TRANZITIVNI GRAFI

Katarina Jančar

oktober 2008

Kazalo

1 Uvodne definicije 3

2 Vozliščna tranzitivnost 8

3 Povezavna tranzitivnost 10

4 Ločna tranzitivnost 12

5 Kubični ločno tranzitivni grafi 16

6 Razdaljno tranzitivni grafi 20

7 Literatura 24

1 Uvodne definicije

Za boljše razumevanje najprej potrebujemo nekaj osnovnega znanja iz algebre.

Definicija. ***Grupa*** *$G = \{a, b, ...\}$ je par $(G, *)$, kjer je G neprazna množica in $* : G \times G \to G$ dvočlena operacija na G, ki vsakemu urejenemu paru $(a, b) \in G$ priredi natanko določen element $a * b \in G$. Operacija $*$ mora zadoščati naslednjim pogojem:*

- *za $\forall a, b \in G$ velja $a * b \in G$* (zaprtost)
- *za $\forall a, b, c \in G$ velja $(a * b) * c = a * (b * c)$* (asociativnost)
- *v G obstaja takšen element $e \in G$, za katerega velja $a * e = e * a = a$* (nevtralni element)
- *za $\forall a \in G$ obstaja tak $b \in G$, da velja $a * b = b * a = e$* (obratni element)

Definicija. *Podmnožica H grupe G je* ***podgrupa****, če je tudi sama grupa za isto operacijo.*

Definicija. ***Homomorfizem*** *je preslikava med dvema algebrskima strukturama, ki ohranja algebrske operacije.*

Definicija. ***Avtomorfizem*** *je bijektivna preslikava množice same nase.* ***Grupa avtomorfizmov*** *je množica vseh avtomorfizmov dane množice z operacijo kompozitum.*

Definicija. *Naj bo G grupa in X poljubna množica. Preslikavo $\rho : G \times X \to X$ imenujemo* ***(levo) delovanje grupe*** *G na množici X, če zadošča pogojema:*

- *$\rho(gh, x) = \rho(g, \rho(h, x))$ za vse $g, h \in G$ in $x \in X$*
- *$\rho(e, x) = x$ za vse $x \in X$, kjer je e nevtralni element v G*

Opomba. *Za* $\rho(g, x)$ *bomo uporabljali krajši zapis* x^g.

Definicija. *Naj* G *deluje na* X. ***Stabilizator*** *elementa* $x \in X$ *je* $G_x = \{g \in G; x^g = x\}$.

Definicija. *Naj* G *deluje na* X. ***Orbita*** *elementa* $x \in X$ *je* $Gx = \{x^g; g \in G\}$.

Definicija. *Delovanje grupe* G *na množico* X *je* ***tranzitivno****, če za poljubna elementa* $x, y \in X$ *obstaja element* $g \in G$*, tako da je* $x^g = y$.
Lahko tudi rečemo, da ima delovanje eno samo orbito.

Uporabili bomo tudi nekaj pojmov iz teorije grafov.

Definicija. ***Graf*** G *je določen s parom množic* $G = (V(G), E(G))$*, kjer je* $V(G)$ *množica vozlišč grafa,* $E(G)$ *pa množica povezav grafa.* ***Povezavo*** *predstavimo kot neurejen par dveh vozlišč.*

Definicija. ***Pograf*** H *grafa* G *je tak graf, da velja* $V(H) \subseteq V(G)$ *in* $E(H) \subseteq E(G)$.

Definicija. *Dva grafa sta* ***disjunktna****, če nimata skupnega nobenega vozlišča in ju ne povezuje nobena povezava.*

Definicija. ***Pot*** *v grafu je zaporedje vozlišč med katerimi obstajajo povezave.*

Definicija. *Graf je* ***povezan****, če med poljubnima vozliščema v grafu obstaja pot.*

Definicija. ***Digraf*** *ali* ***usmerjen graf*** $G = (V(G), A(G))$ *je določen z množico vozlišč* $V(G)$ *in množico lokov* $A(G)$. ***Lok*** *je urejen par dveh vozlišč, kjer prvo predstavlja začetek, drugo pa konec loka oz. usmerjene povezave.*

Definicija. *s-**lok** je zaporedje $s+1$ vozlišč, za katera velja $v_{i-1} \neq v_{i+1}$ za $0 < i < s$.*

Opomba. *V s-loku je ponavljanje vozlišč sicer dovoljeno.*

Definicija. *Digraf je **močno povezan**, če med poljubnima vozliščema digrafa obstaja usmerjena pot.*

Definicija. ***Valenca** ali **stopnja** vozlišča je število povezav, ki gredo iz danega vozlišča.*

Definicija. ***Regularen graf** je graf, v katerem imajo vsa vozlišča enako valenco.*

Definicija. *Grafu rečemo, da je **kubičen**, če je regularen z valenco 3.*

Definicija. ***Izolirano vozlišče** je vozlišce z valenco 0.*

Definicija. ***Razdalja** med dvema vozliščema je število povezav na najkrajši poti med njima.*

Definicija. ***Premer grafa** je največja izmed razdalj med poljubnima vozliščema.*

Definicija. ***Ožina** grafa je dolžina najkrajšega cikla v grafu.*

Definirajmo nekaj družin grafov, ki jih bomo srečali.

Definicija. ***Cikel** C_n je povezan graf z valenco 2.*

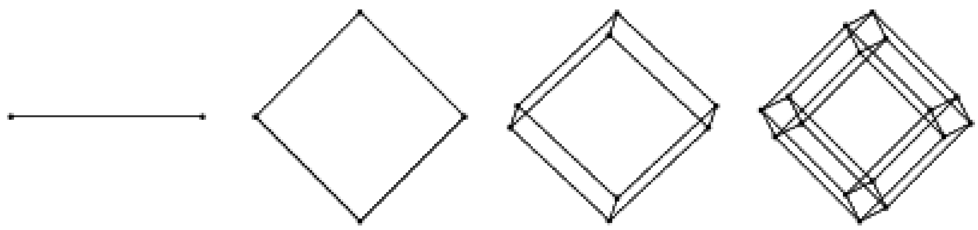
Definicija. ***Poln graf** K_n je graf na n vozliščih, ki so vsa povezana med sabo, torej je $(n-1)$-regularen.*

Definicija. *Graf je* ***dvodelen****, če lahko njegova vozlišča razdelimo v dve disjunktni množici, tako da so vozlišča v eni množici povezana samo z vozlišči iz druge množice in med vozlišči iste množice ni nobene povezave.*

Definicija. ***Poln dvodelen graf*** $K_{m,n}$ *je dvodelen graf, v katerem so vsa vozlišča iz ene množice povezana z vsemi vozlišči iz druge množice.*

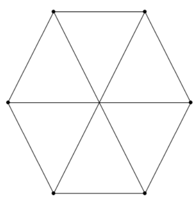
Definicija. ***Hiperkocka*** Q_k *je graf, pri katerem je množica vozlišč* $\{0,1\}^k$ *(množica vseh dvojiških k-teric), dve vozlišči pa sta povezani, če se razlikujeta natanko v eni koordinati.*

Primer. *Primeri hiperkock za* $k = 1, 2, 3, 4$.

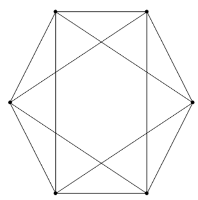


Definicija. ***Krožni graf*** $Cir(n, S)$ *ima za vozlišča ostanke pri deljenju z* n. S *je simetrična podmnožica množice* $\mathbb{Z}_n \backslash \{0\}$. *Vozlišči* u *in* v *pa sta sosedni, če je* $v - u \in S$.

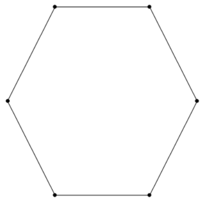
Primer. *Zgledi krožnih grafov.*



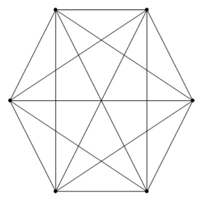
$Cir(6, \{1, -1, 3\})$



$Cir(6, \{1, -1, 2, -2\})$



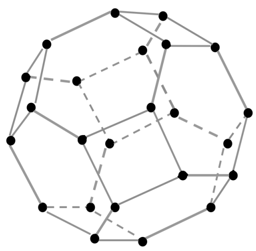
$Cir(6, \{1, -1\})$



$Cir(6, \{1, -1, 2, -2, 3\})$

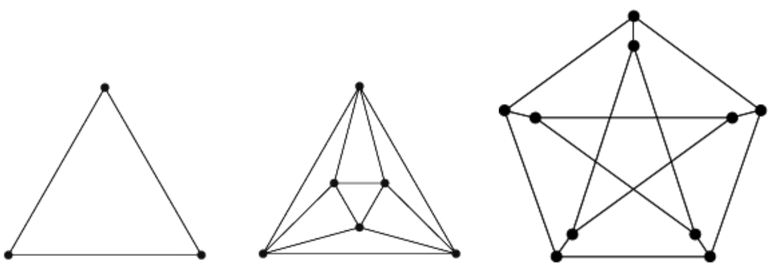
Definicija. *Naj bo H končna grupa in S poljubna simetrična podmnožica grupe H, ki ne vsebuje enote. Potem ima* ***Cayleyev graf*** *$Cay(H,S)$ vozlišča iz množice H in vozlišči g in h sta sosedni, če je $hg^{-1} \in S$.*

Primer. *Primer Cayleyevega grafa $Cay(S_4, \{(1,2),(2,3),(3,4)\})$.*



Definicija. *Naj bodo n, k in i pozitivna cela števila, za katera velja $n \geq k \geq i$ in naj bo Ω množica moči n.* ***Johnsonov graf*** *$J(n,k,i)$ ima za vozlišča podmnožice množice Ω moči k, ki so sosedne, če je njihov presek moči i. $J(n,k,i)$ ima torej $\binom{n}{k}$ vozlišč in je regularen z valenco $\binom{k}{i}\binom{n-k}{k-i}$.*

Primer. *Primeri Johnsonovih grafov:*



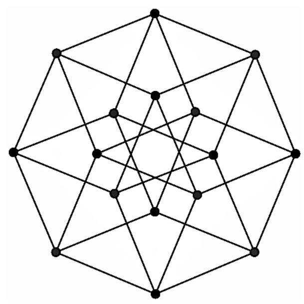
$J(3,1,0)$ $J(4,2,1)$ $J(5,2,0)$

2 Vozliščna tranzitivnost

Definicija. *Graf X je **vozliščno tranzitiven**, če $Aut(X)$ deluje tranzitivno na $V(X)$.*

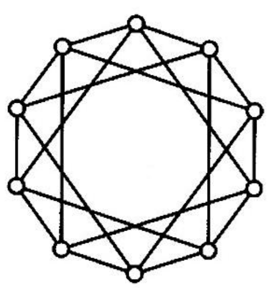
Trditev. *Hiperkocka Q_k je vozliščno tranzitivna.*

Dokaz. Fiksirajmo $v \in V(Q_k)$. Potem je preslikava $\rho_v : x \mapsto x + v$ permutacija vozlišč hiperkocke Q_k.
Vozlišči x in y se razlikujeta natanko v eni koordinati, če in samo če se vozlišči $x+v$ in $y+v$ razlikujeta v eni koordinati. Zato je preslikava ρ_v avtomorfizem grafa.
Permutacije delujejo tranzitivno na $V(Q_k)$, ker za poljubni vozlišči x in y preslikava ρ_{y-x} preslika x v y. ■



Hiperkocka Q_4

Tudi krožni grafi so vozliščno tranzitivni. Vsako vozlišče lahko preslikamo v katerokoli drugo vozlišče s primerno potenco ciklične permutacije, ki vozlišče preslika v naslednje vozlišče.



Krožni graf $Cir(10, \{-1, 1, -3, 3\})$

Trditev. *Cayleyevi grafi $X(H,S)$ so vozliščno tranzitivni.*

Dokaz. Za vsak $g \in H$ je preslikava $\rho_g : x \to xg$ permutacija elementov H.
Če sta xg in yg sosedna, velja $(yg)(xg)^{-1} = yggx^{-1} = yx^{-1}$, zato sta tudi x in y sosedna in je ρ_g avtomorfizem grafa.
Delovanje je tranzitivno, saj za poljubni vozlišči g in h $\rho_{g^{-1}h}$ preslika g v h.
■

Večina manjših vozliščno tranzitivnih grafov je Cayleyevih. Vseeno pa obstajajo tudi druge družine, ki so vozliščno tranzitivne in ne Cayleyeve.

Tak primer so Johnsonovi grafi $J(n,k,i)$.
Naj bo g permutacija množice Ω in $S \subseteq \Omega$. Definiramo $S^g := \{s^g; s \in S\}$.
Vsaka permutacija množice Ω torej določa permutacijo podmnožic množice Ω, ki so enake velikosti.
Če sta $S, T \subseteq \Omega$, velja $|S \cap T| = |S^g \cap T^g|$.
g je torej avtomorfizem grafa $J(n,k,i)$.

3 Povezavna tranzitivnost

Definicija. *Graf X je **povezavno tranzitiven**, če $Aut(X)$ deluje tranzitivno na $E(X)$.*

Hitro lahko opazimo, da so Johnsonovi grafi $J(n, k, i)$ povezavno tranzitivni, krožni grafi pa ne vedno.

Polni dvodelni grafi $K_{n,m}$ so povezavno tranzitivni, ne pa vozliščno tranzitivni, razen ko je $m = n$, ker noben avtomorfizem ne more preslikati vozlišča z valenco m v vozlišče z valenco n.

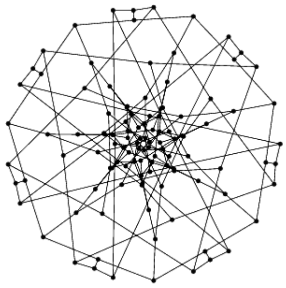
Pokazali bomo, da so vsi grafi, ki so povezavno tranzitivni in ne vozliščno tranzitivni, dvodelni.

Lema. *Naj bo X povezavno tranzitiven graf brez izoliranih vozlišč. Če X ni vozliščno tranzitiven ima $Aut(X)$ natanko dve orbiti in ti dve orbiti delita graf X na dva dela.*

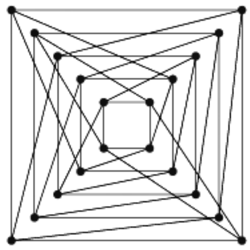
Dokaz. Naj bo X povezavno vendar ne vozliščno tranzitiven.
Predpostavimo, da je $x \sim y$. Če je $w \in V(X)$, potem gre iz w neka povezava in obstaja avtomorfizem grafa X, ki to povezavo preslika na xy. Vsako vozlišče grafa X je torej bodisi v orbiti vozlišča x bodisi v orbiti vozlišča y. $Aut(X)$ ima torej dve orbiti.
Povezave med vozliščema iz iste orbite noben avtomorfizem ne preslika v povezavo, ki bi se končala v vozlišču iz druge orbite, sicer bi morala biti vsa vozlišča v eni sami orbiti in bi bil graf vozliščno tranzitiven. Zato takih povezav med vozlišči iz iste orbite ni.
X je torej dvodelen in orbiti sta njegova delitev. ■

Povezavno tranzitivnim grafom, ki niso vozliščno tranzitivni rečemo tudi **semisimetrični grafi**.

Primer. *Primera semisimetričnih grafov.*



Ljubljanski graf



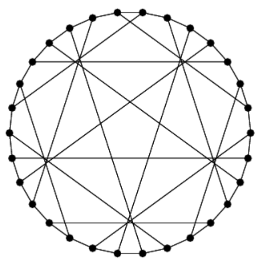
Folkmanov graf

4 Ločna tranzitivnost

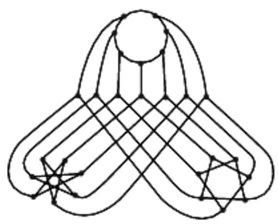
Definicija. *Graf X je ločno tranzitiven, če $Aut(X)$ deluje tranzitivno na množici lokov grafa X.*

Ločno tranzitivnim grafom rečemo tudi **simetrični grafi**.

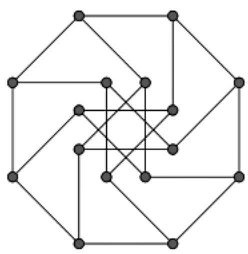
Primer. *Primeri simetričnih grafov.*



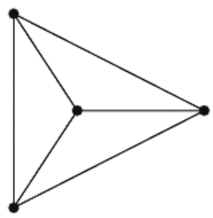
Levijev graf



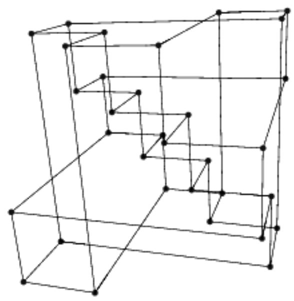
Coxetrov graf



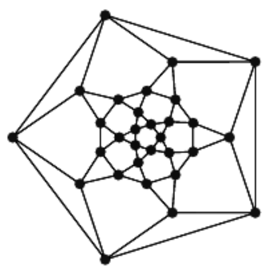
Möbius-Cantorjev graf



tetraeder



Dyckov graf



ikosidodekaeder

Če je graf ločno tranzitiven mora biti nujno tudi vozliščno in povezavno tranzitiven. Obratno pa v splošnem ne velja.

Lema. *Če je graf X vozliščno in povezavno tranzitiven ne pa ločno tranzitiven, potem je njegova valenca soda.*

Dokaz. Naj bo $G = Aut(X)$ in $x \in V(X)$. Naj bo $y \in V(X)$ soseden vozlišču x in Ω orbita delovanja G na $V \times V$, ki vsebuje (x, y).
Ker je X povezavno tranzitiven, lahko vsak lok z avtomorfizmom preslikamo bodisi v (x, y) bodisi v (y, x). Ker X ni ločno tranzitiven, $(y, x) \notin \Omega$, torej Ω ni simetrična.
Množica povezav grafa X je potem $\Omega \cup \Omega^\top$.
Povezav, ki se začnejo v x, je enako v Ω in v $\Omega^\top$, torej je valenca soda. ■

Posledica. *Vozliščno in povezavno tranzitiven graf z liho valenco mora biti ločno tranzitiven.*

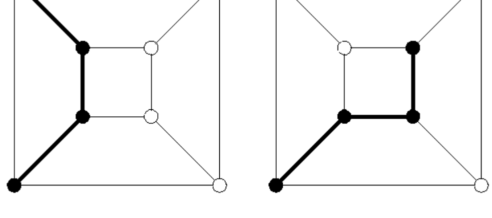
Definicija. *Graf X je s-ločno tranzitiven, če $Aut(X)$ deluje tranzitivno na njegovih s-lokih.*

Očitno je, da iz s-ločne tranzitivnosti sledi $(s-1)$-ločna tranzitivnost.

0-ločna tranzitivnost je pravzaprav vozliščna tranzitivnost, 1-ločna tranzitivnost pa ločna tranzitivnost.

Cikel C_n je s-ločno tranzitiven za vse s.

Hiperkocka Q_3 je 2-ločno tranzitivna, ne pa 3-ločno tranzitivna, ker 3-loka, ki leži na 4-ciklu, ne moremo z avtomorfizmom preslikati v 3-lok, ki ne leži na 4-ciklu (glej sliko).



Graf X je s-ločno tranzitiven, če ima tranzitivno grupo avtomorfizmov G in če stabilizator G_u nekega vozlišča $u \in V(X)$ deluje tranzitivno na s-lokih, ki se začnejo v vozlišču u.

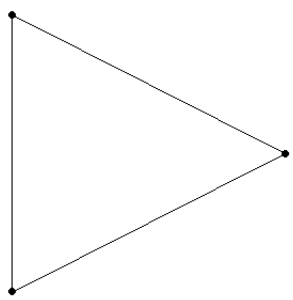
Trditev. *Johnsonovi grafi $J(n, k, i)$ so vsaj ločno tranzitivni.*

Dokaz. Poglejmo si vozlišče $\{1, 2, ..., k\}$. Stabilizator tega vozlišča vsebuje $Sym(k) \times Sym(n-k)$. Ta pa poljubni vozlišči, ki sta danemu sosedni, preslika eno v drugo. ■

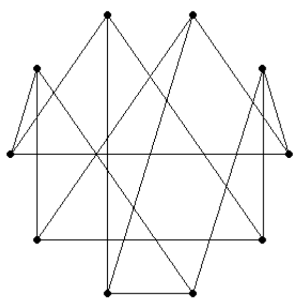
Trditev. *Johnsonovi grafi $J(2k+1, k, 0)$ so vsaj 2-ločno tranzitivni.*

Dokaz. Ponovno začnemo v vozlišču $\{1, 2, ..., k\}$ in njegov stabilizator vsebuje $Sym(k) \times Sym(k+1)$. Vozlišče, ki je danemu sosedno, vsebuje k elementov iz $\{k+1, ..., 2k+1\}$. Ta vozlišča se med seboj ujemajo v $k-1$ elementih, torej jih $Sym(k) \times Sym(k+1)$ lahko preslika enega v drugega. Naslednje vozlišče v 2-loku mora biti različno od prvotnega in se ne sme v nobenem elementu ujemati s prejšnjim. Zato mora nujno vsebovati tisti element, ki ni bil uporabljen za prejšnje vozlišče in še $k-1$ iz $\{1, ..., k\}$. Poljubni dve taki vozlišči se ujemata vsaj v $k-2$ elementih, torej ju stabilizator preslika eno v drugo. ■

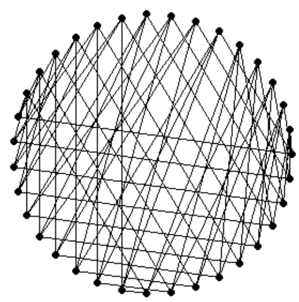
Primer. *Nekaj Johnsonovih grafov, ki so vsaj 2-ločno tranzitivni.*



$J(3, 1, 0)$



$J(5, 2, 0)$



$J(7, 3, 0)$

Trditev. ***(Tutte)*** *Če je X s-ločno tranzitiven graf, z valenco vsaj 3 in ožino g, potem je $g \geq 2s-2$.*

Dokaz. Predpostavimo lahko, da je $s \geq 3$. Očitno je, da X vsebuje cikel dolžine g in pot dolžine g, katere končni vozlišči nista sosedni. X torej vsebuje g-lok s sosednimi končnimi vozlišči in g-lok z nesosednimi končnimi vozlišči. Avtomorfizem, ki bi ta dva loka preslikal enega v drugega, ne obstaja, zato mora biti $s < g$.
Ker X vsebuje cikle dolžine g in ker ti vsebujejo s-loke, morajo vsi s-loki ležati v ciklih dolžine g. Naj bo $v_0, ..., v_s$ s-lok, označimo ga z α. Ker ima vozlišče v_{s-1} valenco najmanj 3, je poleg v_{s-2} in v_s soseden tudi nekemu vozlišču w. Ker je ožina grafa vsaj s, w ne leži na loku α. Tako lahko v_s zamenjamo z w in dobimo nov s-lok β, ki se z lokom α ujema v $(s-1)$-loku. β mora ležati v ciklu dolžine g, torej imamo dva cikla dolžine g, ki imata skupnih vsaj $s-1$ povezav.
Če teh $s-1$ povezav odstranimo iz grafa, ki je sestavljen iz prej omenjenih dveh ciklov dolžine g, dobimo graf s ciklom dolžine največ $2g-2s+2$. Sledi $2g-2s+2 \geq g$. ■

Vprašamo se lahko, kakšni so s-ločno tranzitivni grafi z ožino $2s-2$.

Trditev. *Če je X s-ločno tranzitiven graf z ožino $2s-2$, potem je dvodelen in ima premer $s-1$.*

Dokaz. Če ima X ožino $2s-2$, potem katerikoli s-lok leži v največ enem ciklu dolžine $2s-2$. Torej, če je X s-ločno tranzitiven, mora vsak s-lok ležati v natanko enem ciklu dolžine $2s-2$.
Očitno je, da ima X premer vsaj $s-1$, ker sta v ciklu dolžine $2s-2$ dve poljubni vozlišči oddaljeni največ za $s-1$. Naj bo $u \in V(X)$ in predpostavimo, da je $v \in V(X)$ od u oddaljen za s. Potem obstaja s-lok, ki povezuje u in v in leži v ciklu dolžine $2s-2$. Ker ima tak cikel premer $s-1$, v ne more biti na razdalji s od u. Premer grafa X je torej natanko $s-1$.
Če X ni dvodelen, mora vsebovati lih cikel. Naj bo C najmanjši lih cikel v X. Ker je premer grafa X enak $s-1$, mora biti cikel C dolg $2s-1$. Naj bo $u \in V(C)$ in naj bosta $v, v' \in V(C)$ dve sosedni vozlišči na razdalji $s-1$ od u. Potem lahko sestavimo s-lok $(u, ..., v, v')$. Ta s-lok leži v nekem ciklu C' dolžine $2s-2$. Vozlišča iz ciklov C in C', ki niso na s-loku, sestavljajo cikel dolžine manj kot $2s-2$, kar je protislovje. ■

5 Kubični ločno tranzitivni grafi

Definicija. *Če je* $s \geq 1$ *in* $\alpha = (x_0, ..., x_s)$ *nek* s*-lok v* X*, je* ***glava*** *head*(α) $(s-1)$*-lok* $(x_1, ..., x_s)$ *in* ***rep*** *tail*(α) $(s-1)$*-lok* $(x_0, ..., x_{s-1})$.

Definicija. *Če sta* α *in* β s*-loka, rečemo, da* β ***sledi*** α*, če obstaja tak* $(s+1)$*-lok* γ*, da je head*$(\gamma) = \beta$ *in tail*$(\gamma) = \alpha$.

Definicija. *Naj bo* s *nenegativno celo število. Z* $X^{(s)}$ *označimo digraf, v katerem so vozlišča* s*-loki grafa* X *in* (α, β) *je lok natanko tedaj, ko* β *sledi* α.

Avtomorfizme grafa X lahko naravno razširimo na avtomorfizme grafa $X^{(s)}$. Torej, če je X s-ločno tranzitiven, je $X^{(s)}$ vozliščno tranzitiven.

Trditev. *Naj bosta* X *in* Y *digrafa in naj bo* f *homomorfizem, ki* X *preslika v* Y *tako, da je vsaka povezava v* Y *slika neke povezave v*X.
Naj bo $y_0, ..., y_r$ *pot v grafu* Y*. Potem za vsako vozlišče* $x_0 \in V(X)$*, za katero velja* $f(x_0) = y_0$*, obstaja pot* $x_0, ..., x_r$ *in velja* $f(x_i) = y_i$.

Dokaz. Homomorfizem grafa ohranja sosednost, torej iz pogoja $f(x_0) = y_0$ sledi, da f preslika x_1 v povezavo y_1, ki je y_0 sosedna. In tako naprej do x_r, ki ga f preslika v nek y_r, ki je soseden y_{r-1}. Tako dobimo za pot $x_0, ..., x_r$ zaporedje povezav $y_0, ..., y_r$ in velja $f(x_i) = y_i$. Hkrati pa te povezave tvorijo pot, ker je vsaka sosedna prejšnji. ■

Definicija. *Definirajmo* ***vreteno*** *v grafu* X *kot podgraf, ki vsebuje dve dani vozlišči in tri poti, ki ju povezujejo in se ne ujemajo nikjer drugje kot v teh dveh vozliščih.*

Definicija. *Definirajmo* ***kolo*** *v grafu* X *kot podgraf, ki je sestavljen bodisi iz dveh ciklov s samo enim skupnim vozliščem ali pa iz dveh disjunktnih ciklov, ki sta povezana s potjo, ki se z njima ujema samo v končnih vozliščih.*

Trditev. *Če je X vreteno ali kolo, potem je $X^{(1)}$ močno povezan.*

Dokaz. $X^{(1)}$ je pravzaprav usmerjeni povezavni graf. Ker je X povezan graf, je tudi njegov povezavni graf povezan in posledično tudi $X^{(1)}$ močno povezan. ∎

Trditev. *Če je X povezan graf z minimalno valenco 2, ki ni cikel, potem je $X^{(s)}$ močno povezan za vse $s \geq 0$.*

Dokaz. Trditev bomo dokazali s pomočjo indukcije.
Če je $s = 0$, potem dobimo $X^{(0)}$ tako, da vsako povezavo zamenjamo z dvema nasprotno usmerjenima lokoma in trditev res drži.
Če je $s = 1$, potem moramo pokazati, da vsakemu loku sledi nek drugi lok. Ker je X povezan graf, vsakemu loku sledi neka povezava grafa X, vendar ne nujno v pravi smeri. Pokazati moramo torej, da lahko vsak lok obrnemo, tj. da yx sledi xy.
X ima minimalno valenco vsaj 2 in je končen, zato vsebuje nek cikel C. Če C ne vsebuje obeh x in y, obstaja (lahko tudi prazna) pot v X, ki povezuje y s C. xy sledijo povezave na tej poti, v C in nazaj po poti do yx.
Če sta $x, y \in V(C)$, ampak $xy \notin E(C)$, potem je C skupaj s povezavo xy vreteno in trditev velja po prejšnji trditvi.
Zdaj predpostavimo, da je $xy \in E(C)$. Ker X ni cikel, obstaja vozlišče $w \in V(C)$, ki je sosedno nekemu vozlišču $z \notin V(C)$. Naj bo P pot z maksimalno dolžino v X, ki se začne z w in z. Potem je zadnje vozlišce na poti sosedno bodisi nekemu vozlišču v P bodisi nekemu vozlišču v C. Če je sosedno nekemu vozlišču iz C, ki ni w, potem je xy povezava v vretenu. Če pa je sosedno vozlišču w ali nekemu vozlišču iz P, ki ni v C, potem je xy povezava v kolesu in trditev velja po prejšnji trditvi.
Zdaj pa predpostavimo, da je $X^{(s)}$ močno povezan za nek $s \geq 1$. Če vzamemo glavo nekega $(s+1)$-loka, je to pravzaprav homomorfizem $X^{(s+1)}$ na $X^{(s)}$. Ker ima X minimalno valenco vsaj 2, je vsak s-lok glava nekega $(s+1)$-loka, torej je vsaka povezava v $X^{(s)}$ slika neke povezave v $X^{(s+1)}$. Naj bosta α in β poljubna $(s+1)$-loka v X. Ker je $X^{(s)}$ močno povezan, obstaja pot v njem, ki povezuje $head(\alpha)$ in $tail(\beta)$. Po prejšnji trditvi, ta pot postane v $X^{(s+1)}$ pot od α do nekega vozlišča γ, kjer je $head(\gamma) = tail(\beta)$. γ torej sledi β in α sledi β prek γ, kar pomeni, da obstaja pot od α do β v $X^{(s+1)}$. ∎

Lema. *Naj bo G permutacijska grupa na množici V in naj bo $x \in V$. Če je $g \in G$, potem velja $g^{-1}G_xg = G_{x^g}$.*

Dokaz. Predpostavimo, da je $x^g = y$. Naj bo $h \in G_x$. Potem velja $y^{g^{-1}hg} = x^{hg} = x^g = y$, kar pomeni, da vsak element iz $g^{-1}G_xg$ fiksira y. Od tod sledi $g^{-1}hg \in G_y$. Po drugi strani, če je $h \in G_y$, potem ghg^{-1} fiksira x in velja $g^{-1}G_xg = G_y$. ∎

Lema. *Naj bo X močno povezan digraf, naj bo G tranzitivna podgrupa $Aut(X)$ in če je $u \in V(X)$, naj bo $N(u)$ množica tistih vozlišč $v \in V(X)$, za katere je (u, v) lok v grafu X. Če obstaja tako vozlišče $u \in V(X)$, da je $G_u|N(u)$ trivialna, potem je G regularna.*

Dokaz. Naj bo $u \in V(X)$ in $G_u|N(u)$ trivialna. Po lemi: če je $v \in V(X)$, potem sta G_v in G_u konjugiranki v G, kar pomeni, da je $G_v|N(v)$ trivialna za vse $v \in V(X)$.
Predpostavimo, da G_u ni trivialna. X je močno povezan, torej lahko izberemo usmerjeno pot, ki gre od u do nekega vozlišča w, ki ga G_u ne fiksira. Naj bo ta pot najkrajša in naj bo v predzadnje vozlišče na njej. G_u torej fiksira v in (v, w) je lok v X. Ker G_u fiksira vsa vozlišča v $N(u)$, $v \neq u$.
G_u fiksira v, ne pa w, zato fiksira $N(u)$ ampak na njej ne deluje trivialno. $G_v|N(v)$ torej ni trivialna. To je protislovje in velja $G_u = \langle e \rangle$. ∎

Definicija. *Graf je s-**ločno regularen**, če za poljubna s-loka obstaja natančno določen avtomorfizem, ki enega preslika v drugega.*

Lema. *Naj bo X povezan kubičen graf, ki je s-ločno tranzitiven, ampak ne $(s+1)$-ločno tranzitiven. Potem je X s-ločno regularen.*

Dokaz. Ker je X kubičen graf, je število lokov, ki gredo iz posameznega vozlišča v $X^{(s)}$, 2.
Naj bo $G = Aut(X)$, α s-lok v X in $H \leq G$, ki fiksira vsa vozlišča v α. Potem G deluje vozliščno tranzitivno na $X^{(s)}$ in H je stabilizator vozlišča $\alpha \in V(X)$ v G. Če je zožitev H na soseda, ki sledita α, netrivialna, potem mora H zamenjati ta dva soseda.
Poljubna $(s+1)$-loka v X lahko z elementi iz G preslikamo na $(s+1)$-loke,

ki se začnejo s s-lokom α. G je torej tranzitivna na $(s+1)$-lokih grafa X, kar je protislovje.
Zožitev H na soseda, ki sledita α, je torej trivialna in iz prejšnje leme sledi, da je tudi $H = G_\alpha = \langle e \rangle$, torej G deluje regularno na s-lokih grafa X. ■

Če je X regularen graf z valenco k na n vozliščih in je $s \geq 1$, potem ima natanko $nk(k-1)^{s-1}$ s-lokov.

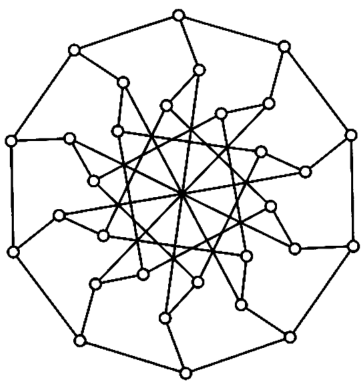
Če je X s-ločno tranzitiven, mora $nk(k-1)^{s-1}$ deliti $|Aut(X)|$ in če je X s-ločno regularen, mora veljati $|Aut(X)| = nk(k-1)^{s-1}$.

Poseben primer so kubični ločno tranzitivni grafi, ki so s-ločno regularni natanko tedaj, ko je $|Aut(X)| = (3n) \cdot 2^{s-1}$.

Primer. *Kocka je 2-ločno tranzitivna, ne pa 3-ločno tranzitivna, torej je 2-ločno regularna. Potem velja* $|Aut(Q_3)| = 3 \cdot 8 \cdot 2^{2-1} = 48$.

Izrek. *(Tutte) Če je X s-ločno regularen kubičen graf, potem je $s \leq 5$.*

Primer. *Najmanjši 5-ločno regularen kubični graf je Tuttova 8-kletka na 30 vozliščih (včasih se imenuje tudi Levijev graf).*



Posledica. *Če je X ločno tranzitiven kubičen graf, $v \in V(X)$ in $G = Aut(X)$, potem $|G_v|$ deli 48 in 3 deli $|G_v|$.*

6 Razdaljno tranzitivni grafi

Definicija. *Povezan graf X je* ***razdaljno tranzitiven****, če za poljubna urejena para vozlišč (u, u') in (v, v'), za katera velja $d(u, u') = d(v, v')$, obstaja avtomorfizem $g \in Aut(X)$, tako da je $(v, v') = (u, u')^g$.*

Razdaljno tranzitiven graf je vedno vsaj 1-ločno tranzitiven.

Najpreprostejši primeri razdaljno tranzitivnih grafov so polni grafi, dvodelni polni grafi z enako velikima particijama in cikli.

Trditev. *Johnsonov graf $J(n, k, k-1)$ je razdaljno tranzitiven.*

Dokaz. Najprej bomo s pomočjo indukcije dokazali, da za poljubni vozlišči $u, v \in V(J(n, k, k-1))$ velja $d(u, v) = m \;\Leftrightarrow\; |u \cap v| = k - m$.
Za $m = 1$: $d(u, v) = 1 \;\Rightarrow\; u \sim v \;\Rightarrow\; |u \cap v| = k - 1$.
Predpostavimo, da trditev velja za vse $m \leq r$. Izberimo vozlišča u, v, w tako, da je $d(u, v) = r$ in $d(v, w) = 1$. Po indukcijski predpostavki velja $|u \cap v| = k - r$, torej je $u = \{s_1, ..., s_{k-r}, i_1, ..., i_r\}$ in $v = \{s_1, ..., s_{k-r}, j_1, ..., j_r,$ kjer so vsi elementi i in j med seboj različni.
Ker velja $|v \cap w| = k - 1$, mora biti w oblike:

- $w = \{s_1, ..., s_{k-r}, j_1, ..., j_{r-1}, i_\alpha\}$, za nek $i_\alpha \in \{i_q, ...i_r\}$,
- $w = \{s_1, ..., s_{k-r}, j_1, ..., j_{r-1}, a\}$, kjer je $a \in \Omega \backslash (u \cup v)$,
- $w = \{s_1, ..., s_{k-r-1}, i_\alpha, j_1, ..., j_r\}$ ali
- $w = \{s_1, ..., s_{k-r-1}, a, j_1, ..., j_r\}$

V prvem primeru je $|u \cap w| = k - (r - 1)$, torej je $d(u, w) = r - 1$. V drugem in tretjem primeru je $|u \cap w| = k - r$ in spet po indukcijski predpostavki sledi $d(u, w) = r$. V zadnjem primeru pa je $|u \cap w| = k - (r + 1)$.
Vemo, da obstaja pot dolžime $r + 1$ med u in w, ker obstaja pot dolžine r med u in v in ker sta v in w sosedna. Vemo tudi, da ne obstaja nobena krajša pot, ker bi po indukcijski predpostavki veljalo $|u \cap w| \geq k - r$, kar je v protislovju z $|u \cap w| = k - (r + 1)$. Najkrajša pot med u in w je torej dolžine $r + 1$, kar pomeni, da je $d(u, w) = r + 1$.

Povedali smo že, da poljuben avtomorfizem g Johnsonovega grafa ohranja velikost preseka dveh vozlišč, torej velja $d(u,v) = m \ \Leftrightarrow \ |u \cap v| = k - m \ \Leftrightarrow \ |u^g \cap v^g| = k - m \ \Leftrightarrow \ d(u^g, v^g) = m.$ ■

Lema. *Naj bosta u, v vozlišči Johnsonovega grafa $J(2k-1, k-1, 0)$. Za $m \geq 0$ in $2m < k - 1$ velja*

$$d(u,v) = \begin{cases} 2m & \Leftrightarrow \ |u \cap v| = (k-1) - m \\ 2m+1 & \Leftrightarrow \ |u \cap v| = m \end{cases}$$

Dokaz. Najprej bomo lemo dokazali za sodo razdaljo.
$m = 0$: $d(u,v) = 0 \ \Leftrightarrow \ u = v \ \Leftrightarrow \ |u \cap v| = |u| = k - 1 = (k-1) - 0.$
Naj zdaj trditev velja za $m \leq r$. Izberimo vozlišče w, tako da je $d(u,w) = 2(r+1)$ in $d(v,w) = 2$. (V primeru, da je $r = 1$, naj velja tudi $u \neq w$.) Po indukcijski predpostavki velja $|u \cap v| = (k-1) - r$. Poleg tega obstaja vozlišče x, tako da je $d(v,x) = d(x,w) = 1$ in $|v \cap x| = |x \cap w| = 0$. Torej imamo $v \subset \Omega \backslash x$ in $w \subset \Omega \backslash x$. Ker je $|v| = |w| = k-1$ in $|\Omega \backslash x| = (2k-1) - (k-1) = k$, mora veljati $|v \cap w| = (k-1) - 1$.
Vemo, da je $|u \cap v| = (k-1) - r$ in $|v \cap w| = (k-1) - 1$. Zato se w od v razlikuje samo v enem elementu. Predpostavimo, da je $|u \cap v| = s$, $u = \{x_1, ..., x_s, u_{s+1}, ..., u_{k-1}\}$ in $v = \{x_1, ..., x_s, v_{s+1}, ..., v_{k-1}\}$. Potem imamo štiri možnosti:

- $w = \{x_1, ..., x_s, v_{s+1}, ..., v_{k-2}, u_j\}$, za nek j, in
  $|u \cap w| = |u \cap v| + 1$.
- $w = \{x_1, ..., x_s, v_{s+1}, ..., v_{k-2}, \alpha\}$, za nek $\alpha \in \Omega \backslash (u \cup v)$, in
  $|u \cap w| = |u \cap v|$.
- $w = \{x_1, ..., x_{s-1}, u_j, v_{s+1}, ..., v_{k-1}\}$, za nek j, in
  $|u \cap w| = |u \cap v| - 1 + 1 = |u \cap v|$.
- $w = \{x_1, ..., x_{s-1}, \alpha, v_{s+1}, ..., v_{k-1}\}$, za nek $\alpha \in \Omega \backslash (u \cup v)$, in
  $|u \cap w| = |u \cap v| - 1$.

V prvem primeru je $|u \cap w| = (k-1) - r + 1 = (k-1) - (r-1)$ in po indukcijski predpostavki je $d(u,w) = 2(r-1)$, kar je v protislovju z $d(u,w) = 2(r+1)$. Podobno je v drugem in tretjem primeru $|u \cap w| = (k-1) - r$ in $d(u,w) = 2r$, kar je spet protislovje. V zadnjem primeru pa je $|u \cap w| = (k-1) - r - 1 = (k-1) - (r+1)$.
Zdaj bomo lemo dokazali še za liho razdaljo med vozlišči.
$m = 0$: $d(u,v) = 1 \ \Rightarrow \ |u \cap v| = 0.$

Predpostavimo, da trditev velja za $m \leq r$, torej $d(u,v) = 2r+1 \Leftrightarrow |u \cap v| = r$. Izberimo vozlišče w, tako da je $d(u,w) = 2(r+1)+1$ in $d(v,w) = 2$. Kot v prvem delu dokaza je $|v \cap w| = (k-1)-1$ in po indukcijski prepostavki je $|u \cap v| = r$. Preveriti moramo enake štiri primere kot v prvem delu.
V zadnjem primeru je $|u \cap w| = |u \cap v| - 1 = r - 1$ in po indukcijski predpostavki $d(u,w) = 2(r-1)+1$, kar je v protislovju z $d(u,w) = 2(r+1)+1$. V drugem in tretjem primeru je $|u \cap w| = r$ in $d(u,w) = 2r$, kar je spet protislovje. V prvem primeru pa je $|u \cap w| = r+1$. ■

Trditev. *Johnsonov graf $J(2k-1, k-1, 0)$ je razdaljno tranzitiven.*

Dokaz. Podobno kot pri prejšnji trditvi tudi ta sledi iz leme. ■

Razdaljno tranzitivne grafe pa lahko predstavimo tudi na bolj prijazen način.
Če je $u \in V(X)$, potem naj bo $X_i(u)$ množica vseh vozlišč, ki so od vozlišča u oddaljena za i. Particijo $\{u, X_1(u), ...X_d(u)\}$ imenujemo **razdaljna particija** glede na u.

Naj G deluje razdaljno tranzitivno na X in naj bo $u \in V(X)$. Če sta v in v' dve vozlišči na razdalji i od u, potem eden izmed elementov G preslika (u,v) na (u,v'), kar pomeni da obstaja element G_u, ki preslika v na v', torej G deluje tranzitivno na $X_i(u)$. $X_i(u)$ so pravzaprav orbite delovanja G_u.

Če ima X premer d, potem G deluje razdaljno tranzitivno na X natanko tedaj, ko deluje tranzitivno in ima za vsak u G_u natanko $d+1$ orbit.

Vsako vozlišče v $X_i(u)$ je sosedno enakemu številu vozlišč, recimo a_i, v $X_i(u)$. Podobno sta tudi število sosedov v $X_{i+1}(u)$, recimo b_i, in število sosedov v $X_{i-1}(u)$, recimo c_i, vedno enaka. Številom a_i, b_i in c_i rečemo **presečna števila**.

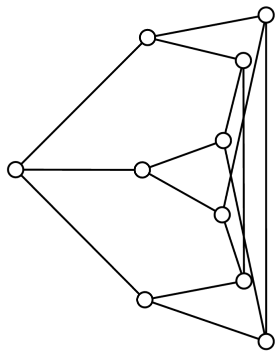
Graf X je regularen in njegova valenca je kar b_0. Če je premer grafa d, je $c_i + a_i + b_i = b_0$ za $i = 0, 1, ..., d$. Ta števila običajno zapišemo v **presečno tabelo**:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} - & c_1 & \dots & c_{d-1} & c_d \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{d-1} & a_d \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{d-1} & - \end{array} \right\}$$

ali krajše:

$$\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, c_2, \ldots, c_d\}\,.$$

Primer. *Petersenov graf, narisan tako, da je razdaljna particija očitna.*



Njegova presečna tabela:

$$\left\{\begin{array}{ccc} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & \end{array}\right\}$$

Trditev. *Povezan s-ločno tranzitiven graf z ožino $2s-2$ je razdaljno tranzitiven s premerom $s-1$.*

Dokaz. Naj bo X kot v predpostavki trditve in naj bosta (u, u') in (v, v') para vozlišč na razdalji i. Ker ima X premer $s-1$ po zadnji trditvi iz četrtega poglavja, je $i \leq s-1$. Para vozlišč sta torej povezana s potema dolžine i in zaradi i-ločne tranzitivnosti grafa X obstaja avtomorfizem, ki preslika (u, u') v (v, v'). ■

Če je presečna tabela enaka za vsa vozlišča v grafu, rečemo, da je X **razdaljno regularen**.

Vsi razdaljno tranzitivni grafi so tudi razdaljno regularni, obratno pa ni vedno res.

7 Literatura

[1] Godsil C., Royle G., *Algebraic Graph Theory*, Springer, 2001

[2] Bayley R. F., *Distance-transitive graphs*, 2002