UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Zaključna naloga

Nepristransko ocenjevanje recipročnih vrednosti parametrov v normalni porazdelitvi

(Unbiased estimation of reciprocal parameters in normal distribution)

Ime in priimek: Ana Ilić
Študijski program: Matematika v ekonomiji in financah
Mentor: izr. prof. dr. Rok Blagus

Koper, november 2021

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Ana ILIĆ

Naslov zaključne naloge: Nepristransko ocenjevanje recipročnih vrednosti parametrov v normalni porazdelitvi

Kraj: Koper

Leto: 2021

Število listov: 47 Število tabel: 3

Število prilog: 5 Število strani prilog: 21 Število referenc: 3

Mentor: izr. prof. dr. Rok Blagus

Ključne besede: normalna porazdelitev, metoda največjega verjetja, (ne)pristranost, modificirana funkcija zbira, Fisherjeva informacija, iteracija, simulacije.

Math. Subj. Class. (2020): 62F12

Izvleček:
V tej nalogi ocenjujemo recipročne vrednosti parametrov normalne porazdelitve. Najprej bomo cenilke izračunali po metodi največjega verjetja. Ponavadi cenilke dobljene po metodi največjega verjetja niso nepristranske, zato uporabimo modificirano funkcijo zbira. Pomagali si bomo tudi z iteracijo, ki sta jo predlagala Kosmidis in Firth. Dobljene cenilke bomo primerjali s simulacijami, kjer bomo spreminjali velikost vzorca in dejanske vrednosti parametrov. Imeli bomo tri ločene sekcije, recipročne vrednosti obeh parametrov, ali pa recipročna vrednost prvega parametra ali pa drugega. Na koncu bomo rezultate predstavili. Rezultate smo dobili s pomočjo programskega jezika R.

Key words documentation

Name and SURNAME: Ana ILIĆ

Title of final project paper: Unbiased estimation of reciprocal parameters in normal distribution

Place: Koper

Year: 2021

Number of pages: 47 Number of tables: 3

Number of appendices: 5 Number of appendix pages: 21 Number of references: 3

Mentor: Assoc. Prof. Rok Blagus, PhD

Keywords:normal distribution, maximum likelihood, (un)bias, modified score function, Fisher information, iteration, simulation.

Math. Subj. Class. (2020): 62F12

Abstract:
In this paper we will estimate reciprocal parameters of normal distribution with the maximum likelihood method. Usually estimators obtained by the maximum likelihood method are not unbiased therefore a modified score function was selected and the iteration suggested by Kosmidis and Firth. The obtained estimators will be compared throught a simulation. In the simulation there will be three sections: one with both reciprocal parameters, one with the first reciprocal parameter and one with te second reciprocal parameter. At the end, the results of the simulation will be explained, which were obtained with the programming language R.

Zahvala

Rada bi se zahvalila mentorju, družini in prijateljem.

Kazalo vsebine

Kazalo tabel

Kazalo prilog

Seznam kratic

oz.	oziroma
ang.	angleško
ML	maximum likelihood
KF	Kosmidis-Firth

1 Uvod

Namen naloge bo ocenjevati recipročne vrednosti parametrov v normalni porazdelitvi. Cilj je predlagati cenilke za nepristransko ocenjevanje $1/\mu$ in $1/\sigma^2$, kjer je μ povprečje in σ^2 varianca neke normalne porazdelitve. Parameter $1/\sigma^2$ pogosto imenujemo tudi parameter točnosti (ang. *precision*), ki se ga uporablja v Bayesovski statistiki. Želimo, da se naše cenilke ujemajo s parametrom, ki ga ocenjujemo. Predstavili bomo metodo največjega verjetja (ML) in izračunali cenilke. Videli bomo, da cenilke za recipročne vrednosti parametrov v normalni porazdelitvi, ki jih dobimo po ML metodi niso nepristranske, zato bomo ustrezno modificirali funkcijo zbira (ang. *score function*), da bodo cenilke dobljene na podlagi modificirane funkcije zbira nepristranske oz. manj pristranske. Uporabili bomo metodo, ki sta jo predlagala Kosmidis in Firth, ta temleji na Newton-Raphsonovi iteraciji. Bralec bo podrobnosti metode našel v [1].

V zadnjem poglavju bomo s simulacijo primerjali obe metodi. Za vsako cenilko bo zapisana njena pristranost, varianca in srednja kvadratna napaka, kjer bomo spreminjali velikost vzorca in dejanske vrednosti parametrov.

2 Izpeljava cenilk

Predpostavimo, da so $x_i, i = 1, \ldots, n$ neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke X_i iz normalne porazdelitve, s povprečjem μ in varianco σ^2. Gostoto normalne porazdelitve zapišemo kot

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}.$$

2.1 Metoda največjega verjetja

Definicija 2.1. Imejmo vzorec velikosti n. Označimo vrednosti vzorca z $x_i, i = 1, \ldots, n$. Označimo gostoto porazdelitve (oz. funkcijo verjetja) z f, kjer λ označuje parametre te porazdelitve. Potem je funkcija verjetja definirana kot

$$L(x, \lambda) = f(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n, \lambda).$$

V kolikor imamo neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke $X_i, i = 1, \ldots, n$,

$$L(x, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i = x_i, \lambda).$$

Zanimalo nas bo za katero vrednost λ, bo funkcija L pri danih podatkih največja možna. V praksi je bolj enostavno uporabiti logaritem funkcije verjetja ($l(x, \lambda) = logL(x, \lambda)$, kjer je $log()$ naravni logaritem), saj je bolj enostaven za računanje. [3]

Najprej bomo z metodo največjega verjetja (ML) ocenili parameter $\delta = (\mu, \sigma^2)$ normalne porazdelitve. Logaritem funkcije verjetja je

$$l(x, \delta) = \sum_{i=1}^{n} \log(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2.$$

Odvajamo logaritem verjetja po μ in σ^2, ter enačimo z 0, da dobimo maksimum. Cenilki za μ in σ^2 po metodi največjega verjetja sta

$$\hat{\mu} = \bar{X} \tag{2.1}$$

in

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2. \tag{2.2}$$

Definicija 2.2. Naj bo $b(\lambda) = E(\hat{\lambda}) - \lambda$ pristranost cenilke λ. V kolikor je $b(\lambda) = 0$ (oz. $E(\hat{\lambda}) = \lambda$), pravimo da je cenilka λ nepristranska. [3]

Nepristranskost je zelo pomembna lasnost pri cenilkah, pove nam, da naša cenilka v povprečju ocenjuje pravo vrednost. To lahko preverimo z izračunom pričakovane vrednosti obeh cenilk. Začnimo z $\hat{\mu}$,

$$E(\hat{\mu}) = E(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \mu.$$

Vidimo, da velja $E(\hat{\mu}) = \mu$, torej je cenilka nepristranska. Isto naredimo za $\hat{\sigma}^2$ in dobimo

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}^2) &= E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2) = \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2) \\ &= \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{X}^2) = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} E(x_i^2) - nE(\bar{X}^2)) \\ &= \frac{1}{n}(n(\sigma^2 + \mu^2) - n(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2)) \\ &= \sigma^2\frac{n-1}{n}. \end{aligned}$$

Tokrat nismo dobili nepristranske cenilke.
Sedaj bomo izpeljali recipročne vrednosti parametrov iz normale porazdelitve po istem postopku. Zapišemo nov parameter $\omega = (\theta, \psi) = (1/\mu, 1/\sigma^2)$ in funkcijo verjetja v tej parametrizaciji

$$L(x, \omega) = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{\psi}{2\pi}} exp(-\frac{(x_i - \frac{1}{\theta})^2\psi}{2}),$$

ter logaritem verjetja

$$l(x, \omega) = \sum_{i=1}^{n} \log \sqrt{\frac{\psi}{2\pi}} exp(-\frac{(x_i - \frac{1}{\theta})^2\psi}{2}) = \frac{n}{2}\log\psi - \frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{\psi}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \frac{1}{\theta})^2.$$

ML cenilki za parameter θ in ψ, dobimo kot rešitvi

$$\frac{\partial l}{\partial\theta} = -\frac{\psi}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n\psi}{\theta^3} = 0$$

in

$$\frac{\partial l}{\partial\psi} = \frac{n}{2\psi} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \frac{1}{\theta})^2 = 0,$$

od koder dobimo ML cenilki

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}} \tag{2.3}$$

in

$$\hat{\psi} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}. \tag{2.4}$$

Opazimo, da je sistem enostavno analitično rešljiv in da so ML cenilke za θ in ψ, kar $1/\hat{\mu}$ in $1/\hat{\sigma}^2$. Dobili smo, da je $\hat{\sigma}^2$ pristranska cenilka, saj $E(\hat{\sigma}^2) \neq \sigma^2$. To velja tudi za $\hat{\theta}$ in $\hat{\psi}$, kjer bomo njuno pristranost računali v naslednjem poglavju. Da bi zmanjšali pristranost cenilk bomo uporabili drugačno metodo, ki jo je predlagal David Firth.

2.2 Nepristranske in manj pristranske cenilke

David Firth je v članku Biometrika pokazal kako lahko zmanjšamo pristranost za vse ML cenilke. Ideja je, da pristranost v $\hat{\lambda}$ lahko zmanjšamo z vpeljavo manjše pristranosti v funkciji zbira. To dobimo s pomočjo modificirane funkcije zbira. [2]

Definicija 2.3. Naj bo $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_p)$ ML cenilka za parameter $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, ki jo dobimo kot rešitev

$$U_r(\lambda) = \tfrac{dl(x,\lambda)}{d\lambda_r} = 0, \text{ za } r = 1, \ldots, p,$$

kjer je $U_r(\lambda)$ funkcija zbira, $l(\lambda)$ pa logaritem funkcije verjetja.

Definicija 2.4. Modificirano funkcijo zbira označimo z $U^* = (U_1^*, \ldots, U_p^*)$. Formula, ki zmanjša pristranost je

$$U^{*,O}(\lambda) = U(\lambda) + A^O,$$

ali pa

$$U^{*,E}(\lambda) = U(\lambda) + A^E,$$

kjer pri izračunu A^O in A^E uporabimo

$$A^O = -i(\lambda)b(\lambda)$$

in

$$A^E = -I(\lambda)b(\lambda).$$

Pri A^O uporabimo opazovano informacijsko matriko, pri A^E pa Fisherjevo informacijo.

V našem primeru bomo uporabili modificirano funkcijo zbira, ki temelji na A^E prilagoditvi.

Definicija 2.5. Naj bo $i(\lambda)$ $p \times p$ matrika z elementi a_{ij},

$$a_{ij} = -\tfrac{dU_i(\lambda)}{d\lambda_j}, \text{ za } i = 1, \ldots, p \text{ in } j = 1, \ldots, p.$$

Funkciji $i(\lambda)$ pravimo opazovana Fisherjeva informacija.

Definicija 2.6. Naj bo $I(\lambda)$ $p \times p$ matrika z elementi a_{ij},

$$a_{ij} = -E(\tfrac{dU_i(\lambda)}{d\lambda_j}), \text{ za } i = 1, \ldots, p \text{ in } j = 1, \ldots, p.$$

Funkciji $I(\lambda)$ pravimo Fisherjeva informacija.

Vrnimo se k primeru, ko imamo parameter $\delta = (\mu, \sigma^2)$. Funkcija zbira je enaka

$$U(\delta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2}(\sum_{i=1}^n x_i - n\mu) \\ \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - \frac{n}{2\sigma^2} \end{pmatrix},$$

za Fisherjevo informacijo dobimo

$$I(\delta) = \begin{pmatrix} n/\sigma^2 & 0 \\ 0 & n/2\sigma^4 \end{pmatrix}.$$

Za pristranost cenilke δ dobimo $b_\mu = 0$ in $b_{\sigma^2} = -\sigma^2/n$. Vse skupaj vstavimo v formulo za modificirano funkcijo zbira in dobimo

$$U^*(\delta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2}(\sum_{i=1}^n x_i - n\mu) \\ \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - \frac{n-1}{2\sigma^2} \end{pmatrix}.$$

Rešimo sistem $U_r^*(\delta) = 0$, za $r = 1, 2$ in dobimo, da sta novi cenilki za μ in σ^2 enaki $\tilde{\mu} = \bar{X}$ in $\tilde{\sigma}^2 = 1/(n-1)\sum(x_i - \bar{X})^2$. Vidimo, da je cenilka za μ enaka kot prej in vemo, da je nepristranska. Izračunamo še pričakovano vrednost za $\tilde{\sigma}^2$

$$\begin{aligned} E(\tilde{\sigma}^2) &= \frac{1}{n-1}E(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2) = \frac{1}{n-1}E(\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{X} + \bar{X}^2) \\ &= \frac{1}{n-1}E(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{X}^2) = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^n E(x_i^2) - nE(\bar{X}^2)) \\ &= \frac{1}{n-1}(n(\sigma^2 + \mu^2) - n(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2)) = \frac{1}{n-1}\sigma^2(n-1) = \sigma^2. \end{aligned}$$

Opazimo, da je $\tilde{\sigma}^2$ nepristranska cenilka.

Ponovimo isti postopek za parameter ω. Funkcijo zbira smo že izračunali v prejšnjem poglavju. Računamo $I(\omega)$, ki ga je možno dobiti tudi na drugi način s pomočjo matrike $I(\delta)$ z uporabo verižnega pravila. Najprej bomo uporabili verižno pravilo na funkciji verjetja od ω

$$U_r(\omega) = \tfrac{dl(x,\omega)}{d\omega_r} = \tfrac{dl(x,\omega)}{d\delta_k} \cdot \tfrac{d\delta_k}{d\omega_r} = U_k(\delta)\tfrac{d\delta_k}{d\omega_r}, \text{ za } r = 1, \ldots, p \text{ in } k = 1, \ldots, p.$$

Zapišemo definicijo Fisherjeve informacije za parameter ω in vstavimo nov izraz za $U_r(\omega)$, da dobimo

$$\begin{aligned}
I(\omega) &= -E(\frac{dU_r(\omega)}{d\omega_k}) = -E(\frac{d}{d\omega_k}(U_r(\delta)\frac{d\delta_r}{d\omega_k})) \\
&= -E(\frac{dU_r(\delta)}{d\omega_k} \cdot \frac{d\delta_r}{d\omega_k} + U_r(\delta) \cdot \frac{d^2\delta_r}{d\omega_k^2}) \\
&= -E(\frac{dU_r(\delta)}{d\delta_k} \cdot \frac{d\delta_k}{d\omega_k} \cdot \frac{d\delta_r}{d\omega_k} + U_r(\delta) \cdot \frac{d^2\delta_r}{d\omega_k^2}) \\
&= -E(\frac{dU_r(\delta)}{d\delta_k}) \cdot (\frac{d\delta_r}{d\omega_k})^2 - E(U_r(\delta)) \cdot \frac{d^2\delta_r}{d\omega_k^2} \\
&= I(\delta)(\frac{d\delta_r}{d\omega_k})^2 - E(U_r(\delta)) \cdot \frac{d^2\delta_r}{d\omega_k^2}.
\end{aligned}$$

$E(U_r(\delta)) = 0$ zato je $I(\omega) = I(\delta)(\frac{d\delta_r}{d\omega_k})^2$. Torej je Fisherjeva informacija enaka

$$\begin{aligned}
I(\omega) &= \begin{pmatrix} n/\sigma^2 & 0 \\ 0 & n/2\sigma^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\theta^2 & 0 \\ 0 & -1/\psi^2 \end{pmatrix}^2 \\
&= \begin{pmatrix} n\psi & 0 \\ 0 & n\psi^2/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\theta^2 & 0 \\ 0 & -1/\psi^2 \end{pmatrix}^2 \\
&= \begin{pmatrix} n\psi/\theta^4 & 0 \\ 0 & n/2\psi^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Za izračun pristranosti bomo potrebovali pričakovane vrednosti od $\hat{\theta}$ in $\hat{\psi}$. Za $E(\hat{\theta}) = E(1/\bar{X})$ bomo funkcijo $1/\bar{X}$ razvili v Taylorjevo vrsto v okolici točke μ in vzeli prve tri člene. Tako bomo približno izračunali našo pričakovano vrednost.

$$\frac{1}{\bar{X}} \approx \frac{1}{\mu} - \frac{\bar{X}-\mu}{\mu^2} + \frac{(\bar{X}-\mu)^2}{\mu^3}$$

$$E(\frac{1}{\bar{X}}) \approx \frac{1}{\mu} + \frac{E(\bar{X}^2) - E(\bar{X})^2}{\mu^3} = \frac{1}{\mu} + \frac{var(\bar{X})}{\mu^3} = \frac{1}{\mu} + \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\mu^3} = \frac{1}{\mu} + \frac{\sigma^2}{n\mu^3}$$

$$E(\hat{\theta}) = \theta + \frac{\theta^3}{n\psi}$$

V kolikor je $\theta > 0$ velja $E(1/\bar{X}) > \theta$ in bo cenilka precenjevala pravo vrednost. V nasprotnem primeru pa bo cenilka podcenjevala pravo vrednost, saj bo $E(1/\bar{X}) < \theta$. Takoj vidimo, da je naš $b(\theta) = \theta^3/n\psi$. Povsem enak rezultat lahko dobimo, če uporabimo drugačen postopek.

Definicija 2.7. Imejmo generično re-parametrizacijo iz $\beta = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p, \phi)$ v $\omega = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p, \xi)$, kjer je $\xi = h(\phi)$ za neko funkcijo $h : \Re^+ \to H \subset \Re$. Predpostavimo, da je funkcija $h(.)$ vsaj trikrat odvedljiva in z uporabo ML cenilke ϕ lahko izraz $\hat{\xi}-\xi$ razširimo v

$$\hat{\xi}-\xi = h(\hat{\phi})-h(\phi) = (\hat{\phi}-\phi)\frac{dh(\phi)}{d\phi}+\frac{1}{2}(\hat{\phi}-\phi)^2\frac{d^2h(\phi)}{d\phi^2}+\frac{1}{6}(\hat{\phi}-\phi)^3\frac{d^3h(\phi)}{d\phi^3}+O(n^{-2}). \quad (2.5)$$

Če uporabimo pričakovano vrednost na obeh straneh pri enačbi (2.5) lahko pristranost za parameter ξ zapišemo kot

$$E(\hat{\xi}-\xi) = b_\phi(\beta)\frac{dh(\phi)}{d\phi} + \frac{1}{2}I_{\phi\phi}^{-1}(\beta)\frac{d^2h(\phi)}{d\phi^2} + O(n^{-2}). \quad (2.6)$$

Oznaka $b_\phi(\beta)$ označuje pristranost in $I_{\phi\phi}^{-1}(\beta)$ Fisherjevo informacijo za parameter β pri vrednosti ϕ. [1]

Opomba: O notacija, znana kot asimptotska notacija se uporablja za opisovanje obnašanja neke specifične funkcije. Pove nam kako hitro neka funkcija narašča ali pada. Črka O pomeni red (ang. *order*).

Za naš primer velja $\theta = h(\mu) = 1/\mu$ in $\psi = h(\sigma^2) = 1/\sigma^2$. Vrednosti za $b(\delta)$ in $I(\delta)$ imamo že izračunane in jih vstavimo v formulo (2.6). Za rezultate dobimo

$$b(\theta) = E(\hat{\theta}-\theta) = b_\mu(\delta)\frac{d(1/\mu)}{d\mu} + \frac{1}{2}I_{\mu\mu}^{-1}(\delta)\frac{d^2(1/\mu)}{d\mu^2} = 0\cdot(-\frac{1}{\mu^2})+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{2}{\mu^3} = \frac{\sigma^2}{n\mu^3} = \frac{\theta^3}{n\psi}$$

in

$$b(\psi) = E(\hat{\psi}-\psi) = b_{\sigma^2}(\delta)\frac{d(1/\sigma^2)}{d\sigma^2}+\frac{1}{2}I_{22}^{-1}(\delta)\frac{d^2(1/\sigma^2)}{d(\sigma^2)^2} = -\frac{\sigma^2}{n}\cdot(-\frac{1}{\sigma^4})+\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sigma^4}{n}\cdot\frac{2}{\sigma^6} = \frac{3}{n\sigma^2} = \frac{3\psi}{n}.$$

Sedaj lahko izračunamo modificirano funkcijo zbira,

$$\begin{aligned} U^*(\omega) &= \begin{pmatrix} -\frac{\psi}{\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i + \frac{n\psi}{\theta^3} \\ \frac{n}{2\psi} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \frac{1}{\theta})^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{n\psi}{\theta^4} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\psi^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\theta^3}{n\psi} \\ \frac{3\psi}{n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\psi}{\theta^2}\sum_{i=1}^n (x_i) + \frac{n\psi}{\theta^3} - \frac{1}{\theta} \\ \frac{n}{2\psi} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \frac{1}{\theta})^2 - \frac{3}{2\psi} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vsako komponento enačimo z 0 in rešimo sistem, od koder dobimo cenilki

$$\tilde{\theta} = \frac{-\psi\bar{X} \pm \sqrt{\psi^2\bar{X}^2 + \frac{\psi}{n}}}{\frac{2}{n}}$$

in

$$\tilde{\psi} = \frac{n-3}{\sum_{i=1}^n (x_i - \frac{1}{\theta})^2}.$$

Vidimo, da za razliko od ML cenilk, nepristranske cenilke (manj pristranske cenilke) niso zgolj inverzi osnovnih nepristranskih cenilk (manj pristranskih cenilk). Opazimo, da sistem enačb ni analitično rešljiv, zato si bomo pomagali z Newton-Raphsonovo metodo. Alternativno lahko uporabimo generični postopek za ocenjevanje, ki sta ga predlaga Kosmidis in Firth.

2.3 Kosmidis-Firth iteracija

Ioannis Kosmidis in David Firth sta predlagala, da za cenilke z zmanjšano pristranostjo, ki temeljijo na A^E prilagoditvi dobimo s pomočjo iteracije

$$\hat{\omega}^{(j+1)} = \omega^{(j)} + \{I^*(\omega^{(j)})\}^{-1} U^*(\omega^{(j)}).$$

Pričakovano informacijsko matriko zapišemo kot $I^*(\omega) = J(\omega)I(\beta(\omega))J(\omega)$, kjer je $\beta(\omega) = (h^{-1}(\theta), h^{-1}(\psi)) = (\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\psi}) = (\mu, \sigma^2)$ in

$$J(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{d(1/\theta)}{d\theta} & 0 \\ 0 & \frac{d(1/\psi)}{d\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\theta^2 & 0 \\ 0 & -1/\psi^2 \end{pmatrix}.$$

Nova funkcija verjetja za parameter ω je $U^*(\omega) = J(\omega)U^*(\beta(\omega))$. [1] Vidimo, da je $U^*(\beta(\omega)) = U^*(\delta)$, $U^*(\delta)$ samo reparametriziramo v ω in izračunamo funkcijo verjetja

$$U^*(\omega) = \begin{pmatrix} -\psi/\theta^2 \sum_{i=1}^n (x_i - 1/\theta) \\ -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - 1/\theta)^2 + \frac{n-1}{2\psi} \end{pmatrix}.$$

Opazimo, da $I(\beta(\omega)) = I(\delta)$ in $I^*(\omega) = I(\delta)J(\omega)^2$, to pa smo že zgoraj izračunali, dobimo $I^*(\omega) = I(\omega)$. Inverz informacijske matrike je

$$I^*(\omega)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\theta^4}{n\psi} & 0 \\ 0 & \frac{2\psi^2}{n} \end{pmatrix}.$$

Izračunamo našo iteracijo in dobimo

$$\hat{\omega}^{(j+1)} = \hat{\omega}^{(j)} + \begin{pmatrix} -\frac{\theta^{(j)2}}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - 1/\theta^{(j)}) \\ -\frac{\psi^{(j)2}}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - 1/\theta^{(j)})^2 + \frac{\psi^{(j)}(n-1)}{n} \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Če bi želeli izračunati manj pristransko cenilko za primer, ko imamo zgolj inverz od σ^2, torej $\omega = (\mu, \psi)$, potem ustzrezno spremenimo zgolj matriko J tako, da je prvi diagonalni element enak 1.

$$J(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{d(1/\psi)}{d\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/\psi^2 \end{pmatrix}.$$

Imamo $\beta(\omega) = (\mu, h^{-1}(\psi))$ in računamo tako kot prej. Dobimo

$$I^*(\omega)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n\psi} & 0 \\ 0 & \frac{2\psi^2}{n} \end{pmatrix}$$

in

$$\hat{\omega}^{(j+1)} = \hat{\omega}^{(j)} + \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu^{(j)}) \\ -\frac{\psi^{(j)2}}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu^{(j)})^2 + \frac{\psi^{(j)}(n-1)}{n} \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

V praksi je morda ta primer najbolj zanimiv, saj parameter $1/\sigma^2$ imenujemo parameter točnosti in se ga uporablja v Bayesovski statistiki. Vemo, da pri varianci gledamo raznolikost oz. kako so vrednosti razpršene okoli povprečja, v tem primeru pa gledamo točnost oz. kako so vrednosti koncentrirane okoli povprečja.

Podobno naredimo, če želimo izračunati inverz zgolj za μ, torej $\omega = (\theta, \sigma^2)$. V tem primeru bo $\beta(\omega) = (h^{-1}(\theta), \sigma^2)$ in drugi diagonalni element matrike J bo enak 1.

$$J(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{d(1/\theta)}{d\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\theta^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dobimo

$$I^*(\omega)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\theta^4\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n} \end{pmatrix}$$

in

$$\hat{\omega}^{(j+1)} = \hat{\omega}^{(j)} + \begin{pmatrix} -\frac{\theta^{(j)2}}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 1/\theta^{(j)}) \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 1/\theta^{(j)})^2 - \frac{\sigma^{2(j)}(n-1)}{n} \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

3 Simulacije

V tem poglavju bomo simulirali podatke iz normalne porazdelitve $X_1, \ldots, X_n$, ki so neodvisne in enako porazdeljene. Ogledali si bomo dve metodi, metoda največjega verjetja (ML) in Kosmidis-Firth iteracija (KF). V tabelah bo za vsako cenilko zapisana njena pristranost, varianca in srednja kvadratna napaka (MSE). S srednjo kvadratno napako merimo kvaliteto cenilk, ki je definirana kot

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\omega}) &= E((\hat{\omega} - \omega)^2) \\ &= var(\hat{\omega}) + b(\omega)^2. \end{aligned}$$

MSE je vsota variance cenilke in kvadrata pristranosti. V kolikor je cenilka nepristranska ($E(\hat{\omega}) = \omega$) imamo $MSE = var(\hat{\omega})$. Radi bi imeli čim manjšo vrednost za MSE. [3]

Če upoštevamo zgornjo formulo za MSE bodo retultati zelo blizu 0, saj so naše prave vrednosti zelo majhne. Če recimo vzamemo $\sigma^2 = 100$, bo prava vrednost enaka $1/100$ in bodo absolutne vrednosti težko razumljive. Zato formulo za MSE preuredimo in uporabimo

$$rMSE = (MSE/ \mid \omega \mid) \cdot 100.$$

Enako naredimo za pristranost in varianco, imamo

$$rb(\omega) = (b(\omega)/ \mid \omega \mid) \cdot 100$$

in

$$rvar(\omega) = (var(\omega)/ \mid \omega \mid) \cdot 100.$$

Imeli bomo tri ločene sekcije, ker se pri KF iteraciji lahko odločimo da zmanjšamo pristranost za oba parametra ali pa zgolj za prvega ali pa za drugega. Spreminjali bomo vrednosti za $\mu = -10, -5, 5, 10$ in $\sigma^2 = 1, 5, 10, 100$. Velikost vzorca bomo tudi spreminjali, ogledali si bomo rezultate, ko je $n = 5, 10, 20, 30, 50, 100$. Simulacije bomo ponovili 10000-krat. Za vsako cenilko bo z grafi prikazana njena pristranost in MSE, kjer modra črta označuje ML metodo in rdeča KF iteracijo. Grafi se bodo nahajali v prilogi D. Koda za simulacije je zapisana v programskem jeziku R in bo v prilogi E.

Opomba: zaradi boljše preglednosti bomo uporabili rezultate, ko je $n = 10$. Ostali rezultati se bodo nahajali v prilogi A, B in C.

3.1 Rezultati simulacij za (θ, ψ)

Dobljene cenilke po ML metodi najdemo v (2.3) in (2.4), po KF iteraciji pa v (2.7).

Tabela 1: Rezultati simulacij za (θ, ψ), ko je $n = 10$.

		$n=10$							
		μ=-10		μ=-5		μ=5		μ=10	
		ML	KF	ML	KF	ML	KF	ML	KF
σ^2=1									
	pristranost	-0.077	-0.077	-0.357	-0.357	0.448	0.448	0.122	0.122
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.01	0.01	0.082	0.082	0.082	0.082	0.01	0.01
	MSE	0.01	0.01	0.082	0.082	0.083	0.083	0.01	0.01
	pristranost	42.18	27.96	42.18	27.96	42.18	27.96	42.18	27.96
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	85.28	69.08	85.28	69.08	85.28	69.08	85.28	69.08
	MSE	103.08	76.89	103.08	76.89	103.08	76.89	103.08	76.89
σ^2=5									
	pristranost	-0.453	-0.453	-2.01	-2.01	2.228	2.227	0.556	0.555
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.051	0.051	0.47	0.47	0.476	0.475	0.052	0.052
	MSE	0.052	0.052	0.478	0.478	0.485	0.485	0.052	0.052
	pristranost	42.18	27.96	42.18	27.96	42.18	27.96	42.18	27.96
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	17.06	13.81	17.06	13.81	17.06	13.81	17.06	13.81
	MSE	20.61	15.38	20.61	15.38	20.61	15.38	20.61	15.38
σ^2=10									
	pristranost	-0.951	-0.95	-4.403	-4.402	4.741	4.739	1.099	1.098
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.107	0.107	1.176	1.176	1.194	1.193	0.108	0.108
	MSE	0.108	0.108	1.215	1.214	1.239	1.238	0.11	0.11
	pristranost	42.18	27.95	42.18	27.95	42.18	27.95	42.18	27.95
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	8.53	6.904	8.53	6.904	8.53	6.904	8.53	6.904
	MSE	10.31	7.69	10.31	7.69	10.31	7.69	10.31	7.69
σ^2=100									
	pristranost	-12.17	-18.09	192.19	-160.55	153.19	264.03	21.86	22.96
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	109.69	40.16	379462.5	19183.4	71991.5	72973.4	100.67	98.06
	MSE	109.84	40.49	379536.4	19234.9	72038.4	73112.9	101.15	98.58
	pristranost	42.18	27.84	42.18	27.35	42.18	27.36	42.18	27.84
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	0.853	0.688	0.853	0.678	0.853	0.689	0.853	0.688
	MSE	1.031	0.766	1.031	0.752	1.031	0.754	1.031	0.766

Oglejmo si tabelo 1 in začnimo s cenilko $\hat{\omega}_1$, kjer vidimo, da pri obeh metodah ni razlike, ko imamo manjše vrednosti za σ^2. Večjo razliko opazimo pri varianci in MSE, ko je $\sigma^2 = 100$, za $\mu = -10, -5$. Imamo manjši MSE pri KF iteraciji. Pristranost se tudi razlikuje pri $\mu = -5, 5$.

Pri cenilki $\hat{\omega}_2$ je pristranost enaka za vsako vrednost σ^2. Razen, ko imamo $\sigma^2 = 100$ se pristranost za KF iteracijo za malenkost zmanjša. Varianca in MSE se manjšata, ko večamo vrednost za σ^2. KF iteracija ima manjšo pristranost, varianco in MSE kakor ML metoda.

Pri ostalih vzorcih so si rezultati zelo podobni pri obeh metodah, Večje spremembe opazimo samo pri parametru $\hat{\omega}_1$, ko je $\sigma^2 = 100$. Večji kot je n rezultati grejo proti 0.

3.2 Rezultati simulacij za (μ, ψ)

Kot smo prej povedali se inverz od variance pogosto uporablja v Bayesovski statistiki. Cenilke po ML metodi najdemo v (2.1) in (2.4), po KF iteraciji pa v (2.8).

V tabeli 2 takoj opazimo, da je pristranost, varianca in MSE za cenilko $\hat{\omega}_1$ enaka pri obeh metodah, za vsako vrednost μ in σ^2. Večja kot je vrednost za σ^2 se varianca in MSE tudi večata. Za cenilko $\hat{\omega}_2$, smo dobili iste rezultate kot pri tabeli 1. KF iteracija ima manjše vrednosti kot ML metoda.

Pri grafih se lepo vidi, da sta pristranost in MSE za cenilko $\hat{\omega}_1$ enaki pri obeh metodah za vsak n.

Tabela 2: Rezultati simulacij za (μ, ψ), ko je $n = 10$.

		$n = 10$							
		μ=-10		μ=-5		μ=5		μ=10	
		ML	KF	ML	KF	ML	KF	ML	KF
σ^2=1									
	pristranost	-0.022	-0.022	-0.045	-0.045	-0.045	-0.045	-0.022	-0.022
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.994	0.994	1.989	1.989	1.989	1.989	0.994	0.994
	MSE	0.994	0.994	1.989	1.989	1.989	1.989	0.994	0.994
	pristranost	42.18	27.96	42.18	27.96	42.18	27.96	42.18	27.96
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	85.28	69.08	85.28	69.08	85.28	69.08	85.28	69.08
	MSE	103.08	76.89	103.08	76.89	103.08	76.89	103.08	76.89
σ^2=5									
	pristranost	-0.05	-0.05	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.05	-0.05
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	4.973	4.973	9.946	9.945	9.946	9.945	4.973	4.973
	MSE	4.973	4.973	9.946	9.946	9.946	9.946	4.973	4.973
	pristranost	42.18	27.96	42.18	27.96	42.18	27.96	42.18	27.96
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	17.06	13.81	17.06	13.81	17.06	13.81	17.06	13.81
	MSE	20.61	15.38	20.61	15.38	20.61	15.38	20.61	15.38
σ^2=10									
	pristranost	-0.07	-0.07	-0.142	-0.142	-0.142	-0.142	-0.07	-0.07
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	9.946	9.946	19.89	19.89	19.89	19.89	9.946	9.946
	MSE	9.946	9.946	19.89	19.89	19.89	19.89	9.946	9.946
	pristranost	42.18	27.95	42.18	27.95	42.18	27.95	42.18	27.95
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	8.53	6.906	8.53	6.906	8.53	6.906	8.53	6.906
	MSE	10.31	7.69	10.31	7.69	10.31	7.69	10.31	7.69
σ^2=100									
	pristranost	-0.224	-0.224	-0.449	-0.449	-0.449	-0.449	-0.224	-0.224
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	99.459	99.458	198.92	198.92	198.92	198.92	99.459	99.458
	MSE	99.465	99.463	198.93	198.93	198.93	198.93	99.465	99.463
	pristranost	42.18	27.95	42.18	27.95	42.18	27.95	42.18	27.95
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	0.853	0.69	0.853	0.69	0.853	0.69	0.853	0.69
	MSE	1.031	0.768	1.031	0.768	1.031	0.768	1.031	0.768

3.3 Rezultati simulacij za (θ, σ^2)

Ostal je še zadnji primer rezultatov, cenilke dobljene po ML metodi sta (2.3) in (2.2), za KF iteracijo gledamo (2.9).

Tabela 3: Rezultati simulacij za (θ, σ^2), ko je $n = 10$.

		$n = 10$							
		μ=-10		μ=-5		μ=5		μ=10	
		ML	KF	ML	KF	ML	KF	ML	KF
σ^2=1									
	pristranost	-0.077	-0.077	-0.357	-0.357	0.448	0.448	0.122	0.122
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.01	0.01	0.082	0.082	0.082	0.082	0.01	0.01
	MSE	0.01	0.01	0.082	0.082	0.083	0.083	0.01	0.01
	pristranost	-9.24	0.84	-9.24	0.84	-9.24	0.84	-9.24	0.84
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	18.28	22.56	18.28	22.56	18.28	22.56	18.28	22.56
	MSE	19.13	22.57	19.13	22.57	19.13	22.57	19.13	22.57
σ^2=5									
	pristranost	-0.453	-0.453	-2.01	-2.01	2.228	2.227	0.556	0.556
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.051	0.051	0.47	0.47	0.476	0.475	0.052	0.052
	MSE	0.052	0.052	0.478	0.478	0.485	0.485	0.052	0.052
	pristranost	-9.24	0.84	-9.24	0.84	-9.24	0.84	-9.24	0.84
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	91.4	112.84	91.4	112.84	91.4	112.84	91.4	112.84
	MSE	95.67	112.88	95.67	112.88	95.67	112.88	95.67	112.88
σ^2=10									
	pristranost	-0.951	-0.95	-4.403	-4.403	4.741	4.741	1.099	1.099
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.107	0.107	1.176	1.176	1.194	1.194	0.108	0.108
	MSE	0.108	0.108	1.215	1.215	1.239	1.239	0.11	0.11
	pristranost	-9.24	0.84	-9.24	0.84	-9.24	0.84	-9.24	0.84
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	182.8	225.68	182.8	225.68	182.8	225.68	182.8	225.68
	MSE	191.34	225.76	191.34	225.76	191.34	225.76	191.34	225.76
σ^2=100									
	pristranost	-12.17	-18.09	192.19	-160.55	153.19	264.03	21.86	22.97
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	109.69	40.16	379462	19183.4	71991	72973.4	100.67	98.06
	MSE	109.84	40.49	379536	19234.9	72038.4	73112.9	101.15	98.58
	pristranost	-9.24	0.84	-9.24	1.09	-9.24	1.09	-9.24	0.84
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	1828.1	2256.8	1828.1	2254.1	1828.1	2254.8	1828.1	2256.8
	MSE	1913.4	2257.5	1913.4	2255.3	1913.4	2255.9	1913.4	2257.5

Vrednosti za cenilko $\hat{\omega}_1$ dobimo iste kot pri tabeli 1. Pri manjših vrednosti σ^2 sta si obe metodi isti, razen pri $\sigma^2 = 100$.

Za cenilko $\hat{\omega}_2$ je pristranost pri ML metodi vedno enaka za vsako vrednost μ in σ^2. Za $\sigma^2 = 100$ se pristranost pri KF iteraciji spremeni pri $\mu = -5, 5$. V primerjavi s prejšnjima primeroma ima ML metoda manjšo varianco in MSE kot KF iteracija. Večja kot je vrednost za σ^2 večje bodo razlike pri varianci in MSE.

V splošnem bo cenilka $\hat{\omega}_1$ imela enake vrednosti za pristranost pri vsakem n, razen ko je $\sigma^2 = 100$. Isto velja za MSE, pri obeh metodah se rezultati isto gibljeta. Pristranost pri $\hat{\omega}_2$ je drugačen kot pri ostalih primerih. Pri KF iteraciji se rezultati gibljejo okoli 0 za vsak n. Pri ML metodi pa večji kot je n se rezultati približujejo vrednostim KF iteracije. Za MSE pa se rezultati pri obeh metodah gibljeta proti isti smeri, večji kot je n manjše so razlike.

4 Zaključek

V prvem poglavju smo definirali postopek kako izračunati cenilke po ML metodi in za primer smo vzeli normalno porazdelitev, ker je to najbolj enostaven način za analitično obdelavo. Najprej smo izračunali cenilke za parameter $\delta = (\mu, \sigma^2)$, kjer smo ugotovili da je cenilka za μ nepristranska, cenilka za σ^2 pa pristranska. Isti postopek smo izvedli za parameter $\omega = (1/\mu, 1/\sigma^2)$ in dobili, da so cenilke inverzi osnovnih nepristranskih cenilk. Da bi zmanjšali pristranost cenilk smo uporabili metodo Davida Firtha, kjer smo modificirali funkcijo zbira.

Za primer parametra ω sistem enačb, ki temelji na modificirani funkciji zbira ni bil analitično rešljiv, zato smo uporabili, tako kot Kosmidis in Firth, Newton Raphson iteracijo. Pri simulacijah smo imeli tri ločene sekcije, saj smo imeli primere, ko smo zmanjšali pristranost za oba parametra ali pa zgolj za prvega ali pa zgolj za drugega. Preverjali smo pristranost in MSE obeh cenilk za obe metodi. Ugotovili smo, da ni velike razlike pri obeh metodah, KF iteracija za malenkost zmanjša pristranost cenilk. Razlike se opazijo pri primeru, ko imamo samo inverz parametra μ, cenilka za σ^2 ima manjšo pristranost in MSE pri ML metodi kot pa pri KF iteraciji.

Postopek za KF iteracijo ni omejen zgolj na normalno porazdelitev, lahko jo uporabimo za katerokoli porazdelitev.

5 Literatura

[1] I. Kosmidis in D. Firth, A generic algorithm for reducing bias in parametric estimation. *Electronic Journal of Statistics* Vol. 4 (2010) 1097–1112. *(Citirano na straneh 1, 7 in 8.)*

[2] D. Firth, Bias reduction of maximum likelihood estimates. *Biometrika* Vol. 80, No. 1 (Mar., 1993) pp. 27–38. *(Citirano na strani 4.)*

[3] J.A. Rice, *Mathematical Statistics and Data Analysis*, University of California, Berkeley, Third Edition, 2007. *(Citirano na straneh 2, 3 in 10.)*

Priloge

A Rezultati simulacij za (θ, ψ)

		$n=5$							
		μ=-10		μ=-5		μ=5		μ=10	
		ML	KF	ML	KF	ML	KF	ML	KF
σ^2=1									
	pristranost	-0.177	-0.177	-0.771	-0.771	0.874	0.874	0.226	0.226
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.02	0.02	0.171	0.171	0.173	0.173	0.02	0.02
	MSE	0.02	0.02	0.172	0.172	0.174	0.174	0.02	0.02
	pristranost	145.44	96.35	145.44	96.35	145.44	96.35	145.44	96.35
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	4583.2	2933.2	4583.2	2933.2	4583.2	2933.2	4583.2	2933.2
	MSE	4794.7	3026.1	4794.7	3026.1	4794.7	3026.1	4794.7	3026.1
σ^2=5									
	pristranost	-0.977	-0.977	-4.494	-4.493	4.798	4.797	1.094	1.093
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.108	0.108	1.201	1.200	1.251	1.250	0.11	0.11
	MSE	0.109	0.109	1.241	1.241	1.297	1.297	0.111	0.111
	pristranost	145.44	96.34	145.44	96.34	145.44	96.34	145.44	96.34
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	916.64	586.64	916.64	586.64	916.64	586.64	916.64	586.64
	MSE	958.95	605.21	958.95	605.21	958.95	605.21	958.95	605.21
σ^2=10									
	pristranost	-2.054	-2.053	-13.66	-14.23	12.81	13.13	2.232	2.231
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.238	0.238	87.73	81.1	20.46	19.42	0.243	0.243
	MSE	0.242	0.242	88.11	81.5	20.78	19.76	0.248	0.248
	pristranost	145.44	96.33	145.44	96.33	145.44	96.33	145.44	96.33
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	458.32	293.32	458.32	293.32	458.32	293.32	458.32	293.32
	MSE	479.47	302.59	479.47	302.59	479.47	302.59	479.47	302.59
σ^2=100									
	pristranost	-27.18	-76.63	-56.42	-307.74	239.07	570.82	52.44	84.04
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	5946.1	1604.4	146613	127320	1134212	1221812	2206.6	1779.2
	MSE	5946.9	1610.3	146619	127510	1134326	1222463	2209.3	1786.3
	pristranost	145.44	95.91	145.44	89.99	145.44	87.62	145.44	95.46
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	45.83	28.78	45.83	29.32	45.83	28.13	45.83	29.25
	MSE	47.95	30.24	47.95	29.59	47.95	28.89	47.95	30.16

		$n = 20$							
		μ=-10		μ=-5		μ=5		μ=10	
		ML	KF	ML	KF	ML	KF	ML	KF
σ^2=1									
	pristranost	-0.043	-0.043	-0.185	-0.185	0.21	0.21	0.055	0.055
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.005	0.005	0.04	0.04	0.04	0.04	0.005	0.005
	MSE	0.005	0.005	0.04	0.04	0.04	0.04	0.005	0.005
	pristranost	16.99	11.14	16.99	11.14	16.99	11.14	16.99	11.14
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	18.47	16.67	18.47	16.67	18.47	16.67	18.47	16.67
	MSE	21.36	17.91	21.36	17.91	21.36	17.91	21.36	17.91
σ^2=5									
	pristranost	-0.234	-0.233	-0.984	-0.983	1.042	1.041	0.261	0.261
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.025	0.025	0.213	0.212	0.214	0.214	0.025	0.025
	MSE	0.025	0.025	0.215	0.214	0.216	0.216	0.025	0.025
	pristranost	16.99	11.14	16.99	11.14	16.99	11.14	16.99	11.14
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	3.694	3.332	3.694	3.332	3.694	3.332	3.694	3.332
	MSE	4.27	3.58	4.27	3.58	4.27	3.58	4.27	3.58
σ^2=10									
	pristranost	-0.479	-0.478	-2.049	-2.049	2.138	2.137	0.518	0.517
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.051	0.051	0.465	0.465	0.47	0.47	0.051	0.051
	MSE	0.051	0.051	0.474	0.473	0.48	0.48	0.051	0.051
	pristranost	16.99	11.13	16.99	11.13	16.99	11.13	16.99	11.13
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	1.85	1.66	1.85	1.66	1.85	1.66	1.85	1.66
	MSE	2.13	1.79	2.13	1.79	2.13	1.79	2.13	1.79
σ^2=100									
	pristranost	-5.827	-5.826	-23.7	-57.37	87.571	128.58	6.037	6.036
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.85	0.85	1882.6	839.59	41836.3	40088.2	0.898	0.896
	MSE	0.884	0.883	1883.7	846.17	41851.6	40121.2	0.934	0.933
	pristranost	16.99	11.07	16.99	11.07	16.99	11.07	16.99	11.07
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	0.185	0.165	0.185	0.166	0.185	0.165	0.185	0.165
	MSE	0.213	0.178	0.213	0.178	0.213	0.178	0.213	0.178

		$n = 30$							
		μ=-10		μ=-5		μ=5		μ=10	
		ML	KF	ML	KF	ML	KF	ML	KF
σ^2=1									
	pristranost	-0.029	-0.029	-0.124	-0.124	0.141	0.141	0.037	0.037
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.003	0.003	0.026	0.026	0.026	0.026	0.003	0.003
	MSE	0.003	0.003	0.026	0.026	0.026	0.026	0.003	0.003
	pristranost	10.86	7.17	10.86	7.17	10.86	7.17	10.86	7.17
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	9.77	9.13	9.77	9.13	9.77	9.13	9.77	9.13
	MSE	10.95	9.64	10.95	9.64	10.95	9.64	10.95	9.64
σ^2=5									
	pristranost	-0.156	-0.156	-0.654	-0.654	0.693	0.692	0.175	0.175
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.016	0.016	0.139	0.139	0.139	0.139	0.016	0.016
	MSE	0.016	0.016	0.14	0.14	0.14	0.14	0.016	0.016
	pristranost	10.86	7.17	10.86	7.17	10.86	7.17	10.86	7.17
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	1.954	1.824	1.954	1.824	1.954	1.824	1.954	1.824
	MSE	2.19	1.927	2.19	1.927	2.19	1.927	2.19	1.927
σ^2=10									
	pristranost	-0.32	-0.32	-1.348	-1.347	1.404	1.403	0.346	0.345
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.033	0.033	0.295	0.295	0.296	0.296	0.034	0.034
	MSE	0.033	0.033	0.299	0.299	0.3	0.3	0.034	0.034
	pristranost	10.86	7.17	10.86	7.17	10.86	7.17	10.86	7.17
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	0.977	0.912	0.977	0.912	0.977	0.912	0.977	0.912
	MSE	1.095	0.963	1.095	0.963	1.095	0.963	1.095	0.963
σ^2=100									
	pristranost	-3.655	-3.655	547.11	-30.98	20.69	35.86	3.749	3.749
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.456	0.455	6218202	166.01	1578.15	1059.3	0.457	0.4576
	MSE	0.47	0.47	6218801	167.93	1579.01	1061.8	0.471	0.47
	pristranost	10.86	7.11	10.86	7.13	10.86	7.17	10.86	7.11
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	0.098	0.09	0.098	0.09	0.098	0.091	0.098	0.09
	MSE	0.11	0.095	0.11	0.095	0.11	0.095	0.11	0.095

		$n = 50$							
		μ=-10		μ=-5		μ=5		μ=10	
		ML	KF	ML	KF	ML	KF	ML	KF
σ^2=1									
$\hat{\omega}_1$	*pristranost*	-0.015	-0.015	-0.071	-0.071	0.09	0.09	0.025	0.025
	varianca	0.002	0.002	0.016	0.016	0.016	0.016	0.002	0.002
	MSE	0.002	0.002	0.016	0.016	0.016	0.016	0.002	0.002
$\hat{\omega}_2$	*pristranost*	6.386	4.258	6.386	4.258	6.386	4.258	6.386	4.258
	varianca	4.988	4.789	4.988	4.789	4.988	4.789	4.988	4.789
	MSE	5.396	4.971	5.396	4.971	5.396	4.971	5.396	4.971
σ^2=5									
$\hat{\omega}_1$	*pristranost*	-0.09	-0.09	-0.386	-0.385	0.43	0.43	0.112	0.112
	varianca	0.01	0.01	0.083	0.083	0.083	0.083	0.01	0.01
	MSE	0.01	0.01	0.083	0.083	0.083	0.083	0.01	0.01
$\hat{\omega}_2$	*pristranost*	6.386	4.255	6.386	4.255	6.386	4.255	6.386	4.255
	varianca	0.998	0.957	0.998	0.957	0.998	0.957	0.998	0.957
	MSE	1.079	0.993	1.079	0.993	1.079	0.993	1.079	0.993
σ^2=10									
$\hat{\omega}_1$	*pristranost*	-0.187	-0.186	-0.794	-0.794	0.859	0.858	0.218	0.218
	varianca	0.02	0.02	0.172	0.171	0.173	0.172	0.02	0.02
	MSE	0.02	0.02	0.173	0.172	0.174	0.174	0.02	0.02
$\hat{\omega}_2$	*pristranost*	6.386	4.253	6.386	4.253	6.386	4.253	6.386	4.253
	varianca	0.499	0.478	0.499	0.478	0.499	0.478	0.499	0.478
	MSE	0.539	0.496	0.539	0.496	0.539	0.496	0.539	0.496
σ^2=100									
$\hat{\omega}_1$	*pristranost*	-2.095	-2.095	-11.42	-11.64	8.543	12.29	2.208	2.208
	varianca	0.239	0.238	8.738	8.21	183.17	13.33	0.243	0.242
	MSE	0.244	0.243	8.998	8.48	183.32	13.63	0.248	0.247
$\hat{\omega}_2$	*pristranost*	6.385	4.216	6.385	4.238	6.385	4.238	6.385	4.216
	varianca	0.049	0.047	0.049	0.047	0.049	0.047	0.049	0.047
	MSE	0.054	0.049	0.054	0.049	0.054	0.049	0.054	0.049

		$n = 100$							
		μ=-10		μ=-5		μ=5		μ=10	
		ML	KF	ML	KF	ML	KF	ML	KF
σ^2=1									
	pristranost	-0.01	-0.01	-0.041	-0.041	0.039	0.039	0.009	0.009
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.001	0.001	0.008	0.008	0.008	0.008	0.001	0.001
	MSE	0.001	0.001	0.008	0.008	0.008	0.008	0.001	0.001
	pristranost	3.034	2.004	3.034	2.004	3.034	2.004	3.034	2.004
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	2.24	2.194	2.24	2.194	2.24	2.194	2.24	2.194
	MSE	2.332	2.235	2.332	2.235	2.332	2.235	2.332	2.235
σ^2=5									
	pristranost	-0.05	-0.05	-0.202	-0.202	0.197	0.197	0.049	0.048
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	-0.05	-0.05	0.04	0.04	0.04	0.04	0.005	0.005
	MSE	-0.05	-0.05	0.04	0.04	0.04	0.04	0.005	0.005
	pristranost	3.034	2.002	3.034	2.002	3.034	2.002	3.034	2.002
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	0.448	0.438	0.448	0.438	0.448	0.438	0.448	0.438
	MSE	0.466	0.446	0.466	0.446	0.466	0.446	0.466	0.446
σ^2=10									
	pristranost	-0.101	-0.101	-0.405	-0.405	0.398	0.398	0.098	0.097
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.01	0.01	0.082	0.082	0.082	0.081	0.01	0.01
	MSE	0.01	0.01	0.082	0.082	0.082	0.082	0.01	0.01
	pristranost	3.034	2.00	3.034	2.00	3.034	2.00	3.034	2.00
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	0.224	0.219	0.224	0.219	0.224	0.219	0.224	0.219
	MSE	0.233	0.223	0.233	0.223	0.233	0.223	0.233	0.223
σ^2=100									
	pristranost	-1.031	-1.031	-4.607	-4.607	4.534	4.534	1.017	1.016
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.108	0.108	1.204	1.203	1.169	1.169	0.107	0.107
	MSE	0.109	0.109	1.246	1.245	1.21	1.21	0.108	0.108
	pristranost	3.034	1.977	3.034	1.992	3.034	1.992	3.034	1.977
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	0.022	0.022	0.022	0.022	0.022	0.022	0.022	0.022
	MSE	0.023	0.022	0.023	0.022	0.023	0.022	0.023	0.022

B Rezultati simulacij za (μ, ψ)

		$n=5$							
		μ=-10		μ=-5		μ=5		μ=10	
		ML	KF	ML	KF	ML	KF	ML	KF
σ^2=1									
	pristranost	-0.024	-0.024	-0.05	-0.05	-0.049	-0.049	-0.024	-0.024
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	2.01	2.01	4.014	4.014	4.014	4.014	2.01	2.01
	MSE	2.01	2.01	4.014	4.014	4.014	4.014	2.01	2.01
	pristranost	145.44	96.35	145.44	96.35	145.44	96.35	145.44	96.35
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	4583.2	2933.2	4583.2	2933.2	4583.2	2933.2	4583.2	2933.2
	MSE	4794.7	3026.1	4794.7	3026.1	4794.7	3026.1	4794.7	3026.1
σ^2=5									
	pristranost	-0.054	-0.054	-0.109	-0.109	-0.109	-0.109	-0.054	-0.054
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	10.034	10.034	20.069	20.069	20.069	20.069	10.034	10.034
	MSE	10.034	10.034	20.069	20.069	20.069	20.069	10.034	10.034
	pristranost	145.44	96.34	145.44	96.34	145.44	96.34	145.44	96.34
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	916.64	586.64	916.64	586.64	916.64	586.64	916.64	586.64
	MSE	958.95	605.21	958.95	605.21	958.95	605.21	958.95	605.21
σ^2=10									
	pristranost	-0.077	-0.077	-0.154	-0.154	-0.154	-0.154	-0.077	-0.077
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	20.069	20.068	40.137	40.136	40.137	40.136	20.069	20.068
	MSE	20.069	20.069	40.139	40.138	40.139	40.138	20.069	20.069
	pristranost	145.44	96.33	145.44	96.33	145.44	96.33	145.44	96.33
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	458.32	293.32	458.32	293.32	458.32	293.32	458.32	293.32
	MSE	479.47	302.59	479.47	302.59	479.47	302.59	479.47	302.59
σ^2=100									
	pristranost	-0.244	-0.244	-0.488	-0.488	-0.488	-0.488	-0.244	-0.244
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	200.69	200.69	401.38	401.37	401.38	401.37	200.69	200.69
	MSE	200.69	200.69	401.39	401.39	401.39	401.39	200.69	200.69
	pristranost	145.44	96.28	145.44	96.28	145.44	96.28	145.44	96.28
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	45.83	29.33	45.83	29.33	45.83	29.33	45.83	29.33
	MSE	47.95	30.25	47.95	30.25	47.95	30.25	47.95	30.25

		$n = 20$							
		μ=-10		μ=-5		μ=5		μ=10	
		ML	KF	ML	KF	ML	KF	ML	KF
σ^2=1									
	pristranost	-0.006	-0.006	-0.012	-0.012	-0.012	-0.012	-0.006	-0.006
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.491	0.491	0.982	0.982	0.982	0.982	0.491	0.491
	MSE	0.491	0.491	0.982	0.982	0.982	0.982	0.491	0.491
	pristranost	16.99	11.14	16.99	11.14	16.99	11.14	16.99	11.14
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	18.47	16.67	18.47	16.67	18.47	16.67	18.47	16.67
	MSE	21.36	17.91	21.36	17.91	21.36	17.91	21.36	17.91
σ^2=5									
	pristranost	-0.013	-0.013	-0.027	-0.027	-0.027	-0.027	-0.013	-0.013
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	2.456	2.456	4.912	4.912	4.912	4.912	2.456	2.456
	MSE	2.456	2.456	4.912	4.911	4.912	4.911	2.456	2.456
	pristranost	16.99	11.14	16.99	11.14	16.99	11.14	16.99	11.14
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	3.694	3.332	3.694	3.332	3.694	3.332	3.694	3.332
	MSE	4.27	3.58	4.27	3.58	4.27	3.58	4.27	3.58
σ^2=10									
	pristranost	-0.019	-0.019	-0.038	-0.038	-0.038	-0.038	-0.019	-0.019
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	4.912	4.911	9.824	9.823	9.824	9.823	4.912	4.911
	MSE	4.912	4.911	9.824	9.823	9.824	9.823	4.912	4.911
	pristranost	16.99	11.14	16.99	11.14	16.99	11.14	16.99	11.14
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	1.85	1.67	1.85	1.67	1.85	1.67	1.85	1.67
	MSE	2.13	1.79	2.13	1.79	2.13	1.79	2.13	1.79
σ^2=100									
	pristranost	-0.061	-0.061	-0.121	-0.121	-0.121	-0.121	-0.061	-0.061
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	49.12	49.12	98.24	98.24	98.24	98.24	49.12	49.12
	MSE	49.12	49.12	98.24	98.23	98.24	98.23	49.12	49.12
	pristranost	16.99	11.14	16.99	11.14	16.99	11.14	16.99	11.14
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	0.185	0.167	0.185	0.167	0.185	0.167	0.185	0.167
	MSE	0.213	0.179	0.213	0.179	0.213	0.179	0.213	0.179

		$n = 30$							
		μ=-10		μ=-5		μ=5		μ=10	
		ML	KF	ML	KF	ML	KF	ML	KF
σ^2=1									
	pristranost	-0.004	-0.004	-0.008	-0.008	-0.008	-0.008	-0.004	-0.004
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.329	0.329	0.659	0.659	0.659	0.659	0.329	0.329
	MSE	0.329	0.329	0.659	0.659	0.659	0.659	0.329	0.329
	pristranost	10.86	7.17	10.86	7.17	10.86	7.17	10.86	7.17
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	9.77	9.13	9.77	9.13	9.77	9.13	9.77	9.13
	MSE	10.95	9.64	10.95	9.64	10.95	9.64	10.95	9.64
σ^2=5									
	pristranost	-0.009	-0.009	-0.019	-0.019	-0.019	-0.019	-0.009	-0.009
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	1.649	1.649	3.299	3.299	3.299	3.299	1.649	1.649
	MSE	1.649	1.649	3.299	3.299	3.299	3.299	1.649	1.649
	pristranost	10.86	7.17	10.86	7.17	10.86	7.17	10.86	7.17
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	1.954	1.826	1.954	1.826	1.954	1.826	1.954	1.826
	MSE	2.19	1.929	2.19	1.929	2.19	1.929	2.19	1.929
σ^2=10									
	pristranost	-0.013	-0.013	-0.027	-0.027	-0.027	-0.027	-0.013	-0.013
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	3.299	3.299	6.599	6.599	6.599	6.599	3.299	3.299
	MSE	3.299	3.299	6.599	6.599	6.599	6.599	3.299	3.299
	pristranost	10.86	7.17	10.86	7.17	10.86	7.17	10.86	7.17
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	0.977	0.912	0.977	0.912	0.977	0.912	0.977	0.912
	MSE	1.095	0.964	1.095	0.964	1.095	0.964	1.095	0.964
σ^2=100									
	pristranost	-0.042	-0.042	-0.084	-0.084	-0.084	-0.084	-0.042	-0.042
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	32.994	32.993	65.989	65.989	65.989	65.989	32.994	32.993
	MSE	32.994	32.993	65.989	65.989	65.989	65.989	32.994	32.993
	pristranost	10.86	7.16	10.86	7.16	10.86	7.16	10.86	7.16
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	0.098	0.091	0.098	0.091	0.098	0.091	0.098	0.091
	MSE	0.11	0.096	0.11	0.096	0.11	0.096	0.11	0.096

		$n = 50$							
		μ=-10		μ=-5		μ=5		μ=10	
		ML	KF	ML	KF	ML	KF	ML	KF
σ^2=1									
	pristranost	-0.005	-0.005	-0.009	-0.009	-0.009	-0.009	-0.005	-0.005
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.201	0.201	0.403	0.403	0.403	0.403	0.201	0.201
	MSE	0.201	0.201	0.403	0.403	0.403	0.403	0.201	0.201
	pristranost	6.386	4.258	6.386	4.258	6.386	4.258	6.386	4.258
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	4.988	4.79	4.988	4.79	4.988	4.79	4.988	4.79
	MSE	5.396	4.971	5.396	4.971	5.396	4.971	5.396	4.971
σ^2=5									
	pristranost	-0.011	-0.011	-0.022	-0.022	-0.022	-0.022	-0.011	-0.011
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	1.008	1.008	2.016	2.015	2.016	2.015	1.008	1.008
	MSE	1.008	1.008	2.016	2.015	2.016	2.015	1.008	1.008
	pristranost	6.386	4.255	6.386	4.255	6.386	4.255	6.386	4.255
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	0.998	0.957	0.998	0.957	0.998	0.957	0.998	0.957
	MSE	1.079	0.993	1.079	0.993	1.079	0.993	1.079	0.993
σ^2=10									
	pristranost	-0.015	-0.015	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.015	-0.015
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	2.015	2.015	4.032	4.031	4.032	4.031	2.015	2.015
	MSE	2.015	2.015	4.032	4.031	4.032	4.031	2.015	2.015
	pristranost	6.386	4.256	6.386	4.256	6.386	4.256	6.386	4.256
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	0.499	0.478	0.499	0.478	0.499	0.478	0.499	0.478
	MSE	0.539	0.496	0.539	0.496	0.539	0.496	0.539	0.496
σ^2=100									
	pristranost	-0.048	-0.048	-0.097	-0.097	-0.097	-0.097	-0.048	-0.048
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	20.16	20.16	40.32	40.31	40.32	40.31	20.16	20.16
	MSE	20.16	20.16	40.32	40.31	40.32	40.31	20.16	20.16
	pristranost	6.386	4.257	6.386	4.257	6.386	4.257	6.386	4.257
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	0.049	0.047	0.049	0.047	0.049	0.047	0.049	0.047
	MSE	0.054	0.049	0.054	0.049	0.054	0.049	0.054	0.049

		μ=-10		μ=-5		μ=5		μ=10	
		$n = 100$							
		ML	KF	ML	KF	ML	KF	ML	KF
σ^2=1									
	pristranost	0.0005	0.0005	0.0009	0.0009	0.0009	0.0009	0.0005	0.0005
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.099	0.099	0.198	0.198	0.198	0.198	0.099	0.099
	MSE	0.099	0.099	0.198	0.198	0.198	0.198	0.099	0.099
	pristranost	3.034	2.004	3.034	2.004	3.034	2.004	3.034	2.004
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	2.24	2.194	2.24	2.194	2.24	2.194	2.24	2.194
	MSE	2.332	2.235	2.332	2.235	2.332	2.235	2.332	2.235
σ^2=5									
	pristranost	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.496	0.496	0.993	0.992	0.993	0.992	0.496	0.496
	MSE	0.496	0.496	0.993	0.992	0.993	0.992	0.496	0.496
	pristranost	3.034	2.002	3.034	2.002	3.034	2.002	3.034	2.002
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	0.448	0.438	0.448	0.438	0.448	0.438	0.448	0.438
	MSE	0.466	0.446	0.466	0.446	0.466	0.446	0.466	0.446
σ^2=10									
	pristranost	0.001	0.001	0.003	0.003	0.003	0.003	0.001	0.001
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.992	0.992	1.986	1.985	1.986	1.985	0.992	0.992
	MSE	0.992	0.992	1.986	1.985	1.986	1.985	0.992	0.992
	pristranost	3.034	2.00	3.034	2.00	3.034	2.00	3.034	2.00
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	0.224	0.219	0.224	0.219	0.224	0.219	0.224	0.219
	MSE	0.233	0.223	0.233	0.223	0.233	0.223	0.233	0.223
σ^2=100									
	pristranost	0.005	0.005	0.009	0.009	0.009	0.009	0.005	0.005
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	9.928	9.928	19.85	19.85	19.85	19.85	9.928	9.928
	MSE	9.928	9.928	19.85	19.85	19.85	19.85	9.928	9.928
	pristranost	3.034	2.003	3.034	2.003	3.034	2.003	3.034	2.003
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	0.022	0.023	0.022	0.023	0.022	0.023	0.022	0.023
	MSE	0.023	0.022	0.023	0.022	0.023	0.022	0.023	0.022

C Rezultati simulacij za (θ, σ^2)

		$n = 5$							
		μ=-10		μ=-5		μ=5		μ=10	
		ML	KF	ML	KF	ML	KF	ML	KF
σ^2=1									
	pristranost	-0.177	-0.177	-0.771	-0.771	0.874	0.874	0.226	0.226
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.02	0.02	0.171	0.171	0.173	0.173	0.02	0.02
	MSE	0.02	0.02	0.172	0.172	0.174	0.174	0.02	0.02
	pristranost	-18.94	1.33	-18.94	1.33	-18.94	1.33	-18.94	1.33
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	32.2	50.31	32.2	50.31	32.2	50.31	32.2	50.31
	MSE	35.78	50.32	35.78	50.32	35.78	50.32	35.78	50.32
σ^2=5									
	pristranost	-0.977	-0.977	-4.494	-4.493	4.798	4.797	1.094	1.093
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.108	0.108	1.201	1.200	1.251	1.250	0.11	0.11
	MSE	0.109	0.109	1.241	1.241	1.297	1.297	0.111	0.111
	pristranost	-18.94	1.33	-18.94	1.33	-18.94	1.33	-18.94	1.33
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	160.99	251.55	160.99	251.55	160.99	251.55	160.99	251.55
	MSE	178.93	251.64	178.93	251.64	178.93	251.64	178.93	251.64
σ^2=10									
	pristranost	-2.054	-2.053	-13.66	-14.23	12.81	13.13	2.232	2.231
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.238	0.238	87.73	81.1	20.46	19.42	0.243	0.243
	MSE	0.242	0.242	88.11	81.51	20.78	19.77	0.248	0.248
	pristranost	-18.94	1.33	-18.94	1.33	-18.94	1.33	-18.94	1.33
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	321.99	503.11	321.99	503.11	321.99	503.11	321.99	503.11
	MSE	357.86	503.28	357.86	503.28	357.86	503.28	357.86	503.28
σ^2=100									
	pristranost	-27.18	-76.63	-56.42	-307.74	239.07	570.82	52.44	84.04
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	5946.1	1604.4	146613	127320	1134211	1221811	2206.6	1779.2
	MSE	5946.9	1610.3	146619	127510	1134326	1222463	2209.3	1786.3
	pristranost	-18.94	1.44	-18.94	2.9	-18.94	3.033	-18.94	1.46
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	3219.9	5033.5	3219.9	5040.6	3219.9	5042.4	3219.9	5035.9
	MSE	3578.6	5035.6	3578.6	5049	3578.6	5051.6	3578.6	5038.1

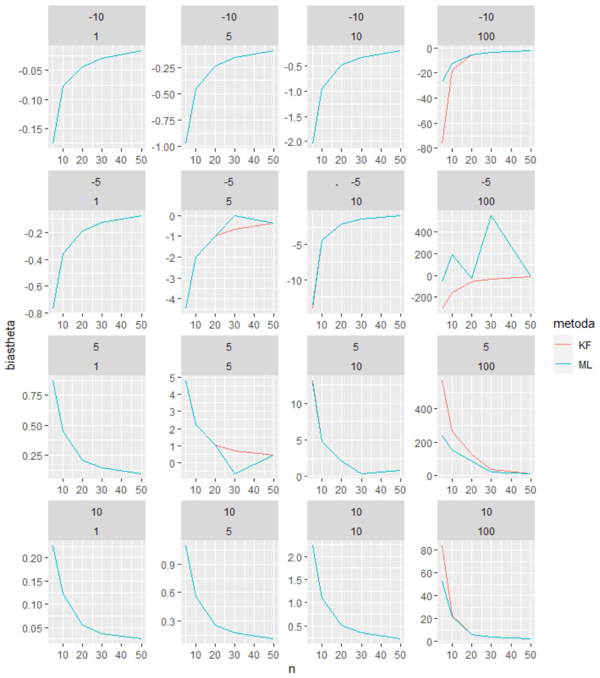
		$n = 20$							
		μ=-10		μ=-5		μ=5		μ=10	
		ML	KF	ML	KF	ML	KF	ML	KF
σ^2=1									
	pristranost	-0.043	-0.043	-0.185	-0.185	0.21	0.21	0.055	0.055
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.005	0.005	0.04	0.04	0.04	0.04	0.005	0.005
	MSE	0.005	0.005	0.04	0.04	0.04	0.04	0.005	0.005
	pristranost	-4.44	0.59	-4.44	0.59	-4.44	0.59	-4.44	0.59
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	9.54	10.57	9.54	10.57	9.54	10.57	9.54	10.57
	MSE	9.74	10.57	9.74	10.57	9.74	10.57	9.74	10.57
σ^2=5									
	pristranost	-0.234	-0.233	-0.984	-0.983	1.042	1.041	0.261	0.261
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.025	0.025	0.213	0.212	0.214	0.214	0.025	0.025
	MSE	0.025	0.025	0.215	0.214	0.216	0.216	0.025	0.025
	pristranost	-4.44	0.59	-4.44	0.59	-4.44	0.59	-4.44	0.59
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	47.71	52.86	47.71	52.86	47.71	52.86	47.71	52.86
	MSE	48.69	52.87	48.69	52.87	48.69	52.87	48.69	52.87
σ^2=10									
	pristranost	-0.479	-0.479	-2.049	-2.049	2.138	2.138	0.518	0.518
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.051	0.051	0.465	0.465	0.47	0.47	0.051	0.051
	MSE	0.051	0.051	0.474	0.474	0.48	0.48	0.051	0.051
	pristranost	-4.44	0.59	-4.44	0.59	-4.44	0.59	-4.44	0.59
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	95.41	105.72	95.41	105.72	95.41	105.72	95.41	105.72
	MSE	97.38	105.75	97.38	105.75	97.38	105.75	97.38	105.75
σ^2=100									
	pristranost	-5.827	-5.826	-23.7	-57.37	87.571	128.58	6.037	6.037
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.85	0.85	1882.58	839.59	41836.3	40088.2	0.898	0.898
	MSE	0.884	0.883	1883.7	846.18	41851.6	40121.3	0.934	0.934
	pristranost	-4.44	0.59	-4.44	0.61	-4.44	0.61	-4.44	0.59
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	954.12	1057.2	954.12	1056.9	954.12	1057.2	954.12	1057.2
	MSE	973.82	1057.5	973.82	1057.3	973.82	1057.5	973.82	1057.5

		$n = 30$							
		μ=-10		μ=-5		μ=5		μ=10	
		ML	KF	ML	KF	ML	KF	ML	KF
σ^2=1									
	pristranost	-0.029	-0.029	-0.124	-0.124	0.141	0.141	0.037	0.037
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.003	0.003	0.026	0.026	0.026	0.026	0.003	0.003
	MSE	0.003	0.003	0.026	0.026	0.026	0.026	0.003	0.003
	pristranost	-3.157	0.183	-3.157	0.183	-3.157	0.183	-3.157	0.183
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	6.42	6.87	6.42	6.87	6.42	6.87	6.42	6.87
	MSE	6.52	6.87	6.52	6.87	6.52	6.87	6.52	6.87
σ^2=5									
	pristranost	-0.156	-0.156	-0.654	-0.654	0.693	0.692	0.175	0.175
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.016	0.016	0.139	0.139	0.139	0.139	0.016	0.016
	MSE	0.016	0.016	0.14	0.14	0.14	0.14	0.016	0.016
	pristranost	-3.157	0.183	-3.157	0.183	-3.157	0.183	-3.157	0.183
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	32.09	34.34	32.09	34.34	32.09	34.34	32.09	34.34
	MSE	32.59	34.34	32.59	34.34	32.59	34.34	32.59	34.34
σ^2=10									
	pristranost	-0.32	-0.32	-1.348	-1.347	1.404	1.403	0.346	0.345
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.033	0.033	0.295	0.295	0.296	0.296	0.034	0.034
	MSE	0.033	0.033	0.299	0.299	0.3	0.3	0.034	0.034
	pristranost	-3.157	0.183	-3.157	0.183	-3.157	0.183	-3.157	0.183
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	64.18	68.68	64.18	68.68	64.18	68.68	64.18	68.68
	MSE	65.18	68.69	65.18	68.69	65.18	68.69	65.18	68.69
σ^2=100									
	pristranost	-3.655	-3.655	547.11	-30.98	20.69	35.86	3.749	3.749
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.456	0.456	6218202	166.01	1578.15	1059.26	0.457	0.4576
	MSE	0.47	0.47	6218800	167.93	1579.01	1061.83	0.471	0.47
	pristranost	-3.157	0.183	-3.157	0.185	-3.157	0.185	-3.157	0.183
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	641.82	686.85	641.82	686.83	641.82	686.79	641.82	686.85
	MSE	651.79	686.88	651.79	686.86	651.79	686.83	651.79	686.88

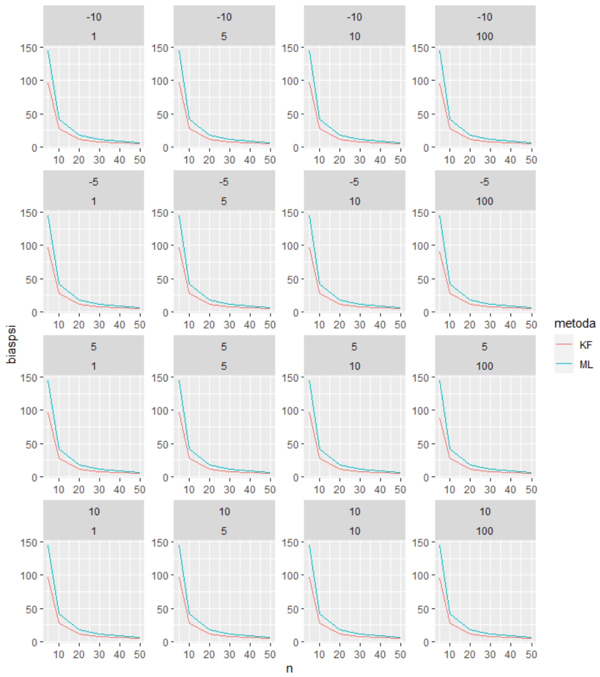
		$n = 50$							
		μ=-10		μ=-5		μ=5		μ=10	
		ML	KF	ML	KF	ML	KF	ML	KF
σ^2=1									
	pristranost	-0.015	-0.015	-0.071	-0.071	0.09	0.09	0.025	0.025
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.002	0.002	0.016	0.016	0.016	0.016	0.002	0.002
	MSE	0.002	0.002	0.016	0.016	0.016	0.016	0.002	0.002
	pristranost	-2.013	-0.013	-2.013	-0.013	-2.013	-0.013	-2.013	-0.013
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	3.92	4.08	3.92	4.08	3.92	4.08	3.92	4.08
	MSE	3.96	4.08	3.96	4.08	3.96	4.08	3.96	4.08
σ^2=5									
	pristranost	-0.09	-0.09	-0.386	-0.385	0.43	0.43	0.112	0.112
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.01	0.01	0.083	0.083	0.083	0.083	0.01	0.01
	MSE	0.01	0.01	0.083	0.083	0.083	0.083	0.01	0.01
	pristranost	-2.013	-0.013	-2.013	-0.013	-2.013	-0.013	-2.013	-0.013
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	19.61	20.42	19.61	20.42	19.61	20.42	19.61	20.42
	MSE	19.81	20.42	19.81	20.42	19.81	20.42	19.81	20.42
σ^2=10									
	pristranost	-0.187	-0.186	-0.794	-0.794	0.859	0.859	0.218	0.218
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.02	0.02	0.172	0.172	0.173	0.172	0.02	0.02
	MSE	0.02	0.02	0.173	0.173	0.174	0.174	0.02	0.02
	pristranost	-2.013	-0.013	-2.013	-0.013	-2.013	-0.013	-2.013	-0.013
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	39.22	40.84	39.22	40.84	39.22	40.84	39.22	40.84
	MSE	39.63	40.84	39.63	40.84	39.63	40.84	39.63	40.84
σ^2=100									
	pristranost	-2.095	-2.095	-11.42	-11.6	8.543	12.3	2.208	2.208
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.239	0.239	8.738	8.21	183.17	13.33	0.243	0.242
	MSE	0.244	0.244	8.998	8.48	183.32	13.63	0.248	0.247
	pristranost	-2.013	-0.013	-2.013	-0.013	-2.013	-0.013	-2.013	-0.013
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	392.22	408.39	392.22	408.39	392.22	408.39	392.22	408.39
	MSE	396.28	408.39	396.28	408.39	396.28	408.4	396.28	408.39

				$n = 100$					
		μ=-10		μ=-5		μ=5		μ=10	
		ML	KF	ML	KF	ML	KF	ML	KF
σ^2=1									
	pristranost	-0.01	-0.01	-0.041	-0.041	0.039	0.039	0.009	0.009
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.001	0.001	0.008	0.008	0.008	0.008	0.001	0.001
	MSE	0.001	0.001	0.008	0.008	0.008	0.008	0.001	0.001
	pristranost	-0.956	0.045	-0.956	0.045	-0.956	0.045	-0.956	0.045
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	1.958	1.997	1.958	1.997	1.958	1.997	1.958	1.997
	MSE	1.967	1.997	1.967	1.997	1.967	1.997	1.967	1.997
σ^2=5									
	pristranost	-0.05	-0.05	-0.202	-0.202	0.197	0.197	0.049	0.048
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	-0.05	-0.05	0.04	0.04	0.04	0.04	0.005	0.005
	MSE	-0.05	-0.05	0.04	0.04	0.04	0.04	0.005	0.005
	pristranost	-0.956	0.045	-0.956	0.045	-0.956	0.045	-0.956	0.045
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	9.791	9.989	9.791	9.989	9.791	9.989	9.791	9.989
	MSE	9.836	9.989	9.836	9.989	9.836	9.989	9.836	9.989
σ^2=10									
	pristranost	-0.101	-0.101	-0.405	-0.405	0.398	0.398	0.098	0.098
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.01	0.01	0.082	0.082	0.082	0.082	0.01	0.01
	MSE	0.01	0.01	0.082	0.082	0.082	0.082	0.01	0.01
	pristranost	-0.956	0.045	-0.956	0.045	-0.956	0.045	-0.956	0.045
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	19.582	19.978	19.582	19.978	19.582	19.978	19.582	19.978
	MSE	19.673	19.979	19.673	19.979	19.673	19.979	19.673	19.979
σ^2=100									
	pristranost	-1.031	-1.031	-4.607	-4.607	4.534	4.534	1.017	1.017
$\hat{\omega}_1$	*varianca*	0.108	0.108	1.204	1.204	1.169	1.169	0.107	0.107
	MSE	0.109	0.109	1.246	1.246	1.21	1.21	0.108	0.108
	pristranost	-0.956	0.045	-0.956	0.045	-0.956	0.045	-0.956	0.045
$\hat{\omega}_2$	*varianca*	195.82	199.79	195.82	199.79	195.82	199.79	195.82	199.79
	MSE	196.73	199.79	196.73	199.79	196.73	199.79	196.73	199.79

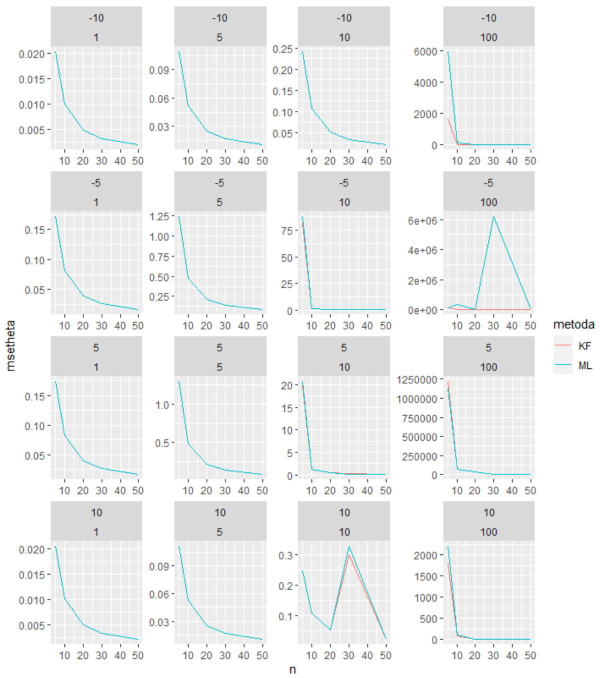
D Grafi



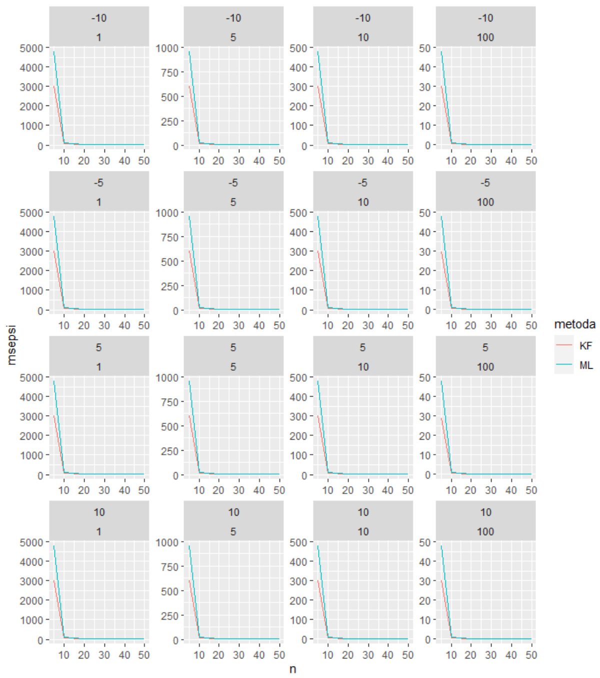
(a) Bias od θ



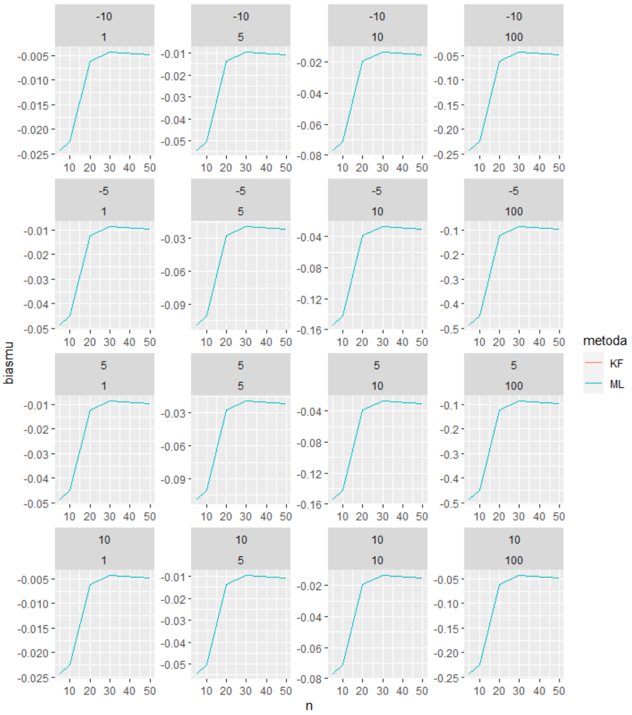
(b) Bias od ψ



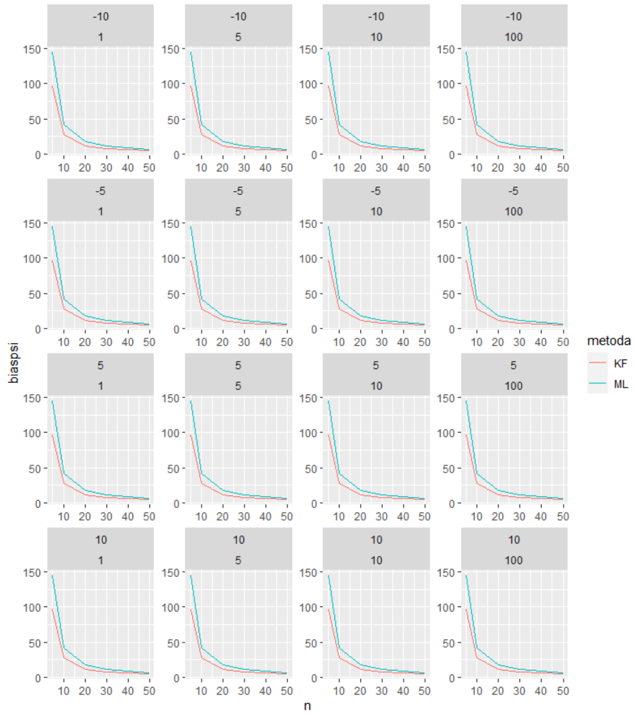
(c) MSE od θ



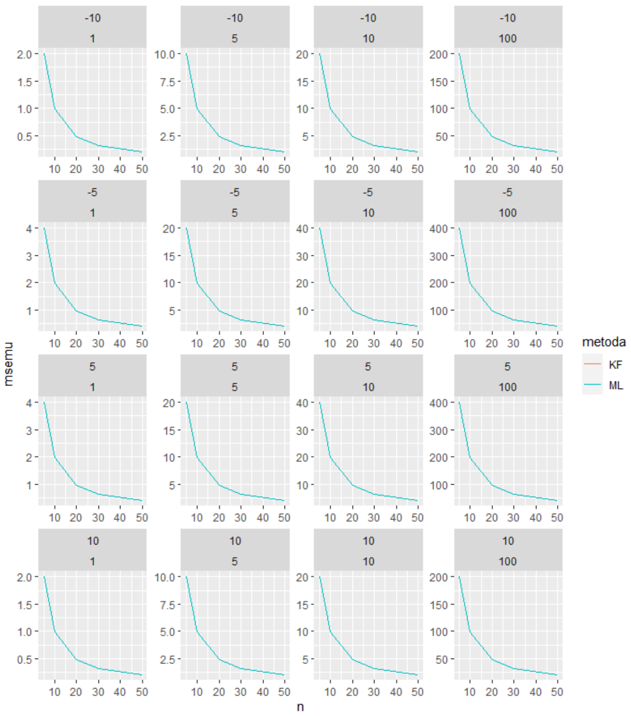
(d) MSE od ψ



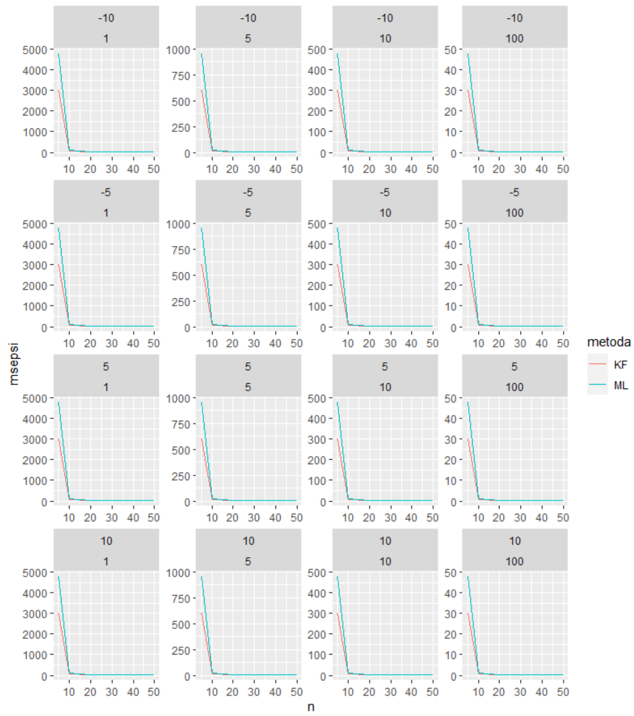
(a) Bias od μ



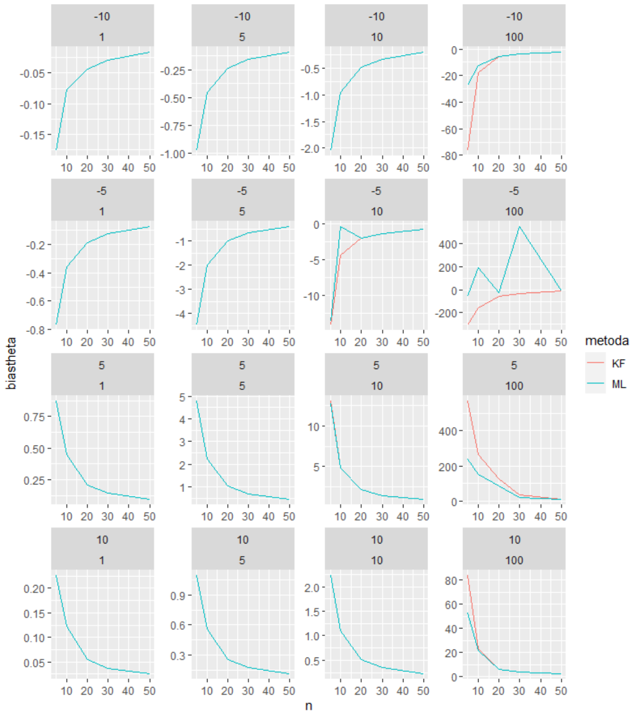
(b) Bias od ψ



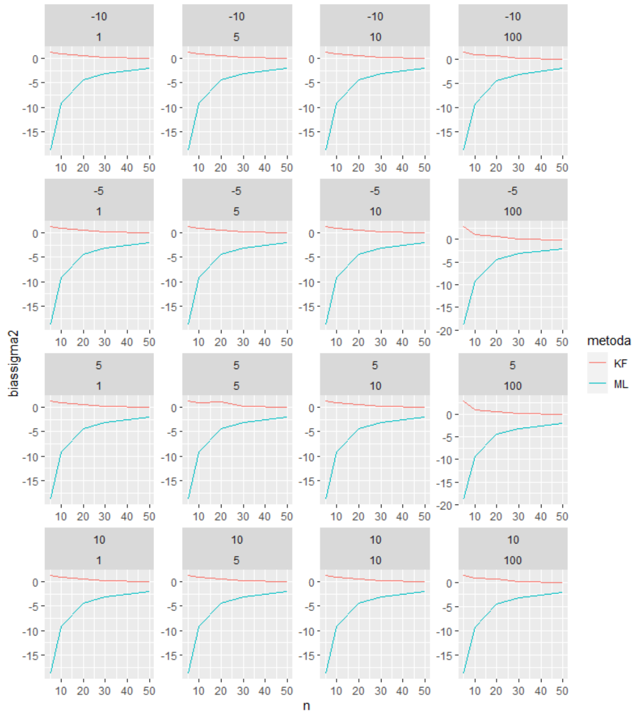
(c) MSE od μ



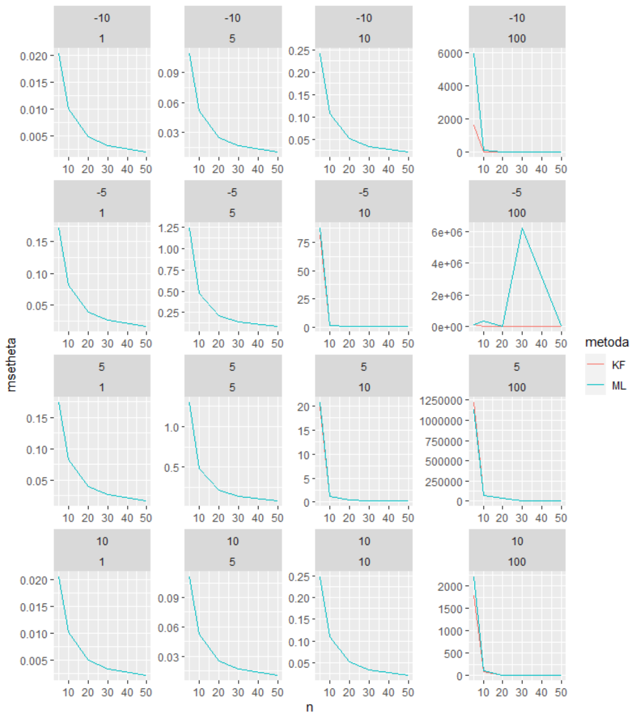
(d) MSE od ψ



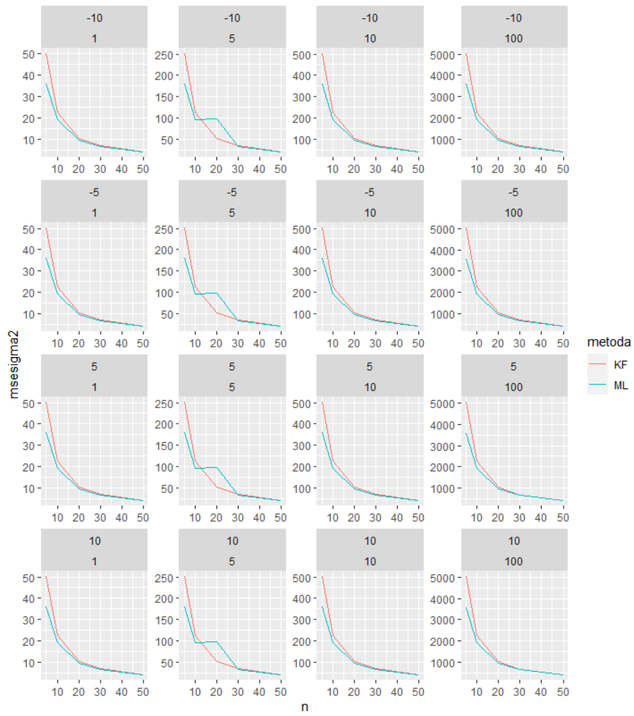
(a) Bias od θ



(b) Bias od σ^2



(c) MSE od θ



(d) MSE od σ^2

E Koda

```
KF <- function(x, zvtheta, zvpsi, imax, adjust.step){
  n <- length(x)
  mu <- mean(x)
  sigma2 <- sd(x)^2
  razlika <- 1
  i <- 0
  w <- matrix(c(zvtheta,zvpsi),ncol=1)
  while(razlika > 1e-5 && i < imax){

   w.old <- w
   U <- matrix(c((-w.old[2]/w.old[1]^2)*sum(x)+(n*w.old[2]/w.old[1]^3),
        n/(2*w.old[2])-(1/2)*sum((x-1/w.old[1])^2)-1/(2*w.old[2])),
        ncol = 1)
   invI <- matrix(c((w.old[1]^4)/(n*w.old[2]), 0,
           0, (2*w.old[2]^2)/n), ncol = 2)
   w <- w.old+adjust.step*invI%*%U
   razlika <- max(abs(w-w.old))
   i <- i+1
   if (sum(is.na(w))!=0) {w<-w.old;break}
  }
  return(list(w=w, "ikorak" =i,razlika=razlika))
}

ML<-function(x){
 mx<-mean(x)
 vrx<-mean((x-mx)**2)
 1/c(mx,vrx)
}

set.seed(1)
mu = -10
sigma2 = 100
n = 5
```

```
B = 10000

estK <- matrix(NA,ncol=2,nrow=B)
estML <- matrix(NA,ncol=2,nrow=B)
B = 10000
for (b in 1:B){
 x <-  rnorm(n ,mean=mu,sd=sqrt(sigma2))
 estK[b,] <- KF(x,1/mu,1/sigma2,10^4,0.2)$w
 estML[b,] <- ML(x)
}

bias <- apply(estK,2,mean)-1/c(mu,sigma2)
variance <- apply(estK,2,var)
mse <- (bias**2+variance)

biasml <- apply(estML,2,mean)-1/c(mu,sigma2)
varianceml <- apply(estML,2,var)
mseml <- biasml**2+varianceml

n.inf <- apply(estK,2,function(x) sum(x==Inf|x==-Inf))
p.inf <- n.inf/B

n.infml <- apply(estML,2,function(x) sum(x==Inf|x==-Inf))
p.infml <- n.infml/B

estK <- apply(estK,2,function(x) {x[x==Inf|x==-Inf]<-NA;x} )
estML <- apply(estML,2,function(x) {x[x==Inf|x==-Inf]<-NA;x} )

bias <- apply(estK,2,mean,na.rm=T)-1/c(mu,sigma2)
variance <- apply(estK,2,var,na.rm=T)
mse <- bias**2+variance

biasml <- apply(estML,2,mean,na.rm=T)-1/c(mu,sigma2)
varianceml <- apply(estML,2,var,na.rm=T)
mseml <- biasml**2+varianceml

biasml/abs(1/c(mu,sigma2))*100
bias/abs(1/c(mu,sigma2))*100
varianceml/abs(1/c(mu,sigma2))*100
variance/abs(1/c(mu,sigma2))*100
```

```
mseml/abs(1/c(mu,sigma2))*100
mse/abs(1/c(mu,sigma2))*100
```