katerem se klično in kromatično število razlikujeta, imenujemo nepopoln graf. Hitro se lahko prepričamo, da so lihi cikli dolžine vsaj pet nepopolni, saj je kromatično število takega grafa enako 3, klično število pa 2. Prav tako so nepopolni grafi komplementi lihih ciklov dolžine vsaj pet z $2k+1$ vozlišči, $k \geq 2$, saj je kromatično število takega grafa enako $k+1$, klično pa k. Ne samo da so zgoraj opisani grafi nepopolni, pač pa so minimalno nepopolni. To pomeni, da je vsak njihov pravi induciran podgraf popoln.

Domnevi danes poznamo kot izrek o popolnih grafih in krepki izrek o popolnih grafih. Izrek o popolnih grafih je leta 1972 dokazal Lovász [18]. Opisan je v drugem razdelku naloge. Dokaz krepkega izreka o popolnih grafih so leta 2002 predstavili Chudnovsky, Robertson, Seymour in Thomas [7] in kot je Chvàtal zapisal v osmrtnici Bergea [3], se zdi, kot da je Berge čakal na potrditvi svojih domnev ter se je šele nato lahko v miru poslovil, saj je umrl le nekaj tednov po objavi dokaza njegove druge domneve. Dokaz krepkega izreka o popolnih grafih je zahteven in v nalogi ni zapisan. Na kratko opišemo samo idejo, s katero so Chudnovsky, Robertson, Seymour in Thomas pokazali izrek. To je pokazati, da vsak graf, ki ne vsebuje lihih ciklov dolžine vsaj pet in njihovih komplementov kot inducirane podgrafe, sodi med osnovne razrede grafov, za katere se ve, da so popolni, ali pa vsebuje dekompozicijo, ki se ne more pojaviti v minimalno nepopolnih grafih.

Izrek o popolnih grafih se lahko uporabi tudi za dokazovanje nekaterih min-maks relacij v dvodelnih grafih. Izkazalo se je, da popolni grafi združujejo kar nekaj rezultatov v kombinatorični optimizaciji in poliedrski kombinatoriki. Chvátal [4] je leta 1975 pokazal povezanost popolnih grafov s poliedrsko kombinatoriko.

V nadaljevanju bomo zapisali še nekaj definicij in pojmov, ki jih bomo v nalogi uporabili. V naslednjem poglavju se bomo osredotočili na izrek o popolnih grafih in zapisali dva njegova dokaza. V tretjem poglavju bomo opisali, kako so popolni grafi povezani s poliedrsko kombinatoriko. V četrtem poglavju bomo predstavili štiri osnovne razrede popolnih grafov in pokazali, da so res popolni. V petem poglavju bomo navedli krepki izrek o popolnih grafih in opisali idejo dokaza. V zadnjem poglavju bomo povzeli nalogo in zapisali še nekaj znanih rezultatov o popolnih grafih.

Omenimo še, da naloga pretežno temelji na knjigah Schrijverja z naslovom Combinatorial Optimization, Polyhedra and Efficiency [19] (poglavje 65) in Golumbica Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs, Second Edition [12] (poglavje 3).

1.1 Osnovne definicije in pojmi

V nalogi so grafi vedno končni, neusmerjeni in enostavni. To pomeni, da ne vsebujejo zank, večkratnih povezav, usmerjenih povezav, množici vozlišč in povezav pa sta končni.

Graf je par $G = (V, E)$, kjer $V = V(G)$ predstavlja množico vozlišč in $E = E(G)$ množico povezav. Ob tem velja, da je množica $V(G)$ neprazna in elementi množice $E(G)$ so oblike $\{u, v\}$, kjer sta u in v različna elementa množice $V(G)$. Povezavo $\{u, v\}$ bomo pisali tudi krajše kot uv. Če je $uv \in E$, pravimo, da sta vozlišči u in v *povezani v G*. **Induciran podgraf** H grafa G je tak njegov podgraf, za katerega velja $V(H) \subseteq V(G)$ in vse povezave med vozlišči $V(H)$ v grafu G so tudi v podgrafu H. Pravimo, da je H *podgraf grafa G, induciran z množico U*, kjer je $U = V(H)$ in to označimo s $H = G[U]$. Graf $G - v$ bo predstavljal podgraf grafa G, induciran z množico $V(G) \setminus \{v\}$. Naj bo $V' \subseteq V(G)$. Z $G - V'$ bomo označili podgraf grafa G, induciran z množico $V(G) \setminus V'$. **Pot** P od vozlišča u do vozlišča v v grafu G je zaporedje paroma različnih vozlišč $u = v_0, v_1, \ldots, v_l = v$ grafa G, kjer je $0 \leq l \leq |V(G)|$ nenegativno celo število in velja $v_i v_{i+1} \in E(G)$ za vse $i = 0, 1, \ldots, l-1$. Dolžina poti je število povezav med začetnim in končnim vozliščem poti. Če je $P = (u = v_0, v_1, \ldots, v_l = v)$ pot v grafu G od u do v in je $e = vw$ taka povezava v G, incidenčna z vozliščem v, da je $w \neq v_i$ za vse $0 \leq i \leq l$, potem je $(u = v_0, v_1, \ldots, v_l = v, w)$ pot v grafu G od u do w; označimo jo s $P \cup e$. Pot P_n reda n je graf, kjer sta $V(P_n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ in $E(P_n) = \{\{i, i+1\} : 1 \leq i \leq n-1\}$. Grafa $G_1 = (V_1, E_1)$ in $G_2 = (V_2, E_2)$ sta izomorfna, če obstaja taka bijektivna preslikava $f : V_1 \to V_2$, da velja: vozlišči $u, v \in V_1$ sta povezani v G_1 natanko tedaj, ko sta $f(u), f(v)$ povezani v grafu G_2. Graf G je povezan, če za vsaki dve vozlišči u in v grafa G obstaja pot od u do v. Maksimalen povezan podgraf grafa G imenujemo komponenta grafa G. Graf G je pot, če je izomorfen grafu $P_{|V(G)|}$. V nalogi bomo poti včasih obravnali kot zaporedje vozlišč, včasih pa kar kot grafe. Katera definicija bo uporabljena, bo razvidno iz konteksta.

Komplement grafa $G = (V, E)$ je graf $\overline{G} = (V', E')$, kjer je $V = V'$ in dve različni vozlišči sta povezani v $\overline{G}$, če nista povezani v G in obratno. **Klika** je taka podmnožica C vozlišč grafa G, da sta vsaki dve vozlišči v C med seboj povezani. Maksimalna klika je klika, ki ni vsebovana v nobeni večji kliki grafa G. Kliko največje moči imenujemo ω-klika. Moč ω-klike označimo z $\boldsymbol{\omega(G)}$ in imenujemo klično število. Množico vozlišč $S \subseteq V$ v grafu G imenujemo **neodvisna množica** grafa G, če nobeni dve vozlišči iz S nista med seboj povezani. Maksimalna neodvisna množica je neodvisna množica, ki ni vsebovana v nobeni večji neodvisni množici grafa G. Neodvisno množico največje moči imenujemo α-neodvisna množica. Moč α-neodvisne množice grafa G označimo z $\boldsymbol{\alpha(G)}$ in imenujemo neodvisnostno število grafa G. Naj bo $G = (V, E)$ graf in $v \in V$. Stopnja vozlišča v je število povezav, ki imajo krajišče v vozlišču v. Maksimalno stopnjo vozlišča grafa G označimo z $\Delta(G)$.

Naj bo k naravno število. Pravo k-barvanje grafa G je taka particija množice vozlišč $V = S_1 + S_2 + \ldots + S_k$, da je S_i neodvisna množica za vse $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Množice $S_1, S_2, \ldots, S_k$ so paroma disjunktne in lahko prazne. Vozlišča v S_i pobarvamo z barvo i. Povezana vozlišča bodo tako imela različno barvo. Pravimo, da je graf G k-pobarljiv. **Kromatično število** $\boldsymbol{\chi(G)}$ je najmanjši tak k, za katerega obstaja pravo k-barvanje grafa G. Z drugimi besedami, $\chi(G)$ je najmanjše število barv, s katerimi lahko pobarvamo vozlišča grafa G tako, da imata sosednji dve vselej različno barvo.

Pravo k-barvanje povezav grafa G je dodelitev k različnih barv povezavam grafa G tako, da imata poljubni dve povezavi s skupnim krajiščem različno barvo. Če obstaja pravo k-barvanje povezav grafa G, pravimo, da je graf G po povezavah k-pobarljiv. Najmanjši tak k, za katerega je graf G po povezavah k-pobarljiv, označimo s $\chi'(G)$ in ga imenujemo **kromatični indeks** grafa G.

Pokritje grafa G s klikami je taka particija množice vozlišč $V = C_1 + C_2 + \ldots + C_k$, da je C_i klika za vse $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Velikost najmanjšega možnega pokritja grafa G s klikami označimo s $\boldsymbol{\kappa(G)}$. Drugače povedano, iščemo tako najmanjše število klik v G, da so z njimi pokrita vsa vozlišča v grafu G.

Incidenčna matrika grafa G je matrika velikosti $n \times m$, kjer je $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ in $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Matrika ima v vrstici i in stolpcu j

vrednost 1, če je vozlišče v_i krajišče povezave e_j, in vrednost 0, sicer.

Klična matrika grafa G je matrika velikosti $k \times n$, kjer je k število maksimalnih klik v grafu G in n število vozlišč grafa G. Matrika ima v vsaki vrstici enke v stolpcih, ki predstavljajo vozlišča ustrezne klike, in ničle sicer.

Minimalno nepopoln graf je tak graf G, ki ni popoln, vsak pravi induciran podgraf grafa G pa je popoln.

Polieder P je množica rešitev sistema končno mnogo linearnih neenakosti $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$, kjer je A matrika velikosti $m \times n$ in $b \in \mathbb{R}^m$. Omejen polieder je tak polieder P, da obstajata vektorja $l, u \in \mathbb{R}^n$, da velja $l \leq x \leq u$ za vse vektorje $x \in P$. **Ekstremna točka** poliedra P je taka točka $v \in P$, da obstaja hiperravnina $w^\top x = t$, kjer $w \in \mathbb{R}^n$ in $t \in \mathbb{R}$, za katero velja $w^\top x \leq t$ za vse $x \in P$ in $\{x \in P | \, w^\top x = t\} = \{v\}$.

Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorji in $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ skalarji. Potem je $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ **linearna kombinacija** vektorjev $x_1, x_2, \ldots, x_n$. **Konveksna kombinacija** vektorjev je linearna kombinacija, pri kateri velja $\lambda_i \geq 0$ in $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^n$ množica. Konveksna ogrinjača množice X je množica vseh konveksnih kombinacij vektorjev iz množice X.

Naj bosta x, y vektorja v $\mathbb{R}^n$. Vektorje bomo predstavili kot matrike velikosti $n \times 1$. Oznaka $^\top$ označuje transponiranje matrik. Skalarni produkt dveh vektorjev označimo z $x^\top y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Dana je univerzalna množica $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Vektor $x \in \{0,1\}^n$ je **karakteristični vektor** množice $W \subseteq V$, če velja

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{če je } v_i \in W; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Rang matrike A je največje število linearno neodvisnih vrstic (ekvivalentno: stolpcev) v matriki. Vrstice (stolpci) so linearno neodvisne, če se nobene od vrstic (nobenega od stolpcev) ne da izraziti kot linearno kombinacijo preostalih vrstic (stolpcev). Rang matrike A označimo z $rang(A)$.

Poglavje 2

Izrek o popolnih grafih

2.1 Predpriprave

Zapišimo definicijo popolnih grafov.

Definicija 2.1. Graf $G = (V, E)$ je popoln, če enakost $\omega(G') = \chi(G')$ velja za vsak induciran podgraf G' grafa G.

Presek klike in neodvisne množice v grafu je lahko največ eno vozlišče. Tako v vsakem grafu G velja:

$$\alpha(G) \leq \kappa(G) \quad \text{in} \quad \omega(G) \leq \chi(G).$$

Z upoštevenjem komplementa $\overline{G}$ grafa G pridemo do dualnosti.

$$\chi(G) = \kappa(\overline{G}) \quad \text{in} \quad \omega(G) = \alpha(\overline{G}). \tag{2.1}$$

V nalogi so predstavljeni grafi, za katere veljata lastnosti:

(I1) $\omega(G') = \chi(G')$, za vsak induciran podgraf G'grafa G,

(I2) $\alpha(G') = \kappa(G')$, za vsak induciran podgraf G'grafa G.

Takim grafom pravimo popolni grafi. Iz enakosti (2.1) vidimo naslednje:

- G izpolnjuje lastnost (I1), če in samo če komplement $\overline{G}$ izpolnjuje (I2).

Ekvivalentnost lastnosti (I1) in (I2) je leta 1972 dokazal Lovász. Ta izrek je danes poznan kot izrek o popolnih grafih.

Lovászov dokaz temelji na operaciji, ki ohranja popolnost grafa. To je multipliciranje vozlišč grafa. Graf, narejen z multipliciranjem vozlišč, kot je opisano spodaj, ohranja lastnosti (I1), (I2).

Naj bo G graf z vozliščem x. Graf $G \circ x$ je zgrajen iz grafa G, z dodanim vozliščem x', ki povezuje vse sosede vozlišča x.

Trditev 2.2. *Za vsaki dve različni vozlišči x in y grafa G velja $(G \circ x) - y = (G - y) \circ x$.*

Dokaz. Označimo graf na levi strani enakosti G_1 in graf na desni z G_2.

Najprej pokažimo, da velja $V(G_1) = V(G_2)$. Množica vozlišč $V(G_1)$ je sestavljena iz vozlišč $V(G)$, dodanega vozlišča x' in brez vozlišča y. Množica vozlišč $V(G_2)$ je sestavljena iz vozlišč $V(G)$, brez vozlišča y in dodanega vozlišča x'. Torej velja enakost $V(G_1) = V(G_2)$.

Za poljubni dve različni vozlišči $u, v \in V(G_1) = V(G_2)$ velja: $uv \in E(G_1) \iff uv \in E(G \circ x) \iff uv \in E(G_2)$.

$\square$

V splošnem naj bo $V(G) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ množica vozlišč grafa G in $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ vektor nenegativnih celih števil. Graf $H = G \circ h$ je konstruiran z zamenjavo vsakega vozlišča x_i z neodvisno množico vozlišč velikosti h_i; recimo $x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^{h_i}$. Povezava med x_i^s in x_j^t obstaja, če in samo če sta x_i in x_j povezani v G. Pravimo, da je H zgrajen iz G z multipliciranjem vozlišč.

Pri konstrukciji grafa je lahko komponenta h_i vektorja h enaka nič. V tem primeru graf H ne vsebuje kopij vozlišča x_i. Torej lahko vsak induciran podgraf grafa G zgradimo z multipliciranjem ustreznega vektorja h, ki ima vrednosti 0 in 1.

V preostanku tega poglavja sta podana dva dokaza izreka o popolnih grafih. Enega je podal Lovász leta 1972, drugega pa Gasparian leta 1996. Za Lovászov dokaz izreka potrebujemo nekaj predpriprav. To sta naslednji lemi. Prvo je leta 1961 dokazal Berge.

Lema 2.3 (Berge [1])**.** *Naj bo H graf, ki ga dobimo z multipliciranjem vozlišč grafa G.*

(i) Če G zadošča pogoju (I1), potem H zadošča pogoju (I1).

(ii) Če G zadošča pogoju (I2), potem H zadošča pogoju (I2).

Dokaz. Lema je pravilna, če ima graf G samo eno vozlišče. Predpostavimo, da sta *(i)* in *(ii)* pravilni za grafe z manj vozlišči, kot jih ima graf G. Naj bo $H = G \circ h$. Če je katera od koordinat vektorja h enaka nič, na primer $h_i = 0$, potem lahko H dobimo iz $G - x_i$ z multipliciranjem vozlišč. Toda, če G zadošča (I1) (ali (I2)), potem $G - x_i$ tudi zadošča (I1) (ali (I2)). V tem primeru indukcijska predpostavka implicira *(i)* in *(ii)*.

Predpostavimo, da je vsaka koordinata $h_i \geq 1$. Ker je H lahko zgrajen iz zaporedja manjših multipliciranj, je dovolj obravnavati primer $H = G \circ x$. Naj bo x' dodano vozlišče grafu G.

Predpostavimo, da graf G zadošča (I1). Ker sta x in x' nepovezani, imamo $\omega(G \circ x) = \omega(G)$. Naj bo G pobarvan z $\omega(G)$ barvami. Pobarvajmo

x in x' z enako barvo. To je barvanje grafa $G \circ x$ z $\omega(G \circ x)$ barvami. Torej $G \circ x$ zadošča pogoju (I1).

Sedaj predpostavimo, da graf G zadošča (I2). Pokazati moramo, da $\alpha(G \circ x) = \kappa(G \circ x)$. Naj bo $\mathcal{K}$ tako pokritje s klikami grafa G, za katerega velja $|\mathcal{K}| = \alpha(G) = \kappa(G)$. Naj bo K_x klika iz $\mathcal{K}$, ki vsebuje x.

Obravnavati je treba dva primera:

1. Vozlišče x je vsebovano v neki α-neodvisni množici S grafa G. (To je, $|S| = \alpha(G)$.) V tem primeru je $S \cup \{x'\}$ neodvisna množica grafa $G \circ x$, torej

$$\alpha(G \circ x) = \alpha(G) + 1.$$

Ker $\mathcal{K} \cup \{\{x'\}\}$ pokriva $G \circ x$, imamo

$$\kappa(G \circ x) \leq \kappa(G) + 1 = \alpha(G) + 1 = \alpha(G \circ x) \leq \kappa(G \circ x).$$

Torej je $\alpha(G \circ x) = \kappa(G \circ x)$.

2. Vozlišče x ni vsebovano v nobeni α-neodvisni množici grafa G, torej

$$\alpha(G \circ x) = \alpha(G).$$

Po definiciji imata lahko klika in neodvisna množica v grafu največ eno skupno vozlišče. Torej je presek poljubne α-neodvisne množice S grafa G in poljubne klike iz $\mathcal{K}$ prazen ali pa sestoji iz enega samega vozlišča. Vsako vozlišče grafa G je vsebovano v neki kliki iz $\mathcal{K}$. Če bi obstajala klika, za katero bi bil presek z neko α-neodvisno množico S prazen, bi veljalo $|\mathcal{K}| > |S|$. To pa je v protislovju s predpostavko $|\mathcal{K}| = \alpha(G) = \kappa(G)$.

Torej vsaka klika iz $\mathcal{K}$ preseka vsako α-neodvisno množico S grafa G natanko enkrat. To je seveda res tudi za K_x. Toda x ni vsebovan v nobeni α-neodvisni množici. Torej $D = K_x \setminus \{x\}$ preseka vsako α-neodvisno množico grafa G natanko enkrat. Označimo $G' = G - D$. Tedaj velja

$$\alpha(G') = \alpha(G) - 1.$$

Iz tega sledi

$$\kappa(G') = \alpha(G') = \alpha(G) - 1 = \alpha(G \circ x) - 1.$$

Če vzamemo pokritje s klikami grafa G' velikosti $\alpha(G \circ x) - 1$ z dodatno kliko $D \cup \{x'\}$, dobimo pokritje grafa $G \circ x$. Torej

$$\kappa(G \circ x) = \alpha(G \circ x).$$

$\square$

Naslednjo lemo sta dokazala Fulkerson leta 1971 in Lovász leta 1972. Lema vsebuje naslednjo lastnost:

(I3) $\omega(G')\alpha(G') \geq |V(G')|$, za vsak induciran podgraf G' grafa G,

ki je ekvivalentna lastnostma (I1) in (I2). Operacija multipliciranja vozlišč ohranja tudi lastnost (I3).

Lema 2.4 (Fulkerson [10], Lovász [18])**.** *Naj bo G graf, katerega vsak pravi induciran podgraf zadošča (I2). Naj bo H dobljen iz G z multipliciranjem vozlišč. Če G zadošča (I3), potem tudi H zadošča (I3).*

Dokaz. Naj bo G graf, ki zadošča (I3) in katerega vsak pravi induciran podgraf zadošča (I2). Izberimo graf H tako, da ima najmanjše možno število vozlišč, pri čemer je H dobljen iz G z multipliciranjem vozlišč, in zanj ne velja (I3). Torej

$$\omega(H)\alpha(H) < |X|, \tag{2.2}$$

kjer $X = V(H)$, toda (I3) še vedno velja za vsak pravi induciran podgraf grafa H.

Kot v dokazu prejšnje leme, lahko predpostavimo, da je bilo vsako vozlišče grafa G multiplicirano vsaj enkrat in neko vozlišče u je bilo multiplicirano s $h \geq 2$. Naj bo $U = \{u^1, u^2, \ldots, u^h\}$ množica vozlišč, ki so bila dodana grafu H glede na vozlišče u. V dokazu ima pomembno vlogo vozlišče u^1. Glede na minimalnost grafa H, graf $H' = (X \setminus \{u^1\}, E')$ zadošča (I3), torej

$$\begin{aligned} |X| - 1 = |X \setminus \{u^1\}| &\leq \omega(H')\alpha(H') \quad [\text{po} \quad (\text{I3})] \\ &\leq \omega(H)\alpha(H) \\ &\leq |X| - 1 \quad [\text{po} \quad (2.2)]. \end{aligned}$$

Enakost velja še naprej, zato definirajmo naslednje

$$p = \omega(H') = \omega(H),$$

$$q = \alpha(H') = \alpha(H)$$

in

$$pq = |X| - 1. \tag{2.3}$$

Ker je $H[X-U]$ dobljen iz $G-u$ z multipliciranjem vozlišč, po prejšnji Lemi 2.3 velja, da $H[X-U]$ zadošča (I2). Torej lahko $H[X-U]$ pokrijemo z množico q polnih podgrafov iz H, na primer $K_1, K_2, \ldots, K_q$. Privzamemo lahko, da so K_i paroma disjunktni in $|K_1| \geq |K_2| \geq \ldots \geq |K_q|$. Velja:

$$\sum_{i=1}^{q} |K_i| = |X-U| = |X| - h = pq - (h-1) \quad [\text{po} \quad (2.3)].$$

Ker $|K_i| \leq p$, največ $h-1$ množic K_i ne prispeva p k vsoti. Sledi:

$$|K_1| = |K_2| = ... = |K_{q-h+1}| = p.$$

Naj bo H'' podgraf grafa H induciran z množico $X'' = K_1 \cup ... \cup K_{q-h+1} \cup \{u^1\}$. Torej:

$$|X''| = p(q-h+1) + 1 < pq + 1 = |X| \quad [\text{po} \quad (2.3)] \tag{2.4}$$

in po minimalnosti grafa H:

$$\omega(H'')\alpha(H'') \geq |X''| \quad [\text{po} \quad (\text{I3})]. \tag{2.5}$$

Toda $p = \omega(H) \geq \omega(H'')$, torej:

$$\begin{aligned} \alpha(H'') &\geq \frac{|X''|}{p} \quad [\text{po} \quad (2.5)] \\ &> q-h+1 \quad [\text{po} \quad (2.4)]. \end{aligned}$$

Naj bo S' neodvisna množica grafa H'' moči $q-h+2$. Seveda je $u_1 \in S'$, sicer bi S' vsebovala dve vozlišči klike (po definiciji H''). Sledi, da je $S = S' \cup U$ neodvisna množica grafa H s $q+1$ vozlišči, kar pa je v protislovju z definicijo q-ja. $\square$

V nadaljevanju bomo potrebovali še naslednjo lastnost minimalno nepopolnih grafov.

Trditev 2.5. *Poljuben minimalno nepopoln graf $G = (V, E)$ nima neodvisne množice S, da bi veljalo $\omega(G-S) < \omega(G)$.*

Dokaz. Ker lahko vozlišča iz neodvisne množice S pobarvamo z eno barvo, bi v nasprotnem veljalo naslednje: $\omega(G) \geq \omega(G-S) + 1 = \chi(G-S) + 1 \geq \chi(G)$. Po definiciji velja $\omega(G) \leq \chi(G)$. Torej pridemo do sklepa, da je G popoln graf, kar pa je v nasprotju s predpostavko, daje graf G minimalno nepopoln. $\square$

2.2 Izrek o popolnih grafih

V tem poglavju sta predstavljeni ekvivalentni različici izreka o popolnih grafih in njuna dokaza. Prvo je leta 1972 dokazal Lovász in temelji na lemah iz prejšnjega podpoglavja.

Izrek 2.6 (Lovász [18])**.** *Naj bo $G = (V, E)$ graf. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

(I1) $\omega(G') = \chi(G')$, *za vsak induciran podgraf G' grafa G,*

(I2) $\alpha(G') = \kappa(G')$, *za vsak induciran podgraf G' grafa G,*

(I3) $\omega(G')\alpha(G') \geq |V(G')|$, *za vsak induciran podgraf G' grafa G.*

Dokaz. Predpostavimo lahko, da izrek velja za vse grafe, ki imajo manj vozlišč kot G.

(I1)⇒(I3): Naj bo $A \subseteq V$. Predpostavimo, da lahko graf $G'' = G[A]$ pobarvamo z $\omega(G'')$ barvami. Ker imamo največ $\alpha(G'')$ vozlišč dane barve, sledi $\omega(G'')\alpha(G'') \geq |A|$.

(I3)⇒(I1): Naj graf $G = (V, E)$ izpolnjuje pogoj (I3). Potem po indukciji vsak pravi induciran podgraf grafa G zadošča pogojem (I1), (I2) in (I3). Tako je dovolj pokazati enakost $\omega(G) = \chi(G)$.

Naj bo S neodvisna množica grafa $G = (V, E)$ in $G' = G[V - S]$. Če bi bila S taka, da bi veljalo $\omega(G') < \omega(G)$, potem bi lahko pobarvali vozlišča iz S z eno barvo in G' z $\omega(G) - 1$ drugimi barvami (po Trditvi 2.5). Dobili bi enakost $\omega(G) = \chi(G)$.

Predpostavimo, da za vsako neodvisno množico S grafa G obstaja klika $K(S)$ velikosti $\omega(G)$ v grafu $G[V - S]$. Naj bo $\mathcal{S}$ zbirka vseh neodvisnih množic grafa G. Za vsako množico $S \in \mathcal{S}$ velja $S \cap K(S) = \emptyset$. Za vsak $x_i \in V =: \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ naj bo h_i število klik $K(S)$, ki vsebujejo x_i. Naj bo $H = (X, F)$ graf, dobljen iz grafa G z multipliciranjem vsakega x_i s h_i.

Po eni strani imamo (po Lemi 2.4):

$$\omega(H)\alpha(H) \geq |X|.$$

Po drugi pa z uporabo preštevanja lahko pokažemo:

$$
\begin{aligned}
|X| &= \sum_{x_i \in V} h_i \\
&= \sum_{S \in \mathcal{S}} |K(S)| = \omega(G)|\mathcal{S}| && (2.6) \\
\omega(H) &\leq \omega(G) && (2.7) \\
\alpha(H) &= \max_{T \in \mathcal{S}} \sum_{x_i \in T} h_i && (2.8) \\
&= \max_{T \in \mathcal{S}} \left[\sum_{S \in \mathcal{S}} |T \cap K(S)| \right] && (2.9) \\
&\leq |\mathcal{S}| - 1. && (2.10)
\end{aligned}
$$

Razložimo še enačbe (2.6) – (2.10):

(2.6): Imejmo incidenčno matriko, katere vrstice so indeksirane glede na vozlišča $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in stolpci se ujemajo s klikami $K(S)$, za vsak $S \in \mathcal{S}$. Potem je h_i enak številu neničelnih elementov v vrstici i. Vrednost $|K(S)|$ je enaka številu neničelnih elemetov v ustrezajočem stolpcu; kar je po definiciji enako $\omega(G)$.

(2.7): Največ eno dodano vozlišče grafu G je lahko v kliki grafa H.

(2.8): Če ima α-neodvisna množica grafa H nekaj dodanih vozlišč vozlišču x_i, potem vsebuje vsa dodana vozlišča.

(2.9): Tukaj damo pozornost tistim vrsticam matrike iz (2.6), ki spadajo k elementom neodvisne množice T.

(2.10): $|T \cap K(S)| \leq 1$ in $|T \cap K(T)| = 0$.

Kar pomeni

$$
\omega(H)\alpha(H) \leq \omega(G)(|\mathcal{S}| - 1) < |X|,
$$

protislovje.

(I2) $\Longleftrightarrow$ (I3): Po do sedaj dokazanem, imamo naslednje ekvivalence: G zadošča (I2) $\Longleftrightarrow$ $\overline{G}$ zadošča (I1) $\Longleftrightarrow$ $\overline{G}$ zadošča (I3) $\Longleftrightarrow$ G zadošča (I3). □

Iz izreka sledita še dve posledici.

Posledica 2.7 (Izrek o popolnih grafih)**.** *Graf G je popoln, če in samo če je njegov komplement $\overline{G}$ popoln.*

Posledica 2.8. *Graf G je popoln, če in samo če je vsak graf H dobljen iz G z multipliciranjem vozlišč popoln.*

Algebraičen dokaz za drugo različico izreka je podal Gasparian leta 1996.

Izrek 2.9 (Gasparian [11])**.** *Graf G je popoln, če in samo če velja $\omega(H)\alpha(H) \geq |V(H)|$ za vsak induciran podgraf H grafa G.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ker je G popoln graf, velja $\omega(H) = \chi(H)$ za vsak induciran podgraf H grafa G. Naj bo H poljuben induciran podgraf grafa G. Vzemimo poljubno barvanje grafa H s $\chi(H)$ barvami. Največje število vozlišč, pobarvanih z isto barvo, je $\alpha(H)$. Torej je največje možno število vozlišč, ki so lahko pobarvana s $\chi(H)$ barvami, enako $\alpha(H)\chi(H)$. Sledi $\alpha(H)\chi(H) = \alpha(H)\omega(H) \geq |V(H)|$.

($\Leftarrow$) Dovolj je pokazati, da vsak minimalno nepopoln graf G zadostuje pogoju $|V(G)| \geq \alpha(G)\omega(G) + 1$. Predpostavimo lahko, da je $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definirajmo $\omega = \omega(G)$ in $\alpha = \alpha(G)$.

Najprej skonstruirajmo take neodvisne množice $S_0, S_1, \ldots, S_{\alpha\omega}$, da je vsako vozlišče pokrito z natanko α množic S_i.

Naj bo S_0 neodvisna množica v G velikosti α. Zaradi minimalnosti G-ja vemo, da je za vsak $v \in S_0$ graf $G-v$ popoln in zato $\chi(G-v) = \omega(G-v) \leq \omega$. Zaradi tega lahko množico $V \setminus \{v\}$ razbijemo na ω neodvisnih množic velikosti α za vsako vozlišče $v \in S_0$. Tako razbitje je enolično. Imamo α različnih vozlišč v S_0 in ω neodvisnih množic velikosti α v vsakem razbitju. Vse te α-neodvisne množice so različne. Skupaj s S_0 dobimo $\alpha\omega + 1$ neodvisnih množic z zgornjo lastnostjo.

Upoštevamo Trditev 2.5 in opazimo, da je $\omega(G \setminus S_i) = \omega$. Torej, za vsak $i = 0, 1, \ldots, \alpha\omega$ obstaja klika C_i, velikosti ω, da velja $C_i \cap S_i = \emptyset$. Naj bo $j \in \{0, 1, \ldots, \alpha\omega\}$. Klika C_i je velikosti ω in presek C_i z vsako neodvisno množico S_j ima največ eno vozlišče. Zato preseka $\alpha\omega$ množic S_j. Ker je $C_i \cap S_i = \emptyset$, imamo $|C_i \cap S_j| = 1$, če $i \neq j$.

Imejmo incidenčni matriki M in N velikosti $(\alpha\omega + 1) \times n$. Matrika M ima v vrsticah neodvisne množice S_i, matrika N pa klike C_i, kjer $i = 0, 1, 2, \ldots \alpha\omega$. V stolpcih imata obe vozlišča. Torej imata M in N samo vrednosti nič in ena. $M_{i,j} = 1 \iff j \in S_i$ in $N_{i,j} = 1 \iff j \in C_i$, za $i = 0, 1, \ldots, \alpha\omega$ in $j = 1, 2, \ldots, n$. Po zgoraj napisanem sledi $MN^\top = J - I$, kjer je J matrika samih enk, velikosti $(\alpha\omega+1) \times (\alpha\omega+1)$ in je I identična matrika, velikosti $(\alpha\omega+1) \times (\alpha\omega+1)$. Vse vrstice matrike $J - I$ so med seboj neodvisne, zaradi definicije J in I. Zato je rang matrike $J - I$ enak $\alpha\omega + 1$. Dobili smo $\alpha\omega + 1 = \mathit{rang}(J - I) = \mathit{rang}(MN^\top) \leq \min(\mathit{rang}(M), \mathit{rang}(N^\top)) \leq n$. $\square$

Poglavje 3

Poliederska karakterizacija popolnih grafov

V tem poglavju bomo pokazali izrek o poliederski karakterizaciji popolnih grafov, ki ga je podal Chvatál leta 1975. Izrek temelji na pojmu klične matrike grafa G, to je, matrike velikosti $k \times n$, kjer je k število maksimalnih klik v grafu G in n število vozlišč grafa G, matrika pa ima v vsaki vrstici enke v stolpcih, ki predstavljajo vozlišča ustrezne klike, in ničle sicer. Najprej si pripravimo podlago, da bomo lahko pokazali izrek.

Naj bo A matrika velikosti $m \times n$. Imejmo dva poliedra:

- $P(A) = \{x \,|\, Ax \leq 1, x \geq 0\}$,
- $P_I(A) =$ konveksna ogrinjača$(\{x \,|\, x \in P(A), x$ je celoštevilski vektor$\})$,

kjer x označuje vektor dolžine n, 1 označuje vektor samih enk, dolžine m. Neenakost dveh vektorjev pa je neenakost po komponentah: $a \leq b$, če in samo če je $a_i \leq b_i$ za vse i.

Definicija 3.1. Naj bo A matrika ničel in enk velikosti $m \times n$ z neničelnimi stolpci. Izpeljani graf imenujemo graf, katerega vozlišča $v_1, v_2, \ldots, v_n$ se ujemajo s stolpci matrike A. Vozlišči v_i in v_j sta povezani, če imata i-ti in j-ti stolpec enko v neki vrstici a_k matrike A.

Lema 3.2. *Naj bo G graf in A matrika ničel in enk z neničelnimi stolpci, katere izpeljani graf je enak grafu G. Potem je $x \in \mathbb{R}^n$ ekstrem poliedra $P_I(A)$, če in samo če je x karakteristični vektor neke neodvisne množice grafa G.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Če je x ekstrem $P_I(A)$, potem mora biti x celoštevilski vektor. Ker je matrika sestavljena samo iz ničel in enk, z neničelnimi stolpci, je $x \leq 1$. Torej je x karakteristični vektor neke množice vozlišč S. Predpostavimo, da obstajata vozlišči u in v iz S, ki sta povezani v grafu G. Sledi, da ima neka vrstica a_k matrike A vrednost 1 v stolpcu u in v. Sledi $a_k x \geq 2$, toda $Ax \leq 1$, protislovje. Torej mora biti S neodvisna množica.

($\Leftarrow$) Naj bo x karakteristični vektor neodvisne množice grafa G. Vektor x vsebuje samo ničle in enke, torej je celoštevilski in $x \in P_I(A)$. Zapišimo x kot konveksno kombinacijo ekstremov $\{b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(s)}\}$ poliedra $P_I(A)$, to je

$$x_k = \sum_{i=1}^{s} c^{(i)} b_k^{(i)}, \quad 1 = \sum_{i=1}^{s} c^{(i)}, \quad 0 \leq c^{(i)} \leq 1 \quad \text{za vse } i.$$

Če $x_k = 1$, potem za vsak j velja $c^{(j)} = 0$ ali $b_k^{(j)} = 1$. Res: Predpostavimo, da $c^{(j)} > 0$ in $b_k^{(j)} = 0$. Potem je $x_k = \sum_{i=1}^{s} c^{(i)} b_k^{(i)} = c^{(j)} b_k^{(j)} + \sum_{i \neq j} c^{(i)} b_k^{(i)} = 1$. Po predpostavki je $c^{(j)} b_k^{(j)} = 0$, za vsoto pa velja $\sum_{i \neq j} c^{(i)} b_k^{(i)} \leq \sum_{i \neq j} c^{(i)} = 1 - c^{(j)} < 1$. Pridemo do protislovja. Podobno se prepričamo, da velja sklep: Če $x_k = 0$, potem za vsak j velja $c^{(j)} = 0$ ali $b_k^{(j)} = 0$. Razporedimo in preštevilčimo $c^{(i)}$, če je potrebno, tako, da so $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(r)} > 0$ in $c^{(r+1)} = c^{(r+2)} = \ldots = c^{(s)} = 0$. Potem, če $x_k = 1 \Rightarrow b_k^{(j)} = 1$ za vsak $1 \leq j \leq r$ in, če $x_k = 0 \Rightarrow b_k^{(j)} = 0$ za vsak $1 \leq j \leq r$. Sledi, da $x = b^{(j)}$ za vse $1 \leq j \leq r$, torej $r = 1$ in $x = b^{(1)}$ je ekstrem poliedra $P_I(A)$. □

Za lažje razumevanje predstavimo Lemo 3.2 na primeru:

Imejmo graf $G = (V, E)$. $V = \{1, 2, 3\}$ in $E = \{\{1, 2\}\}$. Potrebujemo matriko, iz katere lahko izpeljemo graf G. Naj bo A klična matrika grafa G.

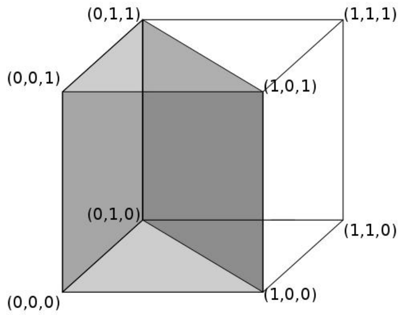
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$P(A)$ omejujejo naslednji pogoji:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_3 &\leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Osenčeni del poliedra na sliki **??** predstavlja $P(A)$. Opazimo, da $P_I(A) = P(A)$. Ekstremi poliedra $P_I(A)$ so naslednji vektorji: $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$. Neodvisne množice grafa G so naslednje množice: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}$. Vidimo, da ekstremi poliedra $P_I(A)$ sovpadajo s karakterističnimi vektorji neodvisnih množic grafa G.

Pri dokazu izreka o poliederski karakterizaciji popolnih grafov bomo uporabili rezultate iz linearnega programiranja Edmondsa in nekatere pojme iz linearnega programiranja.



Slika 3.1: Slika poliedra $P(A)$.

Lema 3.3 (Edmonds [9]). *Naj bosta S in T omejena poliedra, naj ima S končno število ekstremov. Tedaj velja*

$$S = T, \quad \text{če in samo če} \quad \max_{x \in S} c^\top x = \max_{x \in T} c^\top x,$$

za vsak celoštevilski vektor c.

Naj bodo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c, x \in \mathbb{R}^n$ in $b, y \in \mathbb{R}^m$.
Vsakemu linearnemu programu v kanonični obliki

$$\begin{aligned} \max c^\top x & \\ \text{pri pogojih } Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

lahko priredimo dualni linearni program

$$\begin{aligned} \min b^\top y & \\ \text{pri pogojih } A^\top y &\geq c \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Izrek 3.4 (Izrek o dualnosti linearnega programiranja). *Naj ima originalen linearni program optimalno rešitev. Potem ima tudi dualni linearni program optimalno rešitev. Za vsako optimalno rešitev x^* originalnega programa in vsako optimalno rešitev y^* dualnega programa velja $c^\top x^* = b^\top y^*$.*

Sedaj lahko dokažemo izrek o poliedrski karakterizaciji popolnih grafov.

Izrek 3.5 (Chvatál [4])**.** *Naj bo A klična matrika grafa G. Potem je G popoln, če in samo če velja $P_I(A) = P(A)$.*

Dokaz. ($\Leftarrow$) Naj bo A klična matrika grafa $G = (V, E)$, $U \subseteq V(G)$, $G' = G[U]$ podgraf grafa G, induciran z množico U, in u karakteristični vektor množice U. Predpostavimo, da velja enakost $P_I(A) = P(A)$. Potem imamo naslednje enakosti

$$\alpha(G') = \max_{x \in P_I(A)} u^\top x = \max_{Ax \leq 1, x \geq 0} u^\top x = \min_{A^\top y \geq u, y \geq 0} y^\top 1.$$

Prva enakost velja, ker po Lemi 3.2 polieder $P_I(A)$ doseže ekstrem, če je x karakteristični vektor neke neodvisne množice grafa G; $\max_{x \in P_I(A)} u^\top x = \max\{u^\top x \quad : \quad x \text{ karakteristični vektor neke neodvisne množice grafa } G\}$. Vrednost $u^\top x$ na desni strani zgornje enakosti je enaka številu vozlišč množice U, ki so vsebovana v neodvisni množici s karakterističnim vektorjem x. Največja taka vrednost je torej ravno neodvisnostno število grafa G', saj je G' induciran z množico U. Druga enakost sledi iz Leme 3.3, če vzamemo $c = u$. Tretja pa iz izreka o dualnosti linearnega programiranja.

Izberimo tak $y \geq 0$, da je $\sum y_i = \alpha(G')$ in $A^\top y \geq u$. Naj a^j označuje j-ti stolpec matrike A. Potem imamo

$$|U| = \sum_{j \in U} u_j \leq \sum_{j \in U} y^\top a^j = y^\top \sum_{j \in U} a^j \leq y^\top(\omega(G')1) = \alpha(G')\omega(G').$$

Na levi strani druge neenakosti seštejemo stolpce klične matrike A. Dobimo vektor, ki po komponentah predstavlja moč posamezne klike v grafu G' v vrstici klične matrike A. Ta vektor pa je manjši ali enak od vektorja na desni strani druge neenakosti, kjer na vsaki komponenti zapišemo klično število grafa G'. Po izreku 2.6 je G popoln.

($\Rightarrow$) Najprej definirajmo: $\alpha_c(G) = \max\{\sum_{i \in S} c_i \mid S \text{ je neodvisna množica grafa } G\}$ in $\kappa_c(G)$ predstavlja minimalno pokritje s klikami grafa G tako, da je vozlišče i pokrito c_i krat.

Predpostavimo, da je G popoln. Za poljuben celoštevilski vektor $c \in \mathbb{Z}^{|V(G)|}$ naredimo graf H z multipliciranjem i-tega vozlišča grafa G s faktorjem $\max(0, c_i)$, za vsak i. Po Lemi 2.3 je graf H popoln. Imamo naslednje:

$$
\begin{aligned}
\alpha(H) &= \alpha_c(G) & (3.1)\\
&= \max_{x \in P_I(A)} c^\top x & (3.2)\\
&\leq \max_{x \in P(A)} c^\top x & (3.3)\\
&= \min_{A^\top y \geq c, y \geq 0} y^\top 1 & (3.4)\\
&\leq \min_{A^\top y \geq c, \text{nenegativen celoštevilski vektor } y} y^\top 1 & (3.5)\\
&= \kappa_c(G) & (3.6)\\
&= \kappa(H). & (3.7)
\end{aligned}
$$

Poglejmo še enakosti in neenakosti (3.1) – (3.7):

(3.1): Direktno iz definicije $\alpha_c(G)$ in iz dejstva, da je graf H dobljen iz grafa G z multipliciranjem vozlišč glede na vektor c.

(3.2): Maksimum je vselej dosežen v neki ekstremni točki poliedra $P(A)$. Po Lemi 3.2 taka točka ustreza karakterističnemu vektorju neke neodvisne množice.

(3.3): $P_I(A) \subseteq P(A)$.

(3.4): Izrek o dualnosti.

(3.5): Dodatna nenegativna celoštevilska omejitev vektorja y.

(3.6): Omejitev $A^\top y \geq c$, kjer je y nenegativen celoštevilski vektor, podaja pokritje velikosti $\kappa_c(G)$.

(3.7): Vsaka klika grafa H ustreza kliki iz grafa G, torej $\kappa(H) \geq \kappa_c(G)$.

Če je vozlišče i grafa G pokrito s c_i klikami, potem obstaja c_i klik v grafu H. Vsaka pokriva različno kopijo vozlišča i, torej $\kappa_c(G) \geq \kappa(H)$.

Sedaj iz enakosti in neenakosti (3.1) – (3.7) sledi $\alpha(H) = \kappa(H)$. Torej

$$\max_{x \in P_I(A)} c^\top x = \max_{x \in P(A)} c^\top x$$

in, ker je bil c poljuben, po Lemi 3.3 velja enakost $P_I(A) = P(A)$. $\square$

Poglavje 4

Štirje osnovni razredi popolnih grafov

Za števirne razrede grafov se da pokazati, da so popolni. Že Berge je opazil, da sta klično število in kromatično število enaka v dvodelnih grafih, njihovih povezavnih grafih, komplementih dvodelnih grafov in komplementih povezavnih grafov. V tem poglavju so predstavljeni ti štirje razredi popolnih grafov. Popolnosti grafov iz omenjenih štirih razredov preverimo brez uporabe izreka o popolnih grafih in krepkega izreka o popolnih grafih.

4.1 Dvodelni grafi

Definicija 4.1. Graf $G = (V, E)$ je dvodelen, če lahko množico vozlišč $V(G)$ razbijemo na dve disjunktni množici $V_1(G)$ in $V_2(G)$ tako, da ima vsaka povezava iz $E(G)$ eno krajišče v $V_1(G)$ in drugo v $V_2(G)$.

Izrek 4.2. *V vsakem dvodelnem grafu velja $\omega(H) = \chi(H)$, za vsak induciran podgraf H grafa G.*

Dokaz. Naj bo G poljuben dvodelen graf z vsaj eno povezavo. Ker je graf dvodelen, lahko množico vozlišč razbijemo na dve taki disjunktni množici vozlišč V_1 in V_2, da ima vsaka povezava eno krajišče v V_1 in drugo v V_2. Tako lahko V_1 pobarvamo z eno barvo in V_2 z drugo. Torej je $\chi(G) = 2$. Spet, ker ima vsaka povezava krajišči v obeh množicah in sta ti disjunktni, graf ne vsebuje polnih grafov na več kot dveh točkah in $\omega(G) = 2$. (Če je G graf brez povezav, velja $\omega(G) = 1$ in $\chi(G) = 1$.) Vsak induciran podgraf H grafa G je dvodelen $\Rightarrow \omega(H) = \chi(H)$. Torej je G popoln. $\square$

4.2 Komplementi dvodelnih grafov

Naj bo G dvodelen graf in $\overline{G}$ njegov komplement. Kromatično in klično število grafa $\overline{G}$ lahko izrazimo s parametri grafa G.

Trditev 4.3. *Za vsak dvodelen graf G je $\chi(\overline{G})$ velikost najmanjše take podmnožice povezav in vozlišč, ki pokrijejo vsa vozlišča v G.*

Dokaz. Ker je G dvodelen graf, je $\omega(G) \leq 2$. Torej bo vsaka neodvisna množica vozlišč grafa $\overline{G}$ sestavljena iz največ dveh vozlišč. Vozlišča iz vsake neodvisne množice bodo pobarvana z enako barvo in tako je vrednost $\chi(\overline{G})$ enaka velikost najmanjše podmnožice povezav in vozlišč, ki pokrijejo vsa vozlišča v G. □

Trditev 4.4. *Za vsak graf G je $\omega(\overline{G})$ velikost največje neodvisne množice v grafu G.*

Dokaz. Po definiciji komplementa grafa G. □

Za dokaz enakosti $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$ bomo potrebovali Königov izrek o maksimalnem prirejanju in minimalnem pokritju v dvodelnih grafih. Najprej definirajno pokritje in prirejanje v grafu ter alternirajočo pot.

Definicija 4.5. Naj bo $G = (V, E)$ graf. Množica povezav $M \subseteq E(G)$ je prirejanje v grafu G, če noben par povezav iz M nima skupnega vozlišča. Maksimalno prirejanje je prirejanje največje možne moči.

Definicija 4.6. Naj bo $G = (V, E)$ graf. Množica vozlišč $C \subseteq V(G)$ je pokritje v grafu G, če ima vsaka povezava iz $E(G)$ vsaj eno krajišče v C. Minimalno pokritje je pokritje najmanjše možne moči.

Definicija 4.7. Naj bo M prirejanje v grafu $G = (V, E)$. Pot P v grafu G je M-alternirajoča, če

- je lihe dolžine,
- končni točki nista v M,
- povezave alternirajoče pripadajo M.

Izrek 4.8 (König [17])**.** *V vsakem dvodelnem grafu je moč maksimalnega prirejanja enaka moči minimalnega pokritja.*

Dokaz. (De Caen [8]). Naj bo G dvodelen graf in naj bosta $\nu(G)$ moč maksimalnega prirejanja ter $\tau(G)$ moč minimalnega pokritja v grafu G. Pokažimo, da velja enakost $\nu(G) = \tau(G)$.

Ker vsaki dve povezavi v poljubnem prirejanju vsebujeta različna vozlišča, za poljubno pokritje C in poljubno prirejanje M velja neenakost $|C| \geq |M|$. Posledično: $\nu(G) \leq \tau(G)$.

Če je graf G brez povezav, potem je $\nu(G) = \tau(G) = 0$ in enakost velja. Predpostavimo, da ima graf G vsaj eno povezavo. Pokažimo, da graf G vsebuje vozlišče u, za katerega velja:

$$\text{vozlišče } u \text{ v } G \text{ je pokrito z vsakim maksimalnim prirejanjem grafa } G. \tag{4.1}$$

Dokazujemo s protislovjem. Naj bo $e = uv$ povezava v grafu G, naj bo M maksimalno pokritje, ki ne vsebuje vozlišč u in naj bo N maksimalno pokritje brez v. Naj bo P komponenta $M \cup N$, ki vsebuje u. Ker povezava e ni vsebovana v M in N, je P pot s končnim vozliščem u. Ker ima M maksimalno velikost, P ni M-alternirajoča pot. Torej je P sode dolžine in ne vsebuje vozlišča v. V nasprotnem primeru bi se P končala v v, kar bi bilo v protislovju z dvodelnostjo grafa G. Tako bi $P \cup e$ tvorila N-alternirajočo pot. To je protislovje, saj je N maksimalne velikosti. S tem smo utemeljili (4.1).

Iz (4.1) vidimo, da za graf $G' = G - u$ velja $\nu(G') = \nu(G) - 1$. Po indukciji ima G' pokritje C velikosti $\nu(G')$. Potem je $C \cup \{u\}$ pokritje velikosti $\nu(G') + 1 = \nu(G)$. □

Preden pokažemo enakost $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$, dokažimo še naslednjo trditev.

Trditev 4.9. *Naj bo $G = (V, E)$ graf. Množica $S \subseteq V$ je neodvisna množica grafa G, če in samo če je $V \setminus S$ pokritje grafa G.*

Dokaz. Naj bo $G = (V, E)$ graf.

($\Rightarrow$) Naj bo S poljubna neodvisna množica grafa G. Ker je S neodvisna množica, vsebuje največ eno od krajišč vsake povezave $uv \in E(G)$. Torej je eno od krajišč vsebovano v množici vozlišč $V \setminus S$. Ker ima vsaka povezava vsaj eno krajišče v $V \setminus S$, mora biti množica vozlišč $V \setminus S$ pokritje grafa G.

($\Leftarrow$) Naj bo $S \subseteq V$ taka množica, da je njen komplement $V \setminus S$ pokritje grafa G. Če sta kateri izmed vozlišč u in v iz množice S povezani, potem nobeno od vozlišč u in v ni vsebovano v $V \setminus S$, kar je v protislovju s predpostavko, da je $V \setminus S$ pokritje. Torej nobeni vozlišč v S ne moreta biti povezani in je S neodvisna množica grafa G. □

Izrek 4.10. *Komplement dvodelnega grafa je popoln graf.*

Dokaz. Naj bo $G = (V, E)$ dvodelen graf, $|V(G)| = n$ in naj bo C minimalno pokritje grafa G.

Pokažimo enakost $\kappa(G) = \alpha(G)$. V splošnem velja $\alpha(G) \leq \kappa(G)$, saj je vsako vozlišče poljubne maksimalne neodvisne množice vsebovano v vsaj eni kliki poljubnega minimalnega pokritja s klikami.

Pokažimo, da velja še $\kappa(G) \leq \alpha(G)$. Po Trditvi 4.9 velja $\alpha(G) = n - |C|$. Po Izreku 4.8 sledi $\alpha(G) = n - |C| = n - |M|$, kjer je M maksimalno prirejanje v grafu G.

Imejmo pokritje s klikami grafa G sestavljeno iz klik velikosti 2, ki se ujemajo z vsako povezavo v maksimalnem prirejanju M in klik velikosti 1, ki sovpadajo s preostalimi morebitnimi vozlišči. Število nepokritih vozlišč s povezavami maksimalnega prirejanja M je $n - 2|M|$. Število klik v pokritju je enako $|M| + (n - 2|M|) = n - |M|$. Sledi $\kappa(G) \leq n - |M| = n - |C| = \alpha(G)$. □

4.3 Povezavni grafi dvodelnih grafov

Definicija 4.11. Povezavni graf $L(G)$ grafa G je graf z množico vozlišč $V(L(G)) = E(G)$, kjer sta vozlišči $e, f \in E(G)$ povezani, če je $e \neq f$ in imata skupno krajišče v G.

Z oznako $K_{1,k} = (V_1 \cup V_2, E)$ bomo označili poln dvodelen graf, kjer sta množici vozlišč V_1 in V_2 disjunktni, moč množice V_1 je 1, moč množice V_2 je k in vozlišče iz V_1 je povezano z vsakim vozliščem iz množice V_2.

Naj bo G dvodelen graf in $L(G)$ njegov povezavni graf. Tudi v tem primeru lahko kromatično in klično število povezavnega grafa $L(G)$ opišemo s pomočjo grafa G.

Trditev 4.12. *Za vsak graf G je $\chi(L(G))$ kromatični indeks grafa G.*

Dokaz. Enakost velja iz definicije povezavnega grafa, saj postanejo povezave grafa G vozlišča povezavnega grafa $L(G)$. $\square$

Trditev 4.13. *Za vsak dvodelen graf G je $\omega(L(G))$ največja stopnja vozlišča v grafu G.*

Dokaz. Povezave s skupnim krajiščem v grafu G tvorijo podgraf oblike $K_{1,k}$ in se ujemajo s paroma povezanimi vozlišči grafa $L(G)$, torej klikami grafa $L(G)$. Ker je graf G dvodelen, je $\omega(G) \leq 2$, od koder sledi, da je vsaka klika v $L(G)$ porojena iz podgrafa oblike $K_{1,k}$ v grafu G. Tako velja $\omega(L(G)) = \Delta(G)$. $\square$

Izrek 4.14 (König [16])**.** *V vsakem dvodelnem grafu je kromatični indeks enak največji stopnji vozlišča grafa.*

Dokaz. (König [16], Skolem [21]). Pokazati želimo enakost $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Ker morajo biti vse povezave s skupnim vozliščem pobarvane z različno barvo, velja $\Delta(G) \leq \chi'(G)$.

Sedaj naj bodo $M_1, M_2, \ldots, M_{\Delta(G)}$ disjunktna prirejanja, ki pokrivajo maksimalno število povezav. Če so pokrite vse povezave, smo končali. Predpostavimo, da povezava $e = uv$ ni pokrita. Ker je stopnja vozlišča u manjša ali enaka $\Delta(G)$, neka množica M_i ne pokrije u-ja. Podobno neka množica M_j ne pokrije vozlišča v. Če je $i = j$, lahko M_i povečamo v $M_i \cup \{e\}$. Če je $i \neq j$, naredimo z unijo $M_i \cup M_j \cup \{e\}$ dvodelen graf, ki ima maksimalno stopnjo vozlišča največ 2. Torej obstajata taki prirejanji M in N, da $M_i \cup M_j \cup \{e\} = M \cup N$. Z zamenjavo M_i in M_j z M in N povečamo število pokritih povezav, kar je v protislovju s predpostavko. $\square$

Izrek 4.15. *Povezavni graf dvodelnega grafa je popoln graf.*

Dokaz. Popolnost nam zagotavlja Königov izrek 4.14. $\square$

4.4 Komplementi povezavnih grafov dvodelnih grafov

Naj bo G dvodelen graf in $\overline{L(G)}$ komplement njegovega povezavnega grafa. Spet lahko kromatično in klično število $\overline{L(G)}$ izrazimo s pomočjo grafa G.

Trditev 4.16. *Za vsak dvodelen graf G je $\omega\big(\overline{L(G)}\big)$ velikost minimalnega pokritja grafa G.*

Dokaz. Pokritje grafa G si lahko predstavljamo kot particijo množice povezav grafa G tako, da za vozlišče v iz pokritja vzamemo vse povezave, ki gredo ven iz vozlišča v. Torej razbijemo množico $E(G)$ na grafe oblike $K_{1,k}$. Tako dobimo pokritje s klikami v povezavnem grafu $L(G)$. Sledi $\kappa(L(G)) \leq \tau(G)$. Podobno lahko pokažemo, da velja tudi $\tau(G) \leq \kappa(L(G))$. Vemo pa, da velja $\kappa(L(G)) = \chi\big(\overline{L(G)}\big)$. $\square$

Trditev 4.17. *Za vsak dvodelen graf G je $\omega\big(\overline{L(G)}\big)$ velikost maksimalnega prirejanja v grafu G.*

Dokaz. Prirejanje v grafu G se ujema z neodvisno množico v povezavnem grafu $L(G)$. Z operacijo komplementa pa se neodvisna množica grafa $L(G)$ ujema s kliko v grafu $\overline{L(G)}$. $\square$

Izrek 4.18. *Komplement povezavnega grafa dvodelnega grafa je popoln graf.*

Dokaz. Po Königovem izreku 4.8 o minimalnem prirejanju in maksimalnem pokritju v dvodelnem grafu imamo enakost $\chi\big(\overline{L(G)}\big) = \omega\big(\overline{L(G)}\big)$. $\square$

Poglavje 5

Krepki izrek o popolnih grafih

V tem poglavju bomo na kratko predstavili, kako so Chudnovsky, Robertson, Seymour in Thomas [7] dokazali Bergeovo drugo domnevo o popolnih grafih. Najprej zapišimo krepki izrek o popolnih grafih.

Izrek 5.1 (Chudnovsky idr. [7])**.** *Graf je popoln, če in samo če ne vsebuje lihih ciklov dolžine pet ali več ali njihovih komplementov kot inducirane podgrafe.*

Izrek lahko ekvivalentno zapišemo tudi v naslednji obliki:

> Če je graf G nepopoln, potem G ali njegov komplement $\overline{G}$ vsebuje lih cikel dolžine vsaj pet kot induciran podgraf.

Kot smo že omenili, je zgornji izrek kot domnevo zapisal Berge okrog leta 1960. Kar štirideset let je bil to odprt problem. Leta 2002 so ga rešili Chudnovsky, Robertson, Seymour in Thomas. Dokaz je zahteven in obsega okrog 150 strani. Temelji na razporeditvi grafov v posamezne razrede. Popoln graf ali pripada enemu izmed štirih osnovnih razredov popolnih grafov, ali pa vsebuje strukturo, ki je minimalno nepopolni graf ne more imeti.

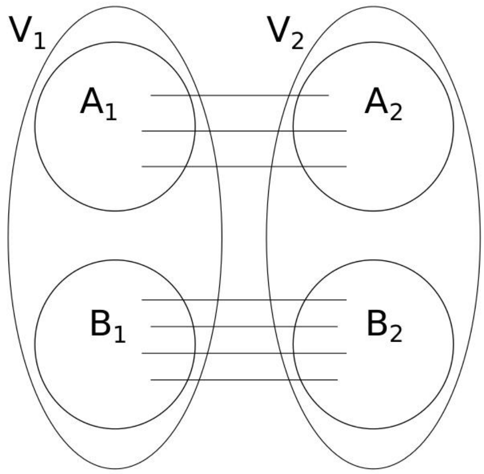
Osnovni razredi popolnih grafov:

- dvodelni grafi,
- komplementi dvodelnih grafov,
- povezavni grafi dvodelnih grafov,
- komplementi povezavnih grafov dvodelnih grafov.

Za naslednje strukture so Chudnovsky, Robertson, Seymour in Thomas pokazali, da se ne morejo pojaviti v minimalno nepopolnih grafih:

- 2-spoj

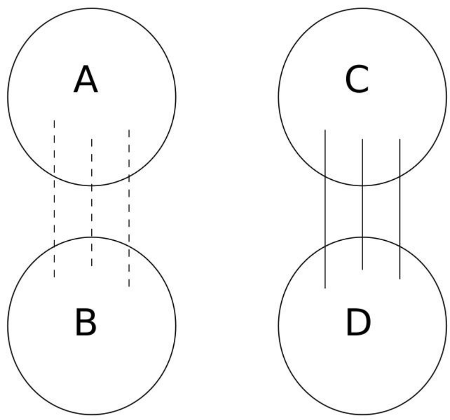
  Naj bo $G = (V, E)$ graf. 2-spoj v grafu G je particija množice vozlišč $V(G)$ na množici V_1 in V_2, da za vsak $i = 1, 2$ velja $|V_i| \geq 3$ in V_i vsebuje disjunktni neprazni podmnožici A_i, B_i z lastnostjo, da za vsaka $v_1 \in V_1$ in $v_2 \in V_2$ velja: v_1 in v_2 sta povezani natanko tedaj, ko $v_1 \in A_1$, $v_2 \in A_2$ ali $v_1 \in B_1$, $v_2 \in B_2$.



Slika 5.1: Abstraktna slika 2-spoja v grafu. Polne črte predstavljajo vse možne povezave med množicama.

- poševna particija

  Poševna particija grafa $G = (V, E)$ je tako razbitje množice vozlišč $V(G)$ na množici V_1 in V_2, da sta inducirana podgrafa $G[V_1]$ in $\overline{G}[V_2]$ nepovezana.



Slika 5.2: Abstraktna slika poševne particije v grafu. Polne črte predstavljajo vse možne povezave med množicama. Črtkane črte pomenijo, da med množicama ni nobene povezave.

- 2-spoj v komplementu grafa.

Chudnovsky, Robertson, Seymour in Thomas so pokazali naslednji izrek, iz katerega sledi krepki izrek o popolnih grafih, ki implicira izrek o popolnih grafih.

Izrek 5.2 (Chudnovsky idr. [7]). *Naj bo G graf, ki ne vsebuje lihih ciklov dolžine vsaj pet in njihovih komplementov kot inducirane podgrafe. Potem G spada v enega izmed štirih osnovnih razredov popolnih grafov ali pa ima G 2-spoj ali poševno particijo ali pa ima njegov komplement 2-spoj.*

Poglavje 6

Zaključek

V nalogi smo predstavili razred popolnih grafov in obravnavali nekatere njihove lastnosti. Pokazali smo izrek o popolnih grafih, ki pravi, da je graf popoln natanko tedaj, ko je njegov komplement popoln. Zapisali smo tudi dva dokaza tega izreka. Popolne grafe smo karakterizirali s pomočjo poliedrske kombinatorike. Če imamo matriko A samih ničel in enk, ki ne vsebuje neničelnih stolpcev, potem lahko iz nje izpeljemo graf G. Poliedra $P_I(A)$ in $P(A)$, kot sta definirana v tretjem poglavju, sta enaka natanko tedaj, ko je izpeljani graf G matrike A popoln. Predstavili smo štiri osnovne razrede popolnih grafov in brez uporabe izreka o popolnih grafih in krepkega izreka o popolnih grafih pokazali, da so res popolni. To so dvodelni grafi, povezavni grafi dvodelnih grafov, komplementi dvodelnih grafov in komplementi povezavnih grafov dvodelnih grafov. Na kratko smo še skicirali dokaz krepkega izreka o popolnih grafih.

Za konec pa omenimo še nekaj znanih rezultatov o popolnih grafih. Desetletja je bil odprt problem, ali je ugotavljanje, ali je poljuben graf popoln, NP-težek problem. Kar je pomenilo, da še ni bilo poznanega algoritma, ki bi pokazal, ali je poljuben graf popoln, v polinomskem času. Lovász je leta 1986 ugibal, da bi tak algoritem lahko obstajal. Izkazalo se je, da je pravilno domneval. Pred nedavnim sta bila predstavljena dva algoritma, ki poiščeta popolne grafe v polinomskem času. Leta 2002 so enega objavili Chudnovsky, Liu, Seymour, Vušković in Cornuéjols [6], drugega pa sta istočasno razvila Chudnovsky in Seymour. Glede nato, da krepki izrek o popolnih grafih 5.1 temelji na dekompoziciji grafov, se zdi, da bi lahko na podlagi izreka izpeljali tak algoritem. Preprosto bi testirali, če ima poljuben graf strukturo, opisano v izreku. Izkazalo se je, da to ne drži, in kot je Seymour [20] zapisal, so bile največji problem poševne particije. Tako je bil njihov algoritem za prepoznavanje popolnih grafov razvit neodvisno od dokaza krepkega izreka o popolnih grafih.

Razred popolnih grafov je zanimiv tudi zato, ker so nekateri problemi, kot na primer iskanje optimalnega barvanja, problem neodvisne množice v poljubnem grafu, v splošnem NP-težki, v popolnih grafih pa so rešljivi v polinomskem času. Leta 1981 so Grötschel, Lovász in Schrijver [14] predstavili algoritem, ki poišče neodvisnostno število $\alpha(G)$ popolnega grafa v polinomskem času.

Posledično lahko v vsakem popolnem grafu G v polinomskem času izračunamo tudi:

- moč najmanjšega pokritja s klikami $\kappa(G) = \alpha(G)$,
- kromatično število $\chi(G) = \kappa(\overline{G})$ in
- klično število $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.

Algoritem temelji na elipsoidni metodi za reševanje problemov semidefinitnega programiranja in upošteva zgornjo mejo Shannonove kapacitete grafov. Algoritmi, ki temeljijo na elipsoidni metodi, so bolj teoretično naravnani in s praktičnega vidika neučinkoviti. Tako še vedno obstaja motivacija za iskanje učinkovitejšega algoritma, uporabnega tudi v praksi, ki bi kombinatorično izračunal zgoraj naštete invariante v polinomskem času.

Literatura

[1] C. Berge, Farbung von Graphen, deren sämtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind, *Wissenschaftliche Zeitschrift der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe* 10 (1961), 114–115.

[2] T. Bohman, R. Holzman, A nontrivial lower bound on the Shannon capacities of the complements of odd cycles, *IEEE Transactions on Information Theory* 49 (2003), 721–722.

[3] V. Chvátal, Claude Berge: 5.5.1926 – 30.6.2002, `http://users.encs.concordia.ca/~chvatal/perfect/claude2.pdf`, (7.6.2012).

[4] V. Chvátal, On certain polytopes associated with graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 18 (1975), 138–154.

[5] M. Chudnovsky, G. Cornuéjols, X. Liu, P.D. Seymour, K. Vušković, Recognizing Berge Graphs, *Combinatorica* 25 (2005), 143–186.

[6] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. D. Seymour, R. Thomas, Progress on Perfect Graphs, *Mathematical Programming, Series B* 97 (2003), 405–422.

[7] M. Chudnovsky, N. Robertson, P.D. Seymour, R. Thomas, The strong perfect graph theorem, *Annals of Mathematics* 164 (2006), 51–229.

[8] D. De Caen, On a theorem of König on bipartite graphs, *Journal of Combinatorics, Information and System Sciences* 13 (1988), 127.

[9] J. Edmonds, Maximum matching and a polyhedron with $0,1$-vertices, *Journal of Research National Bureau of Standards Section B* 69 (1965), 125–130.

[10] D. R. Fulkerson, Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra, *Mathematical Programming* 1 (1971), 168–194.

[11] G. S. Gasparian, Minimal imperfect graphs: a simple approach, *Combinatorica* 16 (1996), 209–212.

[12] M. C. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs, Second Edition*, Elsevier B. V., 2004.

[13] R. L. Graham, M. Grötschel, L. Lovász, *Handbook of Combinatorics, Volume 1*, Elsevier Science B.V., 1995.

[14] M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver, Polynomial algorithms for Perfect Graphs, *Annals of Discrete Mathematics* 21 (1984), 325–356.

[15] S. Hougardy, Classes of Perfect Graphs, *Discrete Mathematics* 306 (2006), 2529–2571.

[16] D. König, Graphok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok elméletére, *Matematikai és Természettudományi Értesitő* 34 (1916), 221–229.

[17] D. König, Graphok és matrixok, *Matematikai és Fizikai Lapok* 38 (1931), 116–119.

[18] L. Lovász, A characterization of perfect graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 13 (1972), 95–98.

[19] A. Schrijver, *Combinatorial optimization, Polyhedra and Efficiency*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2004.

[20] P. Seymour, How the proof of the strong perfect graph conjecture was found, `http://perso.ens-lyon.fr/eric.thierry/Graphes2010/howtheperfect.pdf`, (28.5.2012).

[21] Th. Skolem, *Gruppierungen. Kombinatorische Reziprozitäten. Paarsysteme, in: E. Netto, Lehrbuch der Combinatorik, Zweite Auflage*, Teubner, Leipzig, 1927.