

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Zaključna naloga

Ekstremne porazdelitve za odvisne spremenljivke

(Extremal Distributions for Dependent Variables)

Ime in priimek: Anja Zanin

Študijski program: Matematika v ekonomiji in financah

Mentor: izr. prof. dr. Mihael Perman

Somentor: dr. Matija Lozej

Koper, oktober 2013

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Anja ZANIN

Naslov zaključne naloge: Ekstremne porazdelitve za odvisne spremenljivke

Kraj: Koper

Leto: 2013

Število listov: 32

Število slik: 12

Število tabel: 5

Število referenc: 14

Mentor:izr. prof. dr. Mihael Perman

Somentor: dr. Matija Lozej

UDK:

Ključne besede: ekstremne porazdelitve, indeksi, ARCH, GARCH, napovedovanje

Izvleček: Računanje porazdelitvene funkcije ekstremnih vrednosti za neodvisne spremenljivke je dokaj nezahtevno. V pomoč nam je tudi teorija ekstremnih vrednosti, ki se ukvarja z vprašanji o porazdelitvi ekstremnih vrednostih v zaporedju slučajnih spremenljivk. Za napovedovanje večrazsežno normalnih časovnih vrst imamo za napovedovanje na voljo statistične metode, kot so metoda drseče sredine, metoda tehtane drseče sredine ter metoda eksponentnega glajenja. Te metode so za napovedovanje ekstremnih vrednosti in določanje njihovih porazdelitev neuporabne. Za računanje ekstremnih porazdelitev za odvisne spremenljivke je zanimivih več modelov. Najbolj poznani so statistični modeli iz družine ARCH, izmed teh pa je najpogosteje uporabljen simetrični GARCH. Ta model se uporablja za napovedovanje nestanovitnosti časovnih vrst, priljubljen pa je zaradi svoje preprostosti in prilagodljivosti. V zaključni nalogi so podani tako eksplicitni primeri za računanje porazdelitvene funkcije ekstremnih vrednosti v primeru neodvisnih spremenljivk kot tudi ekstremne vrednosti za GARCH(1,1) model.

Key words documentation

Name and SURNAME: Anja ZANIN

Title of final project paper: Extremal Distributions for Dependent Variables

Place: Koper

Year: 2013

Number of pages: 32

Number of figures: 12

Number of tables: 5

Number of references: 14

Mentor: Assoc. Prof. Dr. Mihael Perman

Co-Mentor: Dr. Matija Lozej

UDK:

Keywords: external distributions, indices, ARCH, GARCH, forecasting

Abstract: Calculating the distribution function for the extreme values of independent variables is uncomplicated. There is also extreme value theory which deals with issues of limit distributions of extreme values in a sequence of random variables. Different forecasting methods for the multidimensional normal time series are known such as moving averages, weighted moving averages, and exponential smoothing. These methods are useless for the prediction of extreme values and for the determination of their distributions. There are other models for calculating extremal distribution for dependent variables. The most widely known are models from the ARCH family of which the most widely used is the symmetric GARCH. This model is used to predict the volatility of time series and is popular because of its simplicity and flexibility. In the final work explicit examples for the calculation of the distribution function of extreme values for independent variables, such as the use of GARCH (1,1) model, are given.

Zahvala

Iskreno se zahvaljujem svojemu mentorju izr. prof. dr. Mihaelu Permanu za strokovno svetovanje in usmerjanje pri izdelavi zaključne naloge ter somentorju dr. Matiji Lozeju za vso pomoč in nasvete.

Kazalo

1	Uvod	1
2	Neodvisnost	3
2.1	Eksplicitni primeri	4
2.2	Eksplicitni primeri z odvisnostjo	7
2.3	Limitne porazdelitve za neodvisen primer	8
2.3.1	Posplošena porazdelitev ekstremnih vrednosti	9
2.3.2	Posplošena Paretova porazdelitev	10
3	Odvisnost	11
3.1	Metode za odvisen primer	12
3.1.1	Metoda drseče sredine	12
3.1.2	Metoda tehtane drseče sredine	15
3.1.3	Metoda eksponentnega glajenja	17
3.2	GARCH (1,1)	19
3.2.1	Ekstremalni indeks	21
3.2.2	Ocenjevanje parametrov modela GARCH(1,1)	21
4	Zaključek	29

Seznam tabel

3.1	Mere natančnosti za metodo drseče sredine.	13
3.2	Mere natančnosti za metodo drseče sredine pri manjšem obsegu podatkov.	15
3.3	Mere natančnosti za metodo tehtane drseče sredine.	16
3.4	Mere natančnosti za metodo eksponentnega glajenja pri različnih vrednostih α	19
3.5	Rezultati primerjave GARCH(1,1) modela in preprostega modela z normalno porazdeljenimi tedenskimi donosi pri napovedovanju ekstremnih vrednosti.	28

Seznam slik

2.1	Na levi sliki so označene skupne najvišje vrednosti v štirih periodah, na desni pa ekstremnih vrednosti nad določeno mejno vrednostjo u [8]. . .	3
2.2	Gostote za standardne porazdelitve ekstremnih vrednosti. Za Fréchetovo in Weibullovo porazdelitev je $\alpha = 1$ [5].	9
3.1	Grafični prikaz gibanja cen bencina ter metode drseče sredine za $n = 3$ in $n = 10$	14
3.2	Grafični prikaz gibanja cen bencina ter metode tehtane drseče sredine z večjo težo na novejših podatkih ter metodo tehtane drseče sredine z večjo težo na starejših podatkih.	16
3.3	Grafični prikaz gibanja cen bencina ter metode eksponentnega glajenja pri različnih vrednostih α	18
3.4	Grafični prikaz gibanja tedenskih cen bencina v Ameriki (enota: \$/galona).	24
3.5	Grafični prikaz tedenskega donosa.	24
3.6	Grafični prikaz porazdelitvene funkcije donosov.	25
3.7	Grafični prikaz primerjave kvantilov donosov naše časovne vrste in kvantilov standardne normalne porazdelitve (QQ-graf).	25
3.8	Grafični prikaz kvadriranega donosa.	26
3.9	Grafični prikaz vzorca avtokorelacijskih koeficientov.	26
3.10	Grafični prikaz ocenjene variance v primerjavi z dejanskim r^2	27

Seznam kratic

ang.	angleško
npr.	na primer
št.	število
GEV	Generalized Extreme Value
GPD	Generalized Pareto Distribution
MAE	Mean Average Error
MSE	Mean Squared Error
MAPE	Mean Absolute Percentage Error

1 Uvod

Velika nestabilnost svetovnih finančnih trgov je zaznamovala zadnjih nekaj let. Posledično se pojavljajo razna vprašanja o negotovi prihodnosti, ali se lahko stvari še poslabšajo in koliko se sploh lahko poslabšajo. Da bi lahko odgovorili na takšna in podobna vprašanja, moramo za začetek poskušati oceniti verjetnost pojava ekstremnega dogodka neke slučajne spremenljivke X . Ekstremni dogodek je redek pojav in je večje odstopanje od “normalnega” obnašanja slučajne spremenljivke, ki jo preučujemo, in je lahko ali ekstremni donos ali izjemna izguba. Te ekstremne dogodke najprej pridobimo iz podatkov, ki so nam na voljo, in jim nato določimo porazdelitev, ki tem vrednostim pripada. Te porazdelitve imenujemo porazdelitve ekstremnih vrednosti in so posebna vrsta porazdelitev, ki se nanašajo le na ekstremne vrednosti. Problem nastane pri modeliranju redkega pojava, ki leži izven območja opazovanih vrednosti, ki so na voljo. V takih primerih je bistveno, da se lahko zanašamo na metodologijo. Ta nam ponuja teorijo ekstremnih vrednosti in zagotavlja teoretične temelje, ki so potrebni za statistično modeliranje in opisovanje takšnih dogodkov ter računanje ekstremnih mer tveganja. Teorija ekstremnih vrednosti se ukvarja prav z vprašanji o ekstremno visokih ali ekstremno nizkih vrednostih v zaporedju slučajnih spremenljivk in nam ponuja dva različna pristopa. Prvi pristop poznamo kot posplošeno porazdelitev ekstremnih vrednosti, ki opisuje limitno porazdelitev normalizirane največje vrednosti, drugi pa je posplošena Paretova porazdelitev, ki se pojavlja kot limitna porazdelitev presežkov preko neke visoko določene meje.

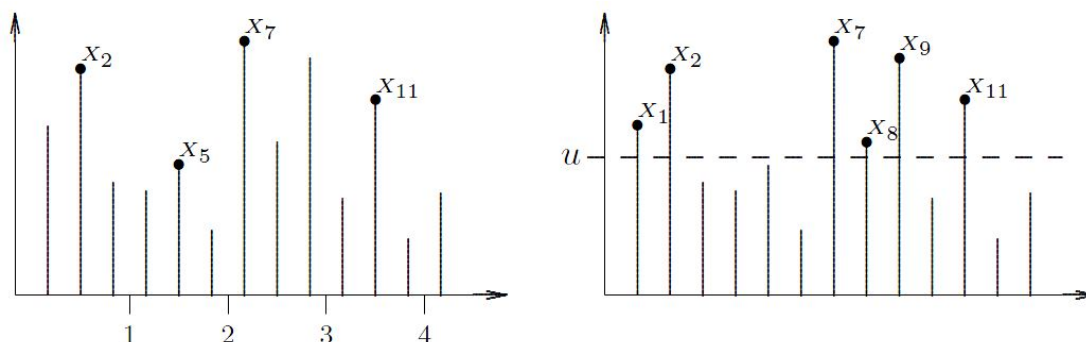
V realnosti pa imamo večkrat opravka s časovnimi vrstami, kjer so spremenljivke med seboj odvisne. Časovna vrsta je proces v diskretnem času, kjer je spremenljivka Y opredeljena z vrednostjo, ki jo le ta zavzame v času t in jo označimo z Y_t . Za obravnavo časovnih vrst je v uporabi več različnih modelov, najbolj poznani so modeli iz družine ARCH, kamor spadajo različne verzije tako ARCH kot tudi GARCH modelov. Modeli GARCH se uporabljajo za napovedovanje nestanovitnosti finančnih časovnih vrst, ki temelji na zgodovinskih vrednostih prek prilagajanja modela. Nestanovitnost je mera razpršenosti porazdelitve oziroma gostote verjetnosti in se jo najpogosteje meri s pomočjo standardnega odklona σ . Najpogosteje uporabljen model iz družine ARCH je simetrični GARCH(1,1) model, ki si ga bomo tudi podrobneje pogledali. Ta model je v financah priljubljen, ker je najbolj preprost, precej prilagodljiv in je lahko oceniti

parametre, hkrati pa nam omogoča do neke mere modelirati ekstremne dogodke.

Zaključna naloga je zasnovana tako, da bomo začeli z osnovnimi pojmi in nadaljevali proti zahtevnejšim konceptom. V 2. poglavju si bomo ogledali, kako poiskati porazdelitveno funkcijo ekstremnih vrednosti v primerih, ko so slučajne spremenljivke med seboj neodvisne. Podali bomo eksplicitne primere v primeru neodvisnosti ter v primeru, ko imamo opravka z določeno odvisnostjo. Nato si bomo ogledali še, kaj pravi teorija ekstremnih vrednosti [5] [7] [12]. V 3. poglavju bomo opisali metode, s katerimi si pomagamo pri obravnavi in napovedovanju časovnih vrst. Predelali bomo statistične metode za večrazsežne normalne časovne vrste [2], končali pa bomo z GARCH(1,1) modelom [7] [10]. Zaključna naloga predvideva, da so bralcu znani osnovni pojmi s področja verjetnosti in statistike.

2 Neodvisnost

V tem poglavju si bomo na osnovnih primerih ogledali, kako izračunati porazdelitveno funkcijo ekstremnih vrednosti, saj je ocenjevanje verjetnosti pojava ekstremnih dogodkov pomembna naloga pri upravljanju s tveganji. Za iskanje ekstremnih vrednosti sicer poznamo dve metodi, to sta metoda obnašanja ekstremnih vrednosti nad določeno mejno vrednostjo ter metoda skupne najvišje vrednosti. Slednja metoda je tradicionalna, uporabna predvsem za analizo sezonskih podatkov. Če imamo na voljo drugačne podatke o ekstremih, je učinkovitejša metoda obnašanja ekstremnih vrednosti nad določeno mejno vrednostjo in zato je najboljša izbira za najnovejše uporabe.



Slika 2.1: Na levi sliki so označene skupne najvišje vrednosti v štirih periodah, na desni pa ekstremnih vrednosti nad določeno mejno vrednostjo u [8].

V prvem podpoglavju bomo najprej podali porazdelitveno funkcijo največjih vrednosti v primeru, ko so slučajne spremenljivke neodvisne, izpeljali pa bomo tudi formulo za izračun porazdelitvene funkcije najmanjših vrednosti. Nadaljevali bomo s primerom, ko med slučajnimi spremenljivkami nastopi določena odvisnost. To poglavje bomo zaključili z limitnimi porazdelitvami za neodvisen primer, kjer si bomo pomagali s teorijo ekstremnih vrednosti.

2.1 Eksplicitni primeri

Naj bodo $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke s porazdelitveno funkcijo $F(x) = P(X_i \leq x)$. Z $M = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ označimo največjo vrednost. Zaradi neodvisnosti je:

$$P(M \leq x) = P^n(X_i \leq x),$$

kjer je $P^n(X_i \leq x) = F^n(x)$ porazdelitvena funkcija maksimuma. Opazimo lahko še naslednje: če je $P(X_i \leq x) < 1$, potem gre $P(M \leq x) \rightarrow 0$, ko $n \rightarrow \infty$.

Dokaz. Verjetnost $P(M \leq x)$ lahko zapišemo kot:

$$\begin{aligned} P(M \leq x) &= P(\max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq x) \\ &= P(X_i \leq x, \text{ za vse } i) \\ &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x). \end{aligned}$$

Zaradi neodvisnosti lahko to zapišemo kot:

$$P(X_1 \leq x) \cdot P(X_2 \leq x) \cdots P(X_n \leq x) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x).$$

Ker so spremenljivke enako porazdeljene, je to produkt enakih verjetnosti. Sledi:

$$\prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = P^n(X_i \leq x).$$

□

Ponavadi nas precej bolj zanimajo najmanjše vrednosti, saj so to izgube, ki nas bodo prizadele. Te lahko enostavno izpeljemo iz največje vrednosti s pomočjo naslednje enačbe:

$$\min_{1 \leq i \leq n} X_i = - \max_{1 \leq i \leq n} (-X_i).$$

Sedaj izpeljimo še enačbo za izračun porazdelitvene funkcije najmanjše vrednosti neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk X_i s porazdelitveno funkcijo $F(x)$:

$$\begin{aligned} P(\min_{1 \leq i \leq n} X_i > x) &= P(- \max_{1 \leq i \leq n} (-X_i) > x) \\ &= (1 - P(X_i \leq x))^n \\ &= (1 - F(x))^n. \end{aligned}$$

Sledi, da je porazdelitvena funkcija najmanjše vrednosti naslednja:

$$\begin{aligned} P(\min_{1 \leq i \leq n} X_i \leq x) &= 1 - P(\min_{1 \leq i \leq n} X_i > x) \\ &= 1 - (1 - F(x))^n. \end{aligned}$$

Primer 2.1. Naj bodo slučajne spremenljivke X_i neodvisne in eksponentno porazdeljene, torej $X_i \sim \exp(\lambda)$, kjer $i = 1, 2, \dots, n$. Najprej izračunajmo verjetnost, da je vrednost slučajne spremenljivke X_i manjša ali enaka x .

$$P(X_i \leq x) = \int_{-\infty}^x f_{X_i}(u) du.$$

Ker je eksponentna funkcija definirana samo za $x \geq 0$, računamo kar integral $\int_0^x f_{X_i}(u) du$. Sledi:

$$\begin{aligned} \int_0^x f_{X_i}(u) du &= \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda u} du \\ &= -e^{-\lambda u} \Big|_0^x \\ &= 1 - e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Dobili smo verjetnost $P(X_i \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Če obe strani damo na eksponent n , dobimo:

$$P^n(X_i \leq x) = (1 - e^{-\lambda x})^n.$$

Sedaj pa nas zanima še verjetnost, da je največja vrednost slučajnih spremenljivk X_i manjša od x . Pri dokazu smo izračunali naslednje:

$$P(M \leq x) = P(X_1 \leq x) \cdot P(X_2 \leq x) \cdot \dots \cdot P(X_n \leq x).$$

Zgoraj smo izračunali verjetnost $P(X_i \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$, kjer $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Torej:

$$P(X_1 \leq x) = P(X_2 \leq x) = \dots = P(X_n \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Sledi:

$$\begin{aligned} P(M \leq x) &= \underbrace{(1 - e^{-\lambda x}) \cdot (1 - e^{-\lambda x}) \cdot \dots \cdot (1 - e^{-\lambda x})}_{n \text{ členov}} \\ &= (1 - e^{-\lambda x})^n \\ &= P^n(X_i \leq x). \end{aligned}$$

Izračunajmo še porazdelitveno funkcijo minimuma:

$$\begin{aligned} P\left(\min_{1 \leq i \leq n} X_i \leq x\right) &= 1 - (1 - P(X_i \leq x))^n \\ &= 1 - (1 - (1 - e^{-\lambda x}))^n \\ &= 1 - e^{-\lambda x n}. \end{aligned}$$

Primer 2.2. Naj bodo slučajne spremenljivke X_i neodvisne in normalno porazdeljene, torej $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, kjer $i = 1, 2, \dots, n$. Izračunajmo verjetnost, da je slučajna spremenljivka X_i manjša ali enaka x .

$$\begin{aligned} P(X_i \leq x) &= \int_{-\infty}^x f_{X_i}(u) du \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} du. \end{aligned}$$

Uvedemo novo spremenljivko v :

$$v = \frac{u - \mu}{\sigma} \Rightarrow dv = \frac{du}{\sigma}.$$

Sledi:

$$\begin{aligned} P(X_i \leq x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \sigma \cdot \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \\ &= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Izračunati moramo le še verjetnost $P(M \leq x)$. Ker so slučajne spremenljivke X_i med seboj neodvisne, lahko to verjetnost zapišemo kot produkt verjetnosti $P(X_i \leq x)$ po vseh i .

$$P(M \leq x) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x).$$

Ker pa imajo slučajne spremenljivke X_i tudi enako porazdelitveno funkcijo, to je $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, lahko to zapišemo kot:

$$\begin{aligned} P(M \leq x) &= \underbrace{\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \cdot \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \cdot \dots \cdot \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}_{n \text{ členov}} \\ &= \left(\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^n \\ &= P^n(X_i \leq x). \end{aligned}$$

Sedaj izračunajmo še porazdelitveno funkcijo najmanjše vrednosti:

$$\begin{aligned} P\left(\min_{1 \leq i \leq n} X_i \leq x\right) &= 1 - (1 - P(X_i \leq x))^n \\ &= 1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^n. \end{aligned}$$

2.2 Eksplicitni primeri z odvisnostjo

Oglejmo si primer, ko so spremenljivke X_i odvisne od slučajnih spremenljivk Z in W_i , kjer je $i = 1, 2, \dots, n$. Definirajmo $X_i = Z + W_i$. Naj bodo Z, W_1, W_2, \dots, W_n neodvisne slučajne spremenljivke z normalno porazdelitvijo:

$$Z \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \text{in} \quad W_i \sim N(\nu, \tau^2).$$

Vemo, da je vsota dveh slučajnih spremenljivk tudi slučajna spremenljivka, torej je tudi X_i slučajna spremenljivka. Zanima nas porazdelitvena funkcija največje vrednosti $P(M \leq x)$, vendar pa te porazdelitvene funkcije ne moremo zapisati kot produkt verjetnosti $P(X_i \leq x)$, saj so spremenljivke X_i med seboj odvisne. Lahko pa zapišemo naslednje:

$$P\left(\max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq x \mid Z = z\right) = P(X_1 \leq x \mid Z = z) \cdot \dots \cdot P(X_n \leq x \mid Z = z).$$

Iz predpostavk sledi, da je porazdelitev X_i pri pogoju $Z = z$ naslednja:

$$X_i \mid Z = z \sim N(z + \nu, \tau^2).$$

Izračunajmo, kakšna je verjetnosti $P(X_i \leq x \mid Z = z)$:

$$\begin{aligned} P(X_i \leq x \mid Z = z) &= \int_{-\infty}^x f_{X_i \mid Z=z}(u) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \tau} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-(z+\nu))^2}{2\tau^2}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \tau} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-z-\nu)^2}{2\tau^2}} du. \end{aligned}$$

Uvedemo novo spremenljivko v :

$$v = \frac{(u - z - \nu)}{\tau} \Rightarrow dv = \frac{du}{\tau}.$$

Vstavimo novo spremenljivko v zgornji izraz in dobimo:

$$\begin{aligned} P(X_i \leq x \mid Z = z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \tau} \cdot \tau \cdot \int_{-\infty}^{\frac{x-z-\nu}{\tau}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{x-z-\nu}{\tau}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \\ &= \Phi\left(\frac{x - z - \nu}{\tau}\right). \end{aligned}$$

Sedaj lahko zapišemo naslednje:

$$P\left(\max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq x \mid Z = z\right) = \left(\Phi\left(\frac{x - z - \nu}{\tau}\right)\right)^n.$$

Porazdelitveno funkcijo največje vrednosti izračunamo na naslednji način:

$$P(M \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{M|Z=z}(x) \cdot f_Z(z) dz,$$

kar v našem primeru pomeni naslednje:

$$P(M \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Phi \left(\frac{x - z - \nu}{\tau} \right) \right)^n \cdot f_Z(z) dz.$$

2.3 Limitne porazdelitve za neodvisen primer

Klasična teorija ekstremnih vrednosti se ukvarja z asimptotično porazdelitvijo standardiziranih najvišjih vrednosti iz niza neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk s skupno porazdelitveno funkcijo F .

Izrek 2.3. (*The Three Types Theorem*) $Z M = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ označimo maksimalno vrednost neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk X_1, X_2, \dots, X_n s skupno porazdelitveno funkcijo F . Če obstajajo konstante $a_n > 0$ in $b_n \in \mathbb{R}$, da za vsak x velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M \leq a_n x + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n x + b_n)^n = G(x),$$

potem je $G(x)$ nedegenerirana porazdelitvena funkcija. V tem primeru je funkcija $G(x)$ enaka enemu izmed naslednjih tipov porazdelitev ekstremnih vrednosti:

$$G(x) = \Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, \forall x \quad (2.1)$$

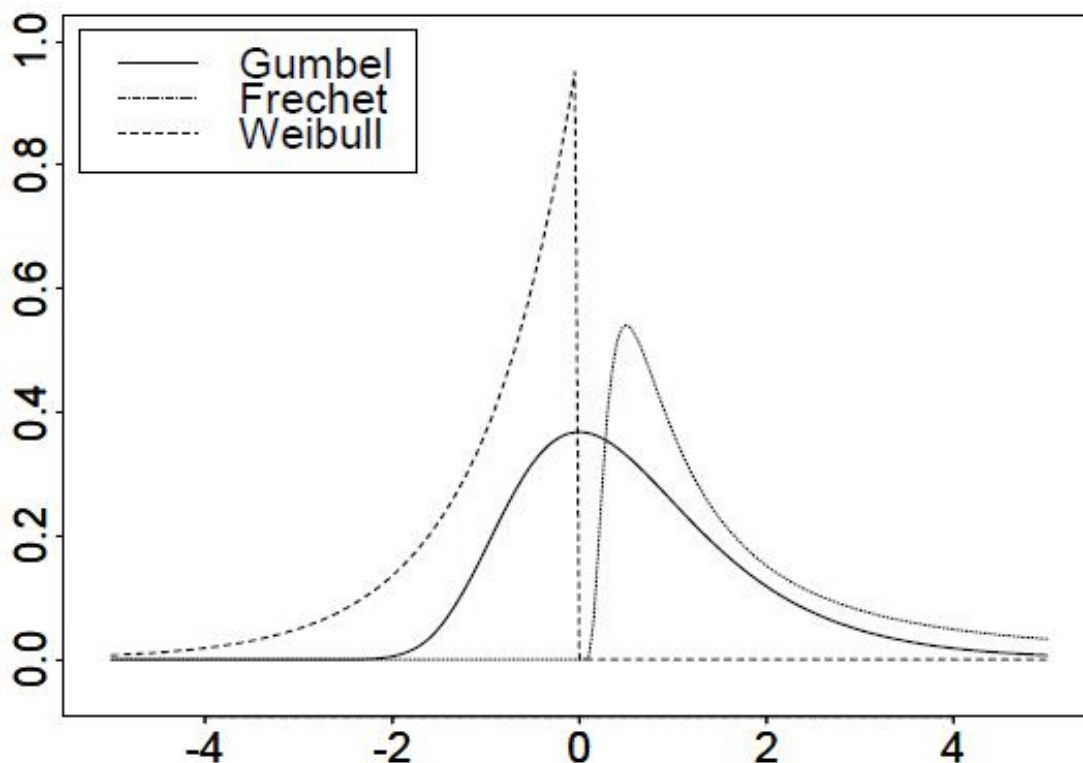
$$G(x) = \Phi_{\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x \leq 0, \\ e^{-x^{-\alpha}}, & \text{za } x > 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$G(x) = \Psi_{\alpha}(x) = \begin{cases} e^{-|x|^{\alpha}}, & \text{za } x \leq 0, \\ 1, & \text{za } x > 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

Te vrste porazdelitev se imenujejo: (2.1) Gumbelova, (2.2) Fréchetova in (2.3) Weibullova porazdelitev. Pri Fréchetovi in Weibullovi porazdelitvi mora veljati tudi $\alpha > 0$.

Izrek treh tipov (ang. The Three Types Theorem) sta prvotno navedla Fisher in Tippett (1928) brez podrobnega matematičnega dokaza, kasneje pa ga je dosledno izpeljal Gnedenko (1943) [9].

Na sliki 2.2 si oglejmo še funkcije gostot za standardno Fréchetovo, Weibullovo in Gumbelovo porazdelitev. Opazimo lahko, da Fréchetova porazdelitev najbolj ustreza porazdelitvam z debelim repom (ang. fat tail), Weibullova porazdelitev je asimptotska porazdelitev s končno točko in brez oziroma z omejenim repom, zadnja, Gumbelova porazdelitev, pa je značilna za porazdelitve s tankim repom (ang. thin tail).



Slika 2.2: Gostote za standardne porazdelitve ekstremnih vrednosti. Za Fréchetovo in Weibullovo porazdelitev je $\alpha = 1$ [5].

2.3.1 Posplošena porazdelitev ekstremnih vrednosti

Za statistične namene lahko vse tri porazdelitve ekstremnih vrednosti združimo v eno družino porazdelitev.

Definicija 2.4. Posplošeno porazdelitev ekstremnih vrednosti (GEV) ali Jenkinson-von Mises predstavitev poznamo kot:

$$G_{\xi}(x) = \begin{cases} e^{-(1+\xi x)^{-1/\xi}} & \text{za } \xi \neq 0, \\ e^{-e^{-x}} & \text{za } \xi = 0, \end{cases}$$

kjer je $1 + \xi x > 0$ in je $\xi \in \mathbb{R}$ parameter, ki določa obliko porazdelitve. Pri tem moramo upoštevati še naslednje omejitve:

$$\begin{aligned} x &> -\xi^{-1} & \text{za } \xi > 0, \\ x &< -\xi^{-1} & \text{za } \xi < 0, \\ x &\in \mathbb{R} & \text{za } \xi = 0. \end{aligned}$$

Ker ξ določa obliko porazdelitve, s tem pa tudi debelino njenih repov, ga imenujemo tudi repni parameter (ang. tail index). Standardna porazdelitev ekstremnih vrednosti predstavlja vse tri tipe in sicer:

- Če je $\xi > 0$, imamo Fréchetovo porazdelitev: $G_\xi\left(\frac{x-1}{\xi}\right) = \Phi_{1/\xi}(x)$.
- Če je $\xi = 0$, imamo Gumbelovo porazdelitev: $G_0(x) = \Lambda(x)$.
- Če je $\xi < 0$, imamo Weibullovo porazdelitev: $G_\xi\left(-\frac{x+1}{\xi}\right) = \Psi_{-1/\xi}(x)$.

Ta predstavitev je koristna za statistične metode, ki delujejo na osnovi največje vrednosti neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk.

Poznamo pa tudi posplošeno porazdelitev ekstremnih vrednosti za nestandardizirane ekstreme, ki jo zapišemo kot:

$$G_{\xi;\mu,\psi}(x) = \begin{cases} e^{-(1+\xi\frac{x-\mu}{\psi})^{-1/\xi}} & \text{za } \xi \neq 0, \\ e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\psi}}} & \text{za } \xi = 0, \end{cases}$$

kjer μ nastopa kot parameter lokacije, ψ kot parameter obsega ter ξ kot parameter oblike, veljati pa mora tudi $1 + \xi\frac{x-\mu}{\psi} > 0$.

2.3.2 Posplošena Paretova porazdelitev

Predpostavimo, da porazdelitev X pogojno presega mejno vrednost u , kar bi lahko zapisali kot $Y = X - u > 0$. Pogojna porazdelitvena funkcija je naslednja:

$$F_u(y)P(Y \leq y|Y > 0) = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)}.$$

Ugotovimo da, ko $u \rightarrow \sup x : F(x) < 1$, lahko porazdelitveno funkcijo $F_u(y)$ zelo dobro ocenimo s pomočjo posplošene Paretove porazdelitve.

Definicija 2.5. Posplošena Paretova porazdelitev (GPD) definira porazdelitveno funkcijo G_ξ kot:

$$G_\xi(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x)^{-1/\xi} & \text{za } \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{za } \xi = 0, \end{cases}$$

kjer velja naslednje:

$$\begin{aligned} x &\geq 0 & \text{za } \xi &\geq 0, \\ 0 \leq x &\leq -1/\xi & \text{za } \xi &< 0. \end{aligned}$$

Tudi to porazdelitev lahko zapišemo še na drugi način:

$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi\frac{x}{\beta})^{-1/\xi} & \text{za } \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-x/\beta} & \text{za } \xi = 0, \end{cases}$$

kjer je $\beta > 0$ in $y \geq 0$, ko je $\xi \geq 0$, oziroma $0 \leq y \leq -\beta/\xi$, ko $\xi < 0$.

3 Odvisnost

V tem poglavju bomo obravnavali primere, ko so slučajne spremenljivke med seboj odvisne. Če imamo prisotno odvisnost med slučajnimi spremenljivkami, lahko poskusimo napovedati njihovo obnašanje s pomočjo statističnih metod in modelov (npr. ARCH in GARCH). Najprej si bomo ogledali mere za določanje natančnosti napovedi ter statistične metode za časovne vrste, ki so večrazsežno normalne. To so metoda drseče sredine, metoda tehtane drseče sredine ter metoda eksponentnega glajenja. Nato bomo nadaljevali z obravnavo GARCH(1,1) modela, ki se uporablja za napovedovanje nestanovitnosti, ki temelji na zgodovinskih vrednostih in pri katerem imajo najnovejši podatki večji pomen kot starejši. V splošnem se GARCH model osredotoča na varianco pogojne porazdelitve donosa, ki se v času spreminja, hkrati pa neko osnovo predstavlja tudi brezpogojna varianca. Ker imamo pri tem modelu opraviti z variancami z različno vrednostjo, dobimo porazdelitev z debelimi repi. To pomeni, da bo napovedana časovna vrsta bolj nagnjena k ekstremnim vrednostim. Še prej si oglejmo, kaj je stacionarnost, saj je to osnova časovnih vrst. Pod pojmom časovna vrsta razumemo niz istovrstnih podatkov v posameznih zaporednih časovnih trenutkih ali intervalih.

Poznamo strogo in šibko stacionarnost. Časovna vrsta X_t je strogo stacionarna, če je skupna porazdelitev $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_k}$, kjer je k poljubno pozitivno celo število in je t_1, t_2, \dots, t_k nabor k pozitivnih celih števil, nespremenjena (invariantna) ne glede na časovni zamik. Z drugimi besedami to pomeni, da je skupna porazdelitev $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_k}$ identična skupni porazdelitvi $x_{t_1+t}, x_{t_2+t}, \dots, x_{t_k+t}$ za vse t . Ker je to težko empirično dokazati, se večkrat predpostavlja šibkejšo različico stacionarnosti. Časovna vrsta X_t je šibko stacionarna, če sta, tako povprečje x_t kot tudi kovarianca med x_t in $x_{t-\ell}$, kjer je ℓ poljubno celo število, v času nespremenljivi. Bolj natančno: časovna vrsta X_t je šibko stacionarna, če (a) $E(x_t) = \mu$, ki je konstanta in (b) $\text{cov}(x_t, x_{t-\ell}) = \gamma_\ell$, ki je odvisna samo od ℓ . V praksi bi to pomenilo, da bi časovni prikaz podatkov T opazovanih časovnih točk $x_t, t = 1, 2, \dots, T$ pokazal, da vrednosti x_t nihajo s konstantno variacijo okoli fiksne vrednosti. Če pa je časovna vrsta X_t normalno porazdeljena, potem je šibka stacionarnost enakovredna strogi stacionarnosti [13].

3.1 Metode za odvisen primer

V tem poglavju bomo obravnavali metode, s katerimi pravzaprav poskušamo napovedati potek časovne vrste. Preden se posvetimo metodam, pa moramo obravnavati tudi mere za natančnost napovedi. Te mere se uporabljajo za ugotavljanje natančnosti določene metode, ki jo uporabimo in preverimo na podatkih časovne vrste, ki so že na voljo. S pomočjo teh mer lahko izberemo metodo, ki določene podatke najbolj obdela in nam poda čim bolj točno napoved za prihodnost.

Povprečna absolutna napaka je povprečje absolutnih vrednosti napak napovedi, s kratico MAE (ang. mean average error):

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |Y_i - F_i|,$$

kjer Y_i označujejo dejanske vrednosti in F_i napovedane vrednosti. To je mera, ki se z absolutno vrednostjo izogne problemu, da bi se pozitivne in negativne vrednosti med seboj izničile. Temu problemu se izogne tudi druga mera, le da se ta izogne z računanjem povprečja kvadratnih napak napovedi. Ta mera se imenuje povprečje kvadratnih napak in jo označujemo s kratico MSE (ang. mean squared error):

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - F_i)^2.$$

Za primerjave na različnih časovnih intervalih ali med različnimi časovnimi vrstami je boljša mera MAPE (ang. mean absolute percentage error) oziroma povprečje absolutnih odstotnih napak. Pri tej meri moramo najprej izračunati odstotno napako za vsako napoved in šele nato lahko izračunamo povprečje absolutnih vrednosti odstotkov napak napovedi:

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{Y_i - F_i}{Y_i} \right|,$$

Vse te mere natančnosti napovedovanja merijo natančnost metode, ki smo jo uporabili, na preteklih podatkih časovne vrste.

Če je uporabljena metoda natančna pri napovedovanju pri podatkih, ki so nam že znani, lahko predvidevamo, da bo metoda dovolj natančna tudi pri napovedovanju prihodnosti. Vendar pa se ni dobro zanašati samo na mere za natančnost napovedi, ampak je pri izbiri metode pomembna tudi dobra presoja in znanje o pogojih poslovanja, ki bi lahko vplivali na prihodnost.

3.1.1 Metoda drseče sredine

Metoda drseče sredine (ang. Moving Average) kot napoved za naslednje obdobje uporablja povprečje zadnjih n podatkov časovne vrste. Izraz “drseča” se uporablja, ker

se povprečje spremeni vsakič, ko dobimo na razpolago novo opazovano vrednost, saj vrednost le te zamenja vrednost najstarejše opazovane vrednosti v enačbi. Napoved drseče sredine reda n je naslednja:

$$F_{t+1} = \frac{Y_t + Y_{t-1} + \cdots + Y_{t-n+1}}{n},$$

kjer je F_{t+1} napoved za obdobje $t + 1$ časovne vrste in Y_t dejanska vrednost časovne vrste v obdobju t .

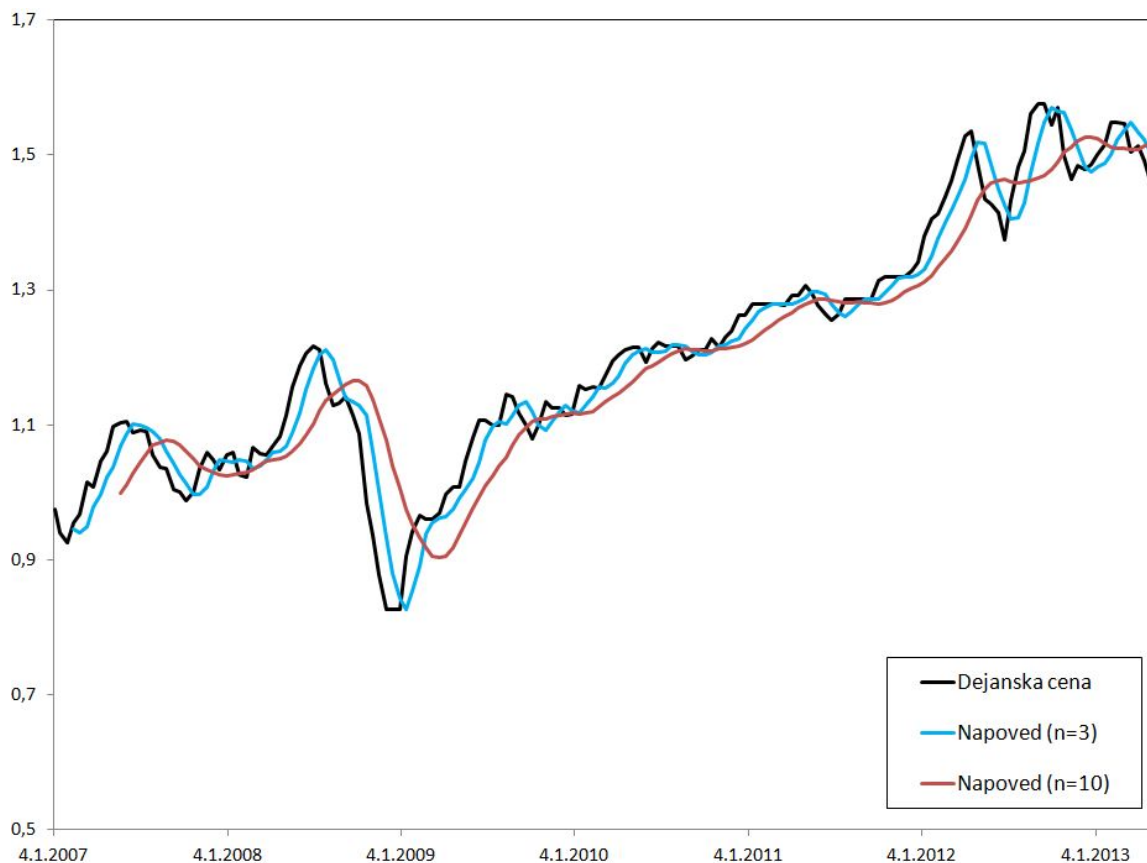
Za napovedovanje časovne vrste s pomočjo drseče sredine moramo najprej določiti število zadnjih vrednosti časovne vrste, ki jih bomo upoštevali v metodi, oziroma red. Če se nam zdijo pomembni tako starejši kot novejši podatki časovne vrste, potem je bolje izbrati večji n , če pa se nam zdijo pomembnejši samo zadnji podatki, potem je zaželeno izbrati manjši n . Časovne vrste s horizontalnim vzorcem se lahko preusmerijo na novo stopnjo v daljšem časovnem obdobju. Drseče povprečje se v takem primeru prilagodi novi ravni vrste in ponovno zagotavlja dobre napovedi v obdobju n . Manjša vrednost n bo hitreje sledila premikom v časovnem nizu, vendar pa je večja vrednost n bolj učinkovita pri glajenju naključnih nihanj v daljšem časovnem obdobju.

Primer 3.1. Metodo drseče sredine preizkusimo na podatkih o gibanjih drobnoprodajnih cen 95-oktanskega bencina v Sloveniji od začetka leta 2007 do 14.5.2013, saj je bil ta zadnji razpoložljivi podatek dne 23.5.2013 na spletni strani Ministrstva za gospodarski razvoj in tehnologijo. V skladu z Uredbo o oblikovanju cen naftnih derivatov se cene le teh spreminjajo vsakih 14 dni. Da bi dobili drsečo sredino, ki bi najbolj napovedala naslednjo vrednost časovne vrste, preizkusimo metodo na različnem številu podatkov, ki jih bomo uporabili pri računanju povprečja kot napovedi. Za ta števila izberimo vrednosti 3, 5 in 10.

Ker želimo ugotoviti, katera izmed teh metod najbolj obdela podatke in nam s pomočjo le teh poda najboljšo napoved, izračunajmo še mere za ugotavljanje natančnosti (lahko tudi samo eno). Poleg izračunanih mer za omenjene drseče sredine, izračunajmo tudi mero natančnosti za napoved, pri kateri je napovedana prihodnja vrednost enaka zadnji, ki nam je znana ($n = 1$).

Tabela 3.1: Mere natančnosti za metodo drseče sredine.

	$n = 1$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 10$
MAE	0,0184	0,0298	0,0392	0,0494
MSE	0,0006	0,0015	0,0026	0,0045
MAPE	1,5766	2,5640	3,3875	4,3179



Slika 3.1: Grafični prikaz gibanja cen bencina ter metode drseče sredine za $n = 3$ in $n = 10$.

Iz tabele 3.1 lahko razberemo, da je napoved metode drseče sredine na izbranih podatkih o cenah bencina v Sloveniji najbolj točna v primeru, ko smo enostavno izbrali zadnji podatek za napoved prihodnje vrednosti. Bolj, kot smo n povečevali, slabša oziroma manj natančna je bila napoved drseče sredine.

Primer 3.2. Zanima nas tudi, kako se pri manjšem obsegu podatkov drobnoprodajnih cen 95-oktanskega bencina spremeni natančnost drseče sredine. V tem primeru izberimo le podatke za eno leto nazaj in sicer od 15.5.2012 do 14.5.2013. Tudi v tem primeru za napoved uporabimo različna števila podatkov, s pomočjo katerih izračunamo sredino, ki nam predstavlja napoved za prihodnjo vrednost.

V tem primeru opazimo, da je izmed drsečih sredin z napovedjo zadnje vrednosti časovne vrste in napovedjo povprečja zadnjih 3 in 5 obdobji časovne vrste, najbolj natančen prvi, ko smo izbrali za napoved zadnji podatek, torej isti kot v zgornjem primeru, ko smo imeli na razpolago za izračun večji obseg podatkov. Ko pa smo izbirali vedno večje število n , smo, za razliko od prejšnjega primera, dobili vedno bolj natančno napoved. Do takšnih razlik je prišlo najverjetneje zaradi tega, ker je časovna

Tabela 3.2: Mere natančnosti za metodo drseče sredine pri manjšem obsegu podatkov.

	$n = 1$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$
MAE	0,0242	0,0379	0,0487	0,0349	0,0234
MSE	0,0010	0,0020	0,0033	0,0017	0,0008
MAPE	1,6254	2,5227	3,2080	2,3152	1,5567

vrsta pri manjšem obsegu podatkov videti bolj stacionarna.

3.1.2 Metoda tehtane drseče sredine

V metodi drseče sredine ima vsaka opazovana vrednost časovne vrste neko težo. Obstaja tudi druga različica te metode in sicer tehtana drseča sredina (ang. Weighted Moving Average), pri kateri lahko vsaki opazovani vrednosti določimo svojo težo. Napoved te metode izračunamo po naslednji formuli:

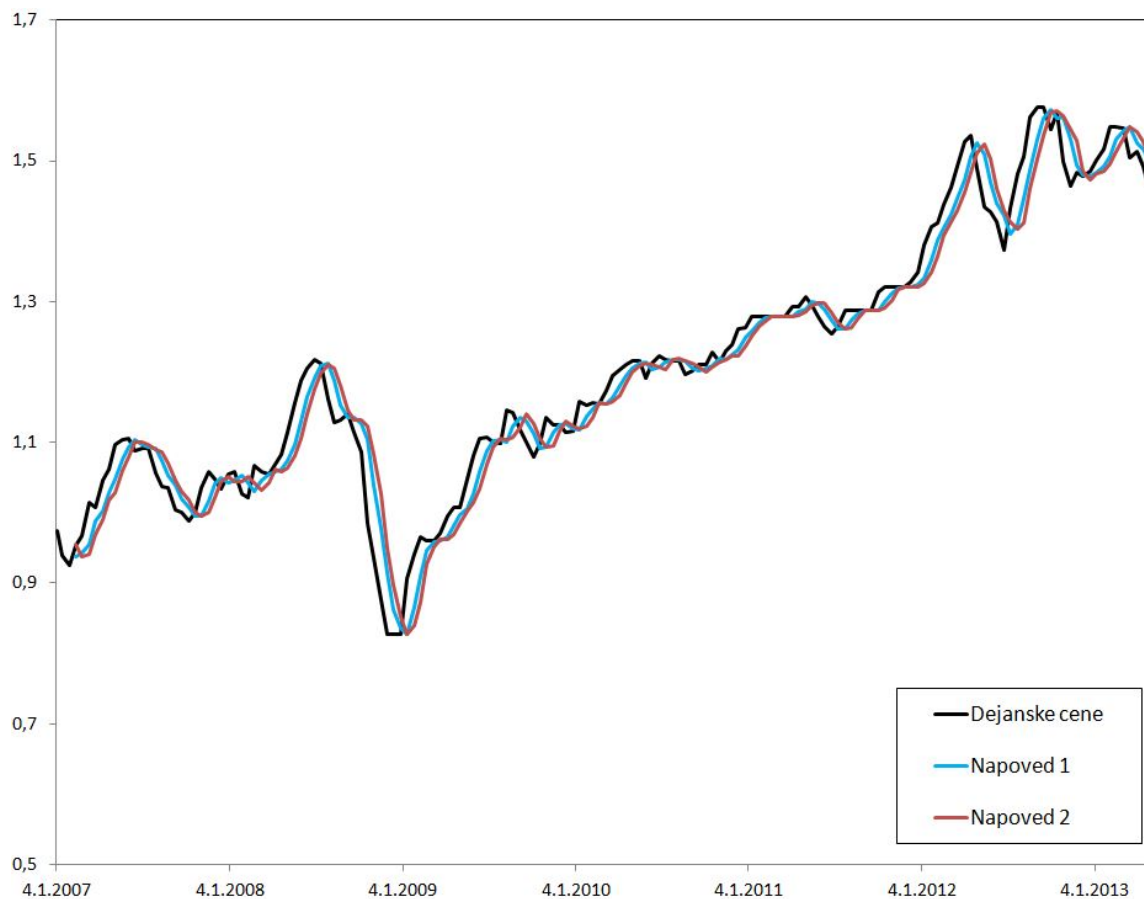
$$F_{t+1} = w_1 Y_t + w_2 Y_{t-1} + \dots + w_n Y_{t-n+1}, \quad \text{in velja } \sum_{i=1}^n w_i = 1,$$

kjer je F_{t+1} napoved za obdobje $t + 1$ časovne serije, Y_t dejanska vrednost časovne serije v obdobju t in so w_1, w_2, \dots, w_n uteži, ki smo jih določili dejanskim opazovanim vrednostim.

Pri tej metodi moramo najprej izbrati število opazovanih vrednosti, ki jih bomo vključili v izračun, ter jim šele nato dodati težo. V večini primerov določimo novejšim podatkom večjo težo kot starejšim, izjeme so primeri, ko je časovna vrsta zelo spremenljiva. V takem primeru je morda še najbolje, če izberemo približno enake uteži za opazovane vrednosti. Za preverjanje natančnosti metode glede na izbrano število podatkov ter uteži, ki smo jim jih določili, je priporočljiva uporaba MSE kot mera za natančnost napovedi.

Primer 3.3. Na podatkih o gibanjih drobnoprodajnih cen 95-oktanskega bencina v Sloveniji od začetka leta 2007 do 14.5.2013 preizkusimo tudi metodo tehtane drseče sredine. V tem primeru se najprej odločimo, da bomo v izračun vključili zadnje 3 opazovane vrednosti. Ker je po teoriji v večini primerov bolj natančna metoda, ki daje novejšim podatkom večjo težo (razen v izjemnih primerih), preverimo, če tudi za naš primer to drži. Za prvo napoved določimo uteži $w_1 = 1/6, w_2 = 2/6$ in $w_3 = 3/6$, pri drugi napovedi pa vrednosti prve in zadnje uteži samo zamenjamo, torej $w_1 = 3/6, w_2 = 2/6$ in $w_3 = 1/6$.

Pri računanju mer natančnosti za primerjavo z metodo drseče sredine vključimo še metodo z enakimi utežmi $w_1 = w_2 = w_3 = 1/3$. Opazimo lahko, da smo napovedi



Slika 3.2: Grafični prikaz gibanja cen bencina ter metode tehtane drseče sredine z večjo težo na novejših podatkih ter metodo tehtane drseče sredine z večjo težo na starejših podatkih.

metode drseče sredine izboljšali z metodo tehtane drseče sredine s pomočjo uteži. Tako kot v večini primerov, je tudi v našem primeru metoda bolj natančna, če ima večji poudarek na najnovejših podatkih, kot pa v primeru, ko imajo podatki enako težo. Ko smo pri tehtani drseči sredini dali večji pomen starejšim podatkom, smo dobili najmanj natančne napovedi.

Tabela 3.3: Mere natančnosti za metodo tehtane drseče sredine.

	$w_i = \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$	$w_i = \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	$w_i = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$
MAE	0,0257	0,0298	0,0341
MSE	0,0012	0,0015	0,0020
MAPE	2,2077	2,5640	2,9383

3.1.3 Metoda eksponentnega glajenja

Metoda eksponentnega glajenja (ang. Exponential Smoothing) je pravzaprav poseben primer metode tehtane drseče sredine, saj za napoved prav tako uporablja tehtano povprečje preteklih vrednosti časovne vrste. Glavna razlika med tema dvema metodama je ta, da pri eksponentnem glajenju določamo le težo zadnjemu opazovanju, teže ostalim opazovanjem pa se izračunavajo avtomatsko in postajajo vedno manjše za starejše opazovane vrednosti. Formula, s pomočjo katere izračunamo napoved eksponentnega glajenja, je naslednja:

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + (1 - \alpha)F_t,$$

kjer je F_{t+1} napoved za obdobje $t + 1$ časovne vrste, F_t napoved za obdobje t časovne serije, Y_t dejanska vrednost časovne serije v obdobju t in α konstanta glajenja, ki zavzema vrednost na intervalu $[0,1]$. Manjša vrednost konstante glajenja je zaželjena v primeru, ko časovna vrsta vsebuje večjo naključno variabilnost, saj ne želimo prehitro prilagajati napovedi. Za časovne vrste, ki vsebujejo relativno majhne naključne spremembe, je priporočljiva večja vrednost konstante glajenja. Le ta omogoča hitrejše prilagajanje napovedi, kar pomeni, da se napovedi hitreje odzovejo na spreminjajoče se razmere.

Zgornjo formulo lahko zapišemo tudi na drugačen način in sicer:

$$F_{t+1} = F_t + \alpha(Y_t - F_t),$$

pri kateri je napoved za obdobje $t + 1$ sestavljena iz vrednosti prejšnje napovedi F_t ter napake v obdobju t , ki je tehtana s konstanto glajenja α .

Da bomo videli, da je metoda eksponentnega glajenja pravzaprav tehtana sredina, zapišimo to formulo na dolg način:

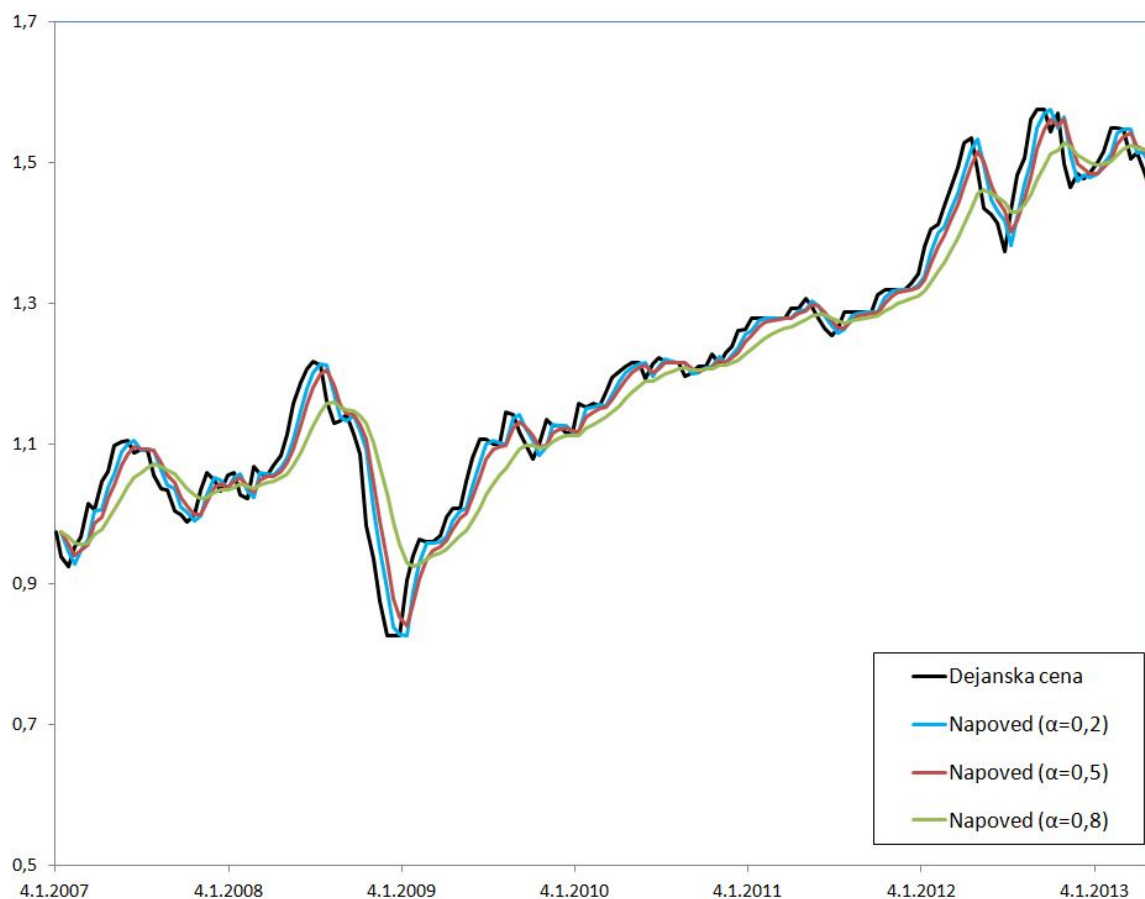
$$F_{t+1} = \alpha Y_t + (1 - \alpha)\alpha Y_{t-1} + (1 - \alpha)^2 \alpha Y_{t-2} + \dots + (1 - \alpha)^{t-1} \alpha Y_1 + (1 - \alpha)^t F_1.$$

Predvidevamo, da je napoved za prvo obdobje enaka dejanski vrednosti za to obdobje, torej $F_1 = Y_1$. Sedaj lahko zgornjo formulo zapišemo kot tehtano povprečje samih dejanskih vrednosti:

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + (1 - \alpha)\alpha Y_{t-1} + (1 - \alpha)^2 \alpha Y_{t-2} + \dots + (1 - \alpha)^{t-2} \alpha Y_2 + (1 - \alpha)^{t-1} Y_1.$$

Z razliko od drugih metod, metoda eksponentnega glajenja ne potrebuje vseh preteklih vrednosti časovne serije, da bi lahko napovedala vrednost le te v naslednjem časovnem obdobju. Za izračun napovedi v obdobju $t + 1$ potrebujemo le podatka o dejanski vrednosti časovne vrste v obdobju t (Y_t) in napoved za to obdobje (F_t).

Primer 3.4. Tako kot prejšnji metodi bomo tudi metodo eksponentnega glajenja preizkusili na podatkih o gibanjih drobnoprodajnih cen 95-oktanskega bencina v Sloveniji od začetka leta 2007 do 14.5.2013. V temu primeru bomo preizkusili, kakšen vpliv imajo različne vrednosti konstante glajenja na napoved omenjene metode. Pri računanju napovedi smo za α vzeli vrednosti 0,2, 0,5 in 0,8, kot napoved za drugo obdobje pa smo uporabili dejansko vrednost iz prvega obdobja časovne vrste.



Slika 3.3: Grafični prikaz gibanja cen bencina ter metode eksponentnega glajenja pri različnih vrednostih α .

Da bomo ugotovili, katera vrednost konstante glajenja je bolj primerna za izbrano časovno vrsto, izračunajmo še mere natančnosti. Napoved s pomočjo metode eksponentnega glajenja je najbolj natančna pri manjši vrednosti α . Sklepamo lahko, da so v naši časovni vrsti prisotne večje naključne spremembe. Če bi želeli napoved še izboljšati, bi lahko poskusili izračunati še napovedi pri še manjši vrednosti konstante glajenja (npr. $\alpha = 0,1$).

Tabela 3.4: Mere natančnosti za metodo eksponentnega glajenja pri različnih vrednostih α .

	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0,8$
MAE	0,0207	0,0274	0,0409
MSE	0,0008	0,0013	0,0030
MAPE	1,7752	2,3734	3,5523

3.2 GARCH (1,1)

Predpostavimo, da je model donosov (ang. return) naslednji:

$$r_t = \mu + \sigma_t z_t,$$

kjer je z_t zaporedje neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z $E(z_t) = 0$ in $var(z_t) = 1$. Engle (1982) predstavi ARCH(p) model (ang. autoregressive conditionally heteroskedastic model of order p) in izrazi pogojno varianco kot linearno funkcijo:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2, \end{aligned}$$

kjer je $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ normalno porazdeljena, $\varepsilon_t | I_t \sim N(0, \sigma_t^2)$, pri čemer nam I_t predstavlja množico informacij preteklih stanj. Da bo pogojna varianca pozitivna, morajo parametri zadostovati naslednjim pogojem: $\alpha_0 > 0$ in $\alpha_i \geq 0$ za $i = 1, 2, \dots, p$.

Bollerslev (1986) predlaga uporabno razširitev, generaliziran oziroma posplošen ARCH model (ang. generalized ARCH model), znan kot GARCH(p, q):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

kjer $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ za $i = 1, 2, \dots, p$, $\beta_j \geq 0$ za $j = 1, 2, \dots, q$ in $\sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$. Ta model predpostavlja, da pogojna varianca v času t ni odvisna samo od kvadratov napak v prejšnjem obdobju kot pri ARCH modelu, temveč tudi od pogojnih varianc v preteklem obdobju.

GARCH(1,1) model je najenostavnejši in najpogosteje uporabljen izmed vseh GARCH modelov, poznamo pa ga tudi pod imenom simetrični GARCH. Pogojno varianco pri tem modelu določa naslednja formula:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2,$$

z brezpogojno varianco $\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1}$, pri čemer velja $\alpha_1 \geq 0$ in $\beta_1 \leq 1$, $(\alpha_1 + \beta_1) < 1$. V tem modelu koeficient α_1 z veliko vrednostjo pomeni, da nestanovitnost reagira precej intenzivno glede na gibanje na trgu, medtem ko koeficient β_1 z veliko vrednostjo kaže na to, da potrebujejo šoki na pogojno varianco dolgo časa, preden izgubijo učinek. Potrebni in zadostni pogoj za predpostavko o stacionarnosti za GARCH(1,1) model je: $\alpha_1 + \beta_1 < 1$.

Ker za GARCH modele velja $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$, lahko to enačbo vstavimo v GARCH(1,1) model in dobimo naslednjo formulo:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sigma_{t-1}^2(\alpha_1 z_{t-1}^2 + \beta_1).$$

Napoved GARCH modela je mogoče dobiti na naslednji način. Za GARCH(1,1) model predvidevamo, da je naš začetni čas t . Napoved za en korak naprej je naslednja:

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2,$$

kjer sta ε_t in σ_t^2 v času t znana. Za napoved večih korakov naprej, najprej preuredimo formulo za GARCH(1,1) z uporabo enačbe $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$. Dobimo:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2(z_{t-1}^2 - 1).$$

Če naredimo sedaj dva koraka naprej in izpeljemo pogojno varianco za čas $t+2$, dobimo:

$$\sigma_{t+2}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_{t+1}^2 + \alpha_1 \sigma_{t+1}^2(z_{t+1}^2 - 1),$$

z $E((z_{t+1}^2 - 1)|I_t) = 0$. Za napoved dveh korakov naprej lahko zapišemo naslednjo enačbo:

$$\sigma_{t+2}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_{t+1}^2.$$

V splošnem lahko za napoved k -korakov naprej zapišemo naslednjo formulo:

$$\sigma_{t+k}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_{t+k-1}^2 \quad \text{za } k > 1.$$

Alternativno lahko zadnjo enačbo zapišemo tudi kot:

$$\sigma_{t+k}^2 = \sigma^2 + (\alpha_1 + \beta_1)^k(\sigma_t^2 - \sigma^2) \quad \text{za } k > 1.$$

Za GARCH(1,1) model so znani vsi potrebni in zadostni pogoji za obstoj stacionarne različice ε_t glede na to, da so parametri α_0, α_1 in β_2 ter porazdelitev z_t znani. Čeprav je GARCH(1,1) model z le tremi parametri, se v večini primerov smiselno prilagaja finančnim podatkom pod pogojem, da vzorec ni bil izbran iz predolgega obdobja, saj postane v tem primeru vprašljiva predpostavka o stacionarnosti. Statistično ocenjevanje parametrov v GARCH(1,1) modelu je nezahtevno [7, poglavje 5].

3.2.1 Ekstremalni indeks

Pri cenah finančnih imetij se izmenjavajo obdobja večje in manjše volatilnosti zaradi odvisnosti podatkov na lokalne razmere (recesija, naravne nesreče itd.), saj le te vplivajo na npr. menjalne tečaje in cene nepremičnin. Tako lahko v časovni vrsti običajno opazimo cel skupek večjih vrednosti v krajšem obdobju, ko se pojavi ena velika vrednost. Te skupine ekstremnih vrednosti lahko opišemo z ekstremalnim indeksom. Ekstremalni indeks je količina, ki omogoča določanje razmerja med strukturo odvisnosti podatkov in vedenjem njihovih ekstremov.

Definicija 3.5. Naj bo X_n strogo stacionarno zaporedje in θ nenegativno število. Predpostavimo, da za vsak $\tau > 0$ obstaja zaporedje u_n tako, da velja:

$$\begin{aligned} n(1 - F(u_n)) &\rightarrow \tau, \\ P(M_n \leq u_n) &\rightarrow e^{-\theta\tau}. \end{aligned}$$

potem imenujemo θ ekstremalni indeks zaporedja X_n .

Indeks lahko zavzema vrednosti na intervalu $(0, 1]$, saj je primer, ko je $\theta = 0$, nerealen. Če je $\theta = 1$, se preseganja meje pojavljajo posamezno. Vrednost ekstremalnega indeksa lahko ocenimo s pomočjo statističnih metod kot sta npr. metoda blokov (ang. The Blocks Method) in ekstremni indeks kot pogojna verjetnost (ang. The Runs Method), oglejte si tudi Embrechts [5, poglavje 8].

3.2.2 Ocenjevanje parametrov modela GARCH(1,1)

Pri ocenjevanju parametrov si največkrat pomagamo z metodo največjega verjetja. Na določen dan predpostavljamo, da so donosi za naslednji dan pogojno porazdeljeni kot normalna slučajna spremenljivka. Ob predpostavki, da so donosi neodvisni, pa lahko skupno porazdelitev zapišemo kot produkt mejnih gostot in jo izrazimo kot funkcijo verjetja. Pri tem mislimo na funkcijo, kjer nimamo danih podatkov za določanje parametrov, ampak parametri določajo podatke. Nato še maksimiziramo funkcijo verjetja glede na parametre. Večrazsežno gostoto lahko zapišemo kot produkt funkcij pogojne gostote:

$$\begin{aligned} f(r_1, r_2, \dots, r_N) &= f(r_N | r_1, r_2, \dots, r_{N-1}) f(r_1, r_2, \dots, r_{N-1}) = \dots = \\ &= f(r_N | r_1, r_2, \dots, r_{N-1}) f(r_{N-1} | r_1, r_2, \dots, r_{N-2}) \dots f(r_1). \end{aligned}$$

Za GARCH(1,1) z normalnimi porazdeljenimi pogojnimi donosi je funkcija verjetja naslednja:

$$L(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \mu | r_1, r_2, \dots, r_N) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_N^2}} \cdot e^{-\frac{(r_N-\mu)^2}{2\sigma_N^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{N-1}^2}} \cdot e^{-\frac{(r_{N-1}-\mu)^2}{2\sigma_{N-1}^2}} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \cdot e^{-\frac{(r_1-\mu)^2}{2\sigma_1^2}}$$

Ker funkcija $\log L$ monoton naraščajoča funkcija L , lahko maksimiziramo logaritem funkcije verjetja:

$$\log L(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \mu | r_1, r_2, \dots, r_N) = -\frac{N}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \log(\sigma_i^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(r_i - \mu)^2}{2\sigma_i^2}.$$

Če iz tega izpeljemo še logaritemsko funkcijo verjetja posamezne opazovane vrednosti r_t [1], dobimo naslednjo enačbo:

$$l_t = -\frac{1}{2} \left(\log \sigma_t^2 + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right),$$

kjer člena $\log(2\pi)$ nismo upoštevali, saj ne vpliva na oceno. Sedaj moramo $\sum l_t$ maksimirati. Parametre variance označimo z $\underline{\theta} = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)^T$. Parcialni odvodi so:

$$\frac{\partial l_t}{\partial \underline{\theta}} = \frac{1}{2\sigma_t^2} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) \underline{g}_t,$$

kjer je \underline{g}_t gradient:

$$\underline{g}_t = \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \underline{\theta}}.$$

Te odvode izračunamo z rekurzijo in dobimo naslednjo enačbo:

$$\underline{g}_t = \underline{u}_t + \beta \underline{g}_{t-1},$$

kjer je $\underline{u}_t = (1, \varepsilon_{t-1}^2, \sigma_{t-1}^2)$. To lahko zapišemo tudi drugače in sicer:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \alpha_0} &= 1 + \frac{\partial \sigma_{t-1}^2}{\partial \alpha_0}, \\ \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \alpha_1} &= \varepsilon_{t-1}^2 + \frac{\partial \sigma_{t-1}^2}{\partial \alpha_1}, \\ \frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \beta} &= \sigma_{t-1}^2 + \frac{\partial \sigma_{t-1}^2}{\partial \beta}. \end{aligned}$$

Če sedaj te odvode izenačimo z nič, dobimo sistem nelinearnih enačb, ki ga lahko rešimo s pomočjo Berndt-Hall-Hall-Hausmann (BHHH) algoritma:

$$\underline{\theta}_{i+1} = \underline{\theta}_i + \lambda_i \underline{H}_i^{-1} \underline{g}_i,$$

kjer je λ_i spremenljiva dolžina koraka, ki je izbrana za maksimiziranje funkcije verjetja, \underline{H}_i je Hessejeva matrika $\sum (g_t g_t^T)$ in $\underline{g}_i = \sum g_t$.

Ne smemo pozabiti, da moramo poleg parametrov $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ in μ oceniti tudi začetno nestanovitnost σ_1 . V teoriji velja, da v primeru, ko je časovna vrsta dovolj dolga, ocenjevanje σ_1 ni pomembno. V praksi se izkaže, da lahko dobro ocenjena σ_1 pripomore k boljšemu ocenjevanju tudi pri dolgi časovni vrsti. Zanj se najpogosteje privzame vrednost brezpogojne variance σ .

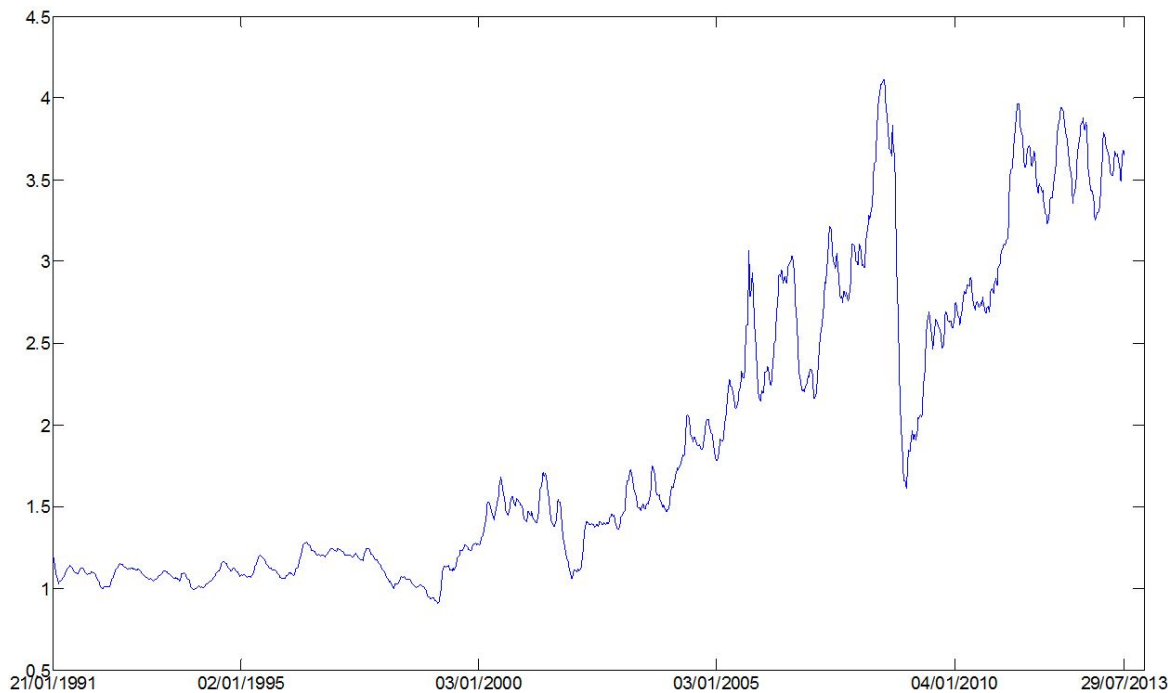
Moramo se zavedati, da je v primeru normalne porazdelitve donosov ocenjevanje dokaj nezapleteno in enostavno, saj imamo le tri parametre, ki jih moramo oceniti. V kolikor donosi nimajo normalne porazdelitve, postane ocenjevanje zahtevnejše, saj imamo zagotovo več parametrov, ki jih moramo oceniti. Poglejmo si primer, ko imajo donosi porazdelitev posplošene napake, GED (ang. Generalized Error Distribution) [11]. V tem primeru imamo naslednjo funkcijo logaritmiranega verjetja:

$$\log L(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \mu, \nu | r_1, r_2, \dots, r_N) = N(\log(\nu) - \log(\lambda)(1 + 1/\nu) \log(2) - \log(\Gamma(1/\nu))) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \log(\sigma_i^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{(r_i - \mu)^2}{\lambda^2 \sigma_i^2} \right)^{\nu/2}.$$

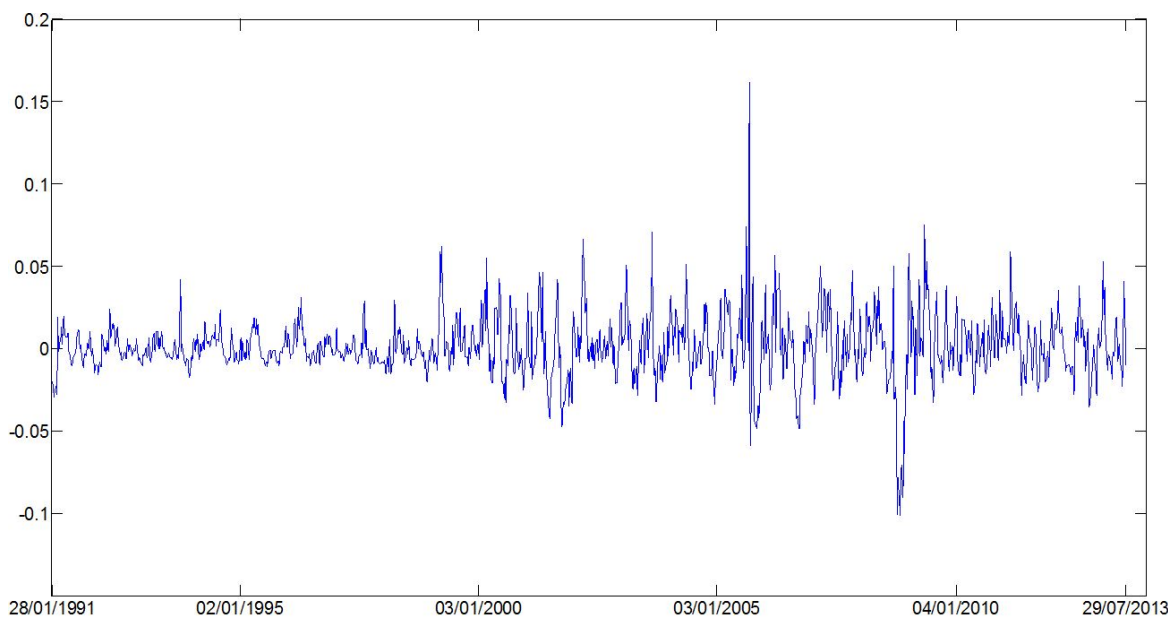
Če v to enačbo vstavimo še formulo za pogojno varianco modela GARCH(1,1), dobimo tudi v tem primeru funkcijo verjetja, ki je odvisna samo od parametrov in donosov r_t s to razliko, da imamo sedaj še dodatni parameter ν , ki ga moramo oceniti.

Primer 3.6. S pomočjo programa MATLAB bomo poskušali čim bolj opisati donose ter oceniti parametre modela GARCH(1,1) za tedenske cene navadnega bencina v Ameriki, ki sem jih dobila na spletni strani Ameriške uprave za podatke o energiji (U.S. Energy Information Administration). Te podatke smo izbrali, ker nam ponujajo dovolj dolgo časovno serijo za dobro ocenjevanje.

Na naslednjem grafu, ki prikazuje gibanje tedenskih cen bencina, lahko opazimo obdobja z majhnimi nihanji ter obdobja z velikimi nihanji cen. V letih od 1991 do 2000 so se cene zelo malo spreminjale, največje spremembe pa so cene doživljane med letoma 2005 in 2010. Ta opažanja potrди graf tedenskega donosa, ki je v določenih obdobjih veliko bolj raztresen.



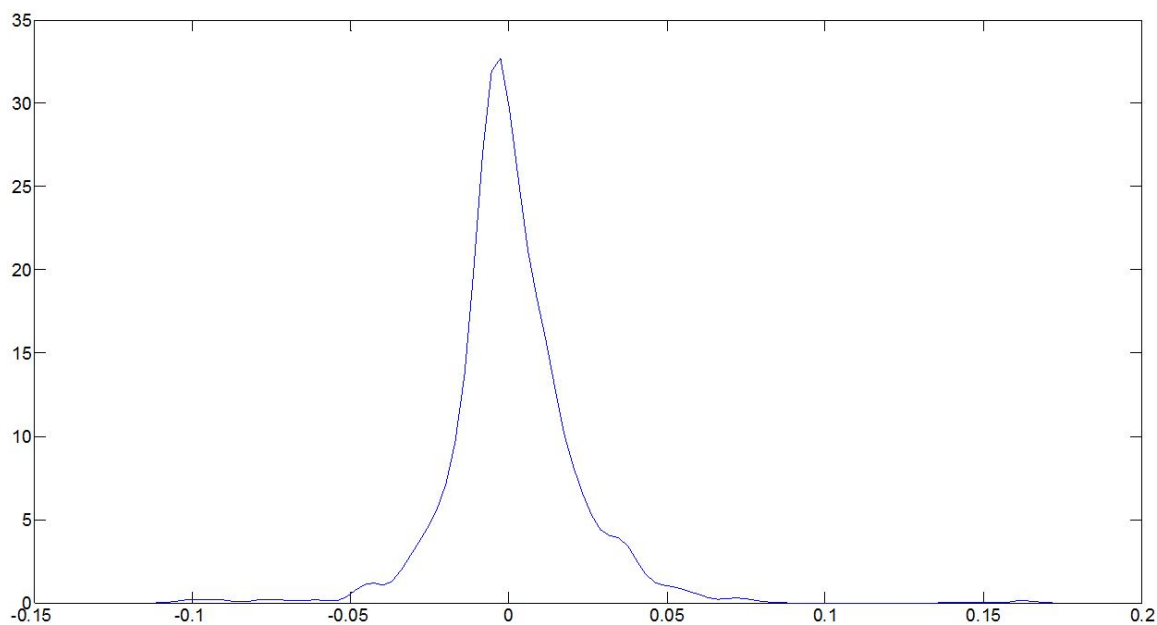
Slika 3.4: Grafični prikaz gibanja tedenskih cen bencina v Ameriki (enota: \$/galona).



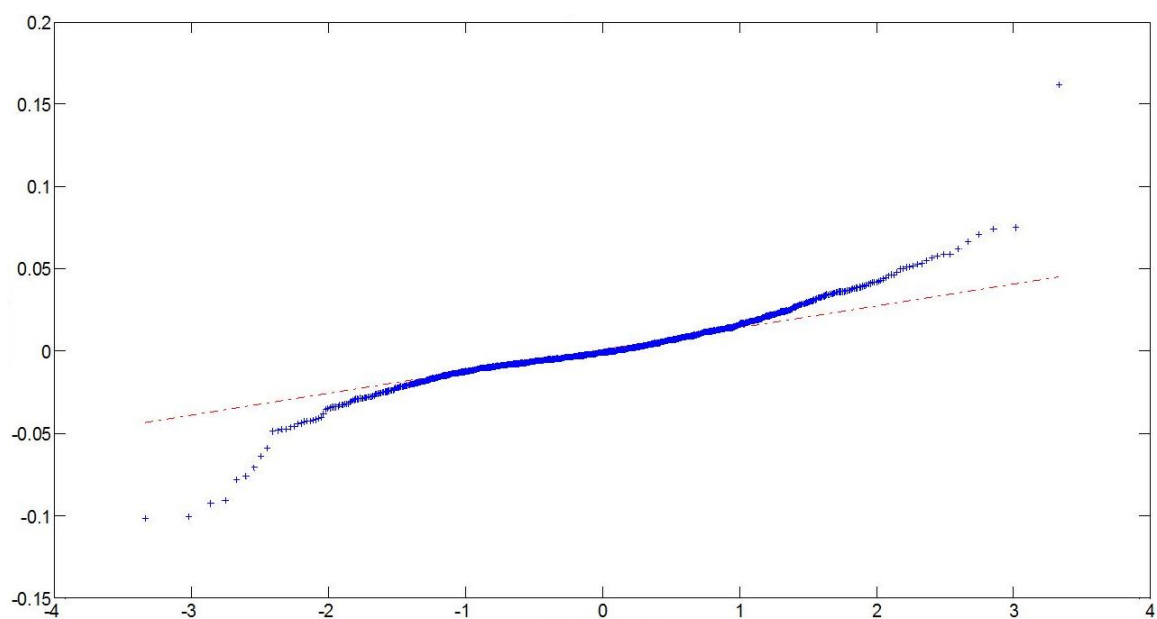
Slika 3.5: Grafični prikaz tedenskega donosa.

Naslednja grafa, tako porazdelitvena funkcija donosov kot tudi primerjava kvantilov, kažeta na to, da donosi niso normalno porazdeljeni. Porazdelitvena funkcija donosov ima v primerjavi z normalno porazdelitvijo bolj koničast vrh ter debelejše repe. Na podlagi tega lahko sklepamo, da je bolj nagnjena k ekstremnim vrednostim.

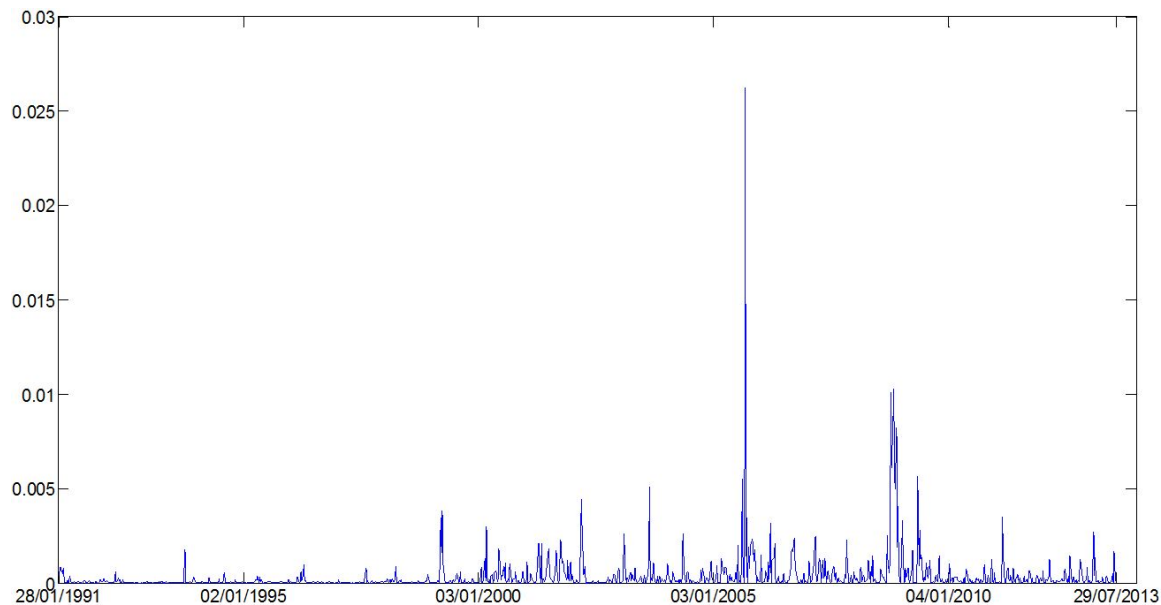
To ugotovitev potrjuje tudi grafični prikaz primerjave kvantilov, saj so si kvantili okoli 0 obeh porazdelitev zelo podobni, medtem ko je razlika med njimi vedno večja, če se pomikamo proti robovom porazdelitev. Prav zaradi takšnih donosov, ki niso normalno porazdeljeni, bomo pri ocenjevanju časovne vrste uporabili GARCH(1,1) model.



Slika 3.6: Grafični prikaz porazdelitvene funkcije donosov.

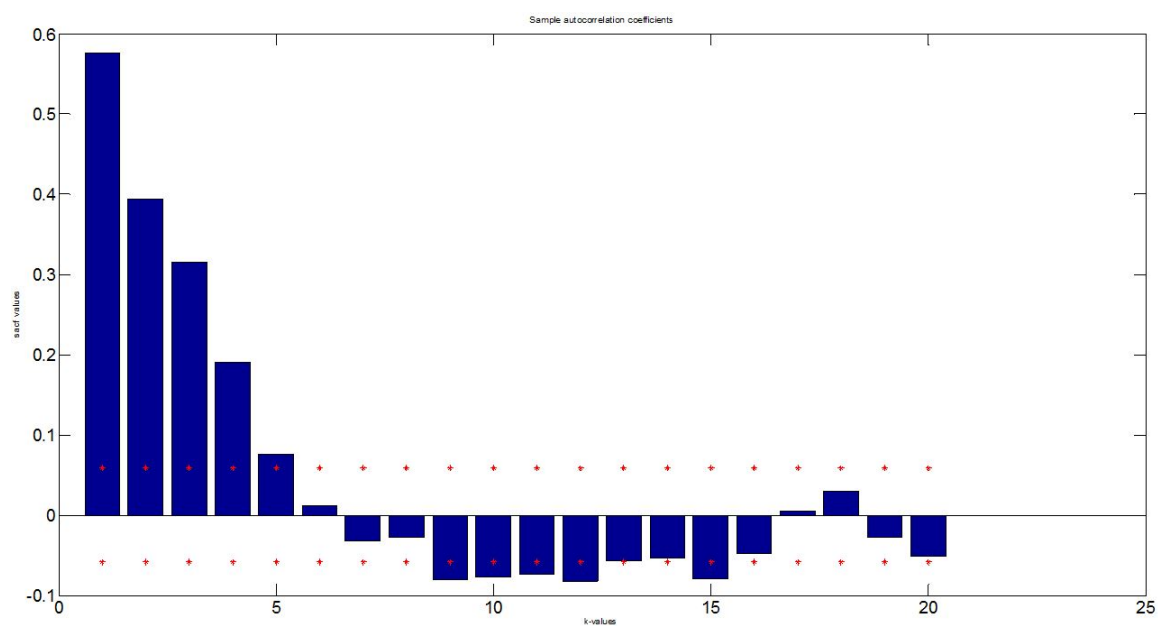


Slika 3.7: Grafični prikaz primerjave kvantilov donosov naše časovne vrste in kvantilov standardne normalne porazdelitve (QQ-graf).



Slika 3.8: Grafični prikaz kvadriranega donosa.

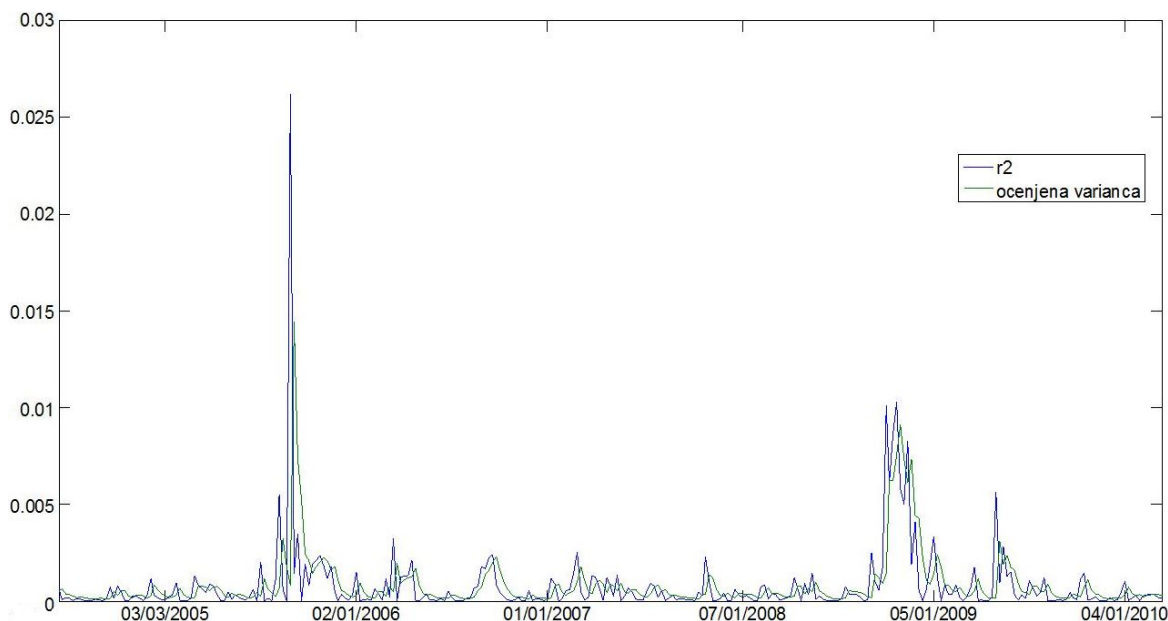
Na zgornjem grafu, ki prikazuje kvadrirane donose, se lepo opazi grozde oziroma skupine z večjo nestanovitnostjo in grozde z manjšo nestanovitnostjo. To je predvsem posledica odvisnosti kvadriranih donosov v nekem trenutku od preteklih kvadriranih donosov (glej sliko 3.9). Iz tega razloga bomo za ocenjevanje nestanovitnosti uporabili GARCH(1,1) model, saj omogoča modeliranje grozdenja le te.



Slika 3.9: Grafični prikaz vzorca avtokorelacijskih koeficientov.

Za oceno parametrov modela GARCH(1,1) sem uporabila program MATLABov do-datek za izračun GARCH(p,q) modelov (Spatial Econometrics, avtor: Kevin Sheppard, 2. popraviljanje, 31.12.2001). Ob predpostavki normalne porazdelitve nam ocenjejni parametri z metodo največjega verjetja predstavljajo tak GARCH(1,1) proces, ki se najbolje prilega uporabljenim podatkom. Za iskane parametre sem dobila naslednje ocenjene vrednosti: $\alpha_0 = 0,00003653$, $\alpha_1 = 0,54071594$ in $\beta_1 = 0,44909158$. Ocene parametrov zadostujejo pogojem GARCH(1,1). Poleg tega je bila izračunana tudi ocena variance, ki se spreminja v času. Na spodnji sliki je podana primerjava ocenjene nestanovitnosti in realnih kvadriranih donosov za 5 letno obdobje (januar 2005-januar 2010).

Opazimo lahko, da se občasno pojavljajo tudi večja odstopanja med oceno in podatki. To je predvsem posledica nenadnega šoka, ki povzroči nastanek grozda nestanovitnosti, ker v takšnem primeru GARCH model povsem zgreši napoved tega šoka, saj temelji samo na preteklih podatkih. Nato GARCH počasi, odvisno od α_1 in β_1 , prenese povečano nestanovitnost v napoved variance. GARCH torej vedno nekoliko zaostaja, ampak kljub temu uspe dokaj dobro zajeti vsaj preostanek grozda. Spomnimo se še, kaj pomeni velikost parametrov na odzivnost GARCH(1,1) modela: če je α_1 velika in β_1 majhna, je reakcija na šok hitra, vztrajanje tega šoka pa traja manj časa. Naši oceni teh dveh parametrov ($\alpha_1 > \beta_1$) kažeta na to, da bo naša napoved relativno hitro reagirala na nek šok, slednji pa ne bo zelo dolgo vztrajal.



Slika 3.10: Grafični prikaz ocenjene variance v primerjavi z dejanskim r^2 .

Preverimo še, ali v našem primeru drži, da je GARCH(1,1) model pri napovedovanju ekstremnih vrednosti boljši od preprostega modela, pri katerem so porazdelitve tedenskih donosov normalne. Za preizkus smo si izbrali 99 kvantil $q_{\frac{99}{100}}$. Najprej smo brezpogojni standardni odklon pomnožili z 2,326, nato pa smo prešteli, kolikokrat so dejanski tedenski donosi presegli to mejo. Tako smo v primeru, ko smo uporabili preprosti model z normalno porazdeljenimi donosi, dobili kar 222 ekstremnih vrednosti, ki presegajo izračunano mejo 99 kvantila. To predstavlja skoraj petino vseh vrednosti tedenskih donosov, natančneje 18,89%. Podobno smo naredili tudi za GARCH(1,1) model, le da smo tokrat namesto brezpogojnega standardnega odklona pomnožili pogojni standardni odklon, ki se v času spreminja. V tem primeru smo prešteli skoraj polovico manj ekstremnih vrednosti, ki presegajo izračunano mejo 99 kvantila, in sicer 113, kar predstavlja 9,62% vseh vrednosti tedenskih donosov. Vendar pa je to še vedno kar precej velik odstotek preseganj glede na to, da naj bi ob predpostavki normalne porazdelitve teh preseganj bilo le 1%. Morda bi bilo zaradi tega smiselno oceniti GARCH ob predpostavki gostote verjetnosti, ki dopušča debelejšo repe, npr. GARCH s t-porazdelitvijo. Na podlagi dobljenih rezultatov za naš primer pa lahko potrdimo, da je model GARCH(1,1) pri napovedovanju ekstremnih vrednosti boljši od preprostega modela, pri katerem so tedenski donosi normalno porazdeljeni.

Tabela 3.5: Rezultati primerjave GARCH(1,1) modela in preprostega modela z normalno porazdeljenimi tedenskimi donosi pri napovedovanju ekstremnih vrednosti.

	Preprost model	GARCH(1,1)
Št. opazovanih vrednosti	1175	1175
Št. preseženih vrednosti	222	113
Presežki v %	18,89	9,62

4 Zaključek

Če želimo čim bolj napovedati obnašanje svetovnih finančnih trgov v prihodnosti, je nujno potrebno, da poznamo tudi statistično ozadje ekstremnih vrednosti. V drugem poglavju smo si ogledali primere, ko so spremenljivke med seboj neodvisne ali deloma odvisne. To so primeri, ki so v realnosti zelo redki. Kljub temu pa nam služijo kot odlična podlaga za statistične metode in modele, ki jih lahko uporabljamo pri napovedovanju in obravnavi časovnih vrst.

Kot statistične metode za večrazsežno normalne časovne vrste smo poglavju 3.1 obravnavali metodo drseče sredine, metodo tehtane drseče sredine in metodo eksponentnega glajenja. Na natančnost napovedi teh metod je v veliki meri vplivalo število podatkov, ki smo jih vključili v izračun oziroma velikost izbrane konstante α pri metodi eksponentnega glajenja. Od vseh poizkusov, ki sem jih izvedla, se je na mojih podatkih za najbolj natančnega izkazal najbolj enostaven model. To je tisti, pri katerem sem za napoved prihodnje vrednosti enostavno izbrala zadnji podatek, ki sem ga imela na voljo. Če izključimo ta poizkus, pa se je od statističnih metod najbolj izkazala metoda eksponentnega glajenja pri najmanjši izbrani konstanti glajenja.

Za daljše in bolj zahtevne časovne vrste pa so največkrat v uporabi modeli iz družine ARCH. Sami modeli ARCH so nekoliko manj prilagodljivi, zato se jih redko uporablja na področju financ. Najpogosteje se iz njihove družine uporablja modele GARCH, predvsem GARCH(1,1), ki sem ga tudi obravnavala. Ker so pogost pojav nestanovitnosti skupine oziroma grozdi, v katerih so obdobja visoke oziroma nizke variance podatkov, je cilj modela GARCH vključevanje teh skupin v repe porazdelitve danih podatkov. Zaradi tega je za GARCH modele značilna brezpogojna porazdelitev z debelejšimi repi kot pri normalni porazdelitvi. Poleg tega je model GARCH sposoben tudi določanja uteži za pretekla opazovanja v podatkih. Največjo utež dodeli najnovejšemu podatku, nato pa jo eksponentno zmanjšuje kot metoda eksponentnega glajenja.

Pomanjkljivost GARCH(1,1) modela je enaka kot pri ostalih modelih napovedovanja varianc in ta je, da ni sposoben določiti predznaka nestanovitnosti donosa. Tako lahko s pomočjo tega modela določimo le raven nestanovitnosti na podlagi absolutne vrednosti, ne moremo pa določiti ali bo sprememba pozitivna ali negativna. V prid GARCH modelom pa je njihova razširitev, ki lahko modelira tudi asimetrijo v nestanovitnosti, poznana kot mejni (ang. Threshold) GARCH. Čeprav je najpogosteje

uporabljen simetrični GARCH(1,1) model, pa bi ga lahko v prihodnosti, prav zaradi tega dodatka, nasledil tako imenovani TGARCH model.

Literatura

- [1] C. ALEXANDER, *Market Models: A Guide to Financial Analysis*, John Wiley & Sons, 2001. (*Citirano na strani 22.*)
- [2] D. R. ANDERSON, D. J. SWEENEY in T. A. WILLIAMS, *Essentials of Modern Business Statistics*, Cengage Learning, 2011. (*Citirano na strani 2.*)
- [3] T. ANGELIDIS, A. BENOS in S. DEGIANNAKIS, The Use of GARCH Models in VaR Estimation, *Statistical Methodology* 1(1-2) (2003), 105-128. (*Ni citirano.*)
- [4] T. BOLLERSLEV, Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, *Journal of Econometrics* 31 (1986), 307-327. (*Ni citirano.*)
- [5] P. EMBRECHTS, C. KLÜPPELBERG in T. MIKOSCH, *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, 1997. (*Citirano na straneh VI, 2, 9 in 21.*)
- [6] R. F. ENGLE, Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica* 50 (1982), 987-1007. (*Ni citirano.*)
- [7] B. FINKENSTADT in H. ROOTZEN, *Extreme Values in Finance, Telecommunications, and the Environment*, Taylor & Francis, 2003. (*Citirano na straneh 2 in 20.*)
- [8] M. GILLI in E. KËLLEZI, An Application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk, *Computational Economics* 27(1) (2006), 1-23. (*Citirano na straneh VI in 3.*)
- [9] B. V. GNEDENKO, Sur La Distribution Limite Du Terme Maximum D'Une Série Aléatoire, *Annals of Mathematics* 44(3) (1943), 423-453. (*Citirano na strani 8.*)
- [10] E. JONDEAU, S.-H. POON in M. ROCKINGER, *Financial Modeling Under Non-gaussian Distributions*, Springer, 2007. (*Citirano na strani 2.*)
- [11] R. REDIER, *Volatility Forecasting I: GARCH Models*, Lecture Series, New York University, 2009. (*Citirano na strani 23.*)

- [12] R.-D. REISS in M. THOMAS, *Statistical Analysis of Extreme Values: With Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*, Springer, 2007. (*Citirano na strani 2.*)
- [13] R. S. TSAY, *Analysis of Financial Time Series*, John Wiley & Sons, Second Edition, 2005. (*Citirano na strani 11.*)
- [14] N. WAGNER, T. MARSH in HAAS SCHOOL OF BUSSINES, *On Adaptive Tail Index Estimation for Financial Return Models*, 295. izdaja od Research Program in Finance Working Paper Series, Institute of Business and Economic Research, University of California at Berkeley, 2000. (*Ni citirano.*)