UNIVERZA NA PRIMORSKEM
Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

Analiza II - Infinitezimalni račun
Zbirka rešenih nalog

Amar Bapić

DRUGO UČNO GRADIVO

111 strani

Dodiplomski študijski programi Matematika, Matematika v ekonomiji in financah, Bioinformatika

PRVA IZDAJA

Koper, 2020

Predgovor

Pred vami je zbirka rešenih nalog za predmet Analiza II - Infinitezimalni račun, namenjena študentom in študentkam študijskega programa Matematika, Matematika v ekonomiji in financah ter Bioinformatika na UP FAMNIT. Upam, da vam bo zbirka koristila, vsekakor pa ni mišljena kot nadomestilo za vaje, kjer so stvari razložene boljše, bolj izčrpno in razumljivo.

Vsebina in naloge so v skladu z učnim načrtom. Obravnavajo se teme zveznosti, odvedljivosti in integrabilnosti funkcij ene spremenljivke ter funkcijskih in potenčnih vrst.

Rešenih je veliko nalog. Rešitve so napisane natančno in precizno, da bi študent lahko razumel določen postopek reševanja in pri tem dobil intuicijo, kako pristopiti k reševanju podobnih nalog. Zbirka vsebuje tudi nekaj dodatnih nalog, ki so prepuščene bralcu za samostojno reševanje. V gradivu je mogoče tudi nekaj napak. Vesel bom, če me boste nanje opozorili.

Zahvala gre Nini Klobas, ki mi je bila v veliko pomoč pri pripravi le-tega.

Amar Bapić
amar.bapic@famnit.upr.si

Kazalo

LIMITE FUNKCIJ - PONOVITEV

Nedoločni obliki:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ 1^{\infty},\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0.$$

Določni obliki:

$$\infty\cdot\infty=\infty, \quad \infty+\infty=\infty, \quad k\cdot\infty=\infty\ (k\neq 0) \quad \frac{k}{\infty}=0\ (k\in\mathbb{R}), \quad \frac{k}{0}=\infty\ (k\neq 0)$$

Naloga 1

Izračunaj naslednje limite:

1. $\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$
2. $\lim_{x\to-2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{(1-x)^m}-1}{x}$
5. $\lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$
6. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x}$

Rešitev:

1. $\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x^4+x^2+1} = \frac{0}{9+3+1} = 0$
2. $\lim_{x\to-2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to-2} \frac{x(x+1)(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \lim_{x\to-2} \frac{x(x+1)}{x-3} = -\frac{2}{5}$
3. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-5x}{x^2-3x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4-5x \;\big|\; :x^4}{x^2-3x+1 \;\big|\; :x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{5}{x^3}}{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}} = \frac{1}{0} = \infty$$

4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{(1-x)^m}-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\begin{bmatrix}1-x=t^n\\ x\to 0\\ t\to 1\end{bmatrix}=\lim_{t\to 1}\frac{t^m-1}{1-t^n}$$
$$=-\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^{m-1}+t^{m-2}+\ldots+t^2+t+1)}{(t-1)(t^{n-1}+t^{n-2}+\ldots+t^2+t+1)}=-\frac{m}{n}$$

5. Bomo uporabili zgornjo nalogo v drugi obliki. Namreč

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{(1-x)^m}-1}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[n]{(1-x)^m}}{x}=\frac{m}{n}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\begin{bmatrix}x=1-t\\ x\to 1\\ t\to 0\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-t})(1-\sqrt[3]{1-t})\ldots(1-\sqrt[n]{1-t})}{t^{n-1}}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1-\sqrt{1-t}}{t}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{1-t}}{t}\cdot\ldots\cdot\frac{1-\sqrt[n]{1-t}}{t}\right]$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\ldots\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n!}$$

6.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\frac{2}{\infty}=0$$

7.

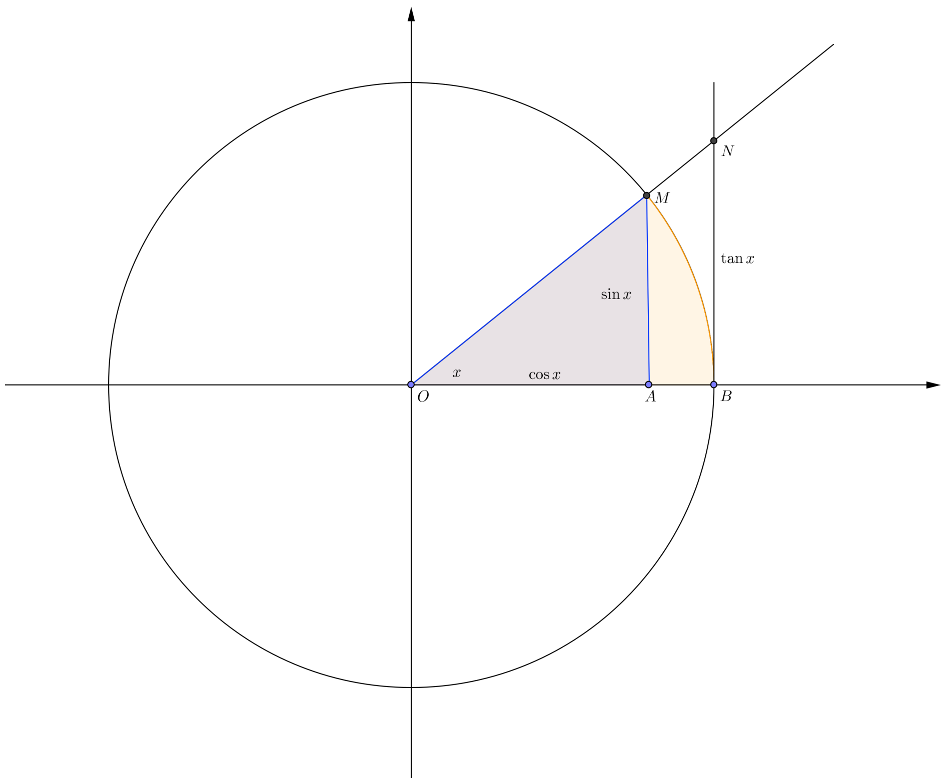
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)-(\sqrt[3]{x+1}-1)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}-\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}-\frac{x}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

♣

Naloga 2

Dokaži da velja $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

<u>Rešitev:</u> Dokaz je geometrijski. Poglejmo si enotsko krožnico. Naj bo x pozitiven kot s krakom na abcisni osi, v prvem kvadrantu.



Ordinato (absciso) presečišča kota x z enotsko krožnico definiramo kot sinus (kosinus) tega kota, presečišče s tangento na enotsko krožnico v točki $(1,0)$ pa imenujemo tangens tega kota. Torej, imamo

$$|AM| = \sin x, \ |OA| = \cos x, \ |BN| = \tan x.$$

Očitno je, $P_{\triangle OAM} < P_{\sphericalangle BOM} < P_{\triangle BON}$, pri čemer

$$P_{\triangle OAM} = \frac{|OB| \cdot |AM|}{2} = \frac{\sin x \cos x}{2}, \quad P_{\sphericalangle BOM} = \frac{|OB|^2 \cdot x}{2} = \frac{x}{2}, \quad P_{\triangle OBN} = \frac{|OB| \cdot |BN|}{2} = \frac{\tan x}{2}.$$

Iz zgornje neenakosti sledi

$$\begin{aligned} \frac{\sin x \cos x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2} \ \Big| \cdot 2 \\ \Leftrightarrow \sin x \cos x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \ \Big| : \sin x > 0 \text{ (ker smo v 1. kvadrantu)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

Če $x \downarrow 0$ to $M \to B \Rightarrow \overset{\frown}{MB} \to 0$, $A \to B \Rightarrow OA \to OB \Rightarrow \cos x \to 1$. Torej, $\lim\limits_{x\downarrow 0} \cos x = 1$. Po sendvič izreku imamo $\lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Z druge strani,

$$\lim_{x\uparrow 0} \frac{\sin x}{x} = \begin{bmatrix} x = -t \\ x \uparrow 0 \\ t \downarrow 0 \end{bmatrix} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Od tod sledi,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

♣

Komentar 1

Pri reševanju limit s trigonometrijskimi funkcijami bomo rabili nekaj njihovih osnovnih lastnosti, kot so:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

Naloga 3

Izračunaj naslednje limite, če velja $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan kx}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \sin 2x}$
5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$

Rešitev:

1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3$$

2.
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{1+\cos x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

3.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan kx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x\cos kx}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin kx}{kx}\cdot\frac{k}{\cos kx}\right]=k$$

4.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot(1+\cos x+\cos^2 x)\right)=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

5.
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos 2x(\cos x+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\cos 2x(\cos x+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x+\sin x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

♣

Naloga 4

Izračunaj naslednje limite, če velja $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}=(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, *kjer je* e *Eulerjeva konstanta in znaša približno* $2.718\ldots$.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, $a>1$

Rešitev:

1.
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=(1^\infty)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+1+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2}{x-1}\cdot x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}} = e^2$$

2.

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}} = (1^\infty) = \begin{bmatrix} x = t^2 \\ x\to 0 \\ t\to 0 \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0}\sqrt[(t^2)]{\cos t} = \lim_{t\to 0}(1+(\cos t-1))^{\frac{1}{t^2}}$$

$$= \lim_{t\to 0}(1+(\cos t-1))^{\frac{1}{\cos t-1}\cdot\frac{\cos t-1}{t^2}} = e^{\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t^2}} = e^{-\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \begin{bmatrix} a^x-1=t \\ a^x=t+1 \,\Big|\, \ln \\ x=\frac{\ln(1+t)}{\ln a} \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\ln(1+t)}{\ln a}} = \ln a\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \ln a\cdot\frac{1}{\ln e} = \ln a$$

♣

Komentar 2

Če je $a = e$ imamo $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

Definicija 1: Asimptotska ekvivalentnost

*Za dve realni funkciji f in g pravimo da sta **asimptotsko ekvivalentni ko gre x proti** a, $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$, natanko tedaj ko $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ in označimo $f(x)\sim g(x)$ $(x\to a)$.*

Komentar 3

Če sta dve funkciji asimptotsko ekvivalentni, lahko v limiti "zamenjamo" eno funkcijo z drugo (paziti moramo, da x teži proti istem številu oziroma neskončnosti). Npr. očitno je $x^2+2x+1\sim x^2$ $(x\to\infty)$. Torej velja:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{x^2} = 5.$$

Komentar 4: Nekaj pomembnih primerov

$$e^x-1\sim x\ (x\to 0),\quad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\ (x\to 0),\quad \sin x\sim x\ (x\to 0),\quad \tan x\sim x\ (x\to 0)$$

1.1. Dodatne naloge

1. Izračunaj naslednje limite:
   (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$
   (b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$, $m,n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$
   (c) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$
   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$
   (e) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\cot x-\cot a}{x-a}$
   (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$

2. Izračunaj $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$, kjer so $a,b,c>0$.

3. Določi $a,b\in\mathbb{R}$ da velja

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-ax^2+1}-\sqrt[3]{x^3-bx^2+1}\right)=6.$$

4. Določi $a,b\in\mathbb{R}$ da velja $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\sim ax^b$ $(x\to\infty)$.

5. Naj gre x proti 0. Določi $c\in\mathbb{R}$ in $n\in\mathbb{N}$ da velja
   (a) $2x-3x^2+x^5\sim cx^n$
   (b) $\tan x-\sin x\sim cx^n$
   (c) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\sim cx^n$
   (d) $\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-2x}\sim cx^n$

NAMIGI:

(1a) Substitucija $x=t^2$, racionalizacija in naloga 3.2.

(1b) Podobno nalogi 1.5.

(1e) Definicija kotangensa in osnovne trigonometrijske enakosti.

(2) Transformiracija v limito $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ in naloga 4.3.

(5a) Rabimo najti c in n takšna da velja $1=\lim_{x\to 0}\frac{2x-3x^2+x^5}{cx^n}$. Ker je

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-3x^2+x^5}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2-3x+x^4}{2}=1,$$

to velja $2x-3x^2+x^5\sim 2x$ $(x\to 0)$. Torej,

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-3x^2+x^5}{cx^n}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{cx^n}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{cx^{n-1}}=1.$$

Očitno sta $c=2$ in $n=1$.

ZVEZNOST IN ENAKOMERNA ZVEZNOST FUNKCIJ

Definicija 2

Funkcija $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ je ***zvezna v točki*** *$a \in \mathscr{D}$, če za vsak (še tako majhen) $\varepsilon > 0$ obstaja takšen $\delta > 0$, da je*

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

kjer je $x \in \mathscr{D}$ takšen, da je $|x - a| < \delta$. Če je f zvezna v vsaki točki množice $\mathscr{D}$, potem rečemo da je f ***zvezna na množici*** *$\mathscr{D}$.*

Definicija 3

Naj bo f definirana na $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, z možno izjemo le v točki x_0. Za funkcijo f pravimo, da ima ***odstranljivo prekinitev*** *če je $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ in f ni definirana v x_0, ali $f(x_0) \neq a$. Funkcija ima* ***prekinitev prve vrste*** *v točki x_0, če sta desna in leva limita v x_0 končni in različni. Če prekinitev ni prve vrste, potem pravimo da ima funkcija* ***prekinitev druge vrste****.*

Naloga 5

Po $\varepsilon - \delta$ definiciji preverite zveznost realne funkcije f realne spremenljivke x, ki je podana s predpisom:

(i) $f(x) = \sin x$, *v točki* $x = 0$.

(ii) $f(x) = sgn x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, *v točki* $x = 0$.

Rešitev:

(i) Naj bo $\varepsilon > 0$ poljubno majhen. Iščemo tak $\delta = \delta(\varepsilon)$, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$|x| < \delta \Rightarrow |\sin x| < \varepsilon.$$

Ker je $\sin x \leq x$ za vsako nenegativno število x, potem je $|\sin x| \leq |x|$ za $x \in \mathbb{R}$. Če vzamemo $\delta = \varepsilon$, potem je $|\sin x| \leq |x| < \delta = \varepsilon$. Torej je funkcija $\sin x$ zvezna v $x = 0$.

(ii) Bomo pokazali da funkcija f ni zvezna v točki $x = 0$. Iščemo $\varepsilon > 0$ takšen da za poljubno $\delta > 0$ obstaja $x \in \mathbb{R}$ in da velja

$$|x| < \delta \text{ in } |\mathrm{sgn} x| \geq \varepsilon.$$

Vzemimo $\varepsilon = \frac{1}{2}$ in $\delta > 0$ poljuben. Za $x = \frac{\delta}{2}$ imamo da je $|x| < \delta$ in $|\mathrm{sgn} x| = 1 > \varepsilon$. Torej, funkcija f ni zvezna v točki $x = 0$.

♣

Naloga 6

Po $\varepsilon - \delta$ definiciji pokažite da je funkcija $f(x) = x^2$ zvezna v točki $x = 2$.

Rešitev: Naj bo $\varepsilon > 0$ poljubno majhen. Iščemo tak $\delta = \delta(\varepsilon)$, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon.$$

Če vzamemo $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$ in $x \in \mathbb{R}$ takšen da je $|x-2| < \delta$, to velja

$$|x+2| = |x-2+4| \leq |x-2| + 4 < \delta + 4 \leq 1 + 4 = 5.$$

Ker je

$$|x^2 - 4| = |x-2| \cdot |x+2| < 5\delta \leq 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon,$$

to je funkcija f zvezna v $x = 2$.

♣

Naloga 7

Določite realno konstanto a za katero je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} e^x; & x < 0 \\ a + x; & x \geq 0 \end{cases}$$

povsod zvezna.

Rešitev: Če želimo da je funkcija f povsod zvezna, mora veljati

$$f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.0.1}$$

Če je $x \neq 0$, je zveznost očitna. Preveriti moramo še zveznost v točki $x = 0$.

$$f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^x = \left\{ \begin{array}{c} x = 0 - \varepsilon \\ \varepsilon > 0 \\ \varepsilon \to 0 \end{array} \right\} = \lim_{\varepsilon \to 0} e^{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{e^{\varepsilon}} = 1$$

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (a + x) = a$$
$$f(0) = a$$

Glede na 2.0.1 vidimo, da je pri $a = 1$ funkcija povsod zvezna.

♣

Naloga 8

Preverite zveznost funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dane s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x; & |x| \leq 1 \\ 1; & |x| > 1 \end{cases}.$$

Rešitev: Za $x \neq 1$ in $x \neq -1$ je funkcija očitno zvezna. Torej, preverimo še zveznost v točkah $x = 1$ in $x = -1$.

$$f(1^-) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1$$
$$f(1^+) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 1 = 1$$
$$f(1) = 1$$

Funkcija f je zvezna v $x = 1$.

$$f(-1^-) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} 1 = 1$$
$$f(-1^+) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x = -1$$

Ker je $f(-1^+) \neq f(-1^-)$, funkcija ni zvezna v $x = -1$.

♣

Naloga 9

Preverite zveznost funkcij $f \circ g$ in $g \circ f$ če je

(i) $f(x) = sgn(x),\ g(x) = 1 + x^2$

(ii) $f(x) = sgn(x),\ g(x) = x(1 - x^2)$

Rešitev:

(i) Ker je

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 + x^2) = \operatorname{sgn}(1 + x^2) = 1$$

je funkcija očitno zvezna. Po drugi strani ima funkcija

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\operatorname{sgn} x)=1+\operatorname{sgn}^2(x)=\begin{cases}1; & x=0\\ 2; & x\neq 0\end{cases}$$

prekinitev v $x=0$, ker je $f(0^+)=f(0^-)=2\neq 1=f(0)$.

(ii)

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\operatorname{sgn}(x(1-x^2))=\begin{cases}1, & x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)\\ -1, & x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)\\ 0, & x\in\{-1,0,1\}\end{cases}.$$

Funkcija je očitno zvezna za vse $x\in\mathbb{R}$ razen $x\in\{-1,0,1\}$.Preveriti moramo še zveznost v teh točkah.

$$\begin{aligned}f(-1^+)=-1\neq 1=f(-1^-)&\Rightarrow \text{ prekinitev v } x=-1\\ f(0^+)=1\neq -1=f(0^-)&\Rightarrow \text{ prekinitev v } x=0\\ f(1^+)=-1\neq 1=f(1^-)&\Rightarrow \text{ prekinitev v } x=1\end{aligned}$$

Po drugi strani, ker je

$$(g\circ f)(x)=\operatorname{sgn}(x)(1-\operatorname{sgn}^2(x))=0,$$

je funkcija $g\circ f$ povsod zvezna.

♣

Definicija 4

*Naj bo $f:\mathscr{D}\to\mathbb{R}$ funkcija. f je **enakomerno zvezna** na $\mathscr{D}$, če za vsak $\varepsilon>0$ obstaja takšen $\delta>0$, da velja $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$, za vsaka $x_1,x_2\in\mathscr{D}$, za katera je $|x_1-x_2|<\delta$.*

Komentar 5

Enakomerna zveznost torej nekako pomeni, da je v vseh točkah definicijskega območja $\mathscr{D}$ funkcija zvezna "na enak način".

Naloga 10

Dokažite da je funkcija $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ s predpisom $f(x)=\sqrt{x}$ enakomerno zvezna.

Rešitev: Naj bo $\varepsilon>0$ poljubno majhen in $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ takšna, da je $|x_1-x_2|<\delta$. Brez izgube splošnosti predpostavimo, da je $x_1 > x_2$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}| = \left|\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\right| = \frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}} \leq \frac{|x_1-x_2|}{|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|} \\ \Rightarrow |\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|^2 \leq |x_1-x_2| < \delta \\ \Rightarrow |\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}| < \sqrt{\delta}. \end{aligned}$$

Če vzamemo $\delta = \varepsilon^2$ po zgornji neenakosti velja $|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}| < \varepsilon$. Torej je funkcija $\sqrt{x}$ zvezna na $[0,\infty)$.

$\clubsuit$

Naloga 11

Dokažite, da je funkcija

$$f:(0,1)\to\mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$$

zvezna, a ni enakomerno zvezna.

Rešitev: Naj bosta $\varepsilon > 0$ in $x_0 \in (0,1)$ poljubna pri čemer je $|x-x_0| < \delta$ za vsak $x \in (0,1)$. Recimo, da je $\delta = \frac{x_0}{2}$, potem velja

$$|x-x_0| < \frac{x_0}{2} \Rightarrow \frac{x_0}{2} < x < \frac{3x_0}{2}.$$

Ker potrebujemo

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x-x_0|}{xx_0} < 2\frac{\delta}{x_0^2} < \varepsilon$$

mora veljati $|x-x_0| < \frac{x_0^2\varepsilon}{2}$. Torej, če vzamemo $\delta = \min\{\frac{x_0}{2}, \frac{x_0^2\varepsilon}{2}\}$ sledi $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$.

Naj bo $\delta > 0$ poljuben in $a = \max\{\frac{1}{2\delta}, 1\}$. Vzemimo $x_1 = \frac{1}{a}$ in $x_2 = \frac{1}{2a}$. Ker je

$$|x_1-x_2| = \frac{1}{2a} < \delta \ \text{ in } \ |f(x_1)-f(x_2)| = a \geq 1,$$

funkcija f ni enakomerno zvezna.

$\clubsuit$

Komentar 6

Funkcija $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ ni uniformno zvezna na $\mathscr{D}$ če obstajata zaporedja x_n, y_n v $\mathscr{D}$, da velja

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0 \land \lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| \neq 0.$$

Vzemimo $x_n = \frac{1}{n}$ in $y_n = \frac{1}{2n}$, $n \geq 2$. Očitno sta zaporedja definirana v $(0,1)$. Ker sta

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0,$$

in

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = \lim_{n\to\infty} |n - 2n| = \lim_{n\to\infty} n \neq 0,$$

funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ ni uniformno zvezna na $(0,1)$.

Izrek 1: Obstoj realne ničle na zaprtem intervalu

Naj bo funkcija f zvezna na zaprtem intervalu $[a,b]$ in naj ima v krajiščih nasprotno predznačeni vrednosti, tj.

$$f(a)f(b) < 0,$$

tedaj ima f vsaj eno ničlo na (a,b), tj. obstaja vsaj ena točka $\xi \in (a,b)$ da je $f(\xi) = 0$.

Naloga 12

Pokažite, da ima polinom $p(x) = x^3 - 3x + 1$ realno ničlo na intervalu $[0,1]$ in ji izračunajte prvo decimalko.

Rešitev: Ker je $f(0) = 1$ in $f(1) = -1$ to po Izreku 1 obstaja realna ničla ξ na zaprtem intervalu $(0,1)$. Z metodo bisekcije bomo določili prvo decimalko ničle.

$$\left.\begin{aligned} c &= \tfrac{0+1}{2} = 0.5 \\ f(c) &< 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \xi \in [0, 0.5]$$

$$\left.\begin{aligned} c &= \tfrac{0+0.5}{2} = 0.25 \\ f(c) &> 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \xi \in [0.25, 0.5]$$

$$\left.\begin{aligned} c &= \tfrac{0.25+0.5}{2} = 0.375 \\ f(c) &< 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \xi \in [0.25, 0.375]$$

$$\left.\begin{aligned} c &= \tfrac{0.25+0.375}{2} = 0.3125 \\ f(c) &> 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \xi \in [0.3125, 0.375]$$

Ker je $\xi \in [0.3125, 0.375]$ to je prva decimalka ničle 3.

♣

Naloga 13

Pokažite, da zvezna funkcija $f:[0,1]\to[0,1]$ premore točko $a\in[0,1]$, za katero velja $f(a)=a$.

Rešitev: Definirajmo funkcijo $g:[0,1]\to[-1,1]$ s predpisom $g(x)=f(x)-x$. Ker je g razlika dveh zveznih funkcij, je zvezna. Za vsak $x\in[0,1]$, velja

$$f(0)\geq 0, f(1)\leq 1 \Rightarrow g(0)\geq 0,\ g(1)\leq 0.$$

Če je $g(0)=0$ ali $g(1)=0$, velja da je $f(0)=0$ ali $f(1)=1$. Z druge strani, če sta $g(0),g(1)\neq 0$, po Izreku 1 obstaja točka $\xi\in[0,1]$ takšna da velja $g(\xi)=0$, tj. $f(\xi)=\xi$.

♣

Naloga 14

Preveri zveznost funkcij $f\circ g$ in $g\circ f$, če sta f in g relani funkciji definirani s predpisoma $f(x)=\text{sgn}x$ in $g(x)=1+x-\lfloor x\rfloor$.

Rešitev: Vsak $x\in\mathbb{R}$ lahko zapišemo kot $x=n+q$, pri čemer je $n\in\mathbb{Z}$ in $q\in[0,1)$. Torej velja:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(1+x-\lfloor x\rfloor)=f(1+n+q-n)=f(1+q)=\text{sgn}(1+q)=1$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=1+\text{sgn}(x)-\lfloor \text{sgn}x\rfloor=1+\text{sgn}x-\text{sgn}x=1$$

Očitno sta obe funkciji zvezni.

♣

2.1. Dodatne naloge

1. Po $\varepsilon-\delta$ definiciji preverite zveznost realne funkcije f, ki je podana s predpisom:
   (a) $f(x)=ax,\ a\in\mathbb{R}$, v točki $x=3$.
   (b) $f(x)=x\sin x$, v točki $x=0$.
   (c) $f(x)=x^3-8$, v točkah $x=0$ in $x=2$.
2. Določite točke nezveznosti danih realnih funkcij in zapišite njihovo vrsto:
   (a) $f(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$
   (b) $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0\\ x^2, & 0\leq x\leq 1\\ 2-x^2, & x>1\end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi x}{2}, & |x| < 1 \\ |x-1|, & |x| \geq 1 \end{cases}$

3. Dokažite, da so naslednje funkcije enakomerno zvezne na $\mathscr{D}$:

   (a) $f(x) = \sin x,\ \mathscr{D} = \mathbb{R}$

   (b) $f(x) = x + \sin x,\ \mathscr{D} = \mathbb{R}$

   (c) $f(x) = x^2 - 2x + 1,\ \mathscr{D} = [-2, 5]$

   (d) $f(x) = 2\sin x - \cos x,\ \mathscr{D} = \mathbb{R}$

4. Dokažite, da naslenji funkciji nista enakomerno zvezni na $\mathscr{D}$:

   (a) $f(x) = e^x \cos\frac{1}{x}$

   (b) $f(x) = x\sin x$

   Namig: Funkciji sinus in kosinus sta periodični; $\sin(x + 2k\pi) = \sin x,\ \cos(x + 2k\pi) = \cos x,\ k \in \mathbb{Z}$.

RAČUNANJE ODVODOV (PO DEFINICIJI), TANGENTA IN NORMALA NA KRIVULJO

Definicija 5

Naj bo f definirana v okolici točke a. Če limita

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

*obstaja, pravimo, da je f **odvedljiva** v točki a in*

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

*imenujemo **odvod funkcije** f v točki a.*

Komentar 7

Včasih namesto pisave zgoraj uporabimo

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

kjer je $h=x-a$ sprememba argumenta x glede na točko a.

Naloga 15

Po definiciji poiščite odvod funkcije f v poljubnem $x\in\mathscr{D}\subseteq\mathbb{R}$.

1. $f(x)=\frac{1}{x}$
2. $f(x)=\sqrt{x}$
3. $f(x)=\sin(2x)$
4. $f(x)=|x|$

Rešitev:

1.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{hx(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2},\ x\neq 0$$

2.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x>0$$

3.

Komentar 8

Z uporabo osnovnih trignonometrijskih formulah $\sin(x\pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x \sin y$ *in* $\cos(x\pm y) = \sin x \sin y \mp \cos x \cos y$ *lahko dobimo kaj je* $\sin x \pm \sin y$ *in* $\cos x \pm \cos y$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(2x+2h)-\sin(2x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{4x+2h}{2}\sin\frac{2h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos(2x+h)\sin h}{h} \\ &= 2\lim_{h\to 0}\cos(2x+h)\cdot\frac{\sin h}{h} = 2\cos(2x) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{|x+h|-|x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(x+h)^2}-\sqrt{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h(\sqrt{(x+h)^2}+\sqrt{x^2})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h(\sqrt{(x+h)^2}+\sqrt{x^2})} = \lim_{h\to 0} \frac{2x+h}{\sqrt{(x+h)^2}+\sqrt{x^2}} = \frac{2x}{2|x|} = \frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn}(x),\ x\neq 0 \end{aligned}$$

♣

Komentar 9: Geometrijski pomen odvoda

Naj bo f *odvedljiva v točki* a *in naj točki* $(a, f(a))$ *in* $(x, f(x))$ *določata sekanto grafa funkcije* f. *Njen naklonski koeficient je*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Pošljimo x *proti* a. *Tedaj gre naklonski koeficient sekante proti*

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Premico s takšnim naklonskim koeficientom imenujemo ***tangenta*** *na graf funkcije* f *v točki* $(a, f(a))$. *Njena enačba je torej*

$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

Naloga 16

Poiščite tangento grafa realne funkcije f s predpisom $f(x) = x^2 + 3x - 1$:

1. *v točki z absciso $x = 0$,*
2. *ki gre skozi točko $(1, -1)$,*
3. *ki je vzporedna premici $x + y + 1 = 0$.*

Rešitev: Najprej poiščimo odvod funkcije f v poljubni točki $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \ldots = \lim_{h \to 0}(2x - h + 3) = 2x + 3$$

1. $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - (-1) = 3x \Leftrightarrow y = 3x - 1$

2. Označimo z $M(\alpha, f(\alpha))$ točko na krivulji f skozi katero gre tangenta t, ki vsebuje točko $P(1, -1)$. Ker je naklon tangente $f'(\alpha) = 2\alpha + 3$, ima njena enačba predpis

$$y - (\alpha^2 + 3\alpha - 1) = (2\alpha + 3)(x - \alpha).$$

Če uporabimo pogoj da $P \in t$, sledi

$$-1 - (\alpha^2 + 3\alpha - 1) = (2\alpha + 3)(1 - \alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0.$$

Rešitvi sta $\alpha_1 = 5$ in $\alpha_2 = 3$. Torej, sta iskani tangenti $y = 13x - 26$ in $y = -3x - 10$.

3. Premici $y_1 = k_1x + n_1$ in $y_2 = k_2x + n_2$ sta vzporedni, če velja *pogoj vzporednosti* $k_1 = k_2$. Iščemo točko α za katero velja $(2\alpha + 3) = -1$. Torej $\alpha = -2$ in enačba tangente je

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y = -x - 1.$$

♣

Komentar 10: Normala na krivuljo

Naj bo f odvedljiva v točki $(a, f(a))$. Normala na krivuljo f v tej točki je normala na tangento krivulje v tej točki. Torej, glede na pogoj vzporednosti, je enačba normale

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a), \quad f'(a) \neq 0.$$

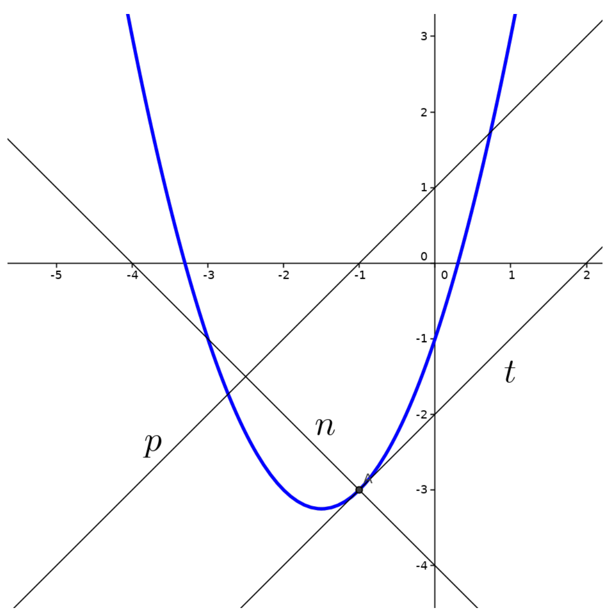
Naloga 17

Grafu realne funkcije f s predpisom $f(x) = x^2 + 3x - 1$ poiščite normalo:

1. *ki jo seka v točki z absciso $x = 0$,*
2. *ki gre skozi točko $(1,3)$,*
3. *ki je pravokotna premici $x - y + 1 = 0$.*

Rešitev: V Nalogi 16 smo izračunali da je odvod funkcije f v poljubni točki $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x + 3$.

1. $y = -\frac{1}{3}x - 1$.
2. Ker je $f(1) = 3$, dana točka leži na krivi. Torej, je njena enačba
$$y - 3 = -\frac{1}{5}(x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{16}{5}.$$
3. Ker je normala pravokotna premici $p : x - y + 1 = 0$ in tangenti na dano krivuljo, sta tangenta in premica vzporedna in sledi
$$k_t = k_p \Leftrightarrow f'(x) = 2x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = -1.$$
Torej, gre iskana normala na krivuljo skozi $x = -1$ in ima njena enačba predpis $y = -x - 4$.



Slika 3.1: Naloga 17

♣

Definicija 6

Naj bo f definirana na $(a-r,a]$ za nek $r>0$. Če obstaja limita

$$\lim_{x\uparrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

*jo imenujemo **levi odvod** funkcije f v točki a in jo označimo z $f'_-(a)$. Naj bo f definirana na $[a,a+r)$ za $r>0$. Če obstaja limita*

$$\lim_{x\downarrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

*jo imenujemo **desni odvod** funkcije f v točki a in jo označimo z $f'_+(a)$.*

Izrek 2

Funkcija f je odvedljiva v a, natanko tedaj ko obstajata levi in desni odvod in sta enaka.

Naloga 18

Poišči levi in desni odvod funkcije f v točki $x=0$.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}; & x\neq 0\\ 0; & x=0\end{cases}$$

Rešitev:

$$f'_-(0)=\lim_{h\uparrow 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\uparrow 0}\frac{\frac{h}{1+e^{\frac{1}{h}}}}{h}=\lim_{h\uparrow 0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}=\left\{\begin{array}{l}h=0-\varepsilon\\ \varepsilon>0\\ \varepsilon\to 0\end{array}\right\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1+e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1+\frac{1}{e^{\frac{1}{\varepsilon}}}}=1$$

$$f'_+(0)=\lim_{h\downarrow 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\downarrow 0}\frac{\frac{h}{1+e^{\frac{1}{h}}}}{h}=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}=\left\{\begin{array}{l}h=0+\varepsilon\\ \varepsilon>0\\ \varepsilon\to 0\end{array}\right\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\varepsilon}}}=0$$

♣

Naloga 19

Določi za katere $x \in \mathbb{R}$ obstaja odvod funkcije $f(x) = \lfloor x \rfloor$ in ga izračunaj.

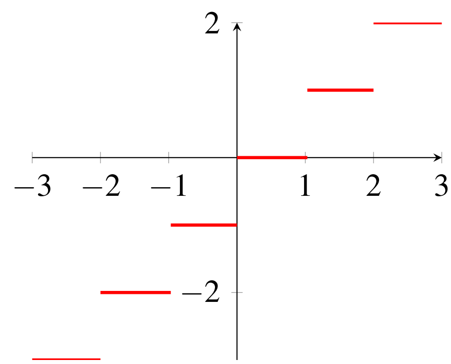
Rešitev: Obravnavali bomo naslednji dve možnosti: $x \in \mathbb{Z}$ in $x \notin \mathbb{Z}$.

(i) Določimo desni in levi odvod v $x \in \mathbb{Z}$.

$$f'_+(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\lfloor x+h \rfloor - \lfloor x \rfloor}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{x - x}{h} = 0$$
$$f'_-(x) = \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{\lfloor x+h \rfloor - \lfloor x \rfloor}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{x - 1 - x}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{-1}{h} = +\infty$$

Ker sta $f'_+(x) \neq f'_-(x)$ to odvod ne obstaja za $x \in \mathbb{Z}$.

(ii) Izračunajmo po definiciji odvod v $x \notin \mathbb{Z}$. Omenimo da je v tem primeru $\lfloor x+h \rfloor = \lfloor x \rfloor$ za "majhno" h (poglej Sliko 4.1).



Slika 3.2: Graf funkcije $f(x) = \lfloor x \rfloor$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\lfloor x+h \rfloor - \lfloor x \rfloor}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\lfloor x \rfloor - \lfloor x \rfloor}{h} = 0$$

Torej, odvod funkcije $f(x) = \lfloor x \rfloor$ obstaja edino za $x \notin \mathbb{Z}$ in znaša $f'(x) = 0$.

♣

Komentar 11

Podobno floor funkciji, imamo da je odvod funkcije $f(x) = \lceil x \rceil$ tudi 0 za $x \notin \mathbb{Z}$, v protivnem ne obstaja.

Računanje odvodov. Diferencial funkcije. Rolle in Lagrange.

Izrek 3: Pravila za odvajanje

1. *Odvod konstante je 0.*
2. *Naj bo $c \in \mathbb{R}$ in naj bosta f in g odvedljivi v točki a, tedaj so v a odvedljive tudi funkcije $cf,\ f \pm g,\ f \cdot g$ in, če je $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ in velja*
   (a) $(cf)'(a) = cf'(a)$
   (b) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$
   (c) $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
   (d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)},\ g(a) \neq 0$

Izrek 4: Verižno pravilo

Naj bo f odvedljiva v a in g odvedljiva v $f(a)$. Tedaj je $g \circ f$ odvedljiva v a in velja

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Naloga 20

Izračunajte odvod funkcije f v poljubnem $x \in \mathscr{D}_f$.

(i) $f(x) = 4\sqrt[4]{x^3} - 3\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} + 2$

(ii) $f(x) = x^3(2x^2 + 4)$

(iii) $f(x) = \frac{3x^3 - 2x}{x^2 - 5}$

(iv) $f(x) = \arcsin(e^x)$

(v) $f(x) = \ln(\ln x)$

(vi) $f(x) = \arctan \frac{2-x}{1+2x}$

Rešitev:

(i)

$$f'(x) = \left(4x^{\frac{3}{4}} - 3x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}} + 2\right)' = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} - 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{3}{2}}$$
$$= 3x^{-\frac{1}{4}} - 2x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

(ii)

$$f'(x) = (x^3)' \cdot (2x^2+4) + x^3 \cdot (2x^2+4)' = 3x^2(2x^2+4) + x^3 \cdot 4x = 10x^4 + 12x^2$$

(iii)

$$f'(x) = \frac{(3x^3-2x)'(x^2-5) - (3x^3-2x)(x^2-5)'}{(x^2-5)^2} = \frac{(9x^2-2)(x^2-5) - (3x^3-2x) \cdot 2x}{(x^2-5)}$$
$$= \frac{9x^4 - 45x^2 - 2x^2 + 10 - 6x^4 + 4x^2}{(x^2-5)^2} = \frac{3x^4 - 43x^2 + 10}{(x^2-5)^2}$$

(iv)

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot (e^x)' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

(v)

$$f'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}$$

(vi)

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2-x}{1+2x}\right)^2} \cdot \left(\frac{2-x}{1+2x}\right)' = \frac{1}{1 + \frac{(2-x)^2}{(1+2x)^2}} \cdot \frac{-1-2x-4+2x}{(1+2x)^2} = \frac{-5}{(1+2x)^2 + (2-x)^2}$$

♣

Naloga 21

Za funkcijo $f(x) = \sin(4x)$ *poiščite* $f^{(4)}(x)$.

Rešitev: $f'(x) = 4\cos(4x),\ f''(x) = -16\sin(4x),\ f'''(x) = -64\cos(4x),\ f^{(4)}(x) = 256\sin(4x)$

♣

Naj bo funkcija f odvedljiva v točki a, tj.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a).$$

Tedaj velja

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h}=0.$$

Če števec zgoraj označimo z $o_a(h)$, lahko zapišemo

$$f(a+h)-f(a)=f'(a)h+o_a(h)$$

kjer je

$$\lim_{h\to 0}\frac{o_a(h)}{h}=0.$$

To pomeni, da je funkcijo $h\mapsto \Delta f(a):=f(a+h)-f(a)$, pri majhnih h, mogoče dobro aproksimirati z linearno funkcijo $h\mapsto f'(a)h$, tj.

$$f(a+h)-f(a)\approx f'(a)h\Leftrightarrow f(a+h)\approx f'(a)h+f(a). \tag{4.0.1}$$

Dobro "aproksimabilnost" funkcije $h\mapsto f(a+h)-f(a)$ z linearno funkcijo $h\mapsto \mathscr{L}(h)$ pri majhnih h pa imenujemo ***diferenciabilnost***. Produkt $f'(a)h$ imenujemo ***diferencial*** funkcije f v točki a in ga označimo z $df(a)$. Če je $f(x)=x$, vidimo da je $dx=h$. To pomeni, da lahko pišemo

$$df(a)=f'(a)dx\Rightarrow f'(a)=\frac{df(a)}{dx}\longrightarrow y'=\frac{dy}{dx}.$$

Naloga 22

Z uporabo diferenciala približno izračunajte naslednje vrednosti:

1. $\sin(31^\circ)$
2. $\log 100,23$
3. $\sqrt{17}$

Rešitev:

1.

$$\sin(x+h)\approx(\sin x)'\cdot h-\sin x=\cos x\cdot h-\sin x$$
$$\Rightarrow \sin(31^\circ)=\cos(30^\circ)\cdot(1^\circ)+\sin(30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}+\frac{1}{2}=\frac{\pi\sqrt{3}+180}{360}$$

2.

$$\begin{aligned}\log 100,23 &= \log(100+0,23) \approx (\log x)'\Big|_{x=100} \cdot 0,23 + \log 100\\ &= \frac{1}{100\ln 10}\cdot 0,23 + 12 = \frac{23}{10^4 \ln 10} + 2\end{aligned}$$

3.

$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} \approx (\sqrt{x})'\Big|_{x=16} \cdot 1 + \sqrt{16} = \frac{1}{2\sqrt{16}} + 4 = \frac{1}{8} + 4 = 4,125$$

♣

Izrek 5: Rolle

Predpostavimo da funkcija f, ki je definirana na $[a,b] \subset \mathbb{R}$, zadovoljuje naslednje pogoje:

(R1) $f \in \mathscr{C}([a,b])$,

(R2) $f \in \mathscr{D}((a,b))$,

(R3) $f(a) = f(b)$.

Tedaj obstaja vsaj ena točka $c \in (a,b)$ da velja $f'(c) = 0$.

Komentar 12

Točko c imenujemo stacionarna točka.

Izrek 6: Lagrange

Predpostavimo da funkcija f ki je definirana na $[a,b] \subset \mathbb{R}$ zadovoljuje naslednje pogoje:

(L1) $f \in \mathscr{C}([a,b])$,

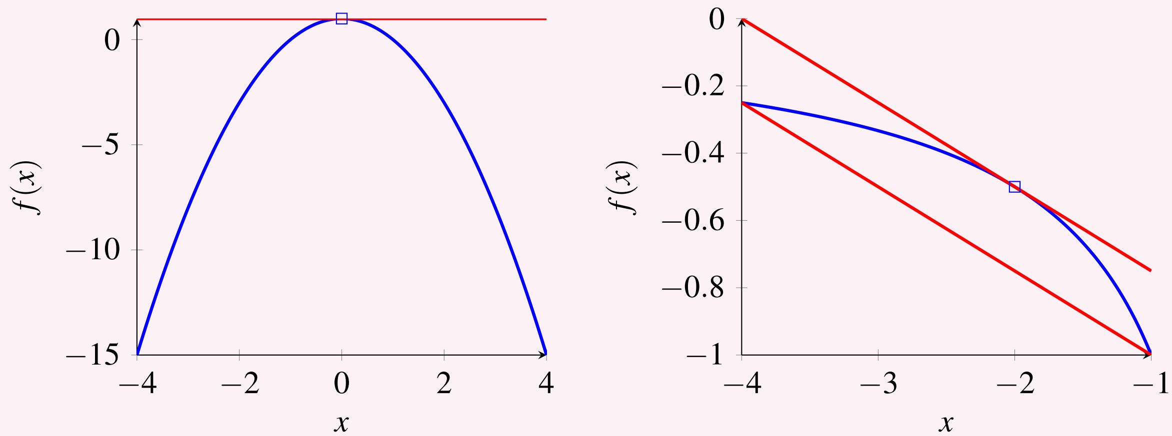
(L2) $f \in \mathscr{D}((a,b))$.

Tedaj obstaja vsaj ena točka $c \in (a,b)$ za katero je

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Komentar 13: Geometrijska interpretacija Lagrangeveg in Rolleveg izreka

Geometrijska interpretacija Rolleveg izreka pravi, da obstaja vsaj ena točka $M(c, f(c))$, $c \in (a,b)$, *na krivulji* f, *da je tangenta v točki* M *na krivuljo vzporedna* x*-osi.*
Geometrijska interpretacija Lagrangeveg izreka pravi, da obstaja vsaj ena točka $P(c, f(c))$, $c \in (a,b)$, *da je tangenta v točki* P *na krivuljo* f *vzporedna sekanti* $s = p(A,B)$ *kjer je* $A(a, f(a)$ *in* $B(b, f(b))$.



Naloga 23

Imamo podano funkcijo $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$. *Pokažite, da obstaja vsaj ena točka* x_0 *na zaprtem intervalu* $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$, *da je* $f'(x_0) = 0$ *in poiščite vse točke, ki zadoščajo tej enakosti.*

Rešitev: Ker je $x^2 - x + 1 > 0$ za vse $x \in \mathbb{R}$, sledi $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$. Ker sta $g(x) = x^2 + x + 1$ in $h(x) = x^2 - x + 1$ odvedljivi na $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ in $h(x) \neq 0$ sledi $f \in \mathscr{D}\left(\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$. Vemo da je odvedljiva funkcija zvezna, torej $f \in \mathscr{C}\left(\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$. Očitno je

$$\lim_{x \downarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2}} f(x) = f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right), \quad \lim_{x \uparrow \frac{3+\sqrt{5}}{2}} f(x) = f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$$

To pomeni, da je $f \in \mathscr{C}\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$. Ker je

$$f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 2 = f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

funkcija f zadovoljuje vse pogoje Rollevega izreka, torej obstaja vsaj ena točka $x_0 \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = I$ za katero je $f'(x_0) = 0$.

$$f'(x) = \ldots = \frac{2(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2} = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \in I, x_2 = -1 \notin I$$

Edina možna stacionarna točka je $x_0 = 1$.

♣

Naloga 24

Naj bo podana funkcija $f(x) = x + \frac{1}{x}$. *Utemeljite, da obstaja taka točka* $x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, *da je tangenta skozi točko* x_0 *na graf funkcije* f *vzporedna premici skozi točki* $(1/2, f(1/2))$ *in* $(2, f(2))$. *Poiščite točko* x_0.

Rešitev: Očitno, $f \in \mathscr{C}\left(\left(\frac{1}{2}, 2\right)\right)$ in $f \in \mathscr{D}\left(\left(\frac{1}{2}, 2\right)\right)$. Torej, f zadovoljuje pogoje Lagrangevega izreka in velja, da obstaja vsaj ena točka $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ za katero je

$$1 - \frac{1}{x_0^2} = f'(x_0) = \frac{f(2) - f\left(\frac{1}{2}, 2\right)}{2 - \frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow x = 1$$

($x = -1$ ni rešitev ker ni v intervalu $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$).

♣

Naloga 25

S pomočjo Lagrangevega izreka izračunajte naslednjo limito:

$$\lim_{x \to \infty} (\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x}).$$

Rešitev: Funkcija $f(x) = \cos\sqrt{x}$ očitno pripada $\mathscr{C}([x, x+1])$ in $\mathscr{D}((x, x+1))$, za vsak $x \geq 0$. Po Lagrangevem izreku, obstaja točka $c_x \in (x, x+1)$ za katero velja

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f'(c_x) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) = -\sin\sqrt{c_x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{c_x}}.$$

Ker je sinus omejen z -1 in 1 velja

$$-\frac{1}{2\sqrt{c_x}} \leq \cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{c_x}}. \tag{4.0.2}$$

Očitno je $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{c_x} \leq \sqrt{x}$. Torej,

$$-\frac{1}{2\sqrt{x}} \leq -\frac{1}{2\sqrt{c_x}}, \quad \frac{1}{2\sqrt{c_x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{4.0.3}$$

Iz (4.0.2) in (4.0.3) sledi

$$-\frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ker je $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$, po izreku o sendviču sledi

$$\lim_{x\to\infty}(\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x}) = 0.$$

♣

Naloga 26

Dokaži da za vse $0 < b < a$ velja $\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$.

Rešitev: Naj bo $f(x) = \ln x$ definirana na $[b,a] \subset \mathbb{R}$. Ker je $b > 0$, funkcija je očitno zvezna na $[b,a]$ in diferenciabilna na (b,a). Po Lagrangevem izreku obstaja točka $c \in (a,b)$ takšna da velja

$$\ln a - \ln b = f'(c)(a-b) \Leftrightarrow \ln\frac{a}{b} = \frac{1}{c}(a-b)$$

Iz $b < c < a$ sledi $\frac{a-b}{a} < \frac{a-b}{c} < \frac{a-b}{b}$. Torej,

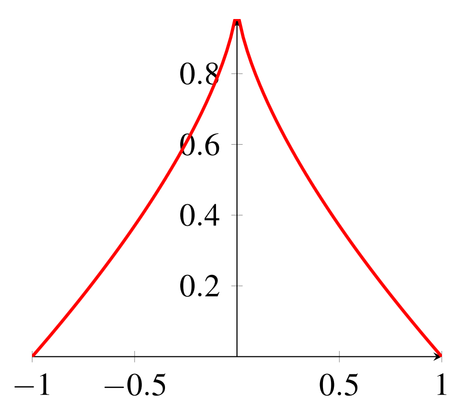
$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{a}.$$

♣

Naloga 27

Ali funkcija $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ zadovoljuje pogoje Rolllevega izreka na $[-1,1]$?

Rešitev: Ne zadovoljuje, ker obstaja točka $x = 0 \in (-1,1)1$ v kateri funkcija ni diferenciabilna. Levi in desni odvod sta neskončna, $f'_L(0) = \infty$ in $f'_D(0) = -\infty$.



Slika 4.1: Graf funkcije $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$

♣

Naloga 28

Dokaži da za vse $x,y \in \mathbb{R}$ *velja* $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$.

Rešitev: Naj bosta $x,y \in \mathbb{R}$ poljubna in različna. Funkcija $f(t) = \sin t$ je očitno zvezna na $[x,y]$ in diferenciabilna na (x,y). Torej, f zadovoljuje vse pogoje Lagrangevega izreka in velja

$$\begin{aligned}
(\exists \alpha \in (x,y)) f(y) - f(x) &= f'(\alpha)(y-x) \\
&\Rightarrow \sin y - \sin x = \cos\alpha(y-x) \\
&\Rightarrow |\sin y - \sin x| = |\cos\alpha(y-x)| \\
&\Rightarrow |\sin y - \sin x| = \underbrace{|\cos\alpha|}_{<1} |y-x| \\
&\Rightarrow |\sin x - \sin y| < |x-y|
\end{aligned}$$

Za $x=y$ imamo $|\sin x| \leq |x|$ in vemo da to velja. Torej, ker sta x in y poljubna, sledi $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$ za vse $x,y \in \mathbb{R}$.

♣

4.1. Dodatne naloge

1. Izračunajte odvod funkcije f v poljubnem $x \in \mathscr{D}$. Bodite oprezni! (Ne pozabite da so to dodatne naloge in ne rabite vse rešiti, tiste ki so vam zanimive :)

   (i) $f(x) = -x^6 + x^4 - 3 - 2x$

   (ii) $f(x) = -6x^8 + 2x^4 - 3\cos(x) + \sqrt[3]{x} - 2$

   (iii) $f(x) = \left(x + x^2\right) \cdot \left(x^5 + x^2 + 3\right)$

   (iv) $f(x) = (x+1)^2 \cdot (x+2)$

   (v) $f(x) = x + \cos(x)$

   (vi) $f(x) = 2\sin(x) - 3\cos(x)$

   (vii) $f(x) = x^2 + \sin(x)$

   (viii) $f(x) = (x + \sin(x))^2$

   (ix) $f(x) = \cos^{31}(31x) - 31x^{31}$

   (x) $f(x) = \sin^2(2x^2) - 2x^2$

   (xi) $f(x) = (x + \sin(x))^6$

   (xii) $f(x) = \sin(\sin(x))$

   (xiii) $f(x) = \sin\left((x^7+1)^7\right)$

   (xiv) $f(x) = \dfrac{\sin(5x)}{x}$

   (xv) $f(x) = \dfrac{x^4\left(x^2+1\right)}{1+\sin(x)}$

   (xvi) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^3}}{\cos(3x^2)}$

   (xvii) $f(x) = \left(\dfrac{\sqrt{x-1}}{\cos(x)}\right)^{-3}$

   (xviii) $f(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x+1}}$

   (xix) $f(x) = \dfrac{1-x^3}{\sqrt[6]{1+2x^5}}$

   (xx) $f(x) = \dfrac{(x-\sqrt{x}) \cdot \left(2x^2 + \sqrt[3]{x^{-5}}\right)}{x - \sin(x)}$

(xxi) $f(x)=\sin\left(x+x^2\right)$

(xxii) $f(x)=\cos\left(x+\cos(x)\right)$

(xxiii) $f(x)=\sin(x)+\sin\left(x^2\right)$

(xxiv) $f(x)=\sin\left(\cos(x)\right)$

(xxv) $f(x)=\sin\left(\sin(x)\right)$

(xxvi) $f(x)=\sin\left(x+\sin(x)\right)$

(xxvii) $f(x)=\sin\left(\cos(\sin(x))\right)$

(xxviii) $f(x)=\sin\left((x+1)^2(x+2)\right)$

(xxix) $f(x)=\sin^3\left(x^2+\sin(x)\right)$

(xxx) $f(x)=\sin^2\left((x+\sin(x))^2\right)$

(xxxi) $f(x)=\sin\left(x\sin(x)\right)+\sin\left(\sin(x^2)\right)$

(xxxii) $f(x)=[\cos(x)]^{31}$

(xxxiii) $f(x)=[\cos(x)]^{31^2}$

(xxxiv) $f(x)=\left([\cos(x)]^{31}\right)^2$

(xxxv) $f(x)=\sin^2\left(x\sin(x^2)\sin^2(x^2)\right)$

(xxxvi) $f(x)=\sin^3\left(\sin^2(\sin(x))\right)$

(xxxvii) $f(x)=\left(x+\sin^5(x)\right)^6$

(xxxviii) $f(x)=\sin(\sin(\sin(\sin(\sin(x)))))$

(xxxix) $f(x)=\sin\left(\left(\sin^7(x^7+1)\right)^7\right)$

(xl) $f(x)=\left(\left(\left((x+x^2)\right)^3+x\right)^4+x\right)^5$

(xli) $f(x)=\sin\left(x^2+\sin\left(x^2+\sin(x^2)\right)\right)$

(xlii) $f(x)=\sin\left(6\cos(6\sin(6\cos(6x)))\right)$

(xliii) $f(x)=\sin\left(\dfrac{\cos(x)}{x}\right)$

(xliv) $f(x)=\dfrac{\sin\left(\cos(x)\right)}{x}$

(xlv) $f(x)=\dfrac{\sin\left(x^2\sin^2(x)\right)}{1+\sin(x)}$

(xlvi) $f(x)=\ln\arctan\sqrt{1+x^2}$

(xlvii) $f(x)=x\sin x\ln x$

(xlviii) $f(x)=e^{\arcsin 2x}$

(xlix) $f(x)=x^2e^{-\frac{x^2}{a^2}}$

(l) $f(x)=\log_2(\log_3(\log_5 x)))$

2. Najdi vse točke na grafu funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s predpisom $f(x)=x^3-3x$, da velja:

   (a) tangenta v tej točki na graf funkcije je horizontalna.

   (b) tangenta v tej točki na graf funkcije je vzporedna premici $y=9x+4$.

   (c) tangenta v tej točki na graf funkcije je pravokotna premici $y=9x+4$.

   (d) tangenta v tej točki na graf funkcije gre skozi $(0,-16)$

3. Z uporabo Lagrangejevega izreka pokaži: $e^x>1+x$, za vse $x\neq 0$.

4. Naj bo $[a,b]\subset(\pi/2,\pi)$. Pokaži:

$$\frac{b-a}{\sin^2 a}<\cot a-\cot b<\frac{b-a}{\sin^2 b}.$$

5. Naj bo $n>1$. Pokaži:

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

MONOTONOST IN EKSTREMI FUNKCIJE. KONVEKSNOST IN PREVOJNE TOČKE. L'HOSPITALOVI PRAVILI

Posledica 1: Lagrange

Predpostavimo, da je funkcija f definirana na $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Tedaj velja:

(i) če je $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) za vse $x \in (a,b)$, je funkcija f monotono naraščajoča (monotono padajoča) funkcija na $[a,b]$.

(ii) če je $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) za vse $x \in (a,b)$, je funkcija f strogo monotono naraščajoča (strogo monotono padajoča) funkcija na $[a,b]$.

Naloga 29

Poiščite intervale, kjer je funkcija $f(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)^2}$ strogo naraščajoča.

Rešitev: Ko izračunamo odvod funkcije f, dobimo $f'(x) = -\frac{2(x+1)}{(x-1)^3}$. Iščemo tiste $x \in \mathbb{R}$ za katere je $f'(x) > 0$.

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
-2		-		-		-	
$x+1$		-	0	+		+	
$(x-1)^3$		-		-	0	+	
$f'(x)$		-	0	+	ND	-	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	ND	$\searrow$	

(Z 0 smo označili točke v katerih ima funkcija, v dani vrstici, ničlo oziroma v katerih ni definirana – ND.)

Funkcija f je strogo naraščajoča na intervalu $(-1,1)$.

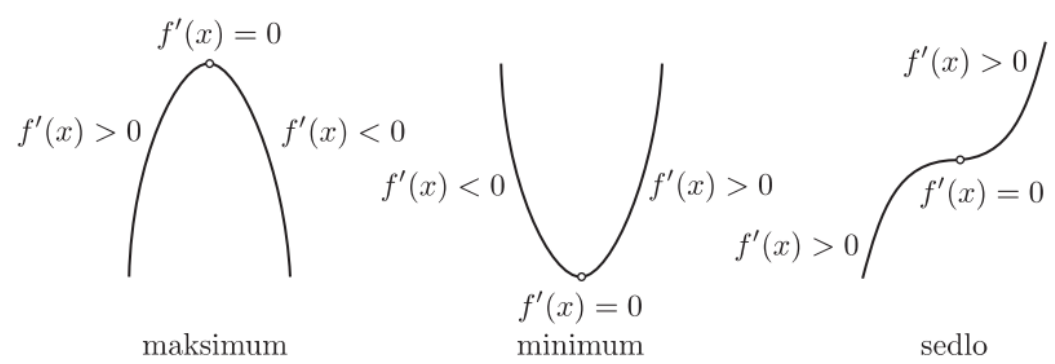
♣

Definicija 7: Točke lokalnih in globalnih ekstremov

*Naj bo funkcija f definirana na $\mathscr{D}$. Funkcija f ima v točki $a \in \mathscr{D}$ (**globalni**) **maskimum**, če je $f(x) \leq f(a)$, za vsak $x \in \mathscr{D}$. Funkcija f ima v točki $a \in \mathscr{D}$ (**globalni**) **minimum**, če je $f(x) \geq f(a)$, za vsak $x \in \mathscr{D}$.*
*Funkcija $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ ima v točki $a \in \mathscr{D}$ **lokalni ekstrem**, če obstaja okolica $\mathscr{U}$ točke $a \in \mathscr{D}$, da ima $f\big|_{\mathscr{U}}$ (zoženje na $\mathscr{U}$), v a maksimum oziroma minimum.*

Komentar 14

Če prvi odvod pri prehodu skozi stacionarno točko spremeni predznak, je ta stacionarna točka ekstrem. Če predznaka ne spremeni, ta stacionarna točka ni ekstrem, ampak t.i. sedlo.



Naloga 30

Poiščite točke lokalnih in globalnih ekstremov funkcije $f(x) = 2x^2 - x^4$.

Rešitev: Določimo stacionarne točke.

$$f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = -1$$

	$-\infty$		-1		0		1		∞
$4x$		-		-		+		+	
$1-x$		+		+		+		-	
$1+x$		-		+		+		+	
$f'(x)$		+		-		+		-	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Če je funkcija definirana na zaprtem intervalu, so možne točke globalnih ekstremov lokalni ekstremi ali krajišči zaprtega intervala. V primeru odprtega intervala $\mathscr{D}$, je lahko globalni ekstrem lokalni ekstrem $x = e$, če je $f(e) \leq (\geq) f(x)$, za vse $x \in \mathscr{D}$. V nasprotnem primeru, nima globalnih ekstremov.

Iz tabele vidimo, da sta točki lokalnih maksimumov $(-1, f(-1)) = (-1, 1)$ in $(1, f(1)) = (1, 1)$ in je točka lokalnega minimuma $(0, f(0)) = (0, 0)$. Ker je $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$, funkcija ni navzdol omejena in nima globalnega minimuma. Globalni maksimum je očitno 1 in funkcija ga doseže v dveh točkah.

♣

Naloga 31

Poiščite točko lokalnih in globalnih ekstremov funkcije $f(x) = x + \cos(2x)$ na intervalu $[0, \pi]$.

Rešitev: Določimo stacionarne točke.

$$f'(x) = 1 - 2\sin(2x) = 0 \Rightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\} \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} f'(0) &= 1 > 0 \\ f'(\tfrac{\pi}{6}) &= 1 - 2\sin\tfrac{\pi}{3} = 1 - \sqrt{3} < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ lokalni maksimum}$$

$$\left.\begin{aligned} f'(\tfrac{3\pi}{12}) &= 1 - 2\sin\tfrac{\pi}{2} = -1 < 0 \\ f'(\tfrac{6\pi}{12}) &= 1 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ lokalni minimum}$$

♣

Določimo še vrednosti funkcije v krajiščih: $f(0) = 1$ in $f(\pi) = \pi + 1$. Torej je globalni minimum $f(\frac{5\pi}{12}) = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, a globalni maksimum $f(\pi) = \pi + 1$.

Izrek 7

Naj bo f dvakrat odvedljiva v okolici točke a. Naj bo $f'(a) = 0$. Če je $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) \geq 0$) za vse x v okolici tačke a, tedaj ima f v a lokalni maksimum (lokalni minimum).

Naloga 32

Pozitivno realno število a razdelite na dva sumanda tako, da bo njun produkt največji.

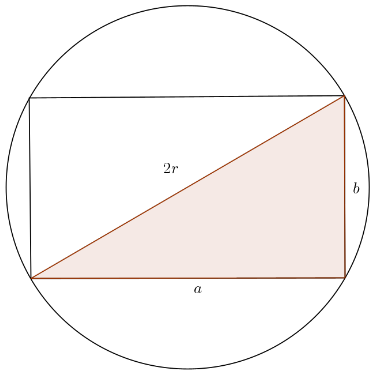
Rešitev: Naj bosta x in y dva razcepa števila a. Torej $x + y = a$ in $\pi = x \cdot y$. Ker je $y = a - x$, sledi $\pi = \pi(x) = x(a - x) = ax - x^2$. Sedaj imamo funkcijo, ki je odvisna od x. Poiščimo njen prvi in drugi odvod: $\pi'(x) = a - 2x$, $\pi''(x) = -2$. Ker je $\pi''(x) < 0$, je produkt maksimalen. Ko rešimo enačbo $f'(x) = 0$, dobimo $x = \frac{a}{2}$. Sledi, $y = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$. Dva razcepa od a, ki dajata maksimalan produkt sta $\frac{a}{2}$ in $\frac{a}{2}$.

♣

Naloga 33

V krožnici polmera r je vrisan pravokotnik največje možne ploščine. Določite velikosti stranic in ploščino pravokotnika.

Rešitev:



Naj bosta a in b stranici pravokotnika. Ploščina je dana s formulo $P = ab$. Na obarvanemu trikotniku lahko uporabimo Pitagorov izrek:

$$(2r)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = 4r^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{4r^2 - b^2}$$

Sedaj zamenjamo a v formuli za ploščino, torej $P = P(b) = b\sqrt{4r^2 - b^2} = \sqrt{4r^2b^2 - b^4}$. Določimo P' po b.

$$P'(b) = \frac{1}{2\sqrt{4r^2b^2 - b^4}} \cdot (8r^2b - 4b^3) = \frac{4r^2 - 2b^2}{\sqrt{4r^2 - b^2}}$$

Ko rešimo enačbo $P'(b) = 0$, dobimo $b = r\sqrt{2}$ in zaradi $a = \sqrt{4r^2 - b^2}$ sledi $a = r\sqrt{2}$. Torej je iskani pravokotnik kvadrat s stranico velikosti $a = r\sqrt{2}$ in ploščino $P = a^2 = 2r^2$.

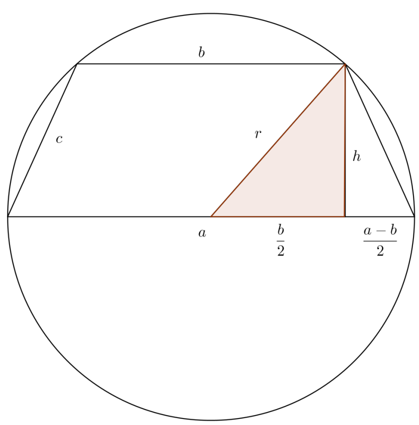
Komentar: Potrebno bi bilo še preveriti ali je dani ekstrem maksimum, torej ali je $P''(b) < 0$. Ker je v tem primeru drugi odvod bolj kompleksen, smo ga izpostavili. V splošnem, če naloga tega ne zahteva, ne bomo računali drugega odvoda.

♣

Naloga 34

V polkrožnico polmera r je vrisan trapez, čigar osnova je premer krožnice. Določi višino in manjšo osnovo trapeza, tako da bo njegova ploščina maksimalna.

Rešitev:



Ploščina trapeza je $P = \frac{a+b}{2}h$. Na obarvanemu trikotniku, bomo uporabili Pitagorov izrek:

$$h^2 = r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow P = \frac{2r+b}{2}\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$\Rightarrow P(b) = \frac{\sqrt{(2r+b)^2(4r^2-b^2)}}{4}$$

Če ima f lokalni minimum (maksimum) v $x = a$ in je g naraščajoča funkcija, potem ima $g \circ f$ lokalni minimum (maksimum) v $x = a$. Naj bosta $f(b) = (2r+b)^2(4r^2 - b^2)$ in $g(b) = \frac{\sqrt{b}}{4}$. Ker je g očitno naraščajoča, je točka maksimuma funkcije $P = g \circ f$ ista kot točka maksimuma funkcije f. Torej je bolj enostavno uporabiti prvi odvod funkcije f.

$$f'(b) = 2 \cdot (2r+b) \cdot (4r^2 - b^2) + (2r+b)^2 \cdot (-2b) = (2r+b)(8r^2 - 2b^2 - 4br - 2b^2)$$

$$\begin{aligned}&= (2r+b)(8r^2-4rb-4b^2) = 4(2r+b)(2r^2-rb-b^2)\\&= 4(2r+b)(r^2-rb+r^2-b^2) = 4(2r+b)(r(r-b)+(r-b)(r+b))\\&= 4(b+2r)^2(r-b)\end{aligned}$$

Ker je polmer pozitiven, je edina rešitev enačbe $f'(b)=0$, $b=r$. Torej sta višina in ploščina:

$$h = \sqrt{r^2-\frac{b^2}{4}} = \sqrt{r^2-\frac{r^2}{4}} \Rightarrow \boxed{h=\frac{r\sqrt{3}}{2}}$$

$$P = \frac{a+b}{2}h = \frac{2r+r}{2}\cdot\frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{P=\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}}$$

♣

Izrek 8: Konveksnost in konkavnost

Če je f dvakrat odvedljiva na $\mathscr{I}$, je f konveksna (konkavna) na $\mathscr{I}$ natanko tedaj, ko je $f''(x)\geq 0$ ($f''(x)\leq 0$), za vsak $x\in\mathscr{I}$.

Definicija 8: Prevojna točka

Naj bo f definirana na $\mathscr{I}$. Funkcija f ima v točki a prevoj, če obstaja takšen $\delta>0$, da je f konveksna na $(a-\delta,a)$ in konkavna na $(a,a+\delta)$ - ali obratno.

Naloga 35

Izračunajte prevojne točke ter intervale konveksnosti in konkavnosti funkcije $f(x)=\frac{3}{8}x^4-x^3+2$.

Rešitev: Izračunajmo f' in f'':

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^3-3x^2$$
$$f''(x) = \frac{9}{2}x^2-6x = 3x\left(\frac{3}{2}x-2\right)$$

Ko rešimo enačbo $f''(x)=0$, dobimo $x=0$ in $x=\frac{4}{3}$. Podobno, kot pri iskanju lokalnih ekstremov, si narišemo tabelo iz katere bomo videli rešitev.

	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x$		-		+		+	
$\frac{3}{2}x-2$		-		-		+	
$f''(x)$		+		-		+	
$f(x)$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

Torej je funkcija f konveksna na $(-\infty,0)\cup(\frac{4}{3},+\infty)$ in konkavna na $(0,\frac{4}{3})$. Očitno sta $P_1(0,f(0))=P_1(0,2)$ in $P_2(\frac{4}{3},f(\frac{4}{3}))=P_2(\frac{4}{3},\frac{22}{27})$ prevojni točki.

♣

Komentar 15

Ne pozabite, *da v tabele za iskanje ekstremov ali prevojnih točk vnesete točke v katerih funkcija ni definirana.*

Izrek 9: L'Hospitalovi pravili

Naj bo $\mathscr{I}\subseteq\mathbb{R}$, $c\in\mathscr{I}\cup\{-\infty,+\infty\}$ *in naj bosta* f *in* g *odvedljivi realni funkciji na* $\mathscr{I}$.

1. *Če velja* $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} g(x)=0,\ g'(x)\neq 0$ *za vse* $x\in\mathscr{I}$ *in obstaja*
$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
v $\overline{\mathbb{R}}$, *potem obstaja tudi limita*
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}.$$
Limiti sta enaki, torej
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2. *Če velja* $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} g(x)=\pm\infty,\ g'(x)\neq 0$ *za vse* $x\in\mathscr{I}$ *in obstaja*
$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
v $\overline{\mathbb{R}}$, *potem obstaja tudi limita*
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}.$$
Limiti sta enaki, torej
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Naloga 36

S pomočjo L'Hospitalovih pravil izračunajte naslednje limite:

1. $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(3x)}{x-\pi}$
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$
3. $\lim_{x\to 0^+} (\sin x \cdot \ln x)$
4. $\lim_{x\to 0^+} x^x$
5. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$

Rešitev:

1.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(3x)}{x-\pi} = \left(\frac{0}{0}\right)\\
&\lim_{x\to\pi} \frac{3\cos(3x)}{1} = 3\cos(3\pi) = -3\\
\Rightarrow &\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(3x)}{x-\pi} = -3
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\
&\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\
&\lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0\\
\Rightarrow &\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} (\sin x \cdot \ln x) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\
&\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}\cdot\tan x = 0\\
\Rightarrow &\lim_{x\to 0^+} (\sin x \cdot \ln x) = 0
\end{aligned}$$

4.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} x^x = \left(0^0\right) = \lim_{x\to 0^+} (e^{\ln x})^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} \\
&\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\
&\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0 \\
\Rightarrow &\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1
\end{aligned}
$$

5.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)} = \left(\frac{0}{0}\right) \\
&\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2} \\
\Rightarrow &\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

♣

5.1. Dodatne naloge

1. Pokaži da je funkcija $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ padajoča na $(-2, 1)$.

2. Pokaži da je funkcija $y = \arctan x - x$ povsod padajoča.

3. Poišči intervale monotonosti danih funkcij:

   (a) $y = x - e^x$

   (b) $y = 2x^2 - \ln x$

   (c) $y = 2\sin x + \cos(2x),\ 0 \leq x \leq 2\pi$

   (d) $y = x^2 e^{-x}$

   (e) $y = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$

   (f) $y = (x+2)^5(2x+1)^4$

4. Poišči lokalne ekstreme danih funkcij:

   (a) $y = 2x^3 - 3x^2$

   (b) $y = -x^2\sqrt{x^2+2}$

   (c) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 17$

   (d) $y = x - \ln(1+x)$

   (e) $y = \frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$

   (f) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8}$

5. Poišči najmanjšo in največjo vrednost danih funkcij:

   (a) $y = x^4 + -2x^2 + 5,\ x \in [-2, 2]$

(b) $y = \frac{x-1}{x+1},\ x \in [0,4]$

(c) $y = \sin(2x) - x + 1,\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

6. Poišči intervale konveksnosti in konkavnosti ter prevojne točke danih funkcij:

    (a) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$

    (b) $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$

7. Obseg pravokotnika je $100\ m$. Če je ploščina maksimalna, koliko sta dolgi njegovi stranici?

8. Razdeli 40 na dva dela, da bo produkt enega in kub drugega dela maksimalen.

9. Najdi $x, y \in \mathbb{N}$ takšna, da je produk $x^2 y^5$ je maksimalen, pri pogoju: $x + y = 35$.

10. Seštevek dveh števil je 24. Poišči ti dve ševili, če veš da je seštevek njunih kvadratov minimalen.

11. Iz kartona kvadratne oblike s stranico $8\ cm$ želimo narediti škatlo brez pokrova. Škatlo naredimo tako, da v vsakem oglišču izrežemo kvadrat in prepognemo stranice.

    Kako velike kvadrate moramo izrezati, da bo volumen nastale škatle maksimalen? Poiščite maksimalen volumen škatle.

12. Z uporabo L'Hospitalovih pravili izračunaj naslednje limite:

    (a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{\cot x}$

    (b) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x) \cot x$

    (c) $\lim\limits_{x \to 0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$

    (d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}},\ n \in \mathbb{N}$

    (e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^x$

    (f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x}$

    (g) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin \sqrt{\sin x}}{\sqrt{2x - x^2}}$

    (h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

RISANJE GRAFA FUNKCIJ. TAYLORJEV POLINOM

Konstrukcija grafov realne funkcije ene spremenljivke poteka po nasledjih korakih:

1. Določimo definicijsko območje $\mathscr{D}$.
2. Preverimo morebitno sodost, lihost funkcije.
3. Izračunamo ničle in ugotovimo znak funkcije.
4. Poiščemo točke nezveznosti.
5. Določimo morebtine navpične in afine ($y = kx + n$) asimptote, pri čemer sta $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ in $n = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx]$.
6. Določimo morebitne ekstreme in intervale monotonosti.
7. Določimo intervale konvekstnosti in konkavnosti, ter morebitne prevoje.
8. Izračunamo vrednost funkcije v krajiščih definicijskega območja.
9. Poiskusimo narisati čim bolj natančen graf dane funkcije.

Naloga 37

Preverite lastnosti in narišite graf funkcije

$$f(x) = \frac{3x - x^2}{x - 4}.$$

Rešitev:

Definicijsko območje: Ker je funkcija racionalna, sledi $x \neq 4$. Torej $\mathscr{D}_f = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$.

Parnost:

$$f(-x) = \frac{3(-x) - (-x)^2}{-x - 4} = \frac{3x + x^2}{x + 4} \neq \pm f(x)$$

Funkcija ni soda in ni liha.

Ničle in znak funkcije:

$$
\begin{aligned}
f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{3x - x^2}{x-4} = 0 \\
&\Leftrightarrow 3x - x^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x(3-x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \underline{x_1 = 0,\ x_2 = 3\ \in \mathscr{D}_f}
\end{aligned}
$$

$x:$	$-\infty$		0		3		4		$+\infty$
$3x-x^2$		-		+		-		-	
$x-4$		-		-		-		+	
$f(x)$		+		-		+		-	

Torej, $y < 0$ za $x \in (0,3) \cup (4,+\infty)$ in $y > 0$ za $x \in (-\infty, 0) \cup (3,4)$.

Točke nezveznosti:
Ker funkcija ni definirana v $x = 4$, preverimo levo in desno limito v tej točki:

$$
\begin{aligned}
L(4) &= \lim_{x \to 4-} \frac{3x - x^2}{x-4} = \begin{bmatrix} x = 4 - \varepsilon \\ \varepsilon > 0, \varepsilon \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3(4-\varepsilon) - (4-\varepsilon)^2}{4 - \varepsilon - 4} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-\varepsilon^2 + 5\varepsilon - 4}{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\varepsilon - 5 + \frac{4}{\varepsilon} \right) = +\infty \\
D(4) &= \lim_{x \to 4+} \frac{3x - x^2}{x-4} = \begin{bmatrix} x = 4 + \varepsilon \\ \varepsilon > 0, \varepsilon \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3(4+\varepsilon) - (4+\varepsilon)^2}{4 + \varepsilon - 4} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-\varepsilon^2 - 5\varepsilon - 4}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\varepsilon - 5 - \frac{4}{\varepsilon} \right) = -\infty
\end{aligned}
$$

Asimptote:
Ker sta

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{3x - x^2}{x-4} \overset{L.P.}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{1} = +\infty, \\
\lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x - x^2}{x-4} \overset{L.P.}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{1} = -\infty,
\end{aligned}
$$

funkcija nima navpičnih asimptot. Ker sta:

$$
\begin{aligned}
k &= \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x - x^2}{x^2 - 4x} = -1, \\
n &= \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \infty} \frac{-x}{x-4} = -1,
\end{aligned}
$$

ima funkcija afino asimptoto $y = -x - 1$.

Ekstremi in intervali monotonosti: Najprej določimo prvi odvod funkcije:

$$
f'(x) = \frac{(3-2x)(x-4) - (3x - x^2) \cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{-x^2 + 8x - 12}{(x-4)^2}
$$

Rešimo enačbo $f'(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-x^2+8x-12}{(x-4)^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow -x^2+8x-12 = 0 \\
&\Leftrightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 6 \in \mathscr{D}_f
\end{aligned}
$$

$x:$	$-\infty$		2		4		6		$+\infty$
$-x^2+8x-12$		-		+		+		-	
$(x-4)^2$		+		+		+		+	
f'		-		+		+		-	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Iz tabele vidimo da je točka $(2, f(2)) = (2, -1)$ minimum in $(6, f(6)) = (6, -9)$ maksimum. Funkcija je padajoča na $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$ in naraščajoča na $(2, 4) \cup (4, 6)$.

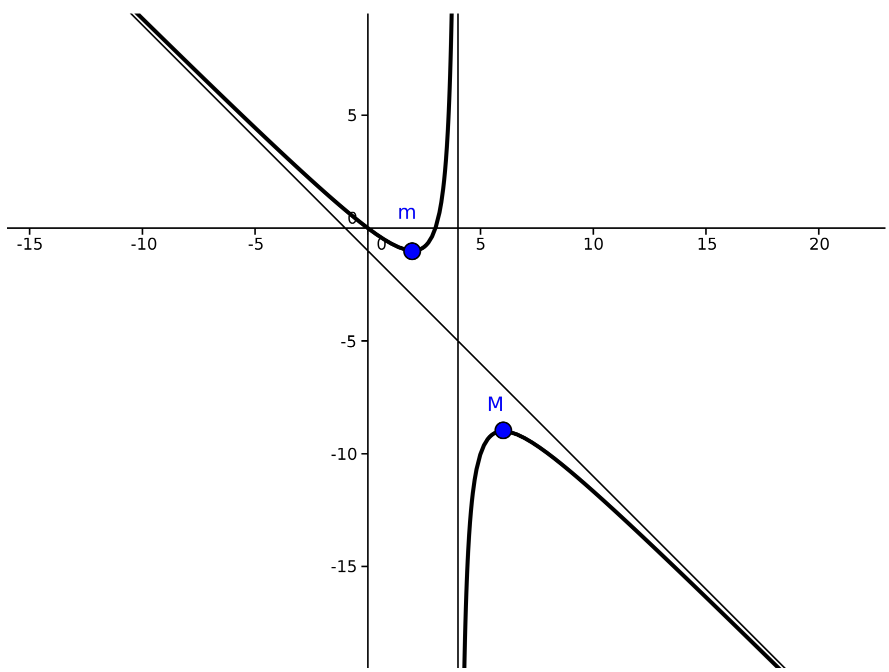
Konveksnost in konkavnost. Prevoji: Drugi odvod funkcije f je:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(-2x+8)(x-4)^2 - (-x^2+8x-12)\cdot 2(x-4)}{(x-4)^4} \\
&= \frac{(x-4)\cdot[(-2x+8)(x-4) - 2(-x^2+8x-12)]}{(x-4)^4} \\
&= \frac{-2x^2+8x+8x-32+2x^2-16x+24}{(x-4)^3} \\
&= \frac{-8}{(x-4)^3}
\end{aligned}
$$

Ker enačba $f''(x) = 0$ nima rešitev, nimamo prevojev. Iz

x	$-\infty$		4		$+\infty$
f''		+		-	
f		$\cup$		$\cap$	

vidimo da je funkcija konveksna na $(-\infty, 4)$ in konkavna na $(4, +\infty)$. *Graf funkcije:*



♣

Naj bo $P(x)$ polinom oblike
$$P(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^x.$$
Zanima nas, kako bi $P(a+h)$ izrazili s potencami h. Jasno je, da je $P(a+h)$ polinom v h:
$$P(a+b) = A_0 + A_1 h + \ldots + A_n h^n.$$
V $h = 0$ je vrednost $P(a) = A_0$. Odvojimo polinom $P(a+h)$ po h:
$$P'(a+h) = A_1 + 2A_2 h + \ldots + nA_n h^{n-1}.$$
V $h = 0$ je vrednost $P'(a) = A_1$. Ponovno odvajamo po h... Ta postopek ponavljamo in dobimo
$$P(a+h) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}h + \frac{P''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}h^n,$$
kar je polinom stopnje n.

Definicija 9: Taylorjev polinom

Naj bo f n-krat odvedljiva v okolici točke a. Polinom
$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
imenujemo (n-ti) ***Taylorjev polinom*** *(n-krat) odvedljive funkcije f v okolici točke a.*

Z uporabo Taylorjevega polinoma $T_n(x)$ lahko aproksimiramo funkcijo $f(x)$. Zato je pomembno oceniti ostanek $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

Izrek 10

Naj bo f definirana in n-krat zvezno odvedljiva v okolici (a,x) (ali (x,a)) točke a, pri čemer v intervalu (a,x) (ali (x,a)) vsebuje $(n+1)$-ti odvod. Tedaj velja Taylorjeva formula
$$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x).$$
Z drugimi besedami, obstaja točka $c \in (a,x)$ (oziroma $c \in (x,a)$) takšna, da velja
$$R_{n,a}(x) = f(x) - T_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$
kjer $T_{n,a}$ predstavlja Taylorjev polinom pridružen funkciji $f(x)$ v točki $x = a$ in $R_{n,a}(x)$ tako-imenovani ostanek ali napaka aproksimacije.

Komentar 16: Obliki ostankov

Ostanek oblike

$$R_{n,a}(x) = f(x) - T_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

*imenujemo **Lagrangejev ostanek**. Če vzamemo $c = a + \theta(x-a)$, pri čemer je $0 < \theta < 1$, imamo Lagrangejev ostanek oblike*

$$R_{n,a}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a));$$

če je $j = x - a,\ j \in \mathbb{R}$, imamo

$$R_{n,a}(x) = \frac{j^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta j).$$

Če v Lagrangejevemu ostaneke zamenjamo $p = n+1,\ p \in \mathbb{N}$, imamo

$$R_{n,a}(x) = \left(\frac{x-a}{x-c}\right)^p \frac{(x-c)^{n+1}}{p \cdot n!} f^{(n+1)}(c).$$

*To obliko imenujemo **Schlömilch-Rocheva** oblika. Za $p = 1,\ c = a + \theta(x-a),\ 0 < \theta < 1$, imamo **Cauchyjevo** obliko ostanka*

$$R_{n,a} = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)).$$

Komentar 17: McLaurin-ov polinom

Če je $a = 0$, imenujemo polinom $T_{n,0}$ McLaurin-ov polinom in pišemo $f(x) = M_n(x) + R_n(x)$, pri čemer je

$$M_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

in

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1},\ 0 < \theta < 1,$$

oziroma,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}, \text{ kjer je } c \text{ med } a \text{ in } x.$$

Iz McLaurin-ove formule lahko izpeljemo naslednjih pet pomembnih razvojev:

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x)$

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$

Naloga 38

Za katere x *velja aproksimacija* $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ *z absolutno napako manjšo od* 10^{-4}*?*

Rešitev: Iz McLaurin-ove formule sledi:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cos(c) \cdot \frac{x^4}{24},\ 0 < c < x.$$

Ker kosinus zavzame vrednosti med -1 in 1, velja $|R_n(x)| \leq \frac{x^4}{24}$. Torej

$$|R_n(x)| \leq 10^{-4} \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt[4]{24 \cdot 10^{-4}} \approx 0,22.$$

♣

Naloga 39

Aproksimiraj funkcijo $f(x) = \ln\sqrt{1+x}$ *z McLaurin-ovim polinomom druge stopnje in oceni napako na intervalu* $[0,1]$.

Rešitev:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2(1+x)} \\
f''(x) &= -\frac{1}{2(1+x)^2} \\
M_2(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2
\end{aligned}$$

Ker je $f'''(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$, je napaka dana s predpisom

$$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}x^3 = \frac{1}{6(1+c)^3}x^3.$$

Iz $0 < c < x \leq 1$ sledi:

$$\begin{aligned}
&0 < c < 1 \\
\Rightarrow &1 < c+1 < 2 \\
\Rightarrow &1 < (c+1)^3 < 8
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} < \frac{1}{(1+c)^3} < 1.$$

Torej

$$|R_2(x)| = |x^3| \cdot \frac{1}{6} \cdot \left| \frac{1}{(1+\theta x)^3} \right| < 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

♣

Naloga 40

Poišči McLaurin-ov polinom funkcije $y = \ln(1+x)$, ki jo aproksimira na segmentu $[0, \frac{1}{2}]$ z napako manjšo kot $\varepsilon = 10^{-2}$. Izračunaj tudi približno vrednost $\ln(1,05)$.

Rešitev:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\ f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \end{aligned}$$

Iščemo $n \in \mathbb{N}$ za katerega je $|R_n(x)| \leq \varepsilon$.

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \left| \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!(1+c)^{n+1}} x^{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+c)^{n+1}} \cdot x^{n+1}$$

Ker je $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, sledi $x^{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Z druge strani $0 < c < x \leq \frac{1}{2}$ sledi $1 < c$ ali ekvivalentno $\frac{1}{1+c} < 1$. Torej

$$|R_n(x)| < 1 \cdot \frac{1}{n+1} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n(n+1) \geq 50 \Rightarrow n \geq 4.$$

McLaurin-ov polinom četrte stopnje zadovoljuje dane pogoje in velja

$$f(x) \approx M_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

Približna vrednost od $\ln(1,05)$ znaša

$$\ln(1,05) = \ln\left(1+\frac{5}{100}\right) \approx M_4\left(\frac{5}{100}\right) = 0,049$$

♣

Naloga 41

Aproksimiraj funkcijo $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ z McLaurin-ovim polinomom tretje stopnje na segmentu $[0,1]$, izračunaj približno vrednost $\sqrt[3]{14}$ ter oceni napako.

Rešitev: Funckijo f lahko zapišemo kot $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$. Poiščimo odvode do 4. reda.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}} \\ f''(x) &= -\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^5}} \\ f'''(x) &= \frac{10}{27}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^8}} \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{80}{81}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^{11}}} \end{aligned}$$

Izračunamo: $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{3}$, $f''(0) = -\frac{2}{9}$ in $f'''(0) = \frac{10}{27}$. McLaurin-ov polinom tretje stopnje funkcije f je torej dan s predpisom

$$M_4(x) = 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3$$

in njegova napaka z

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 = \frac{-\frac{80}{81}\cdot x^4}{24\sqrt[3]{(1+c)^{11}}} = -\frac{10}{243}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(1+c)^{11}}}\cdot x^4 \Rightarrow |R_3(x)| < \frac{10}{243}x^4.$$

Ker je razvoj dan v segmentu $[0,1]$, $\sqrt[3]{14}$ ne moremo zapisati kot $\sqrt[3]{1+13}$ saj $13 \notin [0,1]$. Približna vrednost je

$$\sqrt[3]{14} = \sqrt[3]{8+6} = \sqrt[3]{8\left(1+\frac{3}{4}\right)} = 2\sqrt[3]{1+\frac{3}{4}} \approx 2\cdot M_3\left(\frac{3}{4}\right) = 2,42708,$$

pri čemer je napaka $2R_4(\frac{3}{4}) \leq 0,026$.

♣

6.1. Dodatne naloge

1. Preverite lastnosti in narišite grafe naslednjih funkcij:

   (a) $f(x) = \frac{4x-12}{x^2-4x+4}$

   (b) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

   (c) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$

   (d) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-3}$

   (e) $f(x) = (3-x^2)e^{-x}$

2. Aproksimirajte funkcijo $f(x) = x^2 \ln x$ s Taylorjevim polinomom tretje stopnje v okolici točke $a = 1$.

3. Aproksimirajte funkcijo $f(x) = x \sin x$ s Taylorjevim polinomom tretje stopnje v okolici točke $a = \frac{\pi}{2}$.

4. Aproksimirajte funkcijo $f(x) = \tan x$ z McLaurin-ovim polinomom pete stopnje.

5. Naj bo $f(x) = \sqrt{1+x}$. Izračunajte McLaurin-ov polinom druge stopnje funkcije f in ga uporabite za izračun približka $\sqrt{1,1}$. Ocenite pri tem napravljeno napako.

6. Z uporabo Taylorjeve formule izračunajte $\sin 9^\circ$ z napako ne večjo kot 10^{-5}.

NEDOLOČENI INTEGRAL

Naj bo funkcija f odvedljiva na intervalu $\mathscr{I}$. Tedaj je tudi f' funkcija, definirana na intervalu $\mathscr{I}$. Denimo, da f' poznamo. Kako priti do funkcije f. Ali je vsaka funkcija na $\mathscr{I}$ odvod kakšne funkcije?

Definicija 10

Funkcija F, definirana na intervalu $\mathscr{I}$, se imenuje ***primitivna funkcija*** *funkcije f, če je na $\mathscr{I}$ funkcija f enaka odvodu funkcije F; torej če velja*

$$F'(x) = f(x) \text{ za vsak } x \in \mathscr{I}.$$

Izrek 11

Naj bo F primitivna funkcija funkcije f na intervalu $\mathscr{I}$. Tedaj je za vsako konstanto C tudi funkcija G,

$$G(x) = F(x) + C,\ x \in \mathscr{I}$$

primitivna funkcija funkcije f.

Naj bo H poljubna primitivna funkcija funkcije f. Tedaj obstaja taka konstanta D, da je

$$H(x) = F(x) + D.$$

Komentar 18

Če je F primitvna funkcija funkcije f, je diferencial

$$dF(x) = F'(x)dx$$

oziroma

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Zato pišemo tudi

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Pozneje, ko bomo v integriranje uvedli novo spremnljivko, bomo videli, da je takšen zapis zelo pripraven. F je torej funkcija, katere diferencial je $f(x)dx$. Integriranje je torej nasprotna operacija diferenciranju.

Nedoločeni integrali elementarnih funkcij

$$\int dx = x + C$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ a \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

Ker je integriranje nasprotna operacija odvajanju, pravila za integriranje sledijo iz pravil za odvajanje.

Osnovne lastnosti nedoločenih integralov

1. $$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$

2. $$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

3. $$\int (\lambda f(x))dx = \lambda \int f(x)dx,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Osnovne metode integriranja

1. **Metoda dekompozicije.** Če je $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, ppotem velja

$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx,$$

pri čemer imata f_1 in f_2 primitivni funkciji.

2. **Metoda substitucije.** Če zamenimo $x = \varphi(t)$, pri čemer sta $\varphi(t)$ in $\varphi'(t)$ zvezni funkciji, dobimo

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

3. **Integracija po delih** (**per partes**). Če sta f in g odvedljivi funkciji, velja

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

ali krajše

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Naloga 42

Z uporabo osnovnih lastnosti in tabele integralov, izračunaj:

1. $\int (x^2+2x-3)dx$
2. $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}}$
4. $\int \frac{x-2}{x^3}dx$
5. $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$
6. $\int \frac{x^2}{x^2+1}$
7. $\int \frac{x^3+x-2}{x^2+1}$
8. $\int 5^x 3^{-x}dx$
9. $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$
10. $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx$
11. $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx$
12. $\int \frac{4-x}{2+\sqrt{x}}dx$
13. $\int \sqrt{1-\sin 2x}dx$
14. $\int \tan^2 xdx$
15. $\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta}$
16. $\int \frac{1-\cos t}{1+\cos t}dt$
17. $\int \cos x \sin 3xdx$
18. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx$
19. $\int \frac{dx}{x^2-1}$
20. $\int \frac{dx}{\sin x}$

Rešitev:

1.
$$\int (x^2+2x-3)dx = \int x^2dx + 2\int xdx - 3\int dx = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + C$$

2.
$$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx = \int x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{8}}dx = \int x^{\frac{7}{8}}dx = \frac{x^{\frac{7}{8}+1}}{\frac{7}{8}+1} + C = \frac{8}{7}x^{\frac{15}{8}} + C$$

3.
$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}} = \int x^{-\frac{2}{5}}dx = \frac{x^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + C = \frac{5}{3}\sqrt[5]{x^3} + C$$

4.
$$\int \frac{x-2}{x^3}dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)dx = \int x^{-2}dx - 2\int x^{-3}dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + C$$

5.
$$\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx = 2\int \left(\frac{1}{5}\right)^x dx - \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = 2\cdot\frac{\frac{1}{5^x}}{\ln\frac{1}{5}} - \frac{1}{5}\cdot\frac{\frac{1}{2^x}}{\ln\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{5^x\cdot\ln 5} + \frac{1}{5\cdot 2^x\cdot\ln 2} + C$$

6.
$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \arctan x + C$$

7.
$$\int \frac{x^3+x-2}{x^2+1} = \int xdx - 2\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} - 2\arctan x + C$$

8.
$$\int 5^x 3^{-x} dx = \int \left(\frac{5}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^x}{\ln\frac{5}{3}} + C$$

9.
$$\begin{aligned}\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx &= \int \frac{(e^x+1)(e^{2x}+e^x+1)}{e^x+1} dx = \int ((e^2)^x + e^x + 1) dx = \frac{(e^2)^x}{\ln e^2} + e^x + x + C \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} + e^x + x + C\end{aligned}$$

10.
$$\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2}}{x^3} dx = \int \frac{dx}{x} + \int x^{-5} dx = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C$$

11.
$$\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{3}{4}} dx - \int x^{-\frac{5}{4}} dx = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}} + C$$

12.
$$\int \frac{4-x}{2+\sqrt{x}} dx = \int \frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{2+\sqrt{x}} dx = \int (2-\sqrt{x}) dx = 2x - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

13.
$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-\sin(2x)} dx &= \int \sqrt{1-2\sin x \cos x} dx = \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x} dx \\ &= \int (\sin x - \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

14.
$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \tan x - x + C$$

15.
$$\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta} = \int \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta} d\theta = \int \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta + \int \frac{1}{\sin^2\theta} d\theta = \tan\theta - \cot\theta + C$$

16.
$$\begin{aligned}\int \frac{1-\cos t}{1+\cos t} dt &= \int \frac{(1-\cos t)^2}{1-\cos^2 t} dt = \int \frac{1-2\cos t + \cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - 2\int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt + \int \tan^2 t dt \\ &= -\cot t - 2\int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} + \tan t - t + C_1 = -\cot t + \tan t - t - 2\int \sin^{-2} t d(\sin t) + C_1 \\ &= -\cot t + \tan t - t - 2 \cdot \frac{\sin^{-1} t}{-1} + C = -\cot t + \tan t - t + 2 \cdot \frac{1}{\sin t} + C\end{aligned}$$

17.

$$\int \cos x \sin(3x) dx = \int \cos x \sin(2x+x) dx = \int \cos x(\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x)$$
$$= 3\int \sin x \cos^3 x dx - \int \sin^3 x \cos x dx = -3\int \cos^3 x d(\cos x) - \int \sin^3 x d(\sin x)$$
$$= -\frac{3}{4}\cos^4 x - \frac{1}{4}\sin^4 x + C$$

18.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx - \int \sin x \cos x dx$$
$$= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} + \int \cos x d(\cos x) = -\ln|\cos x| + \frac{\cos^2 x}{2} + C$$

19. Izraz $\frac{1}{x^2-1}$ lahko napišemo kot $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-1}$, pri čemer je $A = \frac{1}{2}$ in $B = -\frac{1}{2}$.

$$\int \frac{dx}{x^2-1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \int \frac{d(x+1)}{x+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

20.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

♣

Naloga 43

Izračunajte naslednje nedoločene integrale (z uvedbo nove spremenljivke):

1. $\int x^3(1-5x^2)^{10} dx$
2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$
3. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$
4. $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx$
5. $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$
6. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} dx$

Rešitev:

1.

$$\int x^3(1-5x^2)^{10}dx = \left\{\begin{array}{lll} 1-5x^2 & = t & \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{5}(t-1) \\ -10xdx & = dt & \\ xdx & = -\frac{1}{10}dt & \end{array}\right\}$$
$$= \int \frac{1}{50}(t-1)t^{10}dt = \frac{1}{50}\int (t^{11}-t^{10})dt$$
$$= \frac{1}{50}\left(\frac{t^{12}}{12}-\frac{t^{11}}{11}\right)+C = -\frac{1+55x^2}{6600}\left(1-5x^2\right)+C$$

2.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx = \left\{\begin{array}{lll} t & = \sqrt{2-x} & \\ t^2 & = 2-x & \Rightarrow x^2 = (2-t^2)^2 \\ dx & = -2tdt & \end{array}\right\}$$
$$= \int \frac{(2-t^2)^2\cdot(-2t)dt}{t} = -2\int (4-4t^2+t^4)dt$$
$$= -2\left(4t-\frac{4}{3}t^3+t^5\right)+C$$
$$= -\frac{2}{15}(32+8x-3x^2)\sqrt{2-x}+C$$

3.

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left\{\begin{array}{lll} t & = \sqrt{1-x^2} & \\ t^2 & = 1-x^2 & \Rightarrow x^4 = (1-t^2)^2 \\ -2xdx & = 2tdt & \Rightarrow xdx = -tdt \end{array}\right\}$$
$$= \int \frac{-t(1-t^2)^2}{t}dt = -\int (1-2t^2+t^4)dt$$
$$= -t+\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5+C$$
$$= -\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2}+C$$

4.

$$\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}dx = \left\{\begin{array}{lll} t & = \sqrt{\sin x} & \\ t^2 & = \sin x & \Rightarrow \cos^4 x = (1-t^2)^2 \\ 2tdt & = \cos x dx & \end{array}\right\}$$
$$= \int t\cdot 2t(1-t^2)^2 dt = 2\int t^2(1-2t^2+t^4)dt$$
$$= \frac{2}{3}t^3-\frac{4}{7}t^7+\frac{2}{11}t^{11}+C = \left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}+C$$

5.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-x^2}dt = \left\{\begin{array}{ll} x & = a\sin t \\ dx & = a\cos t \end{array}\right\} &= a^2\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt \\ &= a^2\int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C \\ &= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2}\sqrt{a^2-x^2}\end{aligned}$$

Uporabili smo identitet: $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

6.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx = \left\{\begin{array}{ll} x & = z^6 \\ dx & = 6z^5 \end{array}\right\} &= \int \frac{6z^8}{z^3-z^2}dz = 6\int\frac{z^6-1+1}{z-1}dz \\ &= 6\left(\int\frac{z^6-1}{z-1}dz+\int\frac{dz}{z-1}\right) = 6\left(\int(z^5+\ldots+z+1)dz+\int\frac{dz}{z-1}\right) \\ &= \ldots = x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C\end{aligned}$$

♣

Naloga 44

Izračunajte naslednje nedoločene integrale (z integracijo po delih - per partes):

1. $\int xe^x dx$
2. $\int x\arctan x dx$
3. $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
4. $\int \ln^2 x dx$
5. $\int \sin(\ln x)dx$

Rešitev:

1.

$$\int xe^x dx = \left\{\begin{array}{llll} u & = x & dv & = e^x dx \\ du & = dx & v & = e^x \end{array}\right\} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

2.

$$\begin{aligned}\int x\arctan x dx = \left\{\begin{array}{llll} u & = \arctan x & dv & = x dx \\ du & = \frac{dx}{1+x^2} & v & = \frac{x^2}{2} \end{array}\right\} &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{1+x^2}dx \\ &\overset{7.1.6}{=} \frac{x^2}{2}\arctan x + \arctan x - x + C = \left(\frac{x^2}{2}+1\right)\arctan x - x + C\end{aligned}$$

3.

$$\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = \left\{ \begin{array}{llll} u & = \arccos x & dv & = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ du & = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v & = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3}(x^2+2) \end{array} \right\}$$
$$= -\arccos x \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{3}(x^2+2) - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} + 2x\right) + C$$

Integral $v = \int \frac{x^3}{1-x^2} dx$ smo rešili z uvedbo nove spremenljivke $t = \sqrt{1-x^2}$.

4.

$$\int \ln^2 x dx = \left\{ \begin{array}{llll} u & = \ln^2 x & dv & = dx \\ du & = \frac{2\ln x}{x} dx & v & = x \end{array} \right\} = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx$$
$$= \left\{ \begin{array}{llll} u & = \ln x & dv & = dx \\ du & = \frac{dx}{x} & v & = x \end{array} \right\} = x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - \int dx\right)$$
$$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$$

5.

$$I = \int \sin(\ln x) dx = \left\{ \begin{array}{llll} u & = \sin(\ln x)x & dv & = dx \\ du & = \frac{\cos(\ln x)}{x} dx & v & = x \end{array} \right\} = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$
$$= \left\{ \begin{array}{llll} u & = \cos(\ln x)x & dv & = dx \\ du & = -\frac{\sin(\ln x)}{x} dx & v & = x \end{array} \right\} = x\sin(\ln x) - x\cos\ln(x) - \underbrace{\int \sin(\ln x) dx}_{=I}$$

$$2I = x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$$
$$I = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$$

♣

Integracija racionalnih funkcij

Racionalnim funkcijam posebne oblike

$$\frac{A}{(x-a)^m} \quad \text{ali} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n},$$

kjer $b^2 - 4ac < 0$ pravimo **parcialni ulomki**. Izkaže se, da lhako vsako racionalno funkcijo $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, pri kateri je števec nižje stopnje kot imenovalec (v tem primeru rečemo da je R prava racionalna funkcija), razcepimo na vsoto parcialnih ulomkov in celo, da je tak razcep enoličen in je oblike

$$\frac{p(x)}{(x-a)^m(x^2+px+q)^n} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}, \tag{7.0.1}$$

pri čemer je $q(x) = q_0(x-a)^m(x^2+px+q)^n$. Torej $R(x) = \frac{1}{q_0} \cdot$(7.0.1). Kadar je racionalna funkcija neprava (stopnja števca večja ali enaka kot stopnja imenovalca), potem seveda funkcije $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ne moremo razcepiti na parcialne ulomke. V tem primeru z algoritmom za deljenje polinomov poiščemo taka polinoma $k(x)$ in $r(x)$, da velja $p(x) = k(x)q(x) + r(x)$ in da je stopnja polinoma $r(x)$ strogo manjša kot stopnja polinoma $q(x)$. Odtod sledi, da je $R(x) = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, kjer $R_1(x) = \frac{r(x)}{q(x)}$ lahko razcepimo na parcialne ulomke. Torej se da vsako racionalno funkcijo razcepiti na vsoto polinoma in parcialnih ulomkov.

Z pomočjo parcialnih ulomkov lahko rešimo integrale oblike $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$.

Naloga 45

Izračunaj integrali:

1. $\int \frac{x-3}{x^3-x}dx$
2. $\int \frac{x^3+x^2-16x+16}{x^2-4x+3}dx$

Rešitev:

1. Integral lahko zapišemo kot: $I = \int \frac{x-3}{x^3-x}dx = \int \frac{x-3}{x(x-1)x+1)}dx$. Najdimo razcep dane racionalne funkcije na parcialne ulomke.

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \Big| \cdot x(x-1)(x+1)$$
$$x-3 = A(x^2-1) + B(x^2+x) + C(x^2-x)$$
$$x-3 = x^2(A+B+C) + x(B-C) - A$$

Imamo naslednji sistem

$$A+B+C = 0, B-C = 1, -A = -3,$$

z rešitvijo

$$A = 3, B = -1, C = -2.$$

Odtod sledi,

$$I = 3\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} - 2\int \frac{dx}{x+1} = \ldots = \ln\left|\frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2}\right| + C$$

2. Ker je racionalna funkcija neprava, moramo podeliti polinoma in potem najti razcep.

$$\frac{x^3+x^2-16x+16}{x^2-4x+3} = (x+5) + \frac{x+1}{x^2-4x+3} = (x+5) + \frac{x+1}{(x-1)(x-3)}$$

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} \Big| \cdot (x-1)(x-3)$$
$$x+1 = x(A+B) + (-3A-B)$$

Rešenje sistema $A+B=1, -3A-B=1$ je $A=-1, B=2$. Odtod sledi,

$$I = \int (x+5)dx - \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-3} = \frac{x^2}{2} + 5x + \ln\left|\frac{(x-3)^2}{x-1}\right| + C$$

♣

Integrali nekaterih funkcij ki vsebujejo kvadratni polinom ax^2+bx+c

Integrale oblike $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ in $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ rešujemo tako, da kvadratni polinom zapišemo v kanonični obliki

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Seveda lahko izraz tudi dopolnimo do popolnega kvadrata, če ne želimo uporabiti zgornje formule.

Nato uporabimo substitucijo $x+\frac{b}{2a}=t,\ dx=dt$ in dobimo poenostavljene integrale, ki jih lahko rešimo.

Naloga 46

Izračunajte integrala:

1. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-6x+5}}$

Rešitev:

1. Dopolnimo izraz x^2+x+1 do popolnega kvadrata.

$$x^2+x+1 = x^2 + 2\cdot\frac{1}{2} + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Integral zdaj postane:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \left\{\begin{array}{rl} x-\frac{1}{2} & = t \\ dx & = dt \end{array}\right\} = \int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{dt}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)^2+1\right)}$$

$$= \left\{\begin{array}{rl} \frac{2}{\sqrt{3}}t & = u \\ \frac{2}{\sqrt{3}}dt & = du \end{array}\right\} = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}du}{\frac{3}{4}(u^2+1)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan u + C$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

Če naloga ne zahteva eksplicitnega izračuna naslednjih integralov lahko uporabite sledeče enakosti:

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C} \quad \boxed{\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C} \quad \boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C}$$

2. Najprej dopolnimo kvadratni polinom do popolnega kvadrata.

$$2x^2-6x+5 = 2\left(x^2-3x+\frac{5}{2}\right) = 2\left(x^2-2\cdot\frac{3}{2}\cdot x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+\frac{5}{2}\right) = 2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]$$

Integral postane:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}} = \left\{\begin{array}{rl} x-\frac{3}{2} & = t \\ dx & = dt \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}\right|+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+\frac{5}{2}}\right|+C$$

♣

Integracija iracionalnih funkcij

1° Integrale oblike $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ in $\int R(x^m, \sqrt[n]{ax^m+b})x^{m-1}dx$, pri čemer je $R(x,y)$ racionalna funkcija, rešimo s substitucijo $ax+b=t^n$ oz. $ax^m+b=t^n$, ki poenostavi računanje na izračun integrala racionalne funkcije.

2° Integrale oblike $\int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ rešujemo s substitucijo $x-\alpha=\frac{1}{t}$.

3° Integrale oblike $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$ in $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})dx$ rešujemo s substitucijo $x = a\sin t$ oz $x = a\tan t$.

4° **Metoda Ostrogradskega:** Integral $\int \frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ lahko poenostavimo na obliko 3° ali pa ga zapišemo v obliki

$$\int \frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = (A_0x^{m-1}+\ldots+A_{m-1})\sqrt{ax^2+bx+c}+A_m\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Koeficiente A_i dobimo tako da odvajamo zgornjo enakost, odpravimo imenovalec in uredimo koeficiente pred x iste stopnje na levi in desni strani enačbe.

Naloga 47

Izračunajte integrale:

1. $\int \frac{x^2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}dx$
2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4x+1}}$
3. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$
4. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$

Rešitev:

1. Ker je $I = \int \frac{x^2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}dx = \int R(x,\sqrt{x})dx$, uvedemo substitucijo $x = t^2,\ dx = 2tdt$ in dobimo

$$I = \int \frac{t^4\cdot t}{t^2+t}\cdot 2tdt = 2\int \frac{t^5}{t(t+1)}\cdot tdt = 2\int \frac{t^5}{t+1}dt$$

Ker je funkcija, ki jo integriarmo, neprava racionalna, moramo deliti števec in imenovalec, da dobimo celi del in pravi racionalni del.

$$\frac{t^5}{t+1} = t^4-t^3+t^2-t+1-\frac{1}{t+1}$$

Torej

$$\begin{aligned} I &= 2\int \left(t^4-t^3+t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt = \ldots \\ &= 2\sqrt{x}\left(\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{3}x+1\right)-\frac{1}{2}x^2-x-2\ln|\sqrt{x}+1|-C \end{aligned}$$

2. Sedaj imamo integral iz 2. skupine, ki ga rešimo s substitucijo $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2}dt$.

$$\int \frac{x^2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}dx = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{4}{t}+1}} = \int \frac{-\frac{1}{t}dt}{\sqrt{\frac{1-4t+t^2}{t^2}}} = \int \frac{-\frac{1}{t}dt}{\frac{\sqrt{t^2-4t+1}}{t}} =^{-} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-4t+1}} = I'$$

Integrale oblike I' smo že reševali tako, da kvadratni polinom dopolnimo do popolnega kvadrata in uvedemo podobno substitucijo.

$$t^2-4t+1 = t^2-4t+4-4+1 = (t-2)^2-3$$

Imamo

$$I' = -\int \frac{dt}{\sqrt{(t-2)^2-3}} = \left\{ \begin{array}{rl} t-2 & = z \\ dt & = dz \end{array} \right\} = -\int \frac{dt}{z^2-\sqrt{3}^2} = -\ln|z+\sqrt{z^2-3}|+C$$
$$= -\ln|t-2+\sqrt{t^2-4t+1}|+C = -\ln\left|\frac{1}{x}-2+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x}+1}\right|+C$$

3. Uvedimo substitucijo $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t\,dt$. Integral postane:

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx = \int 4\sin^2 t\cdot\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt = 16\int \sin^2 t\cos t\cdot\sqrt{\cos^2 t}dt = 16\int \sin^2 t\cos^2 t dt$$
$$= 4\int (2\sin t\cos t)^2 dt = 4\int \sin^2(2t)dt = 4\int \frac{1-\cos(2\cdot 2t)}{2}dt = 2\int (1-\cos(4t))dt$$
$$= 2\int dt - 2\cdot\frac{1}{4}\int \cos(4t)d(4t) = 2t - \frac{1}{2}\sin(4t)+C$$
$$= 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin\left(4\arcsin\frac{x}{2}\right)+C$$

4. Uporabili bomo metodo Ostrogradskega. Podan integral lahko zapišemo v obliki

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{1+2x-x^2}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

Z odvajanjem dobimo:

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} = (2Ax+B)\cdot\sqrt{1+2x-x^2}+(Ax^2+Bx+C)\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+2x-x^2}}(2-2x)+\lambda\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

Dano enakost pomnožimo z $\sqrt{1+2x-x^2}$:

$$x^3 = (2Ax+B)(1+2x-x^2)+(Ax^2+Bx+C)(1-x)+\lambda,$$

ko uredimo koeficiente pred členi iste stopnje dobimo sistem enačb

$$-3A = 1,\ 5A - 2B = 0,\ 2A + 3B - C = 0,\ B + C + \lambda = 0$$

z rešitvijo

$$A = -\frac{1}{3},\ B = -\frac{5}{6},\ C = -\frac{19}{3},\ \lambda = 4.$$

Torej

$$I = \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{19}{3}\right)\sqrt{1+2x-x^2} + 4\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

Rešimo še zgornji integral.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}} = \ldots = \arcsin\frac{x-2}{\sqrt{2}} + C$$

Končna rešitev je:

$$I = \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{19}{3}\right)\sqrt{1+2x-x^2} + 4\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{2}} + C$$

♣

Integracija trigonometričnih funkcij

1° Integrale racionalnih funkcij $R(\sin x, \cos x)$, pri čemer $\sin x$ in $\cos x$ prve stopnje, rešujemo s substitucijo

$$\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

2° Integrale tipa $\int R(\tan x)dx$ in $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x\cos x)dx$ rešujemo s substitucijo

$$\tan x = t \Rightarrow \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ \sin x\cos x = \frac{t}{1+t^2},\ dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

3° Integrale tipa $\int \sin^n x dx$, $\int \cos^n x dx$, $\int \frac{dx}{\sin^n x}$, $\int \frac{dx}{\cos^n x}dx$ rešujemo s parcialno integracijo.

4° Integrale oblike $\int \sin^m x\cos^n x dx$, pri čemer sta $m, n \in \mathbb{Z}$, rešujemo na naslednje načine: če je m (n) lih uporabimo substitucijo $u = \sin x$ ($u = \cos x$), če sta m in n soda, uporabimo formuli

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

Naloga 48

Izračunajte integrale:

1. $\int \frac{dx}{\sin x}$
2. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$
3. $\int \sin^5 x \cos^3 x dx$
4. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

Rešitev:

1. Očitno imamo integral 1. oblike. Torej bomo uporabili substitucijo $\tan \frac{x}{2} = t$.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + c = \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + C$$

2. Sedaj imamo 2. obliko in uporabimo $\tan x = t$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{t}{1+t^2}}{\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^4+1}{(1+t^2)^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \int \frac{t}{t^4+1} dt = \int \frac{t}{(t^2)^2+1} dt = \left\{ \begin{array}{rl} t^2 & = z \\ 2tdt & = dz \\ tdt & = \frac{1}{2}dz \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^2+1} \\ &= \frac{1}{2} \arctan z + C = \frac{1}{2} \arctan(\tan^2 x) + C \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \cos^3 x dx &= \left\{ \begin{array}{rll} u & = \sin x & \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - u^2 \\ du & = \cos x dx & \end{array} \right\} = \int u^5 (1-u^2) du \\ &= \frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8} + C = \frac{1}{6}\sin^6 x - \frac{1}{8}\sin^8 x + C \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{4} \int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x) dx = \frac{1}{4} \int (1-\cos^2 2x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right) dx = \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx \\ &= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin 4x + C \end{aligned}$$

♣

Komentar 19: Izpeljevanje formul za substitucijo $\tan\frac{x}{2}=t$

$$\sin x=\frac{\sin x}{1}=\frac{\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}\frac{:\cos^2\frac{x}{2}}{:\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1}=\frac{t}{t^2+1}$$

$$\cos x=\frac{\cos x}{1}=\frac{\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}\frac{:\cos^2\frac{x}{2}}{:\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan\frac{x}{2}=t\Rightarrow\frac{x}{2}=\arctan t\Rightarrow x=2\arctan x\Rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

Komentar 20: Izpeljevanje formul za substitucijo $\tan x=t$

$$\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{1}=\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}\frac{:\cos^2 x}{:\cos^2 x}=\frac{\tan^2}{\tan^2 x+1}=\frac{t^2}{t^2+1}$$

$$\cos^2 x=\frac{\cos^2 x}{1}=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}\frac{:\cos^2 x}{:\cos^2 x}=\frac{1}{\tan^2 x+1}=\frac{1}{t^2+1}$$

$$\sin x\cos x=\frac{\sin x\cos x}{1}=\frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cos^2 x}\frac{:\cos^2 x}{:\cos^2 x}=\frac{\tan x}{\tan^2 x+1}=\frac{t}{t^2+1}$$

$$\tan x=t\Rightarrow x=\arctan x\Rightarrow dx=\frac{dt}{t^2+1}$$

Komentar 21: Rekurzivne formule

$$\int\sin^n x dx=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x dx,\ n\geq 2$$

$$\int\cos^n x dx=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x dx,\ n\geq 2$$

$$\int\frac{dx}{\sin^n x}=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{(n-2)}{(n-1)}\int\frac{dx}{\sin^{n-2}x},\ n\neq 1$$

$$\int\frac{dx}{\cos^n x}=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{(n-2)}{(n-1)}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}x},\ n\neq 1$$

$$\int\sin^n(x)\cos^m(x)dx=\frac{\sin^{n+1}(x)\cos^{m-1}(x)}{n+m}+\frac{m-1}{n+m}\int\sin^n(x)\cos^{m-2}(x)dx$$

7.1. Dodatne naloge

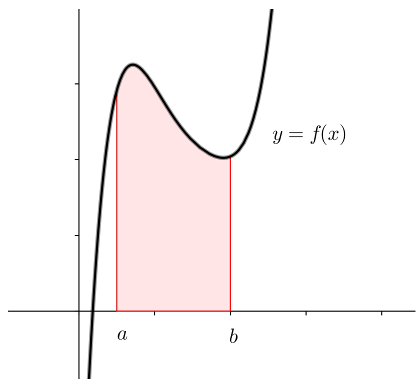
Izračunajte integrale:

1. $\int \arctan \sqrt{x} dx$
2. $\int \frac{\tan x}{x^3} dx$
3. $\int e^{ax} \cos bx \, dx$
4. $\int \frac{\log x}{x^3} dx$
5. $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx$
6. $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3} dx$
7. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} dx$
8. $\int \sqrt{1+\cos^2 x} \sin 2x \cos 2x \, dx$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}^3} dx$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$
11. $\int \frac{\ln x}{x(1-\ln^2 x)} dx$
12. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx$
13. $\int \sqrt{\tan^3 x} \sec^4 x dx$
14. $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}} dx$
15. $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2-11x+2}} dx$
16. $\int x^2 \cos \omega x dx$
17. $\int \frac{x^7}{(1+x^4)^2} dx$
18. $\int e^x \sin^2 x dx$
19. $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{3} \cos \varphi + \sin \varphi}$
20. $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^4+4}} dx$
21. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$
22. $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6} dx$
23. $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)} dx$
24. $\int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)} dx$
25. $\int \frac{2x^2+3x}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$
26. $\int \frac{5-3x+6x^2+5x^3-x^4}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1} dx$
27. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$
28. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{2+x-x^2}}$
29. $\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$
30. $\int \frac{x^4}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx$
31. $\int \frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}} dx$
32. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$
33. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$
34. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos^3 x} dx$
35. $\int \frac{dx}{4+\tan x + 4\cot x}$
36. $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$
37. $\int \sqrt{\tan x} dx$

Določeni integrali

En izmed razlogov, ki pripeljejo do pojma določenega integrala, je ploščina. Za geometrijske like kot so trikotnik, pravokotnik, trapez, itn. obstajajo "končne"formule za računanje njihovih ploščin. Kaj pa če podan lik ni tako preprost. Poglejmo si lik, ki je omejen z grafom pozitivne, zvezne funkcije f, z x-osjo in premicama $x = a$ ter $x = b$. Ta lik imenujemo ukrivljen trapez.

Ploščine ukrivljenega trapeza, ne moremo izračunati z metodami elementarne geometrije, ker je graf funkcije f "ukrivljen". Kako pa pridemo do "formuleš pomočjo katere lahko izračunamo to ploščino?



Slika 8.1: Ukrivljen trapez omejen s funkcijo f ter premicama $x = a$, $x = b$ in x-osjo

Na x-osi izberimo točke

$$\mathscr{P} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\},$$

ki delijo interval $[a, b]$ na n-kosov (intervalov) $[x_{k-1}, x_k]$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Dolžina k-tega intervala je $\Delta x_k = |x_k - x_{k-1}|$. Definirajmo normo delitve $\mathscr{P}$ kot $||\mathscr{P}|| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$.

Darbouxov integral

Pri aprokismaciji bodo za nas zanimive predvsem ekstremne vrednosti funkcije na teh intervalih. Uporabljali bomo oznake

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x),$$
$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x),$$
$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x),$$

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

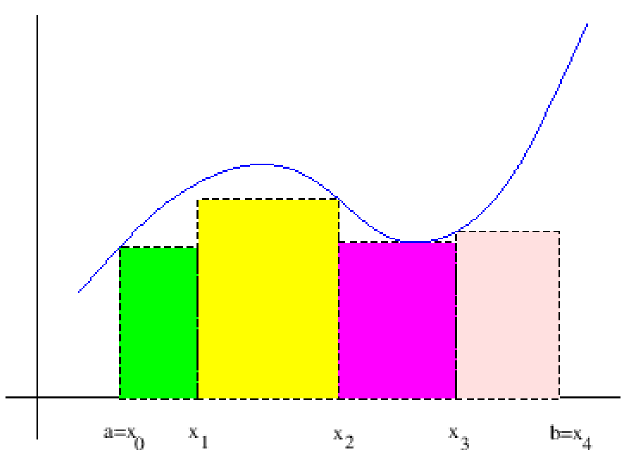
Če bi funkcija f bila zvezna, bi lahko inifimum in supremum zamenjali z minimumom oz maksimumom. Vendar v splošnih primerih ni nujno, da funkcija zavzame ekstremne vrednosti. Kljub temu velja

$$m \leq m_k \leq M_k \leq M$$

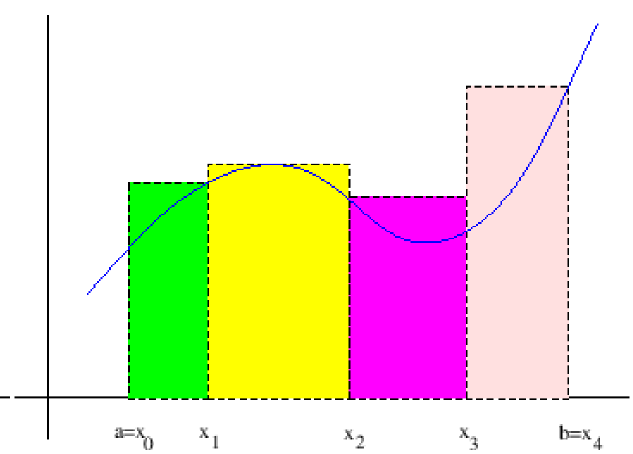
Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omejena funkcija. Zgornjo in spodnjo Darbouxovo (integralsko) vsoto definiramo kot:

$$S(f,\mathscr{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$
$$s(f,\mathscr{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

Spodnja integralska vsota predstavlja ploščino stolpičastega lika, včrtanega v lik pod grafom (Slika 8.2). Z druge strani, zgornja integralska vsota predstavlja ploščino stolpičastega lika, očrtanega liku pod grafom (Slika 8.3).



Slika 8.2: Spodnja Darbouxova vsota



Slika 8.3: Zgornja Darbouxova vsota

Zgornji oz **spodnji Darbouxov integral** od f definiramo zaporedoma z

$$\bar{I} = \sup_{\mathscr{P}\subset[a,b]} s(f,\mathscr{P}), \;\; \underline{I} = \inf_{\mathscr{P}\subset[a,b]} S(f,\mathscr{P}).$$

Izrek 12

Če je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omejena na $[a,b]$, potem velja $\underline{I} \leq \bar{I}$.

Definicija 11

Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omejena na $[a,b]$. Za funkcijo f pravimo, da je Darboux-integrabina, če sta spodnji in zgornji Darbouxov integral enaki. V tem primeru definiramo določeni integral funkcije f z

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{I} = \bar{I}.$$

Kriterij: Funkcija f je Darboux-integrabilna natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja delitev $\mathscr{P} \subset [a,b]$ in velja $|S(f,\mathscr{P}) - s(f,\mathscr{P})| < \varepsilon$.

Riemannov integral

Vzemimo poljuben element $\xi_j \in [x_{k-1}, x_k]$, za vsak $k = 1, \ldots, n$ definiramo **Riemannovo vsoto** kot

$$\sigma(f, \mathscr{P}, \{\xi_j\}_{j=1}^n) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)\Delta x_j.$$

Velja:

$$S(f,\mathscr{P}) \leq \sigma(f, \mathscr{P}, \{\xi_j\}_{j=1}^n) \leq S(f,\mathscr{P}).$$

Definicija 12

Funkcija f je Riemannovo-integrabilna z Riemannovim integralom I, če je zadovoljen naslednji pogoj:
za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$ takšen, da za vsako delitev $\mathscr{P}$ in izbiro poljubnih točk $\{\xi_j\}_{j=1}^n \subset \mathscr{P}$ z $||\mathscr{P}|| < \delta$ velja $|\sigma(f, \mathscr{P}, \{\xi_j\}_{j=1}^n) - I| < \varepsilon$.

Z drugimi besedami, če obstaja limita

$$\lim_{||\mathscr{P}|| \to 0} \sigma(f, \mathscr{P}, \{\xi_j\}),$$

pri čemer gre število točk v delitvi $n(\mathscr{P}) \to \infty$, jo imenujemo Riemannov integral funkcije f na $[a,b]$ in ga označimo z $\int_a^b f(x)dx$.

Izrek 13: Ekvivalentnost definicij

f je Riemanovo integrabilna natanko tedaj, ko je omejena in Darbouxovo integrabilna.

Pomembne lastnosti določenih integralov

1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \ (a < c < b)$

4. Če je f soda funkcija, potem je $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$. Če je f liha funkcija, potem je $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Naslednja formula je analogija per partes metode pri nedoločenih integralih.

Izrek 14: Newton-Leibnizeva formula

Naj bosta $u = u(x)$ in $v = v(x)$ zvezni in odvedljivi funkciji na zaprtem intervalu $[a,b]$. Potem je

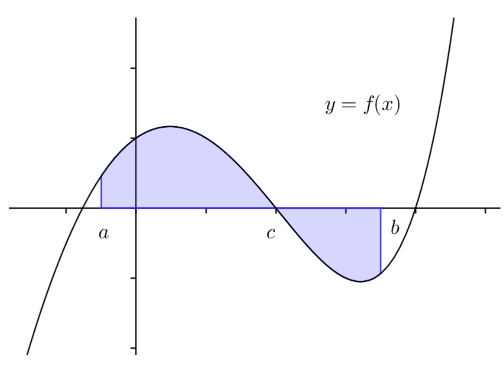
$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Kot smo že omenili, je določeni integral zvezne funkcije f na intervalu $[a,b]$ enak ploščini lika omejenega s krivuljo $y = f(x)$ in abscisno osjo. Lahko se zgodi, da funkcija f zamenja predznak na intervalu $[a,b]$ v točki c (Slika 8.4). Potem je formula za ploščino

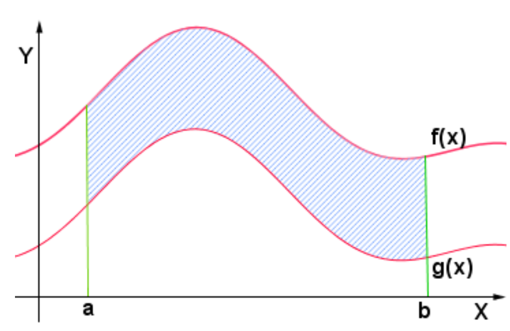
$$P = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx.$$

Prav tako kot računanje ploščin likov, ki jih grafi oklepajo z osjo x, lahko računamo tudi ploščine likov, ki ležijo med dvema grafoma (Slika 5). Če sta f in g zvezni funkciji na $[a,b]$, ploščino lika, ki ga določata, izračunamo kot

$$P = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$$



Slika 8.4:



Slika 8.5:

Naloge

1. S pomočjo definicije pokaži, da je $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

2. Izračunaj integrale:

(a) $\int\limits_0^8 (1+\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})\, dx$

(b) $\int\limits_{-\pi/4}^{0} \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\, dx$

(c) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$

(d) $\int\limits_1^2 x(lnx+1)\, dx$

(e) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x(sinx-1)\, dx$

(f) $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\, dx$

(g) $\int\limits_1^3 \frac{\sin(lnx)}{x}\, dx$

(h) $\int\limits_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\varphi_0\right)\, dt$

(i) $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{-\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(j) $\int\limits_{1/2}^{-1/2} \frac{dx}{1-x^2}$

(k) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{-x}+e^x}$

(l) $\int\limits_0^{ln2} \frac{e^x-1}{\sqrt{e^x-1}}\, dx$

(m) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x(1+\cos^2 x)\, dx$

(n) $\int\limits_0^R \sqrt{R^2-x^2}\, dx$

(o) $\int\limits_0^R x^2\sqrt{R^2-x^2}\, dx$

(p) $\int\limits_0^4 x\sqrt{x^2+9}\, dx$

(q) $\int\limits_0^{ln5} \frac{\sqrt{e^x-1}}{1+3e^{-x}}\, dx$

(r) $\int\limits_0^{\pi/2} e^x \sin x\, dx$

(s) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x \sin^2 x\, dx$

3. Izračunaj ploščino lika omejenega s krivuljo $y = x^2+x+1$ ter premicami $x = 0, y = 0$ in $x = 1$.

4. Izračunaj ploščino lika omejenega s krivuljo $x = 6-y-y^2$ in y-osjo.

5. Izračunaj ploščino lika omejenega s krivuljo $y = \tan x$ ter premico $x = \frac{\pi}{4}$ in x-osjo.

6. Izračunaj ploščino lika omejenega s krivuljo $y = x^2$ in premico $x+y = 2$.

7. Izračunaj ploščino elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$.

8. Izračunaj ploščino lika omejenega s krivuljama $y = \sin x$ in $y = \cos x$.

9. Izračunaj ploščino lika omejenega s krivuljo $y^2 = 2x+1$ in premico $y = x-1$.

Rešitve

1. Ker je funkcija $f(x)=x$ zvezna in naraščajoča na $[0,1]$, zaporedoma doseže najmanjšo in največjo vrednost v levem oz desnem krajišču intervala $I_i=[x_{i-1},x_i]$, $i=0,1,\ldots,n$, pri poljubni delitvi $\mathscr{P}=\{0=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=1\}$ intervala $[0,1]$. Naj bo $\Delta x_i=\frac{2-1}{n}=\frac{1}{n}$ in $x_i=x_0+\frac{i}{n}=\frac{i}{n}$. Zapišimo zgornjo in spodnjo Darbouxovo vsoto:

$$s(f,\mathscr{P})=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i,\ m_i=\inf_{x\in I_i} f(x)=f(x_{i-1})$$
$$S(f,\mathscr{P})=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i,\ M_i=\sup_{x\in I_i} f(x)=f(x_i)$$

Izračunajmo $\overline{I}$ in $\underline{I}$.

$$\begin{aligned}
s(f,\mathscr{P})&=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}\\
&=\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i-\sum_{i=1}^{n} 1\right)=\frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n-1)}{2}-n\right)=\frac{n+1}{2n}-\frac{1}{n}\\
\underline{I}&=\lim_{n\to\infty} s(f,\mathscr{P})=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(f,\mathscr{P})&=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\\
&=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n+1}{2n}\\
\overline{I}&=\lim_{n\to\infty} S(f,\mathscr{P})=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\underline{I}=\overline{I}=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}
\int_0^8(1+\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx&=\int_0^8 dx+\int_0^8\sqrt{2x}dx+\int_0^8\sqrt[3]{x}dx=\int_0^8 dx+\sqrt{2}\int_0^8 x^{\frac{1}{2}}dx+\int_0^8 x^{\frac{1}{3}}dx\\
&=x\Big|_0^8+\sqrt{2}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^8+\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Big|_0^8=8+\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{8^3}+\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{8^4}\\
&=8+\frac{16\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{8}+\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{(2^3)^4}=8+\frac{16}{3}\cdot\sqrt{16}+\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{(2^4)^3}\\
&=8+\frac{16}{3}\cdot 4+\frac{3}{4}\cdot 16=\frac{124}{3}
\end{aligned}$$

(b)

$$\int_{-\pi/4}^{0} \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx = \int_{-\pi/4}^{0} \frac{3x^2(x^2+1)}{x^2+1}dx + \int_{-\pi/4}^{0} \frac{1}{x^2+1}dx = 3\int_{-\pi/4}^{0} x^2dx + \int_{-\pi/4}^{0} \frac{1}{x^2+1}dx$$
$$= 3\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi/4}^{0} + \arctan x\Big|_{-\pi/4}^{0} = 0-(-\frac{\pi}{4}) + \arctan 0 - \arctan(-\frac{\pi}{4})$$
$$= \frac{\pi^3}{64} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(c)

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4} = 1+1 = 2$$

(d)

$$\int_{1}^{2} x(\ln x+1)dx = \left| \begin{array}{ll} \ln x+1=u & x\,dx = dv \\ \frac{1}{x}dx = du & \frac{x^2}{2}=v \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}(\ln x+1)\Big|_{1}^{2} - \int_{1}^{2} x\,dx$$
$$= 2(\ln 2+1) - \frac{1}{2}(\ln 1+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{1}^{2} = 2\ln 2 + 2 - \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{4}$$
$$= 2\ln 2 + \frac{8-6+1}{4} = 2\ln 2 + \frac{3}{4}$$

(e)

$$\int_{-\pi}^{\pi} x(\sin x-1)dx = \left| \begin{array}{ll} x=u & (\sin x+1)dx = dv \\ dx = du & -\cos x - x = v \end{array} \right|$$
$$= -x(\cos x + x)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}(\cos x + x)dx$$
$$= -x\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi} - x^2\Big|_{-\pi}^{\pi} + \sin x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$
$$= -\pi\cdot(-1) - (\pi\cdot(-1)) - \pi^2 + \pi^2 + \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}$$
$$= 2\pi$$

(f)

$$\int_{1}^{4} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx = \int_{1}^{4} \frac{1}{x^2}dx + \int_{1}^{4} x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-2}dx = \int_{1}^{4} x^{-2}dx + \int_{1}^{4} x^{-\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^4 + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\Big|_1^4 = -\frac{1}{x}\Big|_1^4 - \frac{2}{\sqrt{x}}\Big|_1^4 = -\frac{1}{4} + 1 - 1 + 2 = \frac{7}{4}$$

(g)

$$\int_1^3 \frac{\sin(\ln\ x)}{x} dx = \left| \begin{array}{ll} \ln\ x = t & x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ \frac{1}{x} dx = dt & x = 3 \Rightarrow t = \ln\ 3 \end{array} \right|$$

$$= \int_0^{\ln\ 3} \sin\ t\ dt = -\cos\ t\Big|_0^{\ln\ 3} = -\cos 0 + cos(\ln\ 3) = \cos\ (\ln\ 3) - 1$$

(h) Prepuščeno bralcu!

(i)

$$\int_{\sqrt{2}/2}^{-\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin\ x\Big|_{\sqrt{2}/2}^{-\sqrt{2}/2} = \arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -2 \cdot \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$= -2 \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

(j)

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}\right| - \frac{1}{2} \ln\left|\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right| = \frac{1}{2} \ln|-3| - \frac{1}{2} \ln|-\frac{1}{3}|$$

$$= \frac{1}{2}(\ln\ 3 - \ln\ 3^{-1}) = \frac{1}{2}(\ln\ 3 + \ln\ 3) = \ln\ 3$$

(k)

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^{-x}+e^x} = \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x(e^{-x}+e^x)} = \int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \left| \begin{array}{ll} e^x = t & x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ e^x dx = dt & x = 1 \Rightarrow t = e \end{array} \right|$$

$$= \int_1^e \frac{t}{t^2+1} dt = \left| \begin{array}{l} t^2 = z \\ 2t dt = dz \Rightarrow t dt = dz \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_{(1)}^{(e)} \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{1}{2} \ln\ z\Big|_{(1)}^{(e)} = \frac{1}{2} \ln\ (t^2+1)\Big|_1^e = \frac{1}{2}(\ln|e^2+1| - \ln\ 2) = \frac{1}{2} \ln\frac{e^2+1}{2}$$

(l) Prepuščeno bralcu!

(m)

$$\int_0^{\pi/2} \sin x(1+\cos^2 x)dx = \left| \begin{array}{ll} \cos x = t & x=0 \Rightarrow t=1 \\ -\sin x dx = dt & x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=0 \end{array} \right| = -\int_1^0 (1+t^2)dt$$

$$= \int_0^1 dt + \int_0^1 t^2 dt = t\Big|_0^1 + \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

(n)

$$\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}dx = \left| \begin{array}{ll} x = R\sin t & x=0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t=0 \\ dx = R\cos t dt & x=R \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{array} \right|$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}\cdot R\cos t dt = R^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t dt$$

$$= R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = R^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos^2 t}{2} dt$$

$$= \frac{R^2}{2}\Big(\int_0^{\pi/2} dt + \int_0^{\pi/2} \cos 2t dt\Big) = \left| \begin{array}{ll} 2t = z & t=0 \Rightarrow z=0 \\ dt = \frac{dz}{2} & t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow z=\pi \end{array} \right|$$

$$= \frac{R^2}{2}\Big(\int_0^{\pi/2} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos z dz\Big) = \frac{R^2}{2}\Big(t\Big|_0^{\pi/2} + \underbrace{\frac{1}{2}\sin t\Big|_0^{\pi}}_{0}\Big) = \frac{R^2\pi}{2}$$

(o) Prepuščeno bralcu!

(p)

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx = \left| \begin{array}{ll} x^2+9=t^2 & x=0 \Rightarrow t=3 \\ x\,dx = t\,dt & x=4 \Rightarrow t=5 \end{array} \right| = \int_3^5 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_3^5 = \frac{125}{3} - \frac{27}{3} = \frac{98}{3}$$

(q) Prepuščeno bralcu!

(r) Prepuščeno bralcu!

$$\int_0^{\pi/2} e^x \sin x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u=e^x & \sin x\,dx = dv \\ du = e^x\,dx & -\cos x = v \end{array} \right| = -e^x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \cos x\,dx$$

$$= 1 + \int_0^{\pi/2} e^x\cos x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u=e^x & \cos x\,dx = dv \\ du = e^x\,dx & \sin x = v \end{array} \right|$$

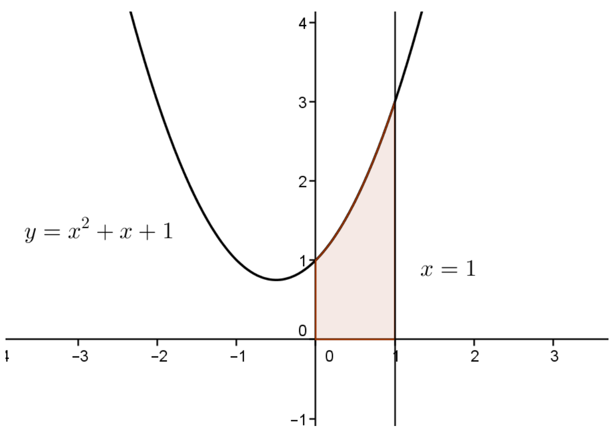
$$= 1 + e^x \sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1 + e^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \sin\, x \, dx$$

$$2\int_0^{\pi/2} e^x \sin\, x \, dx = 1 + e^{\pi/2} \Rightarrow \int_0^{\pi/2} e^x \sin\, x \, dx = \frac{1 + e^{\pi/2}}{2}$$

(s)

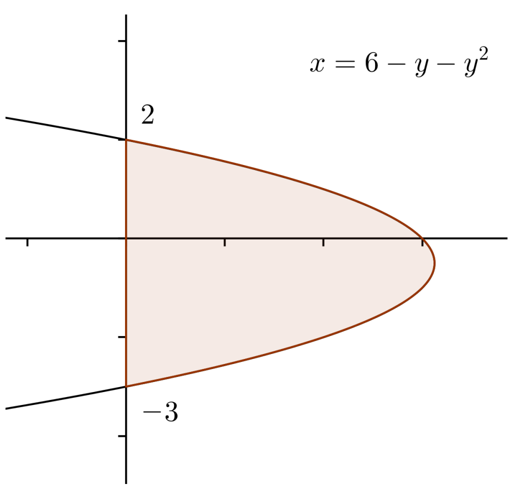
$$\int_0^{\pi/2} \cos\, x \, \sin^2\, x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sin\, x = t & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ \cos\, x \, dx = dt & x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

3.



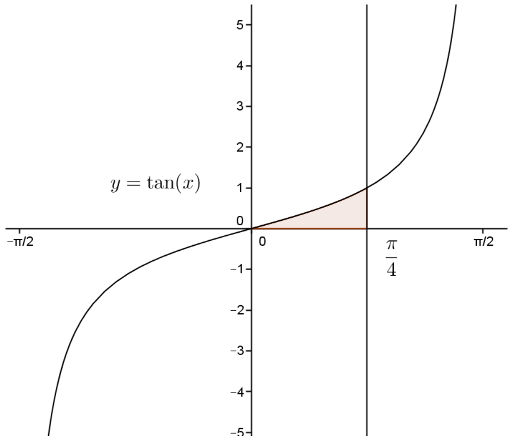
$$P = \int_0^1 (x^2 + x + 1)dx = \frac{11}{6}$$

4.



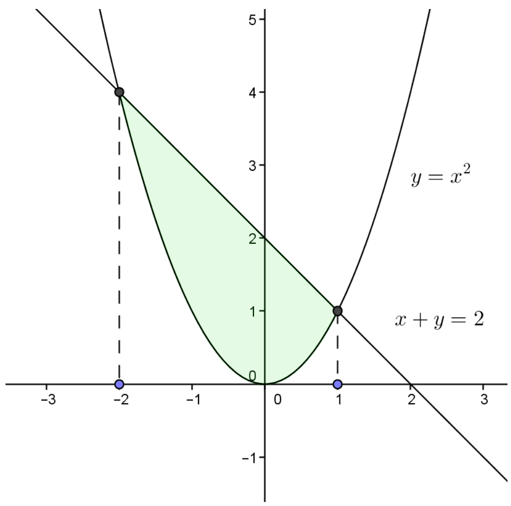
$$P = \int_{-3}^{2} (6 - y - y^2)dy = \frac{125}{6}$$

5.



$$P = \int_0^{\pi/4} \tan x dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_0^{\pi/4} \frac{d(\cos x)}{\cos x}$$
$$= -\ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/4} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln 1 = \ln\frac{2}{\sqrt{2}}$$
$$= \ln\sqrt{2}$$

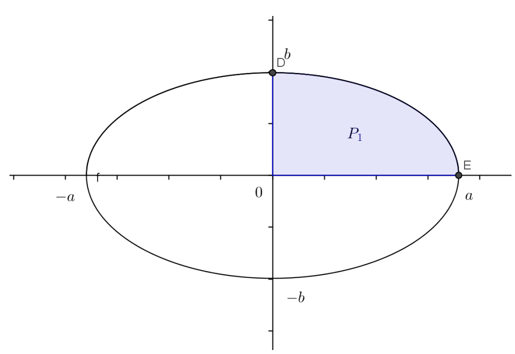
6.



Meji integracije: Rešimo sistem enačb $y = x^2,\ y = 2 - x$ in dobimo, da sta $x_1 = -2,\ x_2 = 1$.

$$P = \int_{-2}^{1} (2-x)dx - \int_{-2}^{1} x^2 dx = \frac{9}{2}$$

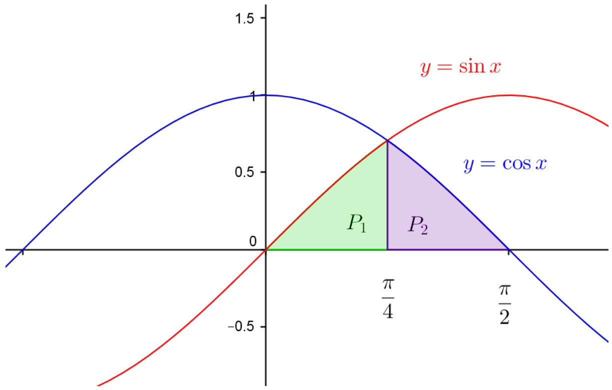
7.



Iz enačbe elipse lahko izrazimo $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, ki predstavlja zgornjo polovico krivulje. Očitno je ploščina $P = 4P_1$.

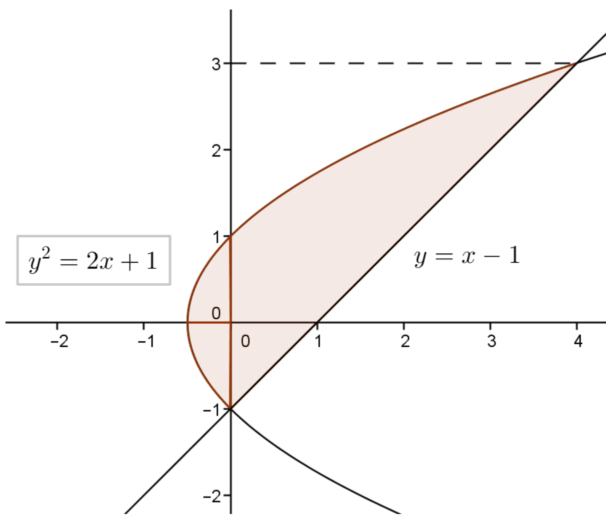
$$P = 4b\int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx = \left|\begin{array}{ll} t = \frac{x}{a} & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ adt = dx & x = a \Rightarrow t = 1 \end{array}\right| = 4ab\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$$
$$= 4ab\left(\frac{1}{2}\arcsin(t)\Big|_0^1 + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin(t))\Big|_0^1\right) = 4ab\frac{\pi}{4} = ab\pi$$

8.



$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 \\ &= \int_0^{\pi/4} \sin x dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x dx \\ &= 2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

9.



$$\begin{aligned} P &= \int_{-1}^{1} \left| \frac{y^2-1}{2} \right| dy + \int_{-1}^{3} (y+1) dy - \int_1^3 \frac{y^2-1}{2} dy \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^1 (1-y^2) dy + \int_{-1}^{3} (y+1) dy - \int_1^3 \frac{y^2-1}{2} dy \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Uporaba določenega integrala

Parametričen opis krivulje

Krivulja je opisana parametrično s funkcijama $x = x(t)$ in $y = y(t)$, kjer je $t \in [a,b]$. Predpisu

$$t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

pravimo parametrizacija krivulje, spremenljivki t pa parameter.

Primeri:

1. S predpisom

   $$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ t \in [0, 2\pi]$$

   je dan parametričen opis krožnice s središčem v izhodišču koordinatnega sistema in s polmerom a. Ko parameter t teče od 0 proti 2π, se točka na krožnici giblje od točke $(1,0)$ v pozitivni smeri, tj. v smeri nasproti smeri urinega kazalca.

2. Predpis

   $$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ t \in [0, 2\pi]$$

   določa elipso s središčem v $(0,0)$ in z glavnima osema a in b, saj je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3. Z

   $$x = a\cosh t,\ y = a\sinh t,\ t \in \mathbb{R}$$

   je dana hiperbola $x^2 - y^2 = a^2$.

Polarni koordinatni sistem

Polarni koordinatni sistem v ravnini je določen z izbiro točke, ki predstavlja koordinatno izhodišče O, in poltraka z začetkom v izhodišču, ki predstavlja polarno os. Točka v ravnini je v tem koordinatnem sistemu določena s polarnim radijem r, ki predstavlja oddaljenost točke od izhodišča in s polarnim kotom θ, ki ga daljica med točko in koordinatnim izhodiščem oklepa z realno osjo. Če je v ravnini že izbran kartezični koordinatni sistem, običajno koordinatno izhodišče polarnega in kartezičnega koordinatnega sistema sovpadata, polarna os pa je na pozitivnem delu osi y. V tem primeru se kartezične koordinate izražajo s polarnimi kot:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,$$

polarne s karteričnimi pa z:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \; \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

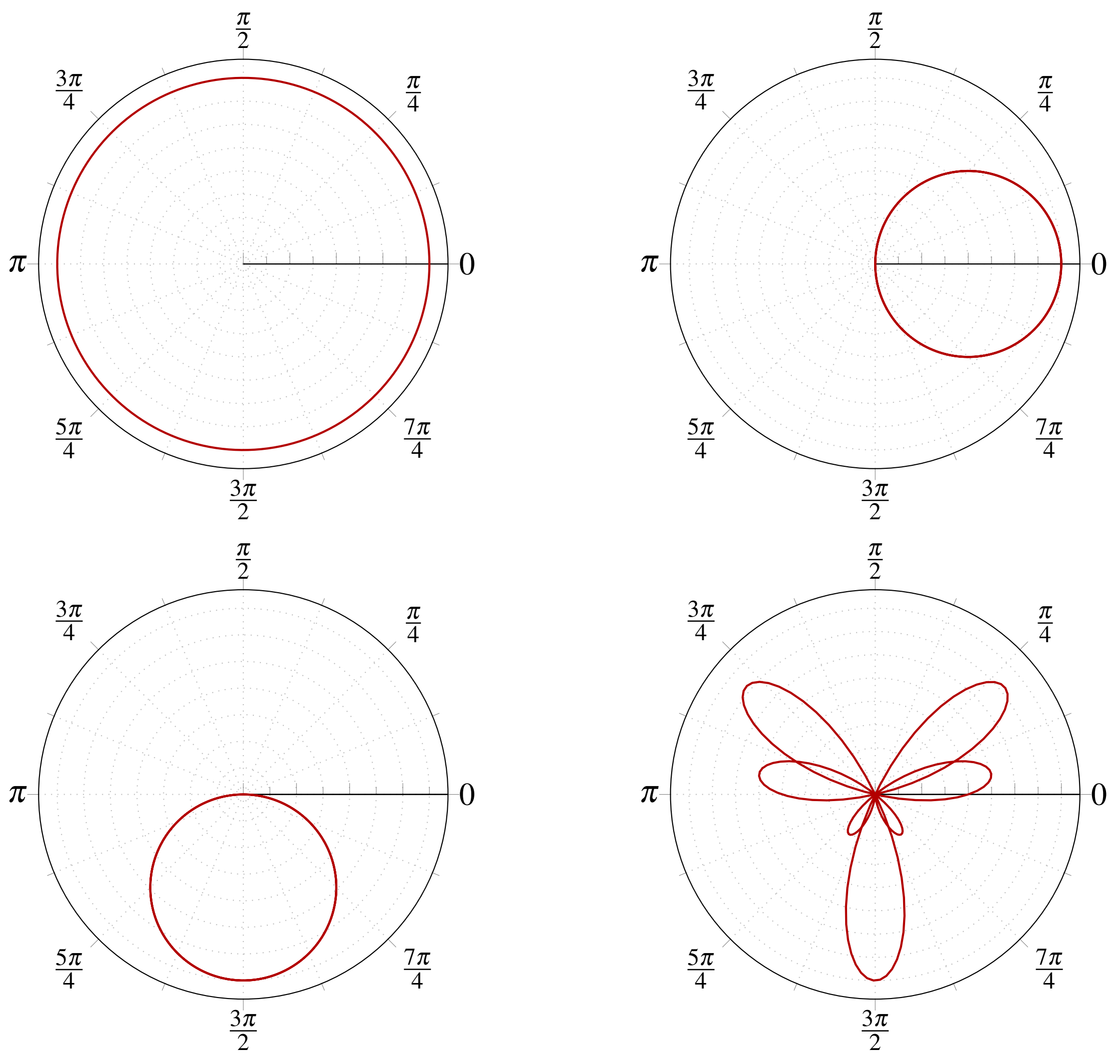
Krivulja je v polarnem koordinatnem sistemu določena s funkcijo

$$r = r(\theta).$$

Primera:

1. Krožnica s središčem v $(0,0)$ in polmerom a je, po definiciji, množica točk, ki so za a oddaljene od središča. Torej je enačba te krožnice v polarnih koordinatah $r = a$.

2. Enačbi $r = 4\cos\theta$ in $r = -7\sin\theta$ predstavljata krožnici, ki imata center v $(2,0)$ oz $(0,-\frac{7}{2})$ in polmer $r = 2$ oz $r = \frac{7}{2}$.



Slika 9.1: Grafi krivulj podanih z enačbami $r = 2, \; r = 2\cos\theta, \; r = -7\sin\theta, \; r = \sin(3\theta) + \cos(4\theta)$

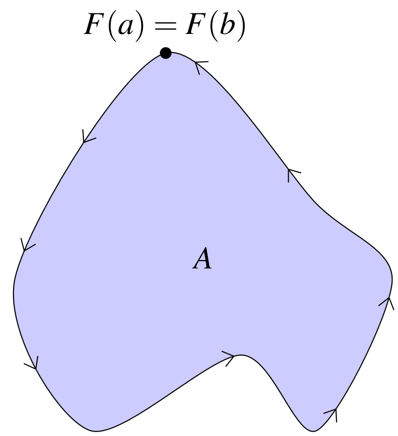
Ploščina območja določenega s krivuljo (dana v parametrični obliki oz polarnih koordinatah)

Definicija 13

*Naj bo $F : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ regularna parametrizacija krivulje K. Potem F določa **usmerjenost** K, določeno s smerjo, v kateri potuje točka $F(t)$ po K, ko gre t od a do b.*

***Gladka enostavna sklenjena krivulja** (**ESK**) je krivulja K, ki ima regularno parametrizacijo $F : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, za katero velja $F(a) = F(b)$ in $\dot{F}(a) = \dot{F}(b)$, $F|_{[a,b)}$ pa je injektivna.*

*Naj bo A območje, ki ga omejuje gladka enostavna sklenjena krivulja K. Regularna parametrizacija F krivulje K določa **pozitivno usmerjenost** krivulje K, če je A na levi strani, ko se pomikamo vzdolž K v smeri usmjerenosti, ki jo določa F.*



Izrek 15

Naj bo $F : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $F(t) = (x(t), y(t))$ regularna parametrizacija ESK krivulje K, ki določa pozitivno usmerjenost K. Potem je ploščina območja A znotraj K enaka

$$\int_a^b x(t)\dot{y}(t)dt = -\int_a^b y(t)\dot{x}(t)dt = \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))dt.$$

Komentar 22: O

visno od tega ali je znak funkcije $y(t) \cdot \dot{x}(t)$ pozitiven oz negativen, uporabili bomo prvo oz drugo formulo.

Izrek 16

Naj bo $r = r(\theta)$ za $\theta \in [\alpha, \beta]$, zvezna polarno podana krivulja. Potem je ploščina območja, ki ga določa krivulja skupaj z daljicama

$$\theta = \alpha,\ 0 \le r \le r(\alpha) \ \textit{ in } \ \theta = \beta,\ 0 \le r \le r(\beta),$$

enaka

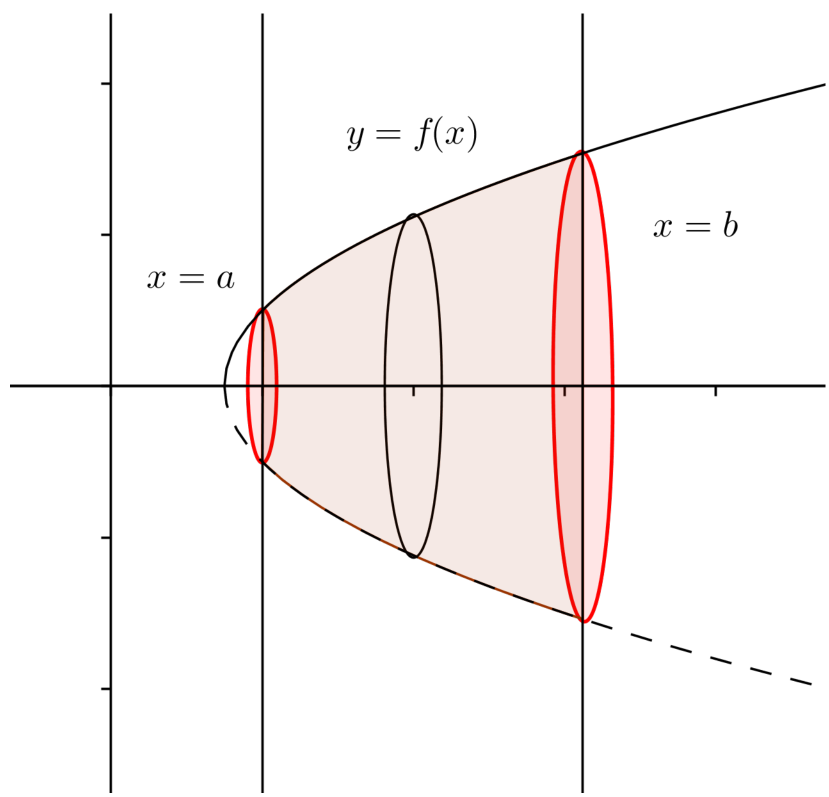
$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta.$$

Dolžina loka krivulje

- *Krivulja dana v kartezičnih koordinatah:* Dolžina loka gladke (zvezno odvedljive) krivulje $y = y(x)$ $(a \leq x \leq b)$ je enaka
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$
- *Krivulja dana v parametrični obliki:* Če je krivulja podana z enačbami $x = x(t)$ in $y = y(t)$ $(t_0 \leq t \leq T)$, pri čemer sta x in y zvezno odveljivi funkciji na $[t_0, T]$, potem je dolžina loka krivulje enaka
$$L = \int_{t_0}^T \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt.$$
- *Krivulja dana v polarnih koordinatah:* Če je $r = r(\theta)$ $(\alpha \leq \theta \leq \beta)$, pri čemer je r zvezno diferenciabilna na $[\alpha, \beta]$, potem je dolžina loka krivulje enaka
$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + (r'(\theta))^2} d\theta.$$

Volumen in ploščina rotacijskega telesa

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nenegativna zvezna funkcija. Ploskev, ki jo dobimo z vrtenjem grafa funkcije f nad intervalom $[a, b]$ okrog abscine osi, imenujemo rotacijska ploskev.



Prostornina območja, omejenega s to rotacijsko ploskvijo in ravninama $x = a$ in $x = b$, je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Ploščino te rotacijske ploskve pa lahko računamo po formuli

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Naloge

1. Izračunaj ploščino parametrično podanih krivulj. Namig: Odvisno od tega ali je $x = x(t)$ naraščajoča ali padajoča funkcija, uporabi prvo oz. drugo formulo za ploščino.

   (a) $x = 6(\theta - \sin\theta),\ y = 6(1 - \cos\theta),\ \theta \in [0, 2\pi]$

   (b) $x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0, 2\pi]$

   (c) $x = 4t^3 - t^2,\ y = t^4 + 2t^2,\ t \in [1, 3]$

   (d) $x = 3 - \cos^3 t,\ y = 4 + \sin t,\ t \in [0, 2\pi]$

2. Izračunaj ploščino polarno podanih krivulj.

   (a) $r^2 = a^2 \cos 2\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

   (b) $r = a(1 + \cos\theta),\ \theta \in [0, \pi]$

   (c) $r = \frac{p}{1 - \cos\theta},\ \theta = \frac{\pi}{4},\ \theta = \frac{\pi}{2}$

3. Izračunaj ploščino notranje zanke krivulje $r = 2 + 4\cos\theta$.

4. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji $r = 3 + 2\sin\theta$ in $r = 2$.

5. Zapiši funkcijo $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ v polarnih koordinatah ter izračunaj ploščino lika, ki ga določa dana krivulja v ravnini.

6. Izračunaj obseg kroga $x^2 + y^2 = r^2$.

7. Izračunaj dolžino loka krivulje podane z $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

8. Izpelji formulo za izarčun volumna krogle polmera r, s središčem v koordinatnem izhodišču.

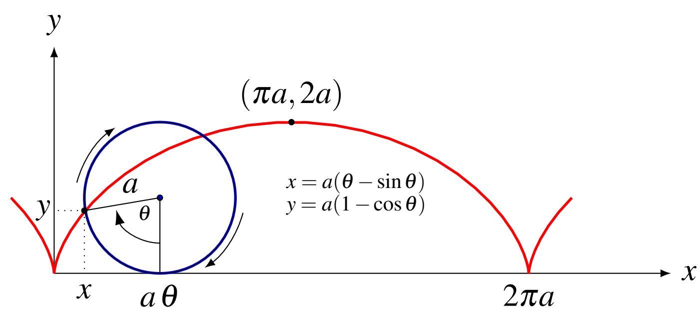
9. Izračunaj volumen telesa, ki ga dobimo z rotacijo grafa, omejenega s krivuljama $y = x^2(1 - x)^2$ in $y = 0$, okoli abscisne osi.

Rešitve

1. (a) **Cikloída** je krivulja v ravnini, ki jo dobimo tako, da sledimo točki na krožnici, ko se ta kotali po vodoravni premici. V parametrični obliki jo zapišemo kot:

$$x(t) = a(t - \sin t), \;\; y(t) = a(1 - \cos t),$$

kjer je t neodvisni parameter in a polmer krožnice, s katero cikloido generiramo.



Slika 9.2: Način risanje cikloide

Ker ima cikloida negativno orientacijo, moramo pred integral dodati minus. Ploščina je

$$P = -\int_b^a y(t)\dot{x}(t)dt = \int_0^{2\pi} 36(1 - \cos\theta)^2 = 108\pi.$$

(b) Z $x = \cos t, \; y = \sin t, \; t \in [0, 2\pi]$ je dana parametrizacija enotske krožnice, ki ima pozitivno orientacijo. Ploščina območja, ki ga omejuje je

$$P = -\int_{2\pi}^{0} \sin t \cdot (-\sin t dt) = \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \pi$$

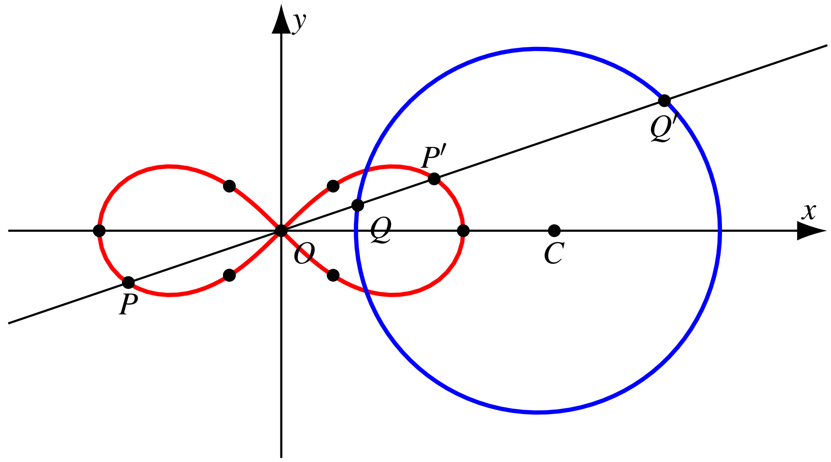
(c) Ker ima krivulja negativno orijentacio, je ploščina omočja, ki ga omejuje

$$P = -\int_3^1 (t^4 + 2t^2)(12t^2 - 2t)dt = \int_1^3 (t^4 + 2t^2)(12t^2 - 2t) = \frac{82952}{21}$$

(d) Prepuščen bralcu.

2. (a) **Lemniskata** je algebrska krivulja, ki ima obliko osmice ali znaka ∞. Bernoullijeva lemniskata je ravninska krivulja, ki jo definirata dve dani točki $F_1 F_1$ in $F_2 F_2$, imenovani gorišči. Točki sta na razdalji $2a\,2a$, tako da je $PF_1 \cdot PF_2 = a^2\, PF_1 \cdot PF_2 = a^2$. Enačba Bernoullijeve lemniskate v polarnem koordinatnem sistemu je:

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$$



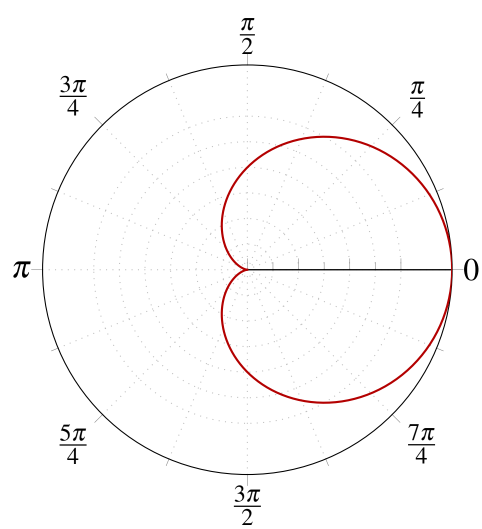
Slika 9.3: Risanje Bernoullijeve lemniskate

Plošina dela lemniskate v prvem kvadrantu je

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos(2\theta) d\theta = \frac{a^2}{4}$$

(b) **Srčnica** (tudi **kardioída**) je ravninska krivulja, ki nastane pri vrtenju krožnice po drugi negibni krožnici z enakim polmerom. Pri tem se spremlja negibna točka na gibajoči se krožnici. Naj bo a skupni polmer krožnic. Enačba krivulje v polarni obliki je

$$r = 2a(1 + \cos\theta)$$



Slika 9.4: Graf kardioide v polarnemu koordinatnemu sistemu za $a = 1$

Ploščina območja omejenega z dano kardioido je

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta) = \frac{3}{2}a^2\pi$$

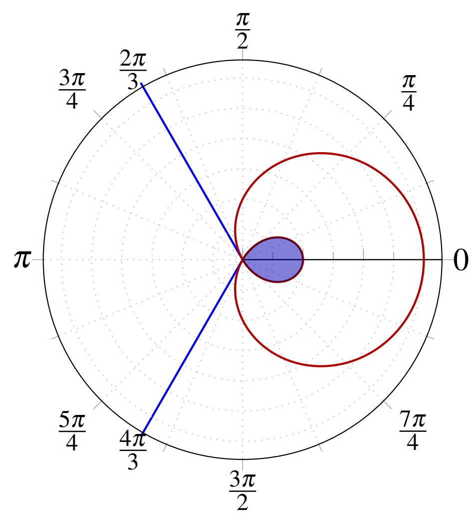
(c) Prepuščeno bralcu.

3. Najprej moramo določiti meji integracije. To pomeni, da poiščemo kota med katerima je zanka nastane. Zato, rešimo enačbo $r = 0$.

$$r = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta_1 = \frac{2\pi}{3},\ \theta_2 = \frac{4\pi}{3}.$$

Ploščina je

$$P = \frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{4\pi/3} (2+4\cos\theta)^2 d\theta = 4\pi - 6\sqrt{3}$$

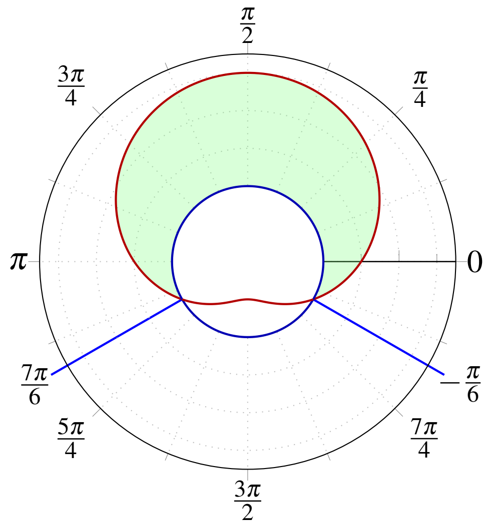


4. Kakor v pravokotnem koordinatnem sistemu, moramo najti presečni točki danih funkcij. To pomeni, da rešimo enačbo $r_1 = r_2$.

$$3 + 2\cdot\sin\theta = 2 \Leftrightarrow \sin\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta_1 = \frac{7\pi}{6},\ \theta_2 = \frac{11\pi}{6}.$$

Ker kot narašča, se ne more zgoditi, da integriramo od $\frac{11\pi}{6}$ do $\frac{7\pi}{6}$. Vendar lahko spodnjo mejo popravimo, saj vemo, da je $\frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$. Iskana ploščina je enaka razliki ploščin "velike"in "majhne"krivulje na danem območju.

$$P = \frac{1}{2}\int -\pi/6^{7\pi/6}((3+\sin\theta)^2 - 2^2)\ d\theta = \frac{11}{2}\sqrt{3} + \frac{14}{3}\pi$$



5. Zapišimo dano enačbo v polarni obliki. Za $x = r\cos t$ in $y = r\sin t$ dobimo

$$r^4 = 2a^2r^2\cos t\sin t \Leftrightarrow r^2 = a^2\cdot 2\sin t\cos t \Leftrightarrow r^2 = a^2\sin 2t,\ t\in[0,2\pi].$$

   Torej je dana krivulja Bernoullijeva lemniskata. To krivuljo smo že obravnavali, izračunali smo, da je ploščina "ene četrtine"lemniskate enaka $\frac{a^2}{4}$. To pomeni, da je ploščina cele lemniskate $P = a^2$.

6. Prepuščeno bralcu.

7. Poiščimo odvode $\dot{x}(t)$ in $\dot{y}(t)$.

$$\dot{x}(t) = -3\cos^2 t\sin t,\ \ \dot{y} = 3\sin^2 t\cos t$$

   Dolžina loka dela dane krivulje je

$$l = \int_0^{\pi/2}\sqrt{\dot(x)^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt = \int_0^{\pi/2}\sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t + 9\cos^2 t\sin^4 t}dt = \int_0^{\pi/2} 3\sin t\cos t dt = \frac{3}{2}$$

8. Kroglo dobimo z rotacijo krožnice $x^2 + y^2 = r^2$ okoli abscine osi. Interval integracije je $[-r,r]$. To pomeni, da je volumen krogle

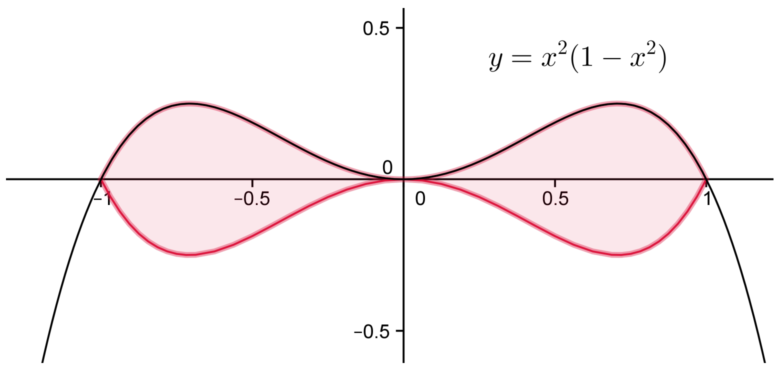
$$V = \pi\int_{-r}^{r} y^2(x)\,dx = \pi\int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi$$

9. Ker je funkcija omejena z x-osjo, poiščimo presečni točki.

$$x^2(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$$

Vsota integralov $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$, je enaka $\int_a^c f(x)dx$. Torej je iskan volumen enak

$$V = \pi \int_{-1}^{1} x^4(1-x^2)^2 = \frac{16}{315}\pi$$



9.1. Dodatne naloge

1. Določi ploščino lika, ki ga oklepa krivulja $y^2 = x^2 - x^4$.
2. Izračunaj ploščino lika, ki ga oklepajo ordinatna os, premica $y = kx$, $k > 0$, in del elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, ki leži v prvem kvadrantu.
3. Poišči ploščino lika, ki ga oklepata krivulji z enačbama $y = (x+1)^2$, $x = \sin \pi y$ in $y = 0$.
4. Izračunaj dolžino krivulje $y = x - 2\log(1+x)$ na intervalu $[0,1]$.
5. Izračunaj obseg in ploščino astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
6. Izpeljaj formulo za prostornino krogelnega plasta.[1]
7. Izračunaj ploščino lika, ki ga oklepa parabola $y = -x^2 + 4x - 3$ skupaj z njenama tangentama v točkah $(0,3)$ in $(3,0)$.
8. Hiperbola $x^2 - 2y^2 = \frac{a^2}{4}$ deli krog $x^2 + y^2 = a^2$ na tri dele. Poišči ploščino vsakeg od teh delov.
9. Vsaka od krivulj $r = 3 + \cos 4\theta$ in $r = 2 - \cos 4\theta$ omejuje del ravnine. Poišči ploščino skupnega dela teh območji.
10. Poišči dolžino loka dela semikubne parabole $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^2$, ki se nahaja na notranji strani parabole $y^2 = \frac{x}{3}$.

[1]Krogelna plast je del krogle, ki leži med dvema vzporednima ravninama.

11. Na cikloidi $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ poišči točko, ki deli dolžino cikloide na intervlu $[0, 2\pi]$ v razmerju $1:3$.

12. Poišči dolžino loka kardioide $r = a(1 + \cos\theta)$.

13. Izračunaj volumen telesa, ki nastane z rotacijo dela ravnine omejenega s hiperbolo $x^2 - y^2 = a^2$ ter premico $x = a + h,\ h > 0$, okoli abscisne osi.

NEPRAVI INTEGRALI

Pogosto naletimo na vprašanje, kako izračunati integrale oblike $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$. Funkcija $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ ni omejena na $[0,1]$, saj, ko gre x proti 0, gre funkcijska vrednost $\frac{1}{x}$ proti ∞. Ta funkcija torej **ni integrabilna** na $[0,1]$.

Pojem integrala bomo posplošili na primere, ko funkcija v okolici neke točke ne bo omejena, ali ko bo interval, po katerem integriramo, neskončen. Tako definiranemu integralu bomo rekli *posplošeni* integral ali *nepravi* integral ali *izlimitirani* integral.

Definicija 14

Naj bo f funkcija definirana na intervalu $[a,b)$ ter integrabilna na vsakem podintervalu $[a,\beta] \subset [a,b)$. Če limita

$$\lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)dx$$

*obstaja, ji pravimo **nepravi integral funkcije f na** $[a,b)$ in jo označimo z*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)dx.$$

Pogosto dano limito imenujemo tudi nepravi integral s singularnostjo v točki b. Če limita obstaja, potem pravimo, da nepravi integral $\int_a^b f(x)dx$ **konvergira**, v nasprotnem primeru pa pravimo, da **divergira**. Podobno definiramo nepravi integral $\int_a^b f(x)dx$ s singularnostjo v točki a.

Zgled: Nepravi integral $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$, $p > 0$ ima singularnost v točki 0. Njegova konvergenca je odvisna od parametra $p > 0$. Namreč, za $p \neq 1$ imamo

$$\int_a^1 \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{x^{p-1}}\Big|_a^1 = \frac{1}{1-p}\left(1 - \frac{1}{a^{p-1}}\right).$$

Ko uvedemo limito, dobimo

$$\lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{a \to 0^+} \frac{1}{1-p}\left(1 - \frac{1}{a^{p-1}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & p < 1 \\ \infty, & p > 1 \end{cases}$$

Če je $a = 1$, potem je

$$\lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{a \to 0^+} (-\ln a) = \infty.$$

Torej nepravi integral konvergira za $p < 1$ in divergira za $p \geq 1$.

Definicija 15

Predpostavimo da je funkcija $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrabilna na vsakem podintervalu $[a, \beta] \subset [a, +\infty)$. Če limita

$$\lim_{\beta \to +\infty} \int_a^\beta f(x)dx$$

*obstaja, ji pravimo **nepravi integral funkcije f na** $[a, \infty)$ in jo označimo z*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_a^\beta f(x)dx.$$

Pogosto dano limito imenujemo tudi nepravi integral s singularnostjo v točki ∞. Če limita obstaja potem pravimo, da nepravi integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **konvergira**, v nasprotnem primeru pa **divergira**. Podobno definiramo nepravi integral $\int_{-\infty}^b f(x)dx$.

Zgled: Preverimo konvergenco integrala $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx, p \in \mathbb{R}$. Naj bo $p \neq 1$. Potem je

$$\int_1^b \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{x^{p-1}}\Big|_1^b = \frac{1}{1-x}(b^{1-p} - 1).$$

Torej

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{1-x}(b^{1-p} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p < 1 \end{cases}$$

Če je $p = 1$, potem imamo

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to +\infty} \ln b = \infty.$$

Torej integral konvergira za $p > 1$ in divergira za $p \leq 1$.

Izrek 17

Naj bosta $\int_a^b f(x)dx$ in $\int_a^b g(x)dx$ neprava integrala s singularnostjo v točki b. Potem:

1. *če oba integrala konvergirata, konvergira tudi $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx$ in velja*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx - \mu \int_a^b f(x)dx, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

2. *če je $a < c < b$, $\int_a^b f(x)dx$ konvergira natanko tedaj, ko konvergira $\int_c^b f(x)dx$ in velja $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.*

Definicija 16

Če je f integrabilna funkcija na vsakem intervalu $[a,\alpha] \subset [a,c)$ ter $[\beta,b] \subset (c,b]$, $a<c<b$, definiramo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

če konvergirata tudi integrala *$\int_a^c f(x)dx$ in $\int_c^b f(x)dx$.*

Definicija 17

Nepravi integral $\int_a^b f(x)dx$ ***konvergira absolutno****, če konvergira integral $\int_a^b |f(x)|dx$.*

Izrek 18: Primerjalni kriterij

Naj bosta $f,g : [a,+\infty) \to [0,+\infty)$ dve nenegativni funkciji, ki sta Riemannovo integrabilni na vsakem podintervalu $[a,b]$, $a<b$. Predpostavimo, da velja $f(x) \leq g(x)$, za poljuben $x \in [a,+\infty)$.

1. *Če nepravi integral $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ konvergira, potem konvergira tudi $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.*
2. *Če nepravi integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ divergira, potem divergira tudi $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.*

Izrek 19: Limitni kriterij

Naj bosta $f,g : [a,+\infty) \to [0,+\infty)$ dve nenegativni funkciji, ki sta Riemannovo integrabilni na vsakem podintervalu $[a,b]$, $a<b$. Predpostavimo, da v $\overline{\mathbb{R}}$ obstaja limita

$$L := \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in [0,+\infty].$$

1. *Če je $0<L<\infty$, nepravi integral $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ konvergira natanko tedaj, ko konvergira $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.*
2. *Če je $L=0$ in nepravi integral $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ konvergira, potem konvergira tudi $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.*
3. *Če je $L=\infty$ in nepravi integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ konvergira, potem konvergira tudi $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.*

Izrek 20: Integralni kriterij konvergence številske vrste

Naj bo $f(x)$ zvezna, nenegativna ter padajoča funkcija na intervalu $[k,+\infty)$, $k \in \mathbb{N}_0$, in naj bo $u_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Vrsta $\sum\limits_{n=k}^{\infty} u_n$ konvergira natanko tedaj, ko konvergira nepravi integral $\int_k^{+\infty} f(x)dx$.

Naloge

1. Preveri ali dani nepravi integrali konvergirajo oz divergirajo. V primeru da konvergirajo, jih izračunaj.

   (a) $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$
   (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$
   (c) $\int_{0}^{\infty} 2^{-x} dx$
   (d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x} dx$
   (e) $\int_{2}^{5} \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$
   (f) $\int_{0}^{2} \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx$
   (g) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}}{1-\cos x} dx$
   (h) $\int_{1}^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$

2. Izračunaj ploščino pod krivuljo $y = xe^{-x}$ na intervalu $[0,\infty)$ in prostornino telesa, ki nastane z vrtenjem krivulje okrog abscisne osi na istem intervalu.

3. Pokaži da nepravi integral $\int_{1}^{+\infty} \frac{x\sin x}{\sqrt{x^5+4}} dx$ konvergira absolutno.

4. Pokaži da integral $\int_{1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{x} dx$ divergira.

5. Utemelji konvergentnost danih vrst:

   (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n^2}$

Rešitve

1. (a)

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 xe^x dx = \left\{\begin{array}{lll} u & = x & dv = e^x dx \\ du & = dx & v = e^x \end{array}\right\} = \lim_{a\to-\infty}\left(xe^x\Big|_a^0 - \int_a^0 e^x dx\right)$$
$$= \lim_{a\to-\infty}(-ae^a - 1 + e^a) = \lim_{a\to\infty}(e^a(1-a)-1)$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1-a}{e^{-a}} - 1\right) \stackrel{L.P.}{=} \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{-1}{-e^{-a}} - 1\right) = -1$$

   To pomeni da nepravi integral konvergira in je $\int_a^0 xe^x = -1$.

   (b) Dani integral lahko zapišemo kot $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$.

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \arctan x\Big|_a^0 = \lim_{a\to-\infty}(-\arctan a) = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \arctan x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}(\arctan b) = \frac{\pi}{2}$$

   Torej $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.

   (c) Prepuščeno bralcu.

(d) Primetimo da funkcija $f(x)=\frac{|x|}{1+x}$ ni definirana v $x=-1$. Torej integral moramo zapisati kot $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{1+x}=\int_{-\infty}^{-1}\frac{|x|}{1+x}+\int_{-1}^{+\infty}\frac{|x|}{1+x}$ ter preveriti ali konvergirata. Če vsaj eden med njimi divergira, potem tudi začetni integral divergira.

$$\begin{aligned}\lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to-1}\int_a^b\frac{x}{1+x}dx &= \ldots = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to-1}(\ln|b|-\ln|a|-b+a)\\ &= \lim_{a\to-\infty}(1+a-\ln|a|)=-\infty\end{aligned}$$

To pomeni da $\int_{-\infty}^{-1}\frac{|x|}{1+x}$ divergira. Torej tudi $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{1+x}$ divergira.

(e) Prepuščeno bralcu.

(f) Prepuščeno bralcu.

(g) Z pomočjo primerjalnega kriterija, pokazali bomo, da dani integral divergira. Vemo da je $\sin x<x$ za vse $x>0$.

$$1-\cos x=\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}=\frac{\sin^2 x}{\underbrace{1+\cos x}_{\geq 1,\ \forall x\in[0,\frac{\pi}{2})}}\leq \sin^2 x<x^2,\ \forall x\in[0,\frac{\pi}{2}.$$

To pomeni

$$\frac{\sqrt{x}}{1-\cos x}\leq\frac{\sqrt{x}}{x}=x^{-\frac{3}{2}}.$$

Enostavno se preveri da integral $\int_0^{\pi/2}x^{-\frac{3}{2}}dx$ diverigra. Od tod, po primerjalnem kriteriju, sledi, da tudi integral $\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{x}}{1-\cos x}dx$ divergira.

(h) Prepuščeno bralcu.

2. Potrepno je, če konvergirata, izračunati integrala $P=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$ in $V=\pi\int_0^{+\infty}x^2e^{-2x}$. Če divergirata, ploščina oz volumen sta neskončna.

3. Za vsako $x>0$ velja
$$\frac{|\sin x|}{\sqrt{x^5+4}}\leq\frac{x}{\sqrt{x^5+4}}.$$
Kako je
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^5+4}}}{\frac{1}{\sqrt{x^3}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x^5+4}}=1$$
ter kako nepravi integral $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ konvergira (Zgled, $p=3/2$), po limitnem kriteriju sledi, da tudi integral $\int_1^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^5+4}}$ tudi konverigra. Po primerjalnem kriteriju sledi, da integral $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^5+4}}dx$ konvergira apsolutno.

4. Kako je $\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$, ter integral $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ divergira, po limitnem kriteriju divergira tudi integral $\int_1^{+\infty}\arctan\frac{1}{x}dx$.

5. Funkcija $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ je zvezna, nenegativna in padajoča na $[0, +\infty)$. Torej lahko primenimo integralni kriterij.

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x}\, dx &= \lim_{t \to \infty} \int_2^t \frac{1}{x \ln x}\, dx \qquad\qquad u = \ln x \\
&= \lim_{t \to \infty} \left(\ln(\ln x)\right)\Big|_2^t \\
&= \lim_{t \to \infty} \left(\ln(\ln t) - \ln(\ln 2)\right) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Po integralnem kriteriju dana vrsta divergira.

6. Funkcija $f(x) = xe^{-x^2}$ je očitno zvezna in nenagitvna na $[0, +\infty)$. Izračunajmo prvi odvod in preverimo ali je padajoča.

$$f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2) < 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Očitno je da funkcija bo padajoča ko $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ in to nam je dovolj da uporabimo integralni kriterij, ker hočemo da ko x gre proti neskončnosti da funkcija postane padajoča počevši od nekatere točke x_0.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x\mathbf{e}^{-x^2}\, dx &= \lim_{t \to \infty} \int_0^t x\mathbf{e}^{-x^2}\, dx \qquad\qquad u = -x^2 \\
&= \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{2}\mathbf{e}^{-x^2}\right)\Bigg|_0^t \\
&= \lim_{t \to \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{e}^{-t^2}\right) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Integral je konvergentan in po integralnem kriteriju dana vrsta je tudi konvergentna.

FUNKCIJSKE VRSTE

Definicija 18

Naj bo $(f_k(x))_{k=1}^{\infty}$ *funkcijsko zaporedje. Neskončno vsoto funkcij*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \tag{11.0.1}$$

imenujemo ***funkcijska vrsta****.*

Funkcijam $f_1(x), f_2(x), \ldots$ pravimo *členi* vrste, $f_n(x)$ pa *splošni člen* (11.0.1).

Vsota prvih n členov

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

je *n-ta parcialna vsota vrste* (11.0.1). Funkcija $S_n(x)$ je definirana na istem območju $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{R}$ kot členi zaporedja $f_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$.

Definicija 19

Neskončni vsoti

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

pravimo ostanek vrste (11.0.1).

Pri funkcijskih vrstah, podobno kakor pri zaporedjih iz katerih so nastale, razlikujemo dve vrsti konvergenc: konvergenco (v točki in na intervalu) in enakomerno konvergenco.

Definicija 20

Vrsta (11.0.1) *konvergira (divergira) v točki* $x = x_0 \in \mathscr{D}$, *če konvergira (divergira) vrsta* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$.

Množico vseh točk $x_0 \in \mathscr{D}$, v katerih vrsta (11.0.1) konverigra, imenujemo *konvergenčno območje*.

Definicija 21

Vrsta (11.0.1) *konvergira na intervalu* $(a,b) \subseteq \mathscr{D}$, *če na intervalu* (a,b) *konvergira zaporedje parcijalnih vsot* $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

Če obstaja, mejno vrednost

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x),\ x \in \mathscr{D}$$

imenujemo *vsota vrste* (11.0.1) in pišemo

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x).$$

Konvergenca na intervalu pomeni konvergenco v vsaki točki tega intervala. Enakomerno konvergenco lahko definiramo na intervalu, v točki pa ne.

Definicija 22

Vrsta (11.0.1) enakomerno konvergira na intervalu (a,b) proti funkciji $S(x)$, če niz parcialnih vsot $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ enakomerno konvergira proti $S(x)$ na istemu intrevalu.

c

Izrek 21

Če je vrsta (11.0.1) enakomerno konvergentna na intervalu (a,b), potem je konvergentna na istemu intervalu. Obrat v splošnem ne velja.

Splošne lastnosti funkcijskih vrst so izražene z naslednjim izrekom.

Izrek 22

Naj bosta $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ in $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ konvergentni vrsti na (a,b) z vsotama

$$S_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x),\ \ S_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x).$$

1. *Če je $c(x)$ poljubna realna funkcija, definirana ter omejena na istem intervalu (a,b), potem na tem intervalu konvergira tudi vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} c(x) f_k(x)$ z vsoto enako $c(x)S_1(x)$.*
2. *Tudi vsoti $\sum_{k=1}^{\infty}(f_k(x) \pm g_k(x))$ konvergirata na (a,b), z vsotama $S_1(x) \pm S_2(x)$.*
3. *Za vsak $x \in (a,b)$ velja*
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Kriteriji enakomerne konvergence

Preverjanje konvergence vrste na intervalu se prevede na preverjanje konvergence v točkah tega intervala, tj. na preverjanje konvergence številčnih vrst. Zato za navadno konvergenco niso razviti posebni kriteriji.

Za preverjanje enakomerne konvergence obstaja več kriterijev, npr. Weierstrassov, Dirichletov, Abelov. Najbolj znan med njimi je Weierstrassov kriterij.

Izrek 23: Weierstrassov kriterij

Naj za vsak $x \in [a,b]$ *in vsak* $k \in \mathbb{N}$ *velja*

$$|f_k(x)| \leq M_k,$$

kjer je $0 < M_k < +\infty$ *za vsak* $k \in \mathbb{N}$.
Če je pozitivna številčna vrsta $\sum_{k=1}^{+\infty} M_k$ *konvergentna, potem je funkcijska vrsta* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *enakomerno konvergentna na* $[a,b]$.

Naslednji izreki nam dajo osnovne lastnosti enakomerno konvergentnih vrst.

Izrek 24: Zveznost

Naj bodo funkcije $f_k(x)$ *zvezne na* $[a,b]$ *za vsak* $k \in \mathbb{N}$ *in naj bo vrsta* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *enakomerno konvergentna na* $[a,b]$. *Potem je vsota*

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

zvezna funkcija na $[a,b]$.

Izrek 25: Integrabilnost

Naj bodo funkcije $f_k(x)$ *zvezne na* $[a,b]$ *za vsak* $k \in \mathbb{N}$ *in naj bo vrsta* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *enakomerno konvergentna na* $[a,b]$. *Potem se vrsta* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *lahko integrira po členih, tj. za vsaka različna* $x_1, x_2 \in [a,b]$ *velja*

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{x_1}^{x_2} f_k(x) dx \right)$$

Izrek 26: Odvedljivost

Naj bodo funkcije $f_k(x)$ *zvezno odveljive na* $[a,b]$ *za vsak* $k \in \mathbb{N}$. *Naj bo vrsta* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *konvergentna in* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ *enakomerno konvergentna na* $[a,b]$. *Potem lahko vrsto* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *odvajamo po členih, tj. za vsak* $x \in [a,b]$ *velja*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x).$$

Naloge

1. Določi območje absolutne konvergence dane funkcijske vrste ter preveri konvergenco v njegovih krajiščih.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{x^{2n}}{2^n}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+3+\ldots+(2n-1)} \cdot \left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{2n}$

2. Pokažite, da je funkcijska vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$
zvezna. Nato poiščite še $S'(x)$.

3. Izračunajte
$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}\right) dx, \; x > 0.$$

Rešitve

1. Dano funkcijsko vrsto bomo obravnavali kot številčno vrsto. Bolje rečeno, uporabili bomo D'alambertov ali Cauchyjev test za številčne vrste ter na koncu rešili dobljeno neenačbo. Tako bomo določili iskano območje. Spomnimo se, če vrsta konvergira absolutno potem tudi konvergira. V splošnem primeru, obrat ne drži.

   (a) Naj bo $a_n(x) = \frac{x^n}{n(n+1)}$.
$$D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{nx}{n+2}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} = |x|$$
   Po D'alambertovom testu, vrsta $\sum |a_n(x)|$ konvergira, če je $D < 1$, za $D > 1$ divergira in za $D = 1$ ni odločitve.

   Torej, dana vrsta konvergira absolutno za $|x| < 1$ oz $x \in (-1,1)$. Moramo še preveriti konvergenco v krajiščih. To pomeni, da preverimo absolutno konvergenco številčnih vrst za $x = 1$ in $x = -1$.

   Za $x = 1$ in $x = -1$ imamo, da je za dani vrsti $|a_n(1)| = |a_n(-1)| = \frac{1}{n(n+1)}$. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergira, ker zaporedje k-tih parcialnih vsot konvergira, tj.
$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

To pomeni, da je območje absolutne konvergencije $[-1,1]$.

(b) Naj bo $a_n(x) = \frac{x^{n^2}}{n!}$. Imamo

$$D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{n+1} = \begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ +\infty, & |x| > 1 \end{cases}$$

Torej, po D'alambertovom testu, dana vrsta konvergira absolutno na $[-1,1]$.

(c) Prepuščeno bralcu!

(d) Naj bo $a_n(x) = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{x^{2n}}{2^n}$. Uporabili bomo Caucyjev test.

$$C = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2} \cdot \frac{|x|^2}{2} = \frac{x^2}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{2}{n}} = \frac{x^2}{2}$$

Po Cauchyjevem testu vrsta konvergira za $C < 1$, to pomeni konvergira za $x^2 < 2$ oz $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Preveriti moramo še konvergenco v krajiščih. Za $x = \pm\sqrt{2}$ dobimo številčno vrsto $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}$. Ker $a_n \to 1 \neq 0$ $(n \to \infty)$, dana vrsta divergira. Torej je območje absolutne konvergence $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(e) Najprej opazimo, da je $1+3+\ldots+(2n-1)$ aritimetično zaporedje, z vsoto n^2. Torej lahko dano vrsto zapišemo kot $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{2n}$. Ponovno bomo uporabili Cachyjev test.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}\cdot\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^2 = \left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^2$$

Vrsta konvergira absolutno za tiste x, ki zadoščajo neenakost $\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^2 < 1$. Torej za $x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Pri $x = \pm 1$ dobimo številčno vrsto $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, za katero vemo, da konvergira. Območje absolutne konvergence je torej $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

2. Naj bo $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je funkcija $f_n(x)$ zvezna. Očitno je za poljuben $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}.$$

Ker je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ konvergentna, je po Weierstrassovom testu dana funkcijska vrsta enakomerno konvergentna na $\mathbb{R}$. Zaradi lastnosti enakomerne konvergence je $S(x)$ zvezna funkcija.

Funkcije $f_n(x)$ so zvezno odvedljive, pri čemer je $f_n'(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$. Na podoben način, lahko zaključimo, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$ enakomerno konvergentna na $\mathbb{R}$. To pomeni, da lahko odvajamo člen po člen ozrioma:

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

3. Naj bo $a > 0$.

$$|f_n(x)| = |ne^{-nx}| = \left|\frac{n}{e^{nx}}\right| \le \left|\frac{n}{e^{na}}\right|, \ \forall x \ge a$$

S pomočjo D'alambertovog testa enostavno ugotovimo konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-na}$. Po Weirestrassovom testu, dana funkcijska vrsta enakomerno konvergira na $[a, +\infty)$, za poljuben $a > 0$. To pomeni, da enakomerno konvergira na $(0, +\infty)$. Ker vrsta konvergira enakomerno, lahko vsota in integral zamenjata mesti. Torej:

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\ln 2}^{\ln 3} ne^{-nx} dx\right)$$

S pomočjo substitucije $u = -nx$ dobimo, da je vrednost integrala

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} ne^{-nx} dx = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}.$$

Vrsti $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ in $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ sta konvergentni z vsotama 2 oz $\frac{3}{2}$. Od tod sledi

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

11.1. Dodatne naloge

1. Določi območje absolutne konvergence dane funkcijske vrste ter preveri konvergenco v njegovih krajiščih.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n+1}}{n^2}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+1}}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^n}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n(x-5)^n}$

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x^2+3x+2)^n}{n \cdot 2^n}$

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}$

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$

   (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{\sqrt[3]{n}}$

   (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n(x+5)}}{n-2}$

   (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{4^n \cdot n^2}$

   (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n}}{(2x-1)^n}$

POTENČNE VRSTE

Potenčna vrsta je funkcijska vrsta oblike

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_n)^n + \ldots \tag{12.0.1}$$

Poseben primer potenčne vrste je

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{12.0.2}$$

Za analizo konvergence vrste (12.0.1) je dovolj raziskati konvergenco vrste (12.0.2), do katere pridemo, ko zamenjamo $x - x_0$ z x. Očitno, vsaka potenčna vrsta konvergira za $x = 0$, kjer je vsota enaka a_0.

Najbolj znan kriterij za preverjanje konvergence potenčne vrst je Abelov kriterij.

Izrek 27: Abelov kriterij

1. *Če potenčna vrsta* (12.0.2) *konvergira za določen* $x = P \neq 0$*, potem absolutno konvergira za vse* x*, za katere je* $|x| < |P|$.
2. *Če potenčna vrsta* (12.0.2) *divergira za določen* $x = Q \neq 0$*, potem divergira za vse* x*, za katere je* $|x| > |Q|$.

Namesto Abelovog izreka je v praksi bolj praktično uporabljati njegovo posledico.

Posledica 2: Abel

Za vsako potenčno vrsto (12.0.2) *obstaja število* $r \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ *takšno, da velja:*

1. *vrsta* (12.0.2) *absolutno konvergira za* $|x| < r$*,*
2. *vrsta* (12.0.2) *divergira za* $|x| > r$.

Številu r pravimo *polmer* ali *radij konvergence*. Če je $r > 0$, potem intervalu $(-r, r)$ pravimo *interval konvergence*, tj. območje konvergence vrste. Polmer konvergence r ponavadi določimo s pomočjo D'alambertovega ali Caucyjevega kriterija. Z drugimi besedami,

$$\boxed{r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \quad \text{ali} \quad r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.}$$

V primeru, da mejni vrednosti ne obstajata, lahko polmer konvergence določimo s pomočjo Cauchy-Hadamardovih formul:

$$\boxed{r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \quad \text{ali} \quad r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.}$$

Za $x = \pm r$ moramo preveriti konvergenco številčnih vrst $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ oz. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n R^n$.

Enakomerna konvergenca potenčnih vrst

Izrek 28

Potenčna vrsta (12.0.2) je enakomerno konvergentna na $[-\alpha, \alpha]$, pri čemer je $0 < \alpha < r$ poljuben in r konvergenčni polmer. Z drugimi besedami, potenčna vrsta je zvezna na $(-r, r)$.

Izrek 29: Zveznost

Če je r konvergenčni polmer in $-r < \alpha < \beta < r$ vsota potenčne vrste, je

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

zvezna funkcija na segmentu $[\alpha, \beta]$.

Izrek 30: Integrabilnost in odvedljivost

Če je r konvergenčni polmer in $-r < \alpha < \beta < r$, potem lahko potenčno vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ na segmentu $[\alpha, \beta]$ integriramo in odvajamo poljubnokrat. Pri tem imajo vse dobijene vrste enak konvergenčni polmer r.

Definicija 23

Naj bo f neskočno mnogokrat odvedljiva v okolici točke a. Vrsto

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

imenujemo ***Taylorjeva vrsta*** *funkcije f pri točki a. V posebnem primeru, če je $a = 0$, vrsto $T(x)$ imenujemo* ***McLaurintova vrsta*** *funkcije f.*

Vprašanje je ali ta vrsta sploh konvergira. Če konvergira, ali je njena vsota morda enaka $f(x)$? Vemo že, da če je $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, **vrsta konvergira k** $f(x)$. Funkcije, ki so (lokalno) enake vsoti konvergentnih potenčnih vrst, imenujemo **analitične funkcije**. Torej je vsaka funkcija, ki jo lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto, analitična funkcija. Zelo pomembna je uporaba Taylorjevega razvoja elementarnih funkcij[1].

[1] Elementarna funkcija je v matematiki funkcija, ki jo je moč sestaviti iz končnega števila osnovnih elementarnih funkcij (polinomi, racionalne, potenčne, eksponentne in logaritemske, trigonometrične in obratne trigonometrične), konstant, ene spremenljivke in korenov s pomočjo kompozicij in kombinacij s štirimi dvočlenimi elementarnimi operacijami $(+ - \times \div)$.

Izrek 31

Taylorjeva vrsta elementarne funkcije $f(x)$ konvergira proti $f(x)$ v vsaki točki svojega konvergenčnega območja.

Naloge

1. Določi radij ter interval konvergence dane funkcijske vrste. Če je potrebno, preveri tudi konvergenco v njegovih krajiščih.
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}}$
2. Preveri konvergenco in najdi vsoto potenčne vrste
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$$
3. Preveri konvergenco in najdi vsoto potenčne vrste
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k.$$
4. Razvijte funkcijo $f(x) = \frac{1}{x}$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke $x_0 = 3$, določite interval konvergence in izračunajte vsoto
$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots$$

Rešitve

1. (a) Označimo z $a_n = \frac{1}{n!}$.
$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)}!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty \Rightarrow |x| < +\infty \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$
   (b) Označimo z $a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$.
$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot 2}} = 2 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow x \in (-2, 2).$$

Preverimo še konvergenco v $x = \pm 2$. Za $x = 2$ dobimo vsoto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, ki divergira, saj gre za harmonično vrsto. Za $x = -2$ imamo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Označimo z $b_n = \frac{1}{n}$. Ker je $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajoče zaporedje in $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$, po Leibnitzovom kriteriju, dana alternajoča vrsta konvergira. Torej dana potenčna vrsta konvergira za $x \in [-2, 2)$.

(c) Opazimo, da lahko dano vrsto zapišemo kot

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2 \cdot 2} \cdot \left(\frac{x-3}{2}\right)^n .$$

Označimo z $a_n = \frac{3n-2}{(n+1)^2 \cdot 2}$.

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 + o(n^2)}{3n^3 + o(n^2)} = 1 \Rightarrow \left|\frac{x-3}{2}\right| < 1 \Rightarrow x \in (1, 5)$$

Preverimo konvergenco v $x = 1$ in $x = 5$. Za $x = 1$ imamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-2}{2(n+1)^2} = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-2}{2(n+1)^2}.$$

Označimo z $b_n = \frac{3n-2}{2(n+1)^2}$. Zaporedje $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je očitno padajoče in $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Po Leibnitzovom kriteriju dana številčna vrsta konvergira.

Za $x = 5$ imamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-2}{2(n+1)^2} = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{2(n+1)^2}.$$

Naj bo $b_n = \frac{3n-2}{2(n+1)^2}$ in $c_n = \frac{1}{n}$. Ker je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = 3$$

in $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}$ divergira, lahko z uporabo testa za primerjanje limit *("Limit comparisson test")* zaključimo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{2(n+1)^2}$ divergira. To pomeni, da dana potenčna vrsta konvergira za $x \in [1, 5)$.

2. S substitucijo $t = -x$, dana vrsta postane

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k},$$

za katero vemo, da konvergira pri $t \in [-1, 1)$. To pomeni, da začetna vrsta konvergira za $x \in (-1, 1]$ in ima vsoto

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$$

Dano vrsto lahko poljubnokrat integriramo in odvajamo na konvergenčnem območju. Poiščimo $S'(x)$.

$$S'(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot k \cdot x^{k-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k,$$

pri čemer smo uporabili lastnost, da sta $k+1$ in $k-1$ enake parnosti. Vemo, da ima za $x \in (-1,1)$ vrsta $S'(x)$ vsoto

$$S'(x) = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}.$$

Ker je $S(0) = 0$, z integracije leve in desne strani prejšnje enakosti na $[0,x]$ za $|x| < 1$ sledi

$$\int_0^x S'(t)dt = S(t)\Big|_0^x = S(x) - S(0) = S(x)$$

in

$$\int_0^x S'(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t|\Big|_0^x = \ln(1+x).$$

Od tod sledi

$$S(x) = \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k, \ x \in (-1,1).$$

Zaradi konvergence vrste $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$ ter zveznosti funkcije $\ln(1+x)$ v $x = 1$, dana enakost velja tudi za $x = 1$. To pomeni,

$$S(x) = \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k, \ x \in (-1,1].$$

Komentar 23:

Pri potenčnih vrstah vedno integriramo na $[0,x]$. Vzamemo 0, ker vsaka potenčna vrsta konvergira v točki $x = 0$, x pa je spremenljivka iz intervala konvergence.

3. Označimo z $a_k = k^2$. Očitno je $r = 1$. Za $x = \pm 1$ dana vrsta divergira. Torej, potenčna vrsta konvergira za $x \in (-1,1)$. Da lahko določimo vsoto dane potenčne vrste, začnemo z vrsto $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$, ki prav tako konvergira za $x \in (-1,1)$ in ima vsoto

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \ x \in (-1,1).$$

Z odvajanjem dobimo

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Na podoben način, s ponovnim odvajanjem, dobimo

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Komentar 24

Da bi določili interval konvergence potenčnih vrst

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k},\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k+1},\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k-1},$$

moramo uvesti substitiucijo $t = x^2 \geq 0$, *s katero se dane vrste preobrazijo v potenčno vrsto* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, *ki teče po novi spremenljivki* t. *Pri tem moramo vrsti z lihima eksponentoma spremenljivke* x *zapisati v eni izmed naslednjih oblik*

$$\sum_{k=0} a_k x^{2k+1} = x\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k},\quad \sum_{k=0} a_k x^{2k-1} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}.$$

4. Taylorjeva vrsta funckije f v okolici točke x_0 je

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Poiščimo $f^{(n)}(x)$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1}\\
f'(x) &= (-1)x^{-2}\\
f''(x) &= (-1)(-2)x^{-3}\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)(-2)\dots(-n)x^{-(n+1)} = (-1)n!x^{-(n+1)}
\end{aligned}$$

Torej

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n$$

Poiščimo interval konvergence dane vrste.

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^{n+1}}}} = 3 \Rightarrow |x-3| < 3 \Rightarrow x \in (0,6)$$

Za $x=0$ in $x=6$ številčna vrsta divergira, saj splošni člen ne gre proti 0 pri $n \to \infty$. To pomeni, da Taylorjeva vrsta kovnergira za $x \in (0,6)$ in velja

$$f(x) = T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}},\ x \in (0,6).$$

Sedaj je potrebno izračunati še dano vsoto. Opazimo, da je

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = T(1) = f(1) = 1.$$

12.1. Dodatne naloge

1. Določi radij ter interval konvergence dane funkcijske vrste. Če je potrebno, preveri tudi konvergenco v njegovih krajiščih.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n \cdot (x+2)^n$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{2n+1}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n \cdot 5^n}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} \cdot (x+2)^n$

   (f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-3)^{2+n}(n^2+1)}(4x-12)^n$

   (g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2n+1}}{4^{3n}}(2x+17)^n$

   (h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)!}(x-2)^n$

   (i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4^{1+2n}}{5^{n+1}}(x+3)^n$

   (j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n}(4x-1)^{n-1}$

2. Pošiči vsoto dane potenčne vrste.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$

   (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot a^{n-1}},\ a > 0$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

3. Razvijte funkcijo $f(x) = \ln(1+2x)$ v McLaurintovo vrsto ter določite interval konvergence.

4. Razvijte funkcijo $f(x) = \ln \frac{1}{(\frac{1}{3}x+2)^4}$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke $x_0 = -1$, določite interval konvergence in izračunajte vsoto

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots.$$

Literatura

[1] G.N. Berman. *Zbirka zadataka iz matematičke analize*. Naučna knjiga, Beograd, 1985.

[2] B. Demidovič. *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke*. Tehnička knjiga, Zagreb, 1978.

[3] M. Dobovišek, M. Hladnik, M. Omladič. *Rešene naloge iz analize*. DMFA, Ljubljana, 1980.

[4] J. Globevnik, M. Brojan: Analiza I, `https://www.fmf.uni-lj.si/∼ globevnik/skripta.pdf`

[5] B. Hvala. *Zbirka izpitnih nalog iz analize*. DMFA, Ljubljana, 1996.

[6] S. Kurepa. *Matematička analiza I, II*. Tehnička knjiga, Zagreb, 1980.

[7] I. I. Ljaško, A. K. Boljarčuk, J. G. G. Gaj, G. P. Golovač. *Zbirka zadataka iz matematičke analize – prvi deo*. Naša knjiga, Beograd, 2007.

[8] P. Miličić, M. Uščumlić. *Zbirka zadataka iz više matematike I, II*. Naučna knjiga, Beograd, 1985.

[9] I. Vidav. *Višja matematika I, II, III*. DZS, Ljubljana, 1974.