UNIVERZA NA PRIMORSKEM
Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

Matematika – 1. stopnja

Olga Kaliada

Trije klasični grški problemi

Zaključna naloga

Mentor: doc. dr. Martin Milanič
Somentor: dr. Marjan Jerman

Koper, september 2012

UNIVERSITY OF PRIMORSKA
Faculty of mathematics, Natural Scientis and Information Technologies

Mathematics – 1^{st} degree

Olga Kaliada

Three classical Greek problems

Final project paper

Supervisor: Martin Milanič, PhD
Co–supervisor: Marjan Jerman, PhD

Koper, september 2012

Povzetek

V zaključni nalogi z naslovom ”Trije klasični grški problemi” bom pokazala, da se z neoznačenim ravnilom in s šestilom ne da rešiti podvojitve kocke, kvadrature kroga in trisekcije kota.

Podvojitev kocke je znan konstrukcijski problem iz klasične geometrije. Gre za vprašanje, kako s šestilom in z neoznačenim ravnilom konstruirati rob kocke, ki ima dvakrat tolikšno prostornino kot dana kocka (kocka z danim robom).

Problem *kvadrature kroga* je prav tako znan problem klasične geometrije, pri katerem se vprašamo, kako konstruirati kvadrat, ki ima enako ploščino kot dani krog.

Pri problemu *trisekcije kota* gre za vprašanje, kako dani kot razdeliti na tri skladne dele samo s šestilom in z neoznačenim ravnilom.

Zaključna naloga bo razdeljena na štiri poglavija, in sicer:

1. Uvod.
2. Opis začetkov problemov in načinov, s katerimi so se jih lotili stari Grki.
3. Dokaz s pomočjo teorije polj, da konstrukcija podvojitve kocke, kvadrature kroga in trisekcije kota z ravnilom in s šestilom ni mogoča.
4. Zaključek.

Math. Subj. Class. (2010): 05C78, 68W20, 68W25

Ključne besede: podvojitev kocke, kvadratura kroga, trisekcija kota.

Abstract

In the final thesis titled "Three Greek classical problems" I will show that doubling the cube, squaring the circle and trisecting an angle cannot be constructed using a straight edge and compass only.

Doubling the Cube is a known construction problem from classic geometry. Given a cube, construct by means of straight edge and compass only, a cube with double the volume.

Squaring the Circle is also a known problem of classic geometry where the question is Given a circle, can we construct by means of straight edge and compass only, a square with area same as that of the circle.

Trisecting an Angle concerns of an angle equal to one-third of a given arbitrary angle, using only a straight edge and a compass.

The thesis will be divided into four chapters:

1. Introduction.
2. Description of the history behind the problems and the various attempts on solving them by the ancient Greek.
3. Proof using field theory that the constructions Trisection an Angle, Doubling the Cube and Squaring the Circle are impossible.
4. Conclusion.

Math. Subj. Class. (2010): 05C78, 68W20, 68W25

Keywords: doubling the cube, squaring the circle, trisecting an angle.

Zahvala

Zahvaljujem se mentorju, doc. dr. Martinu Milaniču in somentorju, dr. Marjanu Jermanu za pomoč pri oblikovanju ter izdelavi zaključne naloge. Zahvala gre tudi mojima staršema, ki sta mi omogočila življenje in izobraževanje v Sloveniji. Njima, moji sestri Anastassiji in fantu Aleksandru se zahvaljujem za vso podporo, ki sem je bila deležna za časa študija in pri pisanju zaključne naloge. Zahvalila bi se tudi ostalim predavateljem in asistentom UP FAMNIT za vse znanje in izkušnje, ki sem jih od njih predobila za časa študija. Verjamem, da brez takih lepih odnosov, kot smo jih imeli na fakulteti, študij ne bi bil tako zanimiv in poln lepih spominov na študentska leta.

Kazalo

Slike

Poglavje 1

Uvod

"Problemi so srce matematike", je nekoč izjavil Paul Halmos. Seveda si bolj zapomnimo tiste probleme, ki jih je težko rešiti. Nekatere so reševali desetletja in stoletja, nekatere pa tisočletja. Nekaterih pa seveda sploh še niso rešili.

Do obdobja Grkov (600 pr. n. št.) je bila matematika pretežno empirična znanost. Stari Grki so si prvi - zavedajoč se, kaj s tem počno - postavili nalogo, da vse prejšnje in vse nove matematične dosežke zberejo ter povežejo v skladen in celovit sistem, znotraj katerega bosta dokazana vsak izrek in vsaka "formula", torej bosta logično izpeljana kot nujna posledica nekaterih primarnih, temeljnih ter neizpodbitnih izhodišč.

Starogrški matematiki so konstrukcije z ravnilom in s šestilom zelo spoštovali, saj so imeli samo tovrstne konstrukcije za res točne. Zato so poskušali rešiti čim več geometrijskih problemov s tema orodjema. Starogrški matematiki so nam zapustili tudi tri naloge, ki jih z ravnilom in s šestilom niso znali konstruirati. Te naloge so: konstrukcija podvojitve kocke, kvadratura kroga in trisekcija kota. Šele v 19. stoletju so matematiki dokazali, da se teh treh nalog dejansko ne da rešiti samo z ravnilom in s šestilom ter problem reducirali na algebraični problem konstruktibilnih števil [39].

Zato so tudi cilji zaključne naloge, pokazat s pomočjo moderne matematike, da se s šestilom in z ravnilom ne da konstruirati nove stranice kocke, ki bi imela dvojno prostornino kot dana kocka; kvadrata, bi imel enako ploščino kot dani krog in trisekcije kota.

Poglavje 2

Začetki problemov in njihove rešitve

Natančen začetek grškega razmišljanja o matematiki ni znan. Starogrška matematika je nastala v atmosferi jonskega racionalizma – to je bila matematika, ki ni postavljala samo orientalskega vprašanja "kako?" pač pa tudi moderno, znanstveno vprašanje "zakaj?". Grki so bili strogi matematični puristi. Prevladujoča oblika grške matematike je bila geometrija, čeprav so Grki preučevali tudi lastnosti števil, teorijo razmerij, astronomijo in mehaniko. Rešitev geometrijske naloge so priznali le, če je bila konstrukcija izvedena z ravnilom in s šestilom.

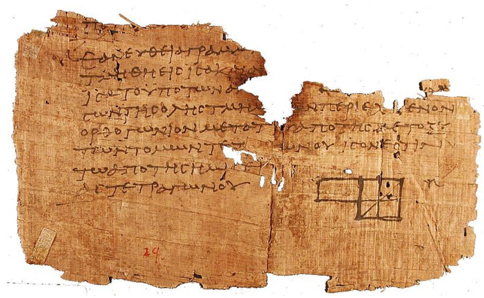
Za grško matematiko je značilno, da je bila edina, ki je v središče postavila logično sklepanje in dokaz. V zgodovinskih zapisih lahko preberemo, da prvi matematični dokazi izvirajo iz časov okoli leta 600 pr. n. št., grško matematično izročilo pa je ostalo živo in se je razvijalo vse do leta 400 pr. n. št. Ravno grška geometrija je največ prispevala k iskanju rešitev vseh treh problemov. Pri iskanju rešitev je bilo odkritih tudi mnogo drugih stvari v matematiki, kot so enačbe, stožnice in algebraične krivulje[14].

Veliki grški matematiki so bili Tales, Pitagora, Hipokrat, Apolonij, Evklid, Arhimed, Papos in Diofant. Izumili so matematične dokaze, torej metode, s katerimi so utemeljili čudovite lastnosti števil in geometrijskih likov. Njihova odkritja veljajo še danes [8].

Poleg manjših opomb v Platonovih in Aristotlovih delih in nekaj drugih matematičnih drobcev, so prva priča grške matematike Evklidovi[1] *Elementi*, ki so nastali okoli leta 300 pr. n. št. Večina idej, ki se jih vključuje v "evklidsko geometrijo", se verjetno ni začela z Evklidom, njegova zasluga je predvsem ta, da je zbral dotedanje znanje geometrije in ga logično usklajeno pred-

[1] Grški matematik, 365 pr. n. št. – 275 pr. n. št. [18]

stavil. Evklidovi *Elementi* (slika 2.1) (nekoč *Stoihea*) predstavljajo zbirko trinajst knjig, od katerih so peta, sedma, osma, deveta in deseta pretežno posvečene aritmetiki, podani v geometrijski obliki, ostale pa dejansko govorijo o geometriji. V prvi knjigi so tako zbrani rezultati o običajnih ravninskih likih, med njimi tudi slavni Pitagorov izrek. Knjige imajo strogo logično zgradbo. Vsaka knjiga se začne s spiskom definicij izrazov, uporabljenih v določeni knjigi. V prvi knjigi nato Evklid navede 10 aksiomov, od katerih se jih 5 nanaša na splošne matematične resnice, 5 pa na geometrijo. Ti aksiomi so tudi izhodišče za razvoj geometrije. Najobsežnejši del vsake knjige pa predstavljajo trditve in njihovi dokazi [7].



Slika 2.1: Evklidovi *Elementi* [38]

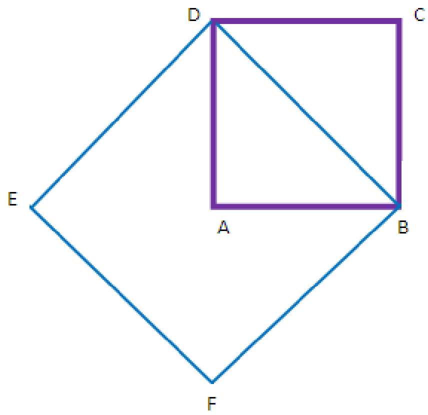
Z današnjega stališča velja pripomniti, da postulati in aksiomi, ki jih je Evklid izbral, niso brez pomanjkljivosti, te pa so ga pri dokazih večkrat silile k opiranju na lastno intuicijo.

Evklidovi *Elementi* veljajo za najuspešnejše znanstveno delo vseh časov. Pomena *Elementov* za razvoj matematike in človeške kulture nasploh, skoraj ne moremo preceniti, saj predstavljajo zgled, kako naj bo teorija skrbno zgrajena in predstavljena. *Elementi* so tako postali model za razvoj znanstvenih in filozofskih teorij nasploh [7].

2.1 Podvojitev kocke

Problem *podvojitve kocke* je znan problem iz klasične geometrije in je eden od treh znamenitih problemov grške matematike. Gre za problem, kako s šestilom in z neoznačenim ravnilom konstruirati rob kocke, ki ima dvakrat tolikšno prostornino kot kocka z danim robom. Izkaže se, da naloga ni rešljiva le z uporabo šestila in ravnila. Rob nove kocke ima namreč dolžino $\sqrt[3]{2}$, česar ni možno konstruirati s šestilom in z neoznačenim ravnilom, saj se pojavi težava pri konstrukciji kubičnega korena [33].

Za lažje razumevanje problema si najprej oglejmo naslednjo nalogo, kjer bomo skušali podvojiti kvadrat. Vzamemo kvadrat ABCD in narišemo diagonalo DB. Na podlagi dobljene diagonale skonstruiramo še kvadrat BDEF in zlahka se opazi, da je dvakrat večji od ABCD, saj ima kvadrat BDEF dvakrat večjo ploščino kakor dani kvadrat ABCD, trikotnik ABD pa predstavlja polovico kvadrata ABCD ter četrtino kvadrata BDEF. Prvi kvadrat sestoji iz dveh, drugi kvadrat pa iz štirih takih trikotnikov, zato je ploščina drugega kvadrata dvakrat večja od prvega, kar je razvidno iz slike 2.2.



Slika 2.2: Primer podvojitve kvadrata

Predstavljamo si poljubno kocko z osnovnim robom a in rob iskane kocke z robom x. Iz tega sledi, da je prostornina prve kocke a^3, druge pa x^3. Ker mora biti prostornina druge kocke ěnkrat večja, velja torej enačba

$$x^3 = 2a^3 \quad \text{in od tod sledi} \quad x = a\sqrt[3]{2}.$$

Matematiki so se zelo trudili, da bi problem rešili le s šestilom in z neoznačenim ravnilom, vendar ni šlo. Danes vemo zakaj, saj se s šestilom in z ravnilom ne da narisati stranice, ki bi imela dolžino v razmerju $\sqrt[3]{2} : 1$.

Imamo torej problem, kako iz znane daljice a z ravnilom in s šestilom konstruirati daljico $a\sqrt[3]{2}$. Koren lahko izračunamo s poljubno natančnostjo: $\sqrt[3]{2} = 1,2599\ldots$ Če načrtamo daljice $1,2a, 1.25a$, itd., so te daljice približno enake robu kocke z dvakratno prostornino, vendar po tej poti ne moremo načrtati roba kocke s popolno natančnostjo [5].

Nastanki problema in starogrške rešitve

Začetki problema niso točno znani, o njegovem nastanku pa obstajata dve legendi.

Erastosten[2] v svojem delu z naslovom *Platonicus* pripoveduje, da so prebivalci otoka Delos leta 430 pr. n. št. Apolonov orakelj v Delfih prosili za nasvet, kako ustaviti epidemijo kuge. Prejeli so odgovor, da morajo podvojiti velikost Apolonovega kockastega oltarja. Prebivalci so se zelo prizadevali za rešitev in za pomoč zaprosili Platona. Najprej so podvojili dolžine vseh robov oltarja, vendar se je epidemija kuge le še poslabšala. Izkazalo se je, da bi morali podvojiti volumen oltarja, česar pa niso znali storiti. Platon jih je nato opozoril, da svečeniki iz oraklja v resnici niso želeli oltarja dvojne velikosti, ampak so z nalogo želeli samo pokazati, da se morajo Grki sramovati zaradi zanemarjanja matematike in teptanja geometrije. Zaradi te legende se problem tudi imenuje "*Deloški problem*".

Kuga je zagotovo pomemben dogodek za Atene, saj je zaradi nje okoli 430 pr. n. št. umrla četrtina prebivalstva. Če je kaj resnice v legendi, lahko na njeni podlagi določimo točen datum za pojav problema. Obenem se legenda tudi časovno sklada s Hipokratovim prispevkom k problemu [42].

Znana je še druga legenda, ki se je pojavila v delu neznanega matematično neizobraženega grškega pesnika. Pisal je o mitološkem kralju Minosu iz Krete, ki ni bil zadovoljen z velikostjo grobnice svojega sina Glaukusa. Zahteval je dvakrat večjo grobnico in menil, da je mogoče to storiti s podvojitvijo vseh njenih dimenzij, kar je bilo napačno. Če se podvoji stranice grobnice, se namreč površina stirikrat, obseg pa osemkrat pomnoži. Ta pesnikova "matematika" je spodbudila geometre, da so se lotili problema, kako podvojiti trdno telo in hkrati ohraniti njegovo obliko.

Naj so zgodbe resnične ali ne, s problemom podvojitve kocke so se vseeno ukvarjali številni grški matematiki in tudi prišli do rešitev. Znani so Pappus, Hipokrat, Diokles, Evdoksos, Menehmus, Arhitras, Eratostenes in drugi. Vendar pa niso prišli do pravih rešitev, saj so vsebovale uporabo orodij in krivulj, ki se ne dajo nadomestiti le s šestilom in z ravnilom.

[2] Grški matematik, 276 pr. n. št. – 194 pr. n. št. [16]

Oglejmo si dve najpopularnejši starogrski rešitvi:

2.1.1 Hipokratova rešitev [3]

Hipokrat[3] je okoli 460 pr. n. št. sklepal, da če najdemo sestavljeno sorazmerje dveh danih premic $a : x = x : y = y : 2a$, ne moremo biti več daleč od rešitve.

Iz tega sledi

$$x^2 = ay$$
$$x^4 = a^2y^2$$
$$y^2 = 2ax$$

in zato

$$x^4 = 2a^3x$$

Od tod sledi

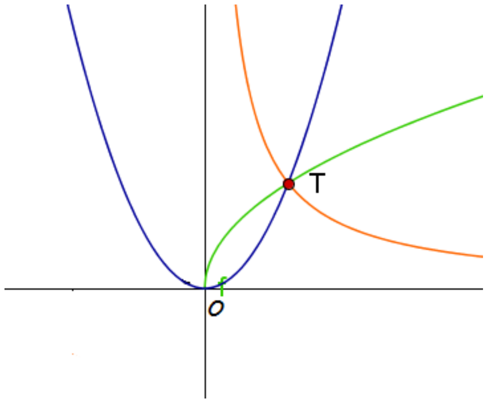
$$x(x^3 - 2a^3) = 0 \quad \text{in} \quad x^3 = 2a^3$$

Toda Hipokrat do končne rešitve ni prišel. Leta 350 pr. n. št. je Menehmus[4], na osnovi Hipokratovega dela, rešil problem. Do rešitve je prišel s privzetkom, da lahko parabole in hiperbole rišemo s šestilom in z ravilom, kar pa seveda ni možno, zato je uporabil tudi še druga orodja. Na podlagi sestavljenega sorazmerja je dobil naslednje tri enačbe

$$x^2 = ay$$
$$y^2 = 2ax$$
$$xy = 2a^2$$

Kot je razvidno iz slike 2.3 prvi dve enačbi predstavljata paraboli, tretja pa hiperbolo. Abscisna točka, kjer se se pri danem $a > 0$ vse tri krivulje sekajo, je rešitev.

[3]Grški geometer, 470 pr. n. št. – 410 pr. n. št. [28]
[4]Grški matematik, 380 pr. n. št. – 320 pr. n. št. [41]



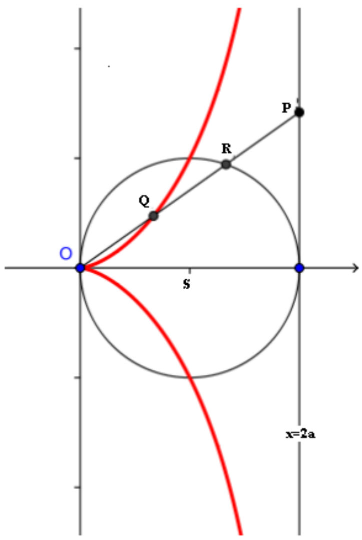
Slika 2.3: Menehmusova rešitev podvojitve kocke

2.1.2 Dioklesova rešitev

Ta rešitev je najbolj poznana rešitev med starogrškimi matematiki. Diokles[5] si je pomagal s krivuljo cisoido (2.4), katere enačba je

$$y^2(2a - x) = x^3,$$

pri čemer je a pozitivna konstanta.



Slika 2.4: Krivulja cisoida [24]

[5] Grški geometer, 240 pr. n. št. - 180 pr. n. št. [23]

Krivulja premore navpično asimptoto $x = 2a$, točka $O(0, 0)$ pa je zanjo singularna točka, v kateri ima ost. Abscisna os je simetrala cisoide. Krožnica $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ igra pomembno vlogo pri nastanku cisoide. Poltrak skozi poljubno točko P na cisoidini asimptoti in s krajiščem v koordinatnem izhodišču O preseka to krožnico še v točki R. Točka Q na tem poltraku, ki je oddaljena od O za razdaljo $|RP|$, je na cisoidi.

Izberemo poljubno točko $P(2a, y_o)$ na asimptoti cisoide. Premica skozi točko O in P ima enačbo $y = (y_0/2a)$ in preseka krožnico $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ v točkah

$$O(0,0) \text{ in } R\left(\frac{8a^3}{4a^2 + y_0^2}, \frac{4a^2 y_0}{4a^2 + y_0^2}\right),$$

cisoido $y^2(2a - x) = x^3$ pa v točkah

$$O(0,0) \text{ in } Q\left(\frac{2ay_0^2}{4a^2 + y_0^2}, \frac{y_0^{32}}{4a^2 + y_0^2}\right).$$

S pomočjo uporabe formule za razdaljo med dvema točkama[6] lahko vidimo, da je $|OQ| = |RP|$. To je določilna lastnost cisoide, ki je tudi koristna za njeno konstrukcijo.

In kako je cisoida povezana s problemom *podvojitve kocke*? Označimo $b = 2a$ in narišimo premico skozi točki $(0, 2b)$ in $(b, 0)$. Enačba te premice je torej $y = 2b - 2x$. Premica preseka cisoido $y^2(2a - x) = x^3$ v točki

$$Q\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt[3]{4}}, \frac{2b}{1 + \sqrt[3]{4}}\right).$$

Premica skozi O in Q ima smerni koeficient $\sqrt[3]{2}$, njena enačba pa je $y = \sqrt[3]{2}x$ in preseka cisoidino asimptoto v točki $P(b, b\sqrt[3]{2})$. Kocka z robom $b\sqrt[3]{2}$ ima dvakrat večjo prostornino kot kocka z robom b [11].

Zavedati pa se moramo, da Diokles do rešitve ni prišel zgolj z uporabo šestila in ravnila.

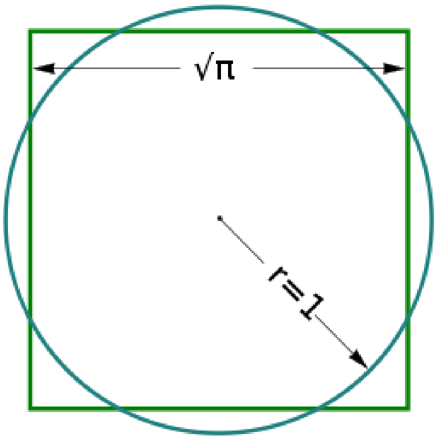
2.2 Kvadratura kroga

Gre za problem, pri katerem moramo konstruirati kvadrat, ki ima enako ploščino kot dani krog. Torej, če ima kvadrat enako ploščino kot dani krog s polmerom r, potem za stranico kvadrata velja naslednje

$$a = r\sqrt{\pi}.$$

[6] Razdalja med poljubnima točkama $A(x_1, y_1)$ in $B(x_2, y_2)$ je $\sqrt{(x - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Zanima nas torej ali lahko samo z uporabo šestila in neoznačenega ravnila skonstruiramo stranico dolžine π.



Slika 2.5: Kvadratura kroga [29]

Čeprav so starogrški matematiki dolgo poskušali rešiti problem, pri tem niso bili uspešni in šele leta 1882 je bilo dokončno dokazano, da problem ni rešljiv zgolj z uporabo šestila in ravnila. To je posledica dejstva, da je π transcedentno[7] število, kar dokazuje Lindemann-Weierstrassov izrek.[8] Konstruktibilne so namreč le ničle polinomov določenih stopenj, zato transcedentna števila niso konstruktibilna.

En najstarejših ohranjenih matematičnih zapisov o tem problemu je Rhindov papirus iz leta 1800 pr. n. št. Nekateri strokovnjaki menijo, da originalni dokument izvira celo iz leta 3400 pr. n. št. V papirusu je opisano, da je ploščina kroga s premerom 9 enot enaka ploščini kvadrata s stranico 8 enot. To ustreza trditvi, da je število π približno enako $3^{\frac{13}{81}} = 3,16\ldots$

S problemom se je ukvarjalo več starogrških matematikov, med najbolj poznanimi pa so bili Hipokrat, Arhimed, Hippias, Bryson, Antifon in Oenopid. Kljub večkratnim poskusom, je bil Hipokrat prvi, ki je za rešitev problema dejansko uporabil ravninsko konstrukcijo, čeprav konstrukcije ni dobil samo s šestilom in z ravnilom [43].

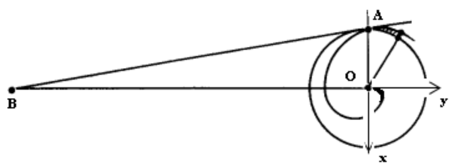
[7] Transcendentno število je vsako kompleksno število, ki ni algebrsko oziroma ni rešitev nobene polinomske enačbe oblike: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 x^0 = 0$, kjer je $n > 0$ in so koeficienti a_i cela števila (ali enakovredna racionalna števila), ne vsa enaka 0. [36]

[8] Če so $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ različna algebrska števila, ki so linearno neodvisna v množici racionalnih števil $\mathbb{Q}$ in $\beta_1, \ldots, \beta_n$ poljubna algebrska števila različna od 0, potem velja: $\beta_1 e^{\alpha_1} + \ldots + \beta_n e^{\alpha_n} \neq 0$. Transcendentnost števila π je neposredna posledica tega izreka. [30]

2.2.1 Arhimedova rešitev

Arhimed[9] je za rešitev problema uporabil tangente na spiralo (Arhimedovo spiralo). Spirala je taka krivulja, ki se poljubno mnogokrat ovije okoli neke točke.

Arhimedovo spiralo (slika 2.6) dobimo, če si zamislimo, da se v ravnini nek poltrak vrti okrog svojega izhodišča, pritrjenega v izbrani točki. Ves čas naj se vrti s konstantno hitrostjo o. Po poltraku naj iz izhodišča potuje točka, tudi ta ves čas s konstantno hitrostjo v, v smeri poltraka. Spirala je sled, ki jo zariše ta točka na svoji poti [12].



Slika 2.6: Arhimedova spirala [13]

Enačba Arhimedove spirale v polarnih koordinatah je

$$\varrho = a\varphi,$$

kjer je a neka pozitivna konstanta. Koeficient a predstavlja hitrost s katero se z rastočim polarnim kotom φ veča polarni radij ϱ. Oglejmo si primer, ko je $\varphi \geqslant 0$, saj za $\varphi \leqslant 0$ dobimo drugo polovico Arhimedove spirale, ki je simetrična prvi glede na pravokotnico skozi pol na polarno os. Za $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ dobimo prvi zavoj in tako naprej. Razmik med dvema zaporednima zavojema je konstanten, saj je $a(\varphi+2(n+1)\pi)-a(\varphi+2n\pi) = 2a\pi$. Radij ϱ Arhimedove spirale postaja z rastočim kotom φ vedno bolj pravokoten nanjo. Po izračunu kota μ med tangento in radijem ϱ, najprej dobimo parametrizacijo krivulje s parametrom φ v obliki: $x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\sin\varphi$. Smerni koeficient tangente za poljuben kot φ pa je

$$k_t = \frac{dy}{dx} = \frac{r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi}{r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi}.$$

[9] Grški matematik, 287 pr. n. št. - 212 pr. n. št. [21]

Po znani formuli za kot med dvema premicama imamo:

$$\tan\mu = \frac{k_t - k_r}{1 + k_t k_r} = \frac{\frac{r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi}{r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi} - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1 + \frac{r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi}{r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}.$$

Po odpravi dvojnih ulomkov in drugih poenostavitvah dobimo preprosto, toda pomembno formulo:

$$\tan\mu = \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)}.$$

Za Arhimedovo spiralo je po pravkar izpeljani formuli $\tan\mu = \varphi$, zato $\mu \to \frac{\pi}{2}$, ko $\varphi \to \infty$. Poleg tega je kot μ neodvisen od parametra a spirale. Pri istem kotu φ sekajo vse spirale svoje radije pod istim kotom.

Zanimiva je točka $A(2\pi a, 0)$, ki jo Arhimedova spirala doseže po prvem zavoju. Tedaj je $\tan\mu = 2\pi$, enačba tangente v A pa je $y - 2\pi x + 4\pi^2 a = 0$, ki preseka os y v točki $B(0, -4\pi^2 a)$. Enačba normale na spiralo skozi točko A je $x + 2\pi y - 2\pi a = 0$, ki ordinatno os preseka v točki $(0, a)$. To omogoča konstrukcijo tangente na spiralo v točki A.

Kateti v pravokotnem trikotniku sta $|OA| = 2\pi a$ in $|OB| = 4\pi^2 a$. Daljica $|OB|$ je torej ravno obseg kroga z radijem $|OA|$. Ploščina pravokotnika s stranicama $|OA|$ in $|OB|$ je $\pi|OA|^2$, kar je ravno ploščina z radijem $r = |OA|$. Pravokotniku pa lahko poiščemo ploščinsko enakovreden kvadrat, recimo po višinskem izreku[10] v pravokotnem trikotniku [11].

2.3 Trisekcija kota

Gre za vprašanje, kako dani kot razdeliti na tri skladne dele samo s šestilom in z neoznačenim ravnilom [37].

Problem je rešljiv le v primeru izbire lepega kota, kot je na primer $90°$, saj ga lahko brez težav razdelimo na tri enake dele.

V splošnem je problem nerešljiv. Že starogrški matematiki so prišli do sklepa, da se problema v splošnem ne da rešiti, vendar pa niso imeli dokaza za to trditev. Samo s šestilom in z ravnilom je moč trisekcijo kota izvesti le približno ter s poljubno natančnostjo [2].

[10] Višina na hipotenuzo pravokotni trikotnik razdeli na dva manjša trikotnika, ki sta podobna prvotnemu trikotniku ABC. Na podlagi dejstva, da imajo podobni trikotniki stranice v enakem razmerju, dobimo višinski izrek $v_c^2 = c_a c_b$. Pri tem sta c_a in c_b pravokotni projekciji katet na hipotenuzo. [34]

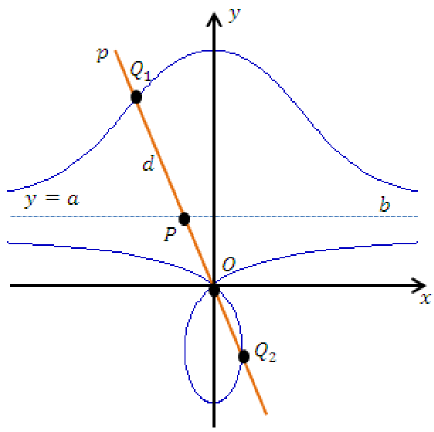
Kasneje so se matematiki ukvarjali s splošnejšim problemom, katere kote je sploh mogoče konstruirati s šestilom in z ravnilom. Prve vidnejše uspehe sta dosegla Carl Friedrich Gauss[11] in Évariste Galois[12], ki sta preučevala, kateri pravilni n-kotnik je mogoče konstruirati s predpisanima orodjema. Na podlagi njunih spoznanj je Pierre Wantzel[13] leta 1837 dokazal, da je možno s šestilom in z ravnilom konstruirati samo tisti pravilni n-kotnik, pri katerem je število n produkt poljubne potence števila 2 in poljubno mnogo različnih Fermatovih praštevil[14]. Posledično je možno konstruirati samo kote, ki nastopajo v takšnih n-kotnikih [37].

Tudi precej laikov je poskušalo rešiti ta konstrukcijski problem, vendar le zato, ker so bile za rešitve razpisane nagrade. Veliko nepoznavalcev matematike še danes skuša rešiti ta problem [2].

Starogrški matematiki so poskušali poiskati rešitev za problem na drugačen način, saj s šestilom in z ravnilom ni šlo. Najbolj znana je Nikomedesova[15] rešitev.

2.3.1 Nikomedesova rešitev

Nikomedes je pri rešitvi problema uporabil krivuljo konhoido, prikazano na spodnji sliki 2.7.



Slika 2.7: Krivulja konhoida [15]

[11] Nemški matematik, 30. april 1777 - 23. februar 1855 [22]
[12] Francozki matematik, 25. oktober 1811 - 31. maj 1832 [27]
[13] Francoski matematik, 5. junij 1814 - 21. maj 1848 [20]
[14] Fermatovo praštevilo je število oblike $F_n \equiv 2^{2^n}$, kjer je n naravno število [26]
[15] Grški matematik, 280 pr. n. št. - 210 pr. n. št. [32]

Naj bo b dana premica in O točka, ki je za $a > 0$ oddaljena od b. Nikomedesova konhoida z osnovnico b in polom O je geometrijsko mesto vseh tistih točk Q v ravnini premice b in točke O, ki so, za vnaprej dano razdaljo d, oddaljene od presečišč vseh premic skozi O s premico b.

Privzemimo, da ima koordinatni sistem izhodišče v polu O konhoide, osnovnica b naj bo vzporedna z osjo x, enačba osnovnice pa naj bo $y = a$. Premica p, katere enačba je $ax - ty = 0$ seka osnovnico v točki P skozi O. Krožnica s polmerom d in središčem v P ima enačbo $(x - \frac{ax}{y})^2 - d^2y^2 = 0$, po odpravi ulomkov in preureditvi, je pred nami enačba konhoide:

$$(y - a)^2(x^2 + y^2) - d^2y^2 = 0.$$

Očitno je konhoida algebrska krivulja četrte stopnje, saj ima dve veji, njena simetrala je kar os y, osnovnica pa je hkrati njena asimptota. Oblika spodnje veje je odvisna od razmerja parametrov a in d.

Povezava konhoide s trisekcijo kota

Recimo, da imamo za skonstruirat tretjino danega kota α. Brez škode za splošnost je lahko ta kot oster. Pravi kot tako ali tako znamo razdeliti na tri enake dele.

Na enem kraku kota α odmerimo od njegovega vrha O razdaljo d do točke S in polmerom d ter vzporednico b z drugim krakom kota α. Nato konstruiramo Nikomedovo konhoido z osnovnico b in polom O. Premica skozi O in skozi Q, presečišče konhoide s krožnico, seka osnovnico v točki P in oklepa z drugim krakom danega kota α kot $\alpha/3$.

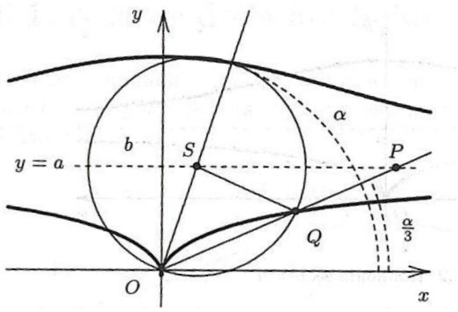
Trikotnika OSQ in SQP sta enakokraka zaradi izbrane konstrukcije in lastnosti konhoide. Naj kot ε oklepa daljico OP z osjo x. Potem velja

$$\sphericalangle SPQ = \sphericalangle PSQ = \varepsilon$$

in zato

$$\sphericalangle OQS = 2\varepsilon = \sphericalangle SOQ.$$

Torej je $\alpha = 3\varepsilon$, iz česar sledi naša trditev. Tako smo z uporabo Nikomedove konhoide določili tretjino danega kota.



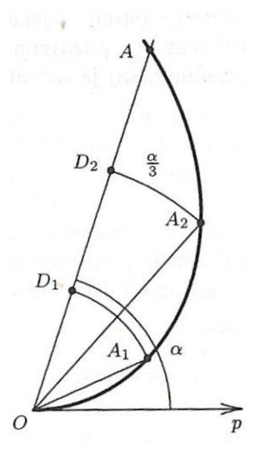
Slika 2.8: Nikomedesova konhoida in tretinjenje kota [11]

2.3.2 Arhimedova rešitev [11]

Arhimed je tudi za rešitev problema *trisekcije kota* uporabil svojo spiralo, ki je že bila omenjena v 2.2.1 poglavju te naloge.

Arhimedova spirala je primerna tudi za delitev danega kota na poljubno mnogo enakih delov, zato jo lahko uporabimo tudi za trisekcijo kota. Prevzeli bomo že omenjene lastnosti Arhimedove spirale.

Vzemimo kot $\sphericalangle pOA$. Daljico OA razdelimo s točkami D_1 in D_2 na tri dolžinsko enake dele. Načrtamo krožna loka s središčem v O od točke D_1 oziroma D_2 do A_1 oziroma A_2 na spirali. Zaradi linearnosti med ϱ in φ pri Arhimedovi spirali je $\sphericalangle pOA_1 = \alpha/3$ ter $\sphericalangle pOA = 2\varphi/3$. Po istem postopku delimo kot α na poljubno število enakih delov.



Slika 2.9: Arhmedova trisekcija kota [11]

Poglavje 3

Starogrški nerešljivi problemi in teorija polj

Teorija polj je veja matematike, ki raziskuje značilnosti polj. Pojem *polja* sta v svojih delih o rešljivosti enačb implicitno uporabljala Niels Henrik Abel[1] in Evariste Galois, Heinrich Martin Weber[2] pa je leta 1893 podal prvo jasno definicijo abstraktnega polja. Ernst Steinitz[3] je nato leta 1910 objavil zelo odmeven članek *Algebrska teorija polj (Algebraische Theorie der Körper).* V njem je aksiomatično raziskoval značilnosti polj in definiral več pomembnih teoretičnih pojmov v zvezi z njimi.

3.1 Osnove konstuktibilnosti [6] [9]

Zanimalo nas bo, katere geometrijske like in števila lahko konstruiramo le s šestilom in z ravnilom.

Definicija 1. *Pravimo, da je točka (premica, krog) K-točka (premica, krog), če jo je moč konstruirati samo s šestilom in z ravnilom.*

Aksiomi konstuktibilnosti:

(K1) $(0,0)$ in $(1,0)$ sta konstuktibilni.

(K2) Premica, ki je določena z dvema K-točkama, je K-premica.

(K3) Krog s šestilom v K-točki in s polmerom, ki je K-družina (to pomeni, da je razdalja med dvema K-točkama konstruktibilna) je konstruktibilen.

(K4) Presek dveh K-premic je K-točka.

[1] Norveški matematik, 5. avgust 1802 - 6. april 1829 [31]
[2] Nemški matematik, 5. maj 1842 - 17. maj 1913 [19]
[3] Nemški matematik, 13. junij 1871 - 29. september 1928 [17]

(K5) Presečišči K-premice in K-kroga sta K-točki.

(K6) Presečišči dveh K-krogov sta K-točki.

(K7) Konstrukcijskih korakov je lahko končno mnogo.

Zanima nas natančno katere točke na abscisni osi lahko določimo le z uporabo šestila in ravnila. Na voljo imamo običajno šestilo in ravnilo, označena je le enota 1. Za lažje razumevanje bomo taki točki s koordinatami $(x, 0)$ rekli, da moramo narisati število x. Množico vseh takih števil, ki se jih da narisat, bomo označili s $\mathcal{F}$.

S šestilom lahko rišemo krožnice, z ravnilom pa premice, ki jih smemo potegniti le skozi že določeni točki. Za vsako krožnico potrebujemo točko, ki predstavlja središče kroznice in polmer r, ki ga moramo tudi znati narisati. Zato nas bodo zanimali le števila, ki se jih da narisati.

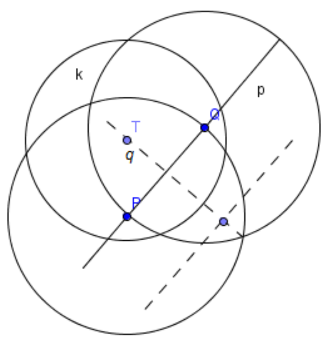
Na podlagi aksiomov konstruktibilnosti lahko točke v ravnini določimo le s končnim zaporedjem operacij naslednjih treh tipov:

(i) sekanje dveh premic;

(ii) sekanje med premico in krožnico;

(iii) sekanje dveh krožnic.

Oglejmo si sliko (3.1), na kateri vidimo, da lahko na premico $p \subset \mathbb{R}^2$ skozi dano točko $T \in \mathbb{R}^2$ načrtamo pravokotnico q. Če skozi točko T potegnemo pravokotnico na premico q, smo s tem dobili vzporednico k premici p skozi točko T. S tem vidimo, da lahko točko $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ določimo natanko takrat, ko znamo narisati števili x in y.



Slika 3.1: Primer risanja števil

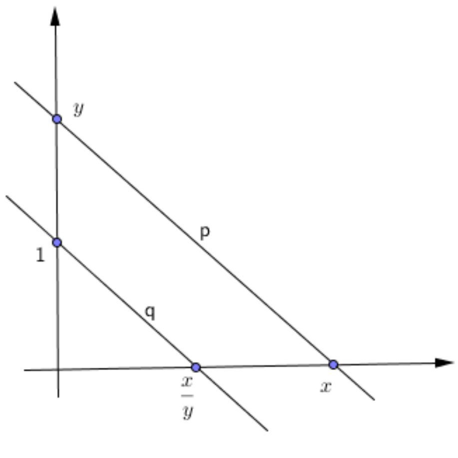
Predpostavimo, da znamo ti števili narisati. Zanima nas, katera števila lahko še narišemo. V naslednjih korakih bomo pokazali, da konstruktibilna števila tvorijo polje, za prikaz pa bomo potrebovali definicijo:

Definicija 2. *Konstruktibilno številsko polje je številsko polje, katerega elementi so konstruktibilna števila.*

Katera števila lahko torej še konstruiramo le z uporabo šestila in ravnila?

(a) Samo s premikom šestila lahko narišemo vsoto $x + y$ in razliko $x - y$. Ker uporabljamo ravnilo z enoto 1, lahko s tem postopkom narišemo vsa cela števila $\mathbb{Z}$.

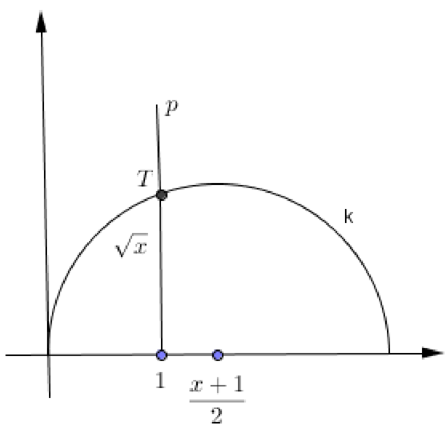
(b) Če je število x različno od nič, lahko s pomočjo podobnosti narišemo tudi ulomek x/y (slika 3.2). Premico p potegnemo med točkama $(x, 0)$ in $(0, y)$. Skozi točko $(0, 1)$ potegnimo vzporednico q na premico p, ki seka absisno os v točki $(x/y, 0)$. Zato lahko tudi narišemo katerokoli racionalno število (torej $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{F}$).



Slika 3.2: Risanje ulomkov

(c) Če lahko narišemo ulomek, potem lahko narišemo tudi produkt xy, saj število 0 že imamo. V kolikor je $y \neq 0$, znamo po prejšnji točki narisati ulomek $1/y$. Če pretvorimo naš produkt xy v ulomek $\frac{x}{1/y}$, ga lahko brez težav narišemo.

(d) Če je število x nenegativno, znamo narisati tudi koren $\sqrt{x}$. Narišimo krožnico k s središčem v točki $\left(\frac{x+1}{2}, 0\right)$ in polmerom $\frac{x+1}{2}$, nato pa še premico p, ki je pravokotna na abscisno os ter teče skozi točko $(1, 0)$. S točko T označimo presečišče med krožnico k in premico p. Iz slike 3.3 lahko vidimo, da je $\sqrt{x}$ ravno razdalja med točkama T in $(1, 0)$.



Slika 3.3: Risanje korenov

Izrek 1. *$\mathcal{F}$ je polje.*

S $\mathcal{F}$ označimo množico vseh konstruktibilnih števil. Ker je $\mathbb{Q}$ najmanjše številsko polje in $\mathcal{F}$ polje, sledi, da je $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{F}$. Zato za vsako konstruktabilno številsko polje E velja $\mathbb{Q} \subseteq E \subseteq \mathcal{F}$. Še več: če so $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ konstruktabilna števila, je $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \subseteq \mathcal{F}$.

Po točkah (a), (b) in (c) je množica $\mathcal{F}$ zaprta za seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje z neničelnimim številom. Zato je $\mathcal{F}$ obseg, vsebovan med obsegoma $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

Sedaj, ko vemo, katere števila se da narisati, nas zanima ali se da narisati še katera druga števila, oziroma ali se da sploh še katera.

S $\mathcal{K}$ označimo množico vseh števil, ki jih lahko po nekaj korakih iz točk $(i), (ii)$ in (iii) skonstruiramo. Torej je $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$. $\mathcal{K}$ lahko po točkah $(a), (b)$ in (c) razširimo do najmanjšega obsega, ki vsebuje $\mathcal{K}$. Zato lahko prevzamemo, da je množica $\mathcal{K}$ obseg.

V naslednjem koraku bomo dokazali, da lahko zgolj z zgoraj navedenimi tipi določimo točke, ki se jih da konstruirati, poskusilipa bomo še poiskati morebitne druge točke [9].

(i) Naj bosta p in q nevzporedni premici, ki potekata skozi različni točki s koordinatama v osegu $\mathcal{K}$. Ko računamo implicitni enačbi obeh premic, koordinate seštevamo, odštevamo, množimo in delimo, zato so koeficienti v implicitni enačbi elementi iz obsega $\mathcal{K}$. Naj bosta enačbi

$$p : ax + by = c \text{ in } g : dx + ey = f,$$

pri čemer so $a, b, c, d, e, f \in \mathcal{K}$.

Rešitev zgornjega sistema enačb je presečišče (x, y). Ker se premici p in q sekata, je determinanta tega sistema $ae-bd$ različna od 0 in števili

$$x = \frac{ce - fb}{ae - bd},\ y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

ležita v osegu $\mathcal{K}$. S tem korakom ne pridobimo novih števil, saj smo ponovno dobili že poznano obliko števil.

(ii) Naj bo r polmer in (a, b) središče krožnice k. Torej je enačba krožnice

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

pri čemer so $a, b, r \in \mathcal{K}$.

Premica p, podana z implicitno enačbo

$$cx + dy = e,$$

pri čemer so $c, d, e \in \mathcal{K}$, naj seka krožnico k v točki (x, y). Vsaj eden od koeficientov c in d je različen od nič. Presek (x, y) je tako rešitev sistema zgornjih enačb. Ker je vsaj en od koeficientov c, d neničeln, lahko iz druge enačbe izrazimo ali x z y ali obratno. Ko to vstavimo v enačbo krožnice, dobimo kvadratno enačbo z eno spremenljivko. Njena diskriminanta D leži v obsegu $\mathcal{K}$. Tako smo pridelali števili x in y oblike

$$x = f + g\sqrt{D} \text{ in } y = h + j\sqrt{D},$$

pri čemer so $f, g, h, j \in \mathcal{K}$.

(iii) Sedaj nam ostane le še tip dveh sekajočih se krožnic. Krožnici naj bosta podani z

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \text{ in } (x-c)^2+(y-d)^2=s^2,$$

pri čemer so $a, b, c, d, r, s \in \mathcal{K}$.

Če točka (x, y) zadošča obema enačbama, zagotovo zadošča tudi razliki obeh enačb:

$$2x(c-a)+2y(d-b)=r^2+c^2+d^2-a^2-b^2-s^2.$$

Navedeno pa je enačba premice, kakršno smo obravnavali v točki (i). Zato naše presečišče lahko dobimo kot eno od rešitev sistema kvadratne in linearne enačbe s koeficienti v obsegu $\mathcal{K}$. S tem smo točko (iii) prevedli na točko (ii).

Tako smo videli, da nam en korak na poti od $\mathcal{K}$ do $\mathcal{F}$ prinese največ števila oblike $a+b\sqrt{D}$ in $c+d\sqrt{D}$, kjer so a, b, c, d in $D \in \mathcal{K}$. Po točkah $(a), (b)$ in (c) smemo množico $\mathcal{K} \cup \sqrt{D}$ razširiti do najmanjšega obsega, ki jo vsebuje. Takemu obsegu bomo rekli *obseg, dobljen s privzemom elementa* $\sqrt{D}$ in ga označili s simbolom $\mathcal{K}(\sqrt{D})$.

Natančneje si oglejmo zgradbo tega obsega. Izberimo si število $D \in \mathcal{K}$, ki ni kvadrat nobenega elementa iz obsega $\mathcal{K}$. Množica

$$a+b\sqrt{D}; a, b \in \mathcal{K}$$

je očitno zaprta za seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje. Ker je

$$\frac{1}{a+b\sqrt{D}}=\frac{a}{a^2-b^2D}-\frac{b}{a^2-b^2D}\sqrt{D}$$

in je po privzetku $D \neq (\frac{a}{b})^2$, je množica zaprta tudi za deljenje z neničelnim številom. Zato je ta množica enaka obsegu $\mathcal{K}(\sqrt{D})$. Množica $\mathcal{K}(\sqrt{D})$ je tako dvorazsežni vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{K}$ z bazo $\left\{1, \sqrt{D}\right\}$.

Zaporedni koraki operacij tipa $(i), (ii)$ in (iii) nam tako dajo končno strogo naraščajočo verigo obsegov

$$\mathbb{Q} \subset \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset \ldots \mathcal{K}_m,$$

v kateri je vsak obseg dvorazsežni vektorski prostor nad obsegom, ki leži v verigi eno mesto pred njim. Vsak obseg te verige vsebuje vsa števila, ki jih moramo na danem koraku narisati.

Za dokončno določitev števil, ki se dajo narisati, uporabimo še naslednjo lemo.

Lema 1. *Naj za obseg K in F velja $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq F$. Če je K m-razsežen vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{Q}$ in F n-razsežen vektorski prostor nad obsegom K, je F mn-razsežen vektorski prostor na obsegom $\mathbb{Q}$.*

Če torej znamo skonstruirati število r, mora $\mathbb{Q}(r)$ ležati nekje med $\mathbb{Q}$ im $\mathcal{K}_m$. Naj bo $\mathbb{Q}(r)$ obseg, ki ga dobimo s privzemom števila r k racionalnim številom. Tedaj velja

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(r) \subseteq \mathcal{K}_m.$$

Po prejšnji lemi je obseg $\mathcal{K}_m$ vektorski prostor razsežnosti 2^m nad obsegom $\mathbb{Q}$. Po isti lemi mora biti razsežnost vektorskega prostora $\mathbb{Q}(r)$ nad obsegom $\mathbb{Q}$ delitelj števila 2^m. To pa se zgodi natanko tedaj, ko je razsežnost prostora $\mathbb{Q}(r)$ nad obsegom $\mathbb{Q}$ nenegativna potenca števila 2.

Po točki (d) znamo narisati kvadratne korene že narisanih pozitivnih števil, zato lahko na vsakem koraku, obsegu že narisanih števil dodamo poljuben kvadratni koren števila, ki smo ga narisali med enim od prejšnjih korakov. Zato lahko narišemo vsa tista števila $r \in \mathbb{R}$, za katera je razsežnost prostora $\mathbb{Q}(r)$ nad obsegom $\mathbb{Q}$ nenegativna potenca števila 2.

S tem smo dokončno dokazali, da se števila $r \in \mathbb{R}$ se da narisati le s pomočjo šestila in ravnila natanko tedaj, ko je razsežnost obsega $\mathbb{Q}(r)$, kot vektorskega prostora nad obsegom $\mathbb{Q}$, enaka nenegativni potenci števila 2.

3.2 Podvojitev kocke

Sedaj, ko poznamo kakšne razsežnosti mora biti obseg, lahko rešimo problem podvojitve kocke. Zanima nas torej ali lahko le s šestilom in z ravnilom narišemo stranico kocke, ki ima dvakrat večjo prostornino kot dana kocka.

Oglejmo si primer, ko stranica kocke meri 1. Tedaj je stranica podvojene kocke dolga $\sqrt[3]{2}$. Vidimo, da je obseg $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ vektorski prostor razsežnosti 3 nad obsegom $\mathbb{Q}$. Iz tega sledi, da podvojitev kocke nasploh ni mogoča, saj razsežnost prostora ni potenca števila 2.

To dejstvo lahko pokažemo tudi tako, da dokažemo, da število $\sqrt[3]{2}$ ni ničla nerazcepnega polinoma s stopnjo polinoma potence števila 2. Hkrati pa vidimo, da je število $\sqrt[3]{2}$ algebraično nad obsegom racionalnih števil $\mathbb{Q}$, saj ustreza enačbi $x^3 - 2 = 0$. Ugotoviti moramo torej razcepnost tega polinoma. ki jo lahko preverimo na podlagi Eisensteinovega kriterija nerazcepnosti.

Izrek 2 (Eisensteinov kriterij nerazcepnosti). *Bodi $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinom stopnje n s celimi koeficienti $f = c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n$. Če obstaja tako praštevilo p, da p deli c_i, $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}, p \nmid c_n$ in $p^2 \nmid c_0$, potem je f nerazcepen nad $\mathbb{Q}$.*

V našem primeru za praštevilo vzamemo število 2 in takoj vidimo, da to praštevilo deli vse koeficiente polinoma, razen vodilnega in da hkrati kvadrat praštevila ne deli prostega člena. Vidimo, da je polinom $x^3 - 2 = 0$ nerazcepen. Torej število $\sqrt[3]{2}$ ni ničla nerazcepnega polinoma s stopnjo polinoma potence števila 2.

3.3 Kvadratura kroga

Število π je od nekdaj vzbujalo veliko zanimanja tako pri matematikih, kot pri nematematikih. Je namreč razmerje med obsegom in premerom kroga, krog pa velja za najpopolnejšo krivuljo. Že v starem veku je Arhimed računal, da je π približno enak $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$. Vendar števila π ni mogoče predstaviti z nobenim ulomkom, ker ni racionalno temveč iracionalno število, kar je dokazal nemški matematik Lambert leta 1767.

Preteklo je več kot sto let, številni matematiki so se lotevali decimalk števila π in jih tudi pridobili več kot 700. Vendar je šele leta 1882 je Ferdinand von Lindermann[4] dokazal, da je π transcedentno število in s tem obenem rešil tudi problem kvadrature kroga, torej dokazal, da samo z ravnilom ter s šestilom kroga ni mogoče pretvoriti v ploščinsko enak kvadrat. Pod opombo številka 8 lahko vidimo, da je transcedentnost števila π le posledica Lindemann-Weierstrassovega izreka za ugotavljanje transcedentnosti števil [10].

Pokazati moramo torej, da se s šestilom in z ravnilom ne da konstruirati stranice kvadrata z dolžino $\sqrt{\pi}$.

Vemo, da je π transcedentno število, kar pomeni, da ni algebraično. Algebraično število je namreč vsako realno ali kompleksno število, ki je rešitev nekega polinoma z racionalnimi koeficienti.

Ker transcendentna števila niso konstruktibilna, nas bo za konstrukcijo stranice kvadrata z dolžino $\sqrt{\pi}$, zanimalo ali je tudi to število transcendentno število.

[4]Nemški matematik, 12. april 1852 – 6. marec 1939 [25]

Recimo, da število $\sqrt{\pi}$ ni transcendentn, torej bi se ga dalo tudi skonstruirati. Ker znamo skonstruirati produkt dveh konstrukcijskih števil (točka c poglavja 3.1), bi potem veljalo, da znamo skonstruirati tudi $(\sqrt{\pi})^2 = \pi$. To pa nas pripelje do protislovja, saj vemo, da je število π transcendentno in zato tudi nekonstruktibilno.

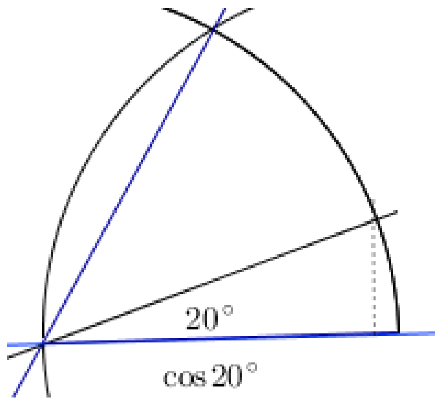
Torej je število $\sqrt{\pi}$ transcendentno, kar pomeni, da ni konstruktibilno.

3.4 Trisekcija kota [9]

Problem je rešljiv le v primeru izbire lepega kota, kot je na primer 90°, saj ga lahko brez težav razdelimo na tri enake dele.

Za dokaz, da trisekcija kota ni možna za vsak kot, si izberimo poljuben kot.

Naj bo kot 60° izbrani kot in ga poskušamo razdelit na tri enake dele. Najprej z uporabo šestila in ravnila narišemo kot 60°. Vemo, da tretjina kota 60° predstavlja kot 20°, česar ne znamo več narisati le z uporabo šestila in ravnila. Ker pa znamo skonstruirati pravokotnice, bi s tem lahko narisali število $\cos 20^\circ$ (namreč iz cos kota dobimo pravokotno projekcijo), kar seveda ne gre (slika 3.4).



Slika 3.4: Trisekcija kota 60°

Dokaz, da konstrukcija $\cos 20^\circ$ ni mogoča

Izračunajmo minimalni polinom števila $\cos 20^\circ$. Ker je

$$\frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \cos(3 \cdot 20^\circ) = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ.$$

Naj bo $\cos 20^\circ = x$, potem je

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x \Rightarrow 8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Torej ima polinom $p(x) = 8x^3 - 6x - 1$ ničlo $\cos 20^\circ$. Minimalni polinom števila $\cos 20^\circ$ deli polinom p. Če polinom p razpade na produkt dveh polinomov s koeficienti v $\mathbb{Q}$, je eden od polinomov zagotovo linearen. To pa bi pomenilo, da ima polinom p vsaj eno racionalno ničlo. Edini kandidati za racionalne ničle polinoma p so števila iz množice $\left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right\}$. Hitro se lahko prepričamo, da nobeno od teh števil ni ničla polinoma p, zato se polinoma p ne da razcepiti na produkt dveh polinomov z racionalnimi koeficienti. Minimalni polinom števila $\cos 20^\circ$ je torej enak

$$m(x) = \frac{1}{8}p(x) = x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}.$$

Tako je razsežnost prostora $\mathbb{Q}(r)$ nad obsegom $\mathbb{Q}$ enaka 3 in števila $\cos 20^\circ$ se ne da narisati le s šestilom in z ravnilom.

S tem smo pokazali, da konstrukcija trisekcije poljubno izbranega kota samo z uporabo šestila in ravnila nasploh ni mogoča.

Poglavje 4

Zaključek

O grški matematiki je bilo že veliko napisanega. Ko govorimo o grški matematiki, pa je treba poudariti, da mislimo na *jezik*, v katerem so bila napisana matematična dela. Grščina je bila kot eden od pogostih jezikov velikega Sredozemlja, jezik trgovine in kulture, ki so ga govorili izobraženi ljudje. Podobno je bilo grško matematično izročilo prevladujoča oblika teoretične matematike [14].

Mnogo starih kultur je razvilo razne vrste matematike, grški matematiki pa so bili edini, ki so v središče postavili logično sklepanje in dokaz, s te pa so za vedno spremenili pogled na matematiko.

Med pisanjem zaključne naloge in prebiranjem literature o razvoju matematike v Grčiji, sem spoznala, da imajo številne ideje, izreki, dejstva ter trditve temelj prav v grški matematiki. Grška matematika je vplivala na razvoj in napredek na različnih področjih matematike, še najbolj pa na področju geometrije. Starogrški matematiki so nam pustili veliko zapuščino, za katero verjamem, da še ni popolnoma odkrita.

Kljub razvoju novih področjih v matematiki, marsikateri problem iz Stare Grčije ostaja za raziskovalce in ostale, ki se ukvarjajo z matematiko, velika skrivnost, ki jim daje nove zagone za nadaljne raziskovanje in nove izive.

Literatura

[1] A. Atanasov: *The Delian Problem*, Columbia Science Review, 5(2): 27–29, 2009

[2] B. Čabrič, M. Jerman: *Trisekcija kota*, Ljubljana, DMFA, Presek, letnik 31 (2003–2004), št. 5, 264–265

[3] G. Pavlič: *Kako podvojiti kocko?*, Ljubljana, DMFA, Presek, letnik 7 (1979–1980), št. 2, 77-80

[4] G. Pavlič: *Trisekcija (raztretinjenje) kota*, Ljubljana, DMFA, Presek, letnik 3 (1975-1976), št. 4, 166–168

[5] I. Vidav: *Rešeni in nerešeni problemi matematike*, Ljubljana, Mladinska knjiga, 2. Ponatis, 1975

[6] K. Kutnar: *Algebra 4, Teorija polj*, Skripta predavanj, UP FAMNIT, 2011

[7] M. Cencelj: *Geometrija, Uvod in Evklidovi Elementi*, Skripta predavanj, PEF UL, 2008

[8] M. Hladnik: *Rešeni in nerešeni problemi matematike*, Pregled, januar 2009

[9] M. Jerman: *O konstrukcijah z ravnilom in šestilom*, Obzornik za matematiko in fiziko, 1998, let. 45, št. 3, str. 73–78

[10] P. Petek, *Kako se je godilo številu π, 2. del*, Ljubljana, DMFA, Presek, letnik 4 (1976–1977), št. 4, 193–196

[11] M. Razpet: *Ravninske krivulje*, Ljubljana, DMFA, 1998

[12] V. Domajnko *Arhimedova spirala, 1. del*, Presek, Letnik 17 (1989/1990), št. 3, 142 – 146

[13] V.V. Prasalov: *Tri klasičeskije zadači na postroenije*, Moskva, Nauka Fizmatlit, 62. izd., 1992

[14] W. P. Berlinghoff, F. Q. Gouvêa: *Matematika skozi stoletja*, prevedel Vital Sever, 1. izd., Ljubljana, Modrijan, 2008

[15] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Curves/Conchoid.html (20.8.2012)

[16] http://en.wikipedia.org/wiki/Erastosten (14.8.2012)

[17] http://en.wikipedia.org/wiki/Ernst_Steinitz (20.8.2012)

[18] http://sl.wikipedia.org/wiki/Evklid (13.9.2012)

[19] http://en.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Martin_Weber (20.8.2012)

[20] http://en.wikipedia.org/wiki/Pierre_Wantzel (18.8.2012)

[21] http://sl.wikipedia.org/wiki/Arhimed (18.8.2012)

[22] http://sl.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss (18.8.2012)

[23] http://sl.wikipedia.org/wiki/Diokles (15.8.2012)

[24] http://sl.wikipedia.org/wiki/Dioklesova_cisoida (15.8.2012)

[25] http://sl.wikipedia.org/wiki/Ferdinand_von_Lindemann (20.9.2012)

[26] http://sl.wikipedia.org/wiki/Fermatovo_pra\v stevilo (18.8.2012)

[27] http://sl.wikipedia.org/wiki/Galois (18.8.2012)

[28] http://sl.wikipedia.org/wiki/Hipokrat_(geometer) (14.8.2012)

[29] http://sl.wikipedia.org/wiki/Kvadratura_kroga (16.8.2012)

[30] http://sl.wikipedia.org/wiki/Lindemann_Weierstrassov_izrek (16.8.2012)

[31] http://sl.wikipedia.org/wiki/Niels_Henrik_Abel (20.8.2012)

[32] http://sl.wikipedia.org/wiki/Nikomedes (18.8.2012)

[33] http://sl.wikipedia.org/wiki/Podvojitev_kocke (14.8.2012)

[34] http://sl.wikipedia.org/wiki/Pravokotni_trikotnik (16.8.2012)

[35] http://sl.wikipedia.org/wiki/Prokl (13.8.2012)

[36] http://sl.wikipedia.org/wiki/Transcedentno_stevilo (16.8.2012)

[37] http://sl.wikipedia.org/wiki/Tretjinjenje_kota (18.8.2012)

[38] http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/ponudba/1996/herman/SElemen.htm (13.9.2012)

[39] http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/ponudba/1996/zvanut/grkibes.htm (10.8.2012)

[40] http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/ponudba/1997/mocnik/geom/geo.htm (13.9.2012)

[41] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk//Mathematicians/Menaechmus.html (14.8.2012)

[42] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Doubling_the_cube.html (14.8.2012)

[43] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Squaring_the_circle.html (16.8.2012)