

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE KOPER

Klavdija Kutnar

STRUKTURNE LASTNOSTI
SIMETRIČNIH GRAFOV

Doktorska disertacija

Marec, 2008

Mentor: prof. dr. Dragan Marušič

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE KOPER

Klavdija Kutnar

STRUKTURNE LASTNOSTI
SIMETRIČNIH GRAFOV

Doktorska disertacija

Marec, 2008

Mentor: prof. dr. Dragan Marušič

Hvala prof. dr. Draganu Marušiču!

Izvleček

STRUKTURNE LASTNOSTI SIMETRIČNIH GRAFOV

Disertacija obravnava tri med seboj povezane teme s področja teorije grafov. Prva od treh tem so kubični simetrični grafi. Graf je simetričen, če njegova grupa avtomorfizmov deluje tranzitivno na množici lokov grafa. Motivacijo za študij teh grafov najdemo pri najrazličnejših matematičnih problemih, med drugim tudi pri problemu hamiltonskosti, ki ga disertacija obravnava v drugi temi. Podana je popolna klasifikacija kubičnih simetričnih grafov ožine (z dolžino najkrajšega cikla) 6 ter lokalne strukturne lastnosti kubičnih simetričnih grafov, katerih grupa avtomorfizmov premore podgrupo G , ki deluje regularno na množici lokov grafa, v okolici izbranega G -konsistentnega usmerjenega cikla (usmerjeni cikel je G -konsistenten, če obstaja avtomorfizem v G , ki na njem deluje kot rotacija za ena naprej).

Druga v disertaciji obravnavana tema je problem obstoja hamiltonskih ciklov (ciklov, ki gredo skozi vse točke grafa) v točkovno tranzitivnih grafih. Dokazano je, da $(2, s, 3)$ -Cayleyjevi grafi, v primeru, ko je število s deljivo s 4, imajo hamiltonski cikel ($(2, s, 3)$ -Cayleyjev graf je kubični Cayleyjev graf $\text{Cay}(G, S)$ grupe $G = \langle a, x \mid a^2 = x^s = (ax)^3 = 1, \dots \rangle$ glede na množico generatorjev $S = \{a, x, x^{-1}\}$.) Poleg tega je dokazan obstoj hamiltonskih ciklov v povezanih točkovno tranzitivnih grafih reda $4p$, kjer je p praštevilo, z izjemo Coxeterjevega grafa.

Zadnja tema, ki leži na presečišču med matematiko in kemijo, so fulereni. Matematično je fuleren kubični 3-povezavno povezan ravninski graf (kemijsko, ogljikova molekula sferične oblike s trivalentnim poliedrskim skeletom) s petkotnimi in šestkotnimi lici. Podmnožica T množice povezav grafa X moči k je ciklični- k -prerez, če je $X - T$ nepovezan graf in vsaj dve njegovi komponenti vsebujeta cikel. Ciklični- k -prerez T je trivialen, če vsaj ena izmed komponent v $X - T$ inducira cikel dolžine k . Narejena je popolna klasifikacija fulerenov, ki premorejo netrivialen ciklični-5-prerez. Poleg tega je dokazano, da fulereni te posebne družine fulerenov premorejo hamiltonski cikel.

Math. Subj. Class (2000): 05C10, 05C25, 05C40, 05C45, 20B25, 20F05.

Ključne besede: kubični graf, simetrični graf, točkovno tranzitiven graf, Cayleyjev graf, fuleren, ožina grafa, konsistentni cikel, hamiltonski cikel, ciklična-povezavna povezanost, ciklična stabilnost, 1-regularno delovanje, regularni krov grafa, Cayleyjev zemljevid, grupa avtomorfizmov.

Abstract

ON SYMMETRIC GRAPHS

In this PhD Thesis three related topics from graph theory are considered. The first one considers cubic symmetric graphs. A graph is symmetric if its automorphism group acts transitively on the set of its arcs. The motivation for this study may be found in various mathematical problems; for example in the hamiltonicity problem of vertex-transitive graphs, considered as the second topic of this PhD Thesis. A complete classification of cubic symmetric graphs of girth (the length of shortest cycle) equal to 6 and a detail information on local structures with respect to G -consistent oriented cycles of cubic symmetric graphs whose automorphism groups admit a subgroup G acting regularly on the set of arcs are given. (An oriented cycle is G -consistent if there exists an automorphism in G acting on the cycle as a 1-step rotation.)

The second topic of this PhD Thesis is the problem of the existence of a Hamiltonian cycle, that is, cycle going through all vertices of the graph, in vertex-transitive graphs. The existence of Hamiltonian cycles in $(2, s, 3)$ -Cayley graphs is proved here when apart from $|G|$ also s is congruent to 0 modulo 4. ($(2, s, 3)$ -Cayley graph is a cubic Cayley graph $\text{Cay}(G, S)$ of the group $G = \langle a, x \mid a^2 = x^s = (ax)^3 = 1, \dots \rangle$ with respect to the generating set $S = \{a, x, x^{-1}\}$.) Beside this it is shown that with the exception of the Coxeter graph every connected vertex-transitive of order $4p$, p a prime, has a Hamiltonian cycle.

The last topic, which lies between mathematics and chemistry, are fullerene graphs (in short fullerenes). Fullerenes are sphere-shaped molecules with trivalent polyhedral skeletons, having pentagonal faces and all other hexagonal faces. From a mathematical point of view, fullerenes correspond to cubic and 3-edge-connected planar graphs which have 12 pentagonal faces and the remaining faces are hexagonal. Given a connected graph X a subset $T \subseteq E(X)$ of edges of X of size k is said to be cycle- k -separating if $X - T$ is disconnected and at least two of its components contain cycles. A cycle- k -separating subset T is said to be trivial if at least one of the components of $X - T$ induced a single cycle of length k . A complete classification of fullerenes admitting a nontrivial cycle-5-separating subset is given. Moreover, it is shown that these fullerenes have Hamiltonian cycles.

Math. Subj. Class (2000): 05C10, 05C25, 05C40, 05C45, 20B25, 20F05.

Key words: cubic graph, symmetric graph, vertex-transitive graph, Cayley graph, fullerene, girth, consistent cycle, Hamiltonian cycle, cyclic-edge connectivity, cyclic stability, 1-regular action, regular cover of a graph, Cayley map, automorphism group.

Kazalo

Kazalo slik	vi
Kazalo tabel	viii
1 Uvod	1
2 Osnovna znanja	3
2.1 Grupe	3
2.1.1 Delovanje grup	3
2.1.2 Posplošene diedrske grupe	5
2.2 Grafi	5
2.2.1 Delovanje grup na grafih	6
2.2.2 Orbitalni (di)grafi	6
2.2.3 Cayleyjevi grafi in normalni Cayleyjevi grafi	7
2.2.4 Zemljevidi in Cayleyjevi zemljevidi	7
2.2.5 Posplošeni Petersenovi grafi	9
2.2.6 Konsistentni cikli	10
2.2.7 Semiregularni avtomorfizmi in $I_k^n(t)$ -poti	11
2.2.8 Ciklična stabilnost in ciklična povezavna povezanost	12
2.2.9 Krovi grafov	13
3 Kubični simetrični grafi	17
3.1 Klasifikacija kubičnih simetričnih grafov ožine 6	18
3.1.1 Izjeme	19
3.1.2 Kubični 2-regularni grafi ožine 6	25
3.1.3 Kubični 1-regularni grafi ožine 6	35
3.1.4 Opombe in sklepi	43
3.2 Kubični simetrični grafi z 1-regularno podgrupo	43
4 Hamiltonski cikli v točkovno tranzitivnih grafih	59
4.1 Hamiltonski cikli v $(2, s, 3)$ -Cayleyjevih grafih	60
4.1.1 Ilustracija metode	61
4.1.2 Modificirani graf šestkotnikov	63
4.1.3 Dokaz obstoja hamiltonskih ciklov	70
4.1.4 Opombe in sklepi	71
4.2 Hamiltonski cikli v točkovno tranzitivnih grafih reda $4p$	71

4.2.1	Analiza glede na delovanje grupe avtomorfizmov $\text{Aut}X$. . .	74
4.2.2	Analiza glede na kvocientni graf X_γ	83
4.2.3	Opombe in sklepi	85
5	Fulereni	87
5.1	Ciklična povezavna povezanost fulerenov	88
5.1.1	Fulereni z netrivialnim cikličnim-5-prerezom	89
5.1.2	Hamiltonski cikli v fulerenih z netrivialnim cikličnim - 5 - pre- rezom	93
5.2	Opombe in sklepi	96
6	Sklep	99
	Literatura	100
	Stvarno kazalo	109

Slike

2.1	Nekonsistenten 6-cikel v kocki $GP(4, 1)$	10
2.2	Dodekaeder $GP(10, 2)$ podan v Fruchtovi notaciji glede na $(4, 5)$ -semiregularen avtomorfizem.	11
2.3	Kubični simetrični graf F050A reda 50 podan v Fruchtovi notaciji glede na $(5, 10)$ -semiregularen avtomorfizem.	11
2.4	Kubična simetrična grafa F080A in F240C podana v Fruchtovi notaciji glede na $(4, 20)$ - oziroma $(4, 60)$ -semiregularen avtomorfizem.	12
3.1	6-cikli, ki vsebujejo 2-lok $\mu = (u_0, u_1, u_2)$, ko vsak 2-lok v grafu X leži na štirih 6-ciklih.	20
3.2	6-cikli, ki vsebujejo 2-lok $\mu = (u_0, u_1, u_2)$, ko vsak 2-lok v grafu X leži na treh 6-ciklih.	21
3.3	Dve možnosti za lokalno strukturo grafa X v primeru, ko 2-lok $\mu = (u_0, u_1, u_2)$ leži na dveh 6-ciklih.	21
3.4	Heawoodov graf F014A.	23
3.5	Moebius-Kantorjev graf $GP(8, 3)$	23
3.6	Pappusov graf F018A.	24
3.7	Desarguesov graf $GP(10, 3)$	24
3.8	Struktura grafa X , če je k lih.	32
3.9	Struktura grafa X , če je k sod in $t = 1$	32
3.10	Struktura grafa X , če je k sod in $t = n/2 + 1$	33
3.11	Pappusov graf F018A z voltažnim prirejanjem ζ . Vpeto drevo sestavljajo povezave v krepkem zapisu, ki vse nosijo voltažo 0.	38
4.1	Hamiltonsko drevo lic v sferičnem Cayleyjevem zemljevidu Cayleyjevega grafa grupe S_4 , na dva načina prikazan pripadajoči modificirani graf šestkotnikov $Mod_H(X)$, kot graf in kot graf lic, graf dobljen iz $Mod_H(X)$ s supresijo točk valence 2, in graf šestkotnikov $Hex(X)$	62
4.2	Hamiltonsko drevo lic v Cayleyjevem zemljevidu roda 2 Cayleyjevega grafa grupe $Q_8 \rtimes S_3$, pripadajoči graf šestkotnikov in modificirani graf šestkotnikov.	63
4.3	$GP(12, 5)$, modificirani graf šestkotnikov in novi modificirani graf šestkotnikov z induciranim drevesom, katerega komplement je ena sama točka.	64
4.4	$GP(24, 5)$, modificirani graf šestkotnikov za $s = 24$ in novi modificirani graf šestkotnikov.	64
4.5	$GP(24, 5)$ in modificirani graf šestkotnikov $Mod_H(X)$ za $s = 12$ z induciranim drevesom, katerega komplement je množica petih točk.	64

4.6	Na levi strani modificirani graf $\text{Mod}(X)$, v primeru, ko je graf šestkotnikov $\text{Hex}(X)$ $I_4^8(5)$ -pot, na desni strani $\text{Mod}(X)$, v primeru, ko je $\text{Hex}(X)$ $I_4^{12}(7)$ -pot.	66
4.7	Na levi strani lokalna struktura $I_k^s(t)$ -poti za $s = 12$ in $k = 6$. Na desni strani lokalna struktura pripadajočega modificiranega grafa $\text{Mod}(X)$	67
4.8	Lokalna struktura grafa $\text{Mod}(X)$ vložnega na zaprto orientabilno ploskev, če je $ \mathcal{R} > 3$ in tretji obroč R_3 sestoji iz dveh orbit elementa $x \in G$, za $s = 8$	69
4.9	Vsi povezani ne-Cayleyjevi točkovno tranzitivni grafi reda 20, katerih valenca je manjša od 7, podani v Fruchtovi notaciji.	73
4.10	Fruchtova notacija grafa s simbolom $\mathbf{S} = (S_{i,j})$	75
4.11	Točkovno tranzitivni graf valence 9 na 28 točkah s primitivno grupo avtomorfizmov, ki izhaja iz delovanja grupe $\text{PSL}(2, 8)$ na odsekih podgrupe D_{18}	76
4.12	Točkovno tranzitiven graf valence 6 na 52 točkah s primitivno grupo avtomorfizmov, ki izhaja iz delovanja grupe $\text{PSL}(3, 3) \leq G \leq \text{PSL}(3, 3)$ na množici $52 = 4p$ incidenčnih parov točka-premica ravnine $\text{PG}(2, 3)$	77
4.13	Točkovno tranzitiven graf z grupo avtomorfizmov $\text{PSL}(3, 2)$ podan v Fruchtovi notaciji glede na $(4, 7)$ -semiregularen avtomorfizem.	79
4.14	Možni dvodelni grafi $X[B, B']$, kjer sta B in B' povezana bloka velikosti 4.	82
4.15	Dve možnosti za vpeti podgraf grafa X . Graf na levi strani, kjer je $a \in \mathbb{Z}_p$, ustreza grafu na sliki 4.14(ii) in graf na desni strani ustreza grafu na sliki 4.14(iii).	82
4.16	Šest možnosti za kvocientni graf X_γ povezanega točkovno tranzitivnega grafa X reda $4p$	83
5.1	Fuleren C_{60}	87
5.2	Fuleren C_{20}	88
5.3	Pentakapica.	89
5.4	Lokalna struktura fulerena, ki premore netrivialen ciklični-5-prerez.	90
5.5	Šest možnih tipov obroča R	92
5.6	Hamiltonski cikel v dodekaedru ($r = 0$).	94
5.7	Hamiltonski cikel v F , če je $r = 1$	95
5.8	Hamiltonski cikel v F , če je $r = 2$	95
5.9	Na levi strani lokalna struktura hamiltonskega cikla v \bar{F} , na desni pa lokalna struktura hamiltonskega cikla v F , ko je $r + 1$ sodo število.	95
5.10	Na levi strani lokalna struktura hamiltonskega cikla v \bar{F} , na desni pa lokalna struktura hamiltonskega cikla v F , ko je $r + 1$ liho število.	96
5.11	Vse možne poti lic v fulerenu z netrivialnim cikličnim-5-prerezom in $r = 2$ šestkotnima obročema, katerih rob je hamiltonski cikel v F , za izbrano petkotno lice povezano s centralnim petkotnim licem.	97

Tabele

3.1	Fundamentalni cikli, slike le-teh pri delovanju avtomorfizma α in pripadajoče voltaže.	39
3.2	Fundamentalni cikli, slike le-teh pri delovanju avtomorfizma σ in pripadajoče voltaže.	40
3.3	Vsi kubični 1-regularni grafi ožine 6 do 1250 točk.	44
3.4	Vsi kubični 1-regularni grafi ožine 6 od 1250 do 2048 točk.	45
3.5	Vsi kubični 2-regularni grafi ožine 6 do 2048 točk.	46
4.1	Osem skupin točkovno tranzitivnih grafov reda $4p$	74
4.2	Simboli povezanih točkovno tranzitivnih grafov, katerih valenca je manjša od tretjine števila točk, ki izhajajo iz delovanj v trditvi 4.2.3.	76

Poglavje 1

Uvod

Disertacija obravnava tri med seboj povezane teme s področja teorije grafov in permutacijskih grup. Obravnavali bomo naslednje družine grafov: kubični simetrični grafi, kubični Cayleyjevi grafi, točkovno tranzitivni grafi reda $4p$, kjer je p praštevilo, ter fulereni. Čeprav izraz *simetrija* nastopa le v imenu prve družine, tudi grafi v drugi, tretji in četrti družini premorejo številne simetrije. Zato v naslovu disertacije obravnavane grafe s skupnim imenom poimenujemo simetrični grafi. V disertaciji pa bomo izraz *simetrija* vedno uporabljali le za prvo obravnavano družino kubičnih grafov, to je, za grafe, katerih grupa avtomorfizmov deluje tranzitivno na množici lokov grafa. V literaturi so ti grafi poznani tudi pod imenom *ločno tranzitivni grafi*. Če ne bo navedeno drugače, bo v disertaciji izraz *graf* pomenil povezan graf.

Obravnavali bomo strukturne lastnosti grafov omenjenih družin. Motivacija za obravnavo le-teh prihaja iz treh že vrsto let odprtih problemov, ki so skupaj z doslej znanimi rezultati podrobno predstavljeni na začetku posameznega poglavja (poglavja 3, 4 in 5).

Prva družina, kubični simetrični grafi, ki jih obravnavamo v poglavju 3, so seveda le posebna družina družine vseh simetričnih grafov. Že vrsto let številni matematiki želijo spoznati natančno strukturo teh grafov. Ker so kubični grafi prva zanimiva družina simetričnih grafov (saj so simetrični grafi valence 2 le cikli), je v literaturi največ raziskav moč najti prav za to družino. Prispevek disertacije k temu problemu je popolna klasifikacija kubičnih simetričnih grafov ožine (z dolžino najkrajšega cikla v grafu) 6 (narejeno v razdelku 3.1). Dokazano je, da je z izjemo štirih grafov (v disertaciji jih imenujemo *izjeme*) kubični simetrični graf ožine 6 normalni Cayleyjev graf posplošene diedrske grupe. V razdelku 3.2 obravnavamo strukturne lastnosti kubičnih simetričnih grafov, katerih grupa avtomorfizmov premore podgrupo, ki deluje regularno na množici lokov grafa. Ta izredno posebna družina simetričnih grafov je za nas zanimiva zaradi druge obravnavane teme. Natančneje, s pomočjo klasifikacije kubičnih simetričnih grafov ožine 6 v razdelku 3.2 natančno določimo vse možne lokalne strukture okoli izbranega G -konsistentnega cikla, kjer je G grupa, ki deluje regularno na lokih grafa, ter ciklično povezanost teh grafov, lastnost, ki igra eno ključnih vlog pri drugi obravnavani temi v poglavju 4.

Pri drugi temi, v poglavju 4, obravnavamo problem obstoja hamiltonskih ciklov v točkovno tranzitivnih grafih. Leta 1969 je Lovász [91] postavil vprašanje ali ima vsak povezan točkovno tranzitiven graf hamiltonsko pot. Vsi znani povezani

točkovno tranzitivni grafi imajo hamiltonsko pot. Še več, z izjemo štirih grafov (to so: Petersenov graf, Coxeterjev graf in grafa dobljena iz prvih dveh grafov, tako da vsako točko nadomestimo s trikotnikom) imajo vsi tudi hamiltonski cikel. Zato je prišlo do domneve, da imajo vsi povezani točkovno tranzitivni grafi z izjemo štirih zgoraj omenjenih grafov hamiltonski cikel. Domnevo bomo dokazali za povezane točkovno tranzitivne grafe reda $4p$, kjer je p praštevilo, ter za družino $(2, s, 3)$ -Cayleyjevih grafov, ko je število s deljivo s 4 (glej razdelek 4.1 in razdelek 4.2). Dokaz obstoja hamiltonskih ciklov v povezanih točkovno tranzitivnih grafih reda $4p$ z izjemo Coxeterjevega grafa sloni na analizi (ne)primitivnosti grup avtomorfizmov teh grafov ter analizi vseh možnih struktur kvocientnih grafov glede na orbite $(4, p)$ -semiregularnih avtomorfizmov. V dokazu obstoja hamiltonskih ciklov v $(2, s, 3)$ -Cayleyjevih grafih za $s \equiv 0 \pmod{4}$ pa ključno vlogo, poleg rezultatov iz predhodnega poglavja (poglavja 3), igra Glover-Marušičeva metoda [55] za iskanje hamiltonskih ciklov v tej posebni družini Cayleyjevih grafov. Omenjena metoda sloni na znamenitem Payan-Sakarovichevem rezultatu [118] o ciklično stabilnih podmnožicah v ciklično-4-povezanih kubičnih grafih. Zato bo precejšnji del poglavja posvečen dokazovanju ciklično-4-poveznosti kubičnega grafa, ki ga priredimo danemu $(2, s, 3)$ -Cayleyjevemu grafu X , s pomočjo katerega nato konstruiramo hamiltonski cikel v grafu X .

Ciklična povezanost pa je tudi strukturna lastnost, ki jo obravnavamo pri četrti obravnavani družini grafov, fulerenih, v zadnjem poglavju 5. Obravnava ciklične povezanosti fulerenov je v preteklosti pomagala rešiti številne probleme o strukturi fulerenov (glej [39, 40, 41, 42, 131]). V disertaciji bomo podali popolno klasifikacijo fulerenov, ki premorejo netrivialen ciklični-5-prerez. S pomočjo le-te bomo za to posebno družino fulerenov rešili že vrsto let odprt problem [112] o obstoju hamiltonskih ciklov v fulerenih.

V poglavju 2 navajamo osnovna znanja iz teorije grup in teorije grafov, ki jih potrebujemo v nadaljnjih poglavjih.

Naj omenimo še, da so oziroma bodo rezultati disertacije objavljani v naslednjih znanstvenih člankih:

- K. Kutnar, D. Marušič, Hamiltonicity of vertex-transitive graphs of order $4p$, *European J. Combin.*, **29** (2008), 423-438.
- K. Kutnar, D. Marušič, A complete classification of cubic symmetric graphs of girth 6, *J. Combin. Theory Ser. B*, poslano v objavo.
- H. H. Glover, K. Kutnar, D. Marušič, Hamiltonian cycles in cubic Cayley graphs: the $\langle 2, 4k, 3 \rangle$ case, poslano v objavo.
- K. Kutnar, D. Marušič, On cyclic edge-connectivity of fullerenes, *Discrete Applied Math.*, doi:10.1016/j.dam.2007.08.046, v tisku.

Poglavje 2

Osnovna znanja

2.1 Grupe

Osnovne pojme teorije grup, ki jih tu ne bomo navedli, si lahko bralec prebere v [117, 127, 135]. V disertaciji bomo simbol \mathbb{Z}_r uporabljali tako za ciklično grupo reda r kot tudi za kolobar celih števil po modulu r . V slednjem primeru bomo z \mathbb{Z}_r^* označevali multiplikativno grupo enot v \mathbb{Z}_r .

2.1.1 Delovanje grup

Naj bo G grupa in Ω neprazna množica. Naj obstaja funkcija

$$\cdot : \Omega \times G \rightarrow \Omega$$

$$\cdot : (\omega, x) \mapsto \omega^x.$$

Če za vsak $\omega \in \Omega$ velja, da je $\omega^1 = \omega$, kjer je 1 identiteta v grupi G , in je $(\omega^g)^h = \omega^{gh}$ za poljubna elementa $g, h \in G$, pravimo, da grupa G *deluje z desne* na množici Ω . Oznaka: (Ω, G) . Podobno definiramo *levo delovanje* (delovanje z leve) (G, Ω) .

Desno delovanje grupe G na množici Ω porodi homomorfizem grup $\chi: G \rightarrow \text{Sym}_d(\Omega)$ s predpisom:

$$g \mapsto \chi_g, \quad \chi_g(\omega) := \omega^g,$$

kjer je $\text{Sym}_d(\Omega)$ *desna simetrična grupa* množice Ω (to je, množica vseh bijektivnih preslikav $\phi: \Omega \rightarrow \Omega$, ki jim pravimo *permutacije* množice Ω , opremljena z operacijo običajnega kompozituma preslikav). Obratno: Če je $f: G \rightarrow \text{Sym}_d(\Omega)$ homomorfizem grup, potem le-ta porodi desno delovanje grupe G na množici Ω in sicer, tako da je $\chi = f$. Homomorfizmu χ pravimo *permutacijska reprezentacija desnega delovanja* (G, Ω) , sliki $G_D = G^\chi$ pa *desna permutacijska reprezentacija* (ali krajše *desna reprezentacija*) grupe G . Moč množice Ω je *stopnja* desne reprezentacije G_D grupe G . *Jedro homomorfizma* χ so vsi tisti elementi grupe G , ki delujejo na trivialni način: $\text{Ker}\chi = \{g \in G \mid \chi_g = \text{id}\} = \{g \in G \mid \chi_g(\omega) = \omega, \forall \omega \in \Omega\} = \{g \in G \mid \omega^g = \omega, \forall \omega \in \Omega\}$. Če je jedro trivialno, pravimo, da je *delovanje zvesto*.

Naj grupa G deluje na množici Ω z desne. Tedaj množici

$$\text{Orb}_G(\omega) = \omega^G = \{\omega^g \mid g \in G\},$$

kjer je $\omega \in \Omega$, pravimo G -orbita (ali samo orbita, če ni nevarnosti za pomoto) točke ω glede na delovanje grupe G . Če ima grupa G eno samo orbito pri delovanju na množici Ω , pravimo, da G deluje na množici Ω *tranzitivno*.

Množico

$$G_\omega = \{g \in G \mid \omega^g = \omega\},$$

kjer je $\omega \in \Omega$, imenujemo *stabilizator točke* ω v grupi G . Bralec se bo prepričal sam, da je G_ω podgrupa v grupi G . Tudi stabilizator G_ω deluje na množici Ω in G_ω -orbite imenujemo *podorbite grupe* G (glede na element ω). Podorbiti $\{\omega\}$ pravimo *trivialna podorbita*. Če je $|G_\omega| = 1$ za vsako točko $\omega \in \Omega$, pravimo, da grupa G deluje *polregularno*. Če G na množici Ω deluje tranzitivno in je $|G_\omega| = 1$ za vsako točko $\omega \in \Omega$, pravimo, da grupa G deluje *regularno* (oz. grupa G je *regularna*).

Navedimo še enačbo, ponavadi imenovano *lastnost orbita - stabilizator*, ki pove, v kakšni zvezi sta moč orbite in moč stabilizatorja nekega elementa iz te orbite:

$$|\text{Orb}_G(\omega)| = |G : G_\omega| \quad \text{za vsak } \omega \in \Omega.$$

Naj grupa G deluje tranzitivno na množici Ω . Potem je particija \mathcal{B} množice Ω G -invariantna, če elementi grupe G permutirajo elemente particije \mathcal{B} . Elemente particije \mathcal{B} imenujemo *bloki*. Z drugimi besedami, neprazna podmnožica $B \subseteq \Omega$ je blok za grupo G , če za vsak $g \in G$ velja:

$$B^g = B \quad \text{ali} \quad B^g \cap B = \emptyset.$$

Za poljubno grupo G , ki deluje tranzitivno na neki množici Ω , so Ω , \emptyset in $\{\omega\}$ ($\omega \in \Omega$) bloki, imenujemo jih *trivialni bloki*. Če so trivialni bloki edini bloki, pravimo, da je grupa G *primitivna* (deluje primitivno). V nasprotnem primeru je grupa G *neprimitivna*, netrivialno G -invariantno particijo \mathcal{B} pa imenujemo *neprimitivnostni sistem blokov* grupe G (glej tudi [18]).

Naj bo desno delovanje grupe H na množici Ω tranzitivno in naj bo $G = H_D$ desna permutacijska reprezentacija grupe H . Potem G na naraven način deluje tudi na množici $\Omega \times \Omega = \Omega^2$. G -orbite na $\Omega \times \Omega = \Omega^2$ imenujemo *orbitale*. Orbitala $\{(\omega, \omega) \mid \omega \in \Omega\}$ je *trivialna orbitala*. Če je $\Delta = \{(\omega, \nu) \mid \omega, \nu \in \Omega\} \subseteq \Omega^2$ orbitala, potem je očitno tudi $\Delta^* = \{(\nu, \omega) \mid (\omega, \nu) \in \Delta\}$ orbitala, imenujemo jo *zrcalna orbitala* orbitale Δ . Če je $\Delta = \Delta^*$, orbitalo Δ imenujemo *sebi zrcalna orbitala*. Obstaja naravna korespondenca med podorbitami in orbitalami. Naj bo G_ω stabilizator elementa ω , Γ podorbita glede na element ω in $\nu \in \Gamma$. Potem je pripadajoča orbitala G -orbita na Ω^2 , ki vsebuje (ω, ν) . Bralec se bo prepričal sam, da je tako definirana orbitala dobro definirana. Še več, če je Δ poljubna orbitala, potem je pripadajoča podorbita Γ tista podorbita, ki vsebuje ν , kjer je ν poljuben element množice Ω , za katerega velja: $(\omega, \nu) \in \Delta$.

2.1.2 Posplošene diedrske grupe

Naj bosta H in K poljubni grupi in $\theta: K \rightarrow \text{Aut}H$ homomorfizem, kjer je $\text{Aut}H$ grupa avtomorfizmov grupe H . Pišemo $\theta_k = \theta(k)$. Na množici $H \times K$ definirajmo notranjo dvomestno operacijo z naslednjim predpisom:

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1 h_2^{\theta_{k_1}}, k_1 k_2).$$

Potem je množica $H \times K$ skupaj s to operacijo grupa. Imenujemo jo *polpremi produkt grup H in K glede na homomorfizem θ* in jo označujemo $H \rtimes_{\theta} K$.

Naj bo A abelska grupa. Potem je *posplošena diedrska grupa* $\text{Dih}(A)$ polpremi produkt $A \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}_2$, kjer je $\mathbb{Z}_2 = \langle x \rangle$ ciklična grupa reda 2 in $a^{\theta_x} = a^{-1}$ za vsak $a \in A$. V posebnem primeru, ko je grupa A ciklična, je $\text{Dih}(\mathbb{Z}_r)$ diedrska grupa D_{2r} reda $2r$. Vendar bomo za diedrske grupe uporabljali standardno notacijo.

2.2 Grafi

Naj bo V končna neprazna množica in E poljubna družina dvoelementarnih podmnožic množice V . Paru $X = (V, E)$ pravimo *graf* na množici točk $V = V(X)$ z množico povezav $E = E(X)$. *Red grafa X* je kardinalnost njegove množice točk $|V(X)|$. Če je A neka podmnožica premega produkta $V \times V$, paru (V, A) pravimo *usmerjeni graf* (ali *digraf*). Usmerjenih grafov v disertaciji ne bomo obravnavali.

Če je par $\{u, v\}$ povezava grafa $X = (V, E)$, pišemo $u \sim v$ in pravimo, da sta točki v in u *sosednji*. Povezavo $\{u, v\}$ označimo krajše uv . Točki u in v imenujemo krajšiči povezave uv . Dve povezavi ali več povezav, ki povezujejo isti par točk, poimenujemo *vzporedne povezave*. Povezava, ki povezuje neko točko s seboj, je *zanka*. Graf brez zank in večkratnih povezav poimenujemo *enostavni graf*.

Za točko $u \in V(X)$ $N(u)$ označuje množico njej sosednjih točk. *Stopnja točke u* v grafu X je $|N(u)|$. Graf X je *regularen valence d* , če so vse njegove točke stopnje d . *Kubični graf* je regularen graf valence 3.

Sprehod dolžine k v grafu X je zaporedje k povezav grafa X oblike

$$uv, vw, wx, \dots, yz.$$

Tak sprehod imenujemo sprehod med točkama u in z . Če so vse povezave sprehoda različne, potem sprehod poimenujemo *enostavni sprehod*. Če so v enostavnem sprehodu vse točke različne, potem sprehod imenujemo *pot*. *Obhod* v grafu X je zaporedje povezav grafa X oblike $uv, vw, wx, \dots, yz, zu$. Če so v obhodu vse povezave in vse točke različne, potem ga poimenujemo *cikel*. *Hamiltonska pot* je pot, ki gre skozi vse točke grafa. *Hamiltonski cikel* je cikel, ki gre skozi vse točke grafa. Graf je *hamiltonski*, če premore hamiltonski cikel. *Ožina $g = g(X)$* grafa X je dolžina najkrajšega cikla v grafu. Cikel dolžine n imenujemo *n -cikel*.

Razdalja $d(u, v)$ med točko u in točko v v grafu je dolžina najkrajše poti v grafu z začetno točko u in končno točko v . Z $N_i(u)$ označujemo množico vseh točk na razdalji $i > 1$ od točke u . Graf X je *povezan*, če med poljubnima točkama grafa X obstaja pot. V nasprotnem primeru je X *nepovezan*. Graf X je *bipartiten* (ali *dvodelen*), če

lahko množico točk $V(X)$ zapišemo kot disjunktno unijo dveh podmnožic U in U' ($U, U' \subseteq V(X)$, $U \cap U' = \emptyset$), tako da ima vsaka povezava v grafu X eno krajišče v U in drugo v U' .

Urejen par (u, v) povezanih točk u in v grafa X imenujemo *lok* (ali *puščica*). Lok si lahko predstavljamo tudi takole. Povezavi v X določimo usmeritev v eno od dveh možnih smeri (iz enega krajišča v drugega), dobljena usmerjena povezava je lok. Če je $e = (u, v)$ lok v grafu, potem $e^\lambda = (v, u)$ označuje lok na enaki povezavi, vendar z nasprotno usmeritvijo. Lok e^λ imenujemo *inverzni lok* loka e . Urejeno $k + 1$ -terico $(u_0, u_1, u_2, \dots, u_k)$ različnih točk grafa imenujemo *k-lok*, če je točka u_i povezana s točko u_{i+1} za vsak $i \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$ (k -lok je torej pot, pri kateri je pomembna usmeritev). Če je $S \subseteq V(X)$, potem $S^c = V(X) \setminus S$ označuje komplement množice S in $X[S]$ (na kratko $[S]$) *inducirani podgraf* grafa X na množici S , ki ima množico S za svojo množico točk in množico $\{\{u, v\} \mid u, v \in S\} \cap E(X)$ za množico povezav. Za podmnožici $S, S' \subseteq V(X)$ z $X' = X[S + S']$ označujemo graf z množico točk $V(X') = S \cup S'$ in množico povezav $E(X') = E(X[S]) \cup \{uv \mid u \in S, v \in S'\}$.

Graf X je *ravninski* (ali *planarni*), če ga lahko narišemo v ravnini, tako da noben par povezav nima skupne točke, razen v točki, ki je njuno skupno krajišče.

2.2.1 Delovanje grup na grafih

Avtomorfizem grafa je permutacija množice točk, ki ohranja sosednost točk in povezav. Množica vseh avtomorfizmov grafa X z operacijo kompozituma preslikav tvori *grupo avtomorfizmov* $\text{Aut}X$ grafa X . Poljubna podgrupa G grupe avtomorfizmov grafa X naravno deluje na množici točk $V(X)$, množici povezav $E(X)$ in na množici lokov $A(X)$ (t.j. množici usmerjenih povezav) grafa X . Pravimo, da G deluje *točkovno tranzitivno*, *povezavno tranzitivno*, *ločno tranzitivno* in *s-tranzitivno* na grafu X , če je delovanje grupe G na pripadajoči množici točk, povezav, lokov oziroma s -lokov grafa X tranzitivno. V tem primeru je graf X *G-točkovno tranzitiven*, *G-povezavno tranzitiven*, *G-ločno tranzitiven* ali *G-simetričen* (v disertaciji bomo uporabljali slednji izraz) oziroma *G-s-tranzitiven*. Če G deluje regularno na množici s -lokov grafa X , pravimo, da je X *G-s-regularen*. Če grupa G sovпада z grupo avtomorfizmov $\text{Aut}X$ grafa X predpono G izpustimo in govorimo o *točkovni tranzitivnosti*, *povezavni tranzitivnosti*, *simetričnosti*, *s-tranzitivnosti* in *s-regularnosti*.

Če podgrupa G grupe avtomorfizmov $\text{Aut}X$ grafa X deluje (ne)primitivno na njegovi množici točk $V(X)$, pravimo, da je graf X *G-(ne)primitiven*. Če je \mathcal{B} neprimitivnostni sistem blokov za G , poljubna dva bloka $B, B' \in \mathcal{B}$ inducirata izomorfna točkovno tranzitivna podgrafa grafa X .

2.2.2 Orbitalni (di)grafi

Naj bo G tranzitivna permutacijska grupa na Ω in $\Delta \subseteq \Omega^2$ netrivialna orbitala. Potem je *orbitalni digraf* \vec{X} usmerjeni graf, ki ima množico Ω za svojo množico točk in množico Δ za množico povezav.

Grupa G je podgrupa grupe avtomorfizmov grafa $\text{Aut}\vec{X}$ in deluje tranzitivno na točkah in usmerjenih povezavah. Če pozabimo na usmeritev povezav, dobimo *orbitalni graf* X z množico točk Ω in množico povezav $\{\{\omega, \nu\} \mid (\omega, \nu) \in \Delta\}$, ki je točkovno in povezavno tranzitiven, ni pa nujno ločno tranzitiven. Simetričen (ločno tranzitiven) je natanko tedaj, ko je orbitala Δ sebi zrcalna.

2.2.3 Cayleyjevi grafi in normalni Cayleyjevi grafi

Naj bo G grupa in S generatorska množica grupe G , za katero velja: $S = S^{-1}$ in $1 \notin S$. Potem je *Cayleyjev graf* $\text{Cay}(G, S)$ grupe G glede na množico S graf z množico točk G in množico povezav $\{\{g, gs\} \mid g \in G, s \in S\}$. Poljubna grupa G deluje na sebi z levim množenjem (natančneje povedano, leva regularna reprezentacija grupe G , ki jo bomo zaradi enostavnosti označevali kar z G). To delovanje inducira delovanje grupe G na njenem Cayleyjevem grafu. Element h grupe G preslika točko g Cayleyjevega grafa $\text{Cay}(G, S)$ v točko hg , in povezavo $\{g, gs\}$ v povezavo $\{hg, hgs\}$. Ker grupa G na sebi deluje tranzitivno, sledi, da je vsak Cayleyjev graf točkovno tranzitiven. Na tem mestu navedimo še Sabidussijevo karakterizacijo [126] Cayleyjevih grafov: Graf X je Cayleyjev graf grupe G natanko tedaj, ko njegova grupa avtomorfizmov vsebuje regularno podgrupo, ki je izomorfna grupi G .

Naj bo $G = \langle a, x \mid a^2 = x^s = (ax)^t = 1, \dots \rangle$ grupa generirana z involucijo a in elementom x reda s , katerih produkt ax je reda t . Potem Cayleyjev graf $X = \text{Cay}(G, S)$ grupe G glede na množico generatorjev $S = \{a, x, x^{-1}\}$ imenujemo *(2, s, t)-Cayleyjev graf*.

Naj bo $\text{Aut}(G, S) = \{\alpha \in \text{Aut}G \mid S^\alpha = S\}$ grupa vseh tistih avtomorfizmov grupe G , ki S kot množico fiksirajo. Izkazuje se, da je $\text{Aut}(G, S)$ podgrupa grupe $\text{Aut}X$. V resnici je $\text{Aut}(G, S)$ podgrupa stabilizatorja $\text{Aut}X_1$ točke 1 v X . Še več, po Godsilu [57, Lemma 2.1] je za povezan Cayleyjev graf $X = \text{Cay}(G, S)$ normalizator $N_{\text{Aut}X}(G)$ regularne podgrupe G polpremi produkt

$$N_{\text{Aut}X}(G) = G \times \text{Aut}(G, S).$$

V skladu s Xujevo terminologijo [139] Cayleyjevemu grafu $X = \text{Cay}(G, S)$ pravimo *normalen Cayleyjev graf*, če je grupa G edinka v $\text{Aut}X$, to je, $N_{\text{Aut}X}(G) = \text{Aut}(X)$. Bralec se bo prepričal sam, da $\text{Aut}(G, S)$ fiksira točko $u = 1$, identiteto grupe G , in deluje zvesto na $V(X)$. Torej, če je $X = \text{Cay}(G, S)$ normalen Cayleyjev graf je $|\text{Aut}(G, S)|$ delitelj števila $|S|!$. Poleg tega, je Xu [139] dokazal, da je normalen Cayleyjev graf $X = \text{Cay}(G, S)$ simetričen (ločno tranzitiven) natanko tedaj, ko je $\text{Aut}(G, S)$ tranzitivna na S (glej tudi [121]). Odtod sledi, da v kubičnem normalnem Cayleyjevem grafu $X = \text{Cay}(G, S)$, ki je simetričen, množica S sestoji iz treh involucij x, y in z , ter da obstaja $\alpha \in \text{Aut}(G, S)$, ki ciklično permutira x, y in z : $x^\alpha = y, y^\alpha = z$ in $z^\alpha = x$.

2.2.4 Zemljevidi in Cayleyjevi zemljevidi

V disertaciji bomo izraz *ploskev* P uporabljali za povezano kompaktno orientabilno 2-mnogoterost brez roba. *Zemljevid* M je 2-celična vložitev grafa X kot zaprta podmnožica ploskve P s končno valenco in končnimi kovalencami. Graf X je pripadajoči graf zemljevida M . Izraz *2-celica* pomeni, da je vsaka komponenta komplementa grafa na ploskvi homeomorfna notranjosti enotskega diska. Izraz *zaprt* pa pomeni, da graf ne premore zbirke točk, ki tvorijo topološki podprostor ploskve P . *Kovalenca* je dolžina roba lica. Pripadajoči graf zemljevida mora biti povezan, nepovezani grafi namreč ne premorejo 2-celične vložitve. Ekvivalentno si lahko M predstavljamo kot celično dekompozicijo ploskve P . Pri tem so 0-, 1- in 2-celice točke, povezave oziroma lica zemljevida, 1-skelet (to je, unija 0- in 1-celic) pa je pripadajoči graf zemljevida. Zemljevid je d -valenten, če imajo vse točke pripadajočega grafa valenco d . Če je $A(X)$ množica lokov pripadajočega grafa X zemljevida M , elemente množice $A(X)$ imenujemo loki zemljevida M . Če je ploskev P sfera, je vložljivost grafa X na ploskev P ekvivalentna vložljivosti grafa X na ravnino.

Algebraično zemljevid M opišemo z dvema permutacijama ρ in λ množice lokov $A(X)$ [64]. Naj bo ploskev P orientirana v smeri urinega kazalca. Permutacija λ je involucija, ki vsak lok pripadajočega grafa X preslika v njegov inverzni lok (torej je λ neodvisna od vložitve). Permutacija ρ pa je rotacija definirana s predpisom: za vsak lok $e \in A(X)$ z začetkom v točki v je e^ρ v smeri urinega kazalca naslednji lok z začetkom v točki v . Par permutacij λ in ρ množice lokov $A(X)$ pove popolno informacijo o vložitvi grafa v naslednjem smislu. Točke, povezave in lica (v smislu robov lic) so v 1–1 korespondenci z orbitami permutacij ρ , λ oziroma $\rho\lambda$. Incidenca med temi elementi sovпада z nepraznim presekom pripadajočih orbit.

Neformalno je Cayleyjev zemljevid vložitev Cayleyjevega grafa grupe G , ki premore naravno točkovno tranzitivno delovanje grupe G . Za formalno definicijo Cayleyjevih zemljevidov potrebujemo nekoliko drugačno (sicer ekvivalentno) definicijo Cayleyjevih grafov od definicije navedene v predhodnem razdelku 2.2.3.

Naj bo G grupa z identiteto $1 \in G$ in S končno zaporedje s_1, s_2, \dots, s_d , kjer je

$$s_i \neq 1 \text{ za vsak } i \in [d] = \{1, 2, \dots, d\} \text{ in } s_i \neq s_j \text{ za } i \neq j, \quad (2.1)$$

elementov grupe G , ki skupaj generirajo G , za katero velja: $s_i \in S \Leftrightarrow s_i^{-1} \in S$ (S imenujemo *zaporedje generatorjev* grupe G). Naj bo τ involucija, ki deluje na množici $[d]$, tako da je $s_i\tau = s_i^{-1}$ za vsak $i \in [d]$ (τ imenujemo *razporeditev inverzov*). Potem je *Cayleyjev graf* $\text{Cay}(G, S, \tau)$ graf z množico točk G in za vsak $g \in G$ in vsak $i \in [d]$ obstaja lok (g, i) z začetkom v g . Končna točka loka (g, i) je točka gs_i in pripadajoči inverzni lok je (gs_i, i^τ) . Torej za involucijo λ , ki loke obrne, velja: $(g, i)^\lambda = (gs_i, i^\tau)$. Ker je po (2.1) $s_i \neq 1$ za vsak $i \in [d]$, se bo bralec prepričal sam, da vsak par lokov (g, i) in $(g, i)^\lambda$ porodi neusmerjeno povezavo. Torej je Cayleyjev graf $\text{Cay}(G, S, \tau)$ neusmerjeni graf, katerega loki so označeni z indeksi zaporedja generatorjev S . (V najbolj splošni obliki je Cayleyjeve grafe moč definirati, tako da se zahteve v (2.1) izpusti, kar pomeni, da v Cayleyjevem grafu dovoljujemo polpovezave in zanke, glej [123].) Bralec se bo prepričal sam, da je ureditev elementov v S v zaporedju nepomembna v naslednjem smislu. Naj bo θ poljubna permutacija množice $[d]$ in naj S' označuje zaporedje s'_1, s'_2, \dots, s'_d , kjer je $s'_i = s_{i\theta}$ za vsak $i \in [d]$. Poleg tega naj bo τ' involucija na $[d]$ definirana s predpisom $\tau' = \theta\tau\theta^{-1}$. Potem sta Cayleyjeva

grafa $\text{Cay}(G, S, \tau)$ in $\text{Cay}(G, S', \tau')$ identična. Odtod pa tudi sledi, da je navedena definicija ekvivalentna definiciji podani v razdelku 2.2.3.

Sedaj imamo vse potrebno za formalno definicijo *Cayleyjevega zemljevida*. Naj bo $\text{Cay}(G, S, \tau)$ Cayleyjev graf grupe G z zaporedjem generatorjev $S = s_1, s_2, \dots, s_d$ in razporeditvijo inverzov τ . Potem je Cayleyjev zemljev $CM(G, S, \tau)$ zemljev $M = M(\rho, \lambda)$, katerega pripadajoči graf je $\text{Cay}(G, S, \tau)$ z involucijo λ in rotacijo ρ , tako da velja: za poljubno točko $g \in G$ je $(g, i)^\lambda = (gs_i, i^\tau)$ in $(g, i)^\lambda = (g, i+1)$, kjer v drugi koordinati seštevamo po modulu d . (Torej je v Cayleyjev zemljev "ciklična ureditev generatorjev" v smeri urinega kazalca enaka pri vsaki točki.)

Primer 2.2.1 Naj bo $G = \langle a, x \mid a^2 = x^s = (ax)^3 = 1, \dots \rangle$ grupa generirana z involucijo a in elementom x reda s , katerih produkt ax je reda 3, in naj bo $S = x, a, x^{-1}$ zaporedje generatorjev. Bralec se bo prepričal sam, da so lica Cayleyjevega zemljevida $CM(G, S, \tau)$ s pripadajočim grafom $X = \text{Cay}(G, S, \tau)$ velikosti 6 in s . Za vsak $g \in G$ je namreč orbita permutacije $\rho\lambda$, ki vsebuje lok $(g, 3)$ dolžine s , orbita, ki vsebuje lok $(g, 1)$, in orbita, ki vsebuje lok $(g, 2)$, pa sta dolžine 6.

Torej se v poljubni točki stikajo tri lica, eno velikosti s in dve velikosti 6. Ker je število točk grafa X enako $|G|$, sledi, da ima Cayleyjev zemljev $|G|/s$ s -kotnih in $|G|/3$ šestkotnih lic. Odtod po dobro znani Eulerjevi formuli

$$|V(X)| - |E(X)| + |F| = \chi(P) = 2 - 2g,$$

kjer je F množica lic zemljevida $CM(G, S, \tau)$, $\chi(P)$ Eulerjeva karakteristika ploskve P in g rod ploskve P , dobimo, da je rod ploskve zemljevida $CM(G, S, \tau)$ enak

$$g = 1 + \frac{(s-6)|G|}{12s}.$$

(Spomnimo, da je *rod* ploskve P število ročk, ki jih moramo dodati sferi, da dobimo ploskev P . Rod sfere je enak 0, rod torusa pa 1.)

2.2.5 Posplošeni Petersenovi grafi

Naj bo $n \geq 3$ pozitivno število in naj bo $r \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{n/2\}$. Potem je *posplošeni Petersenov graf* $\text{GP}(n, r)$ definiran, tako da je

$$V(\text{GP}(n, r)) = \{u_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{v_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$$

in

$$E(\text{GP}(n, r)) = \{u_i u_{i+1} \mid i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{v_i v_{i+r} \mid i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{u_i v_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}.$$

Očitno je $\text{GP}(n, r)$ kubični graf in ni se težko prepričati, da velja: $\text{GP}(n, r) \cong \text{GP}(n, n-r)$. Leta 1971 so Frucht, Graver in Watkins [53] dokazali, da obstaja le sedem simetričnih posplošenih Petersenovih grafov: $\text{GP}(4, 1)$, $\text{GP}(5, 2)$, $\text{GP}(8, 3)$, $\text{GP}(10, 2)$, $\text{GP}(10, 3)$, $\text{GP}(12, 5)$ in $\text{GP}(24, 5)$. Graf $\text{GP}(4, 1)$ je 2-regularen, $\text{GP}(5, 2)$ je 3-regularen, $\text{GP}(8, 3)$ je 2-regularen, $\text{GP}(10, 2)$ je 2-regularen, $\text{GP}(10, 3)$ je 3-regularen, grafa $\text{GP}(12, 5)$ in $\text{GP}(24, 5)$ pa sta 2-regularna. Nadalje, med njimi so samo $\text{GP}(8, 3)$, $\text{GP}(10, 3)$ in $\text{GP}(12, 5)$ ožine 6.

2.2.6 Konsistentni cikli

Naj bo X graf in G podgrupa grupe avtomorfizmov $\text{Aut}X$. Sprehod $\vec{D} = (u_0, \dots, u_r)$ v grafu X je G -konsistenten (če je $G = \text{Aut}X$, rečemo krajše *konsistenten*), če obstaja $g \in G$, tako da je $u_i^g = u_{i+1}$ za vsak $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$. Avtomorfizem g imenujemo *drsni avtomorfizem* za \vec{D} . Če je \vec{D} enostaven obhod, \vec{D} imenujemo G -konsistenten usmerjen cikel. Pripadajoči neusmerjen cikel D usmerjenega cikla \vec{D} imenujemo G -konsistenten cikel.

Primer 2.2.2 V kocki $\text{GP}(4, 1)$ so konsistentni cikli dolžine 4 in 6. Naj bodo točke kocke označene kot na sliki 2.1. Potem se bo bralec prepričal sam, da sta permutaciji

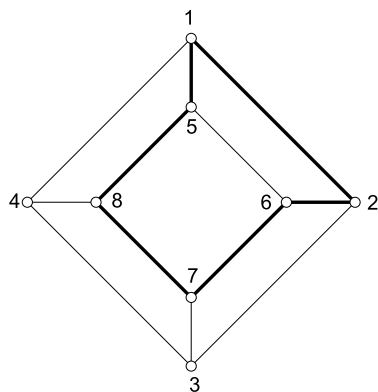
$$\alpha = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)$$

in

$$\beta = (1\ 2\ 6\ 7\ 8\ 4)(3\ 5)$$

avtomorfizma kocke $\text{GP}(4, 1)$. Avtomorfizem α je drsni avtomorfizem usmerjenega 4-cikla $(1, 2, 3, 4, 1)$, β pa je drsni avtomorfizem usmerjenega 6-cikla $(1, 2, 6, 7, 8, 4, 1)$. Torej so konsistentni cikli v $\text{GP}(4, 1)$ dolžine 4 in 6. Bralec se bo prepričal sam, da konsistentnih ciklov drugih dolžin ni. To dejstvo sledi tudi po trditvi 2.2.3 spodaj.

Omenimo še, da niso vsi 6-cikli v $\text{GP}(4, 1)$ konsistentni. Na primer, 6-cikel označen na sliki 2.1 ni konsistenten, ker permutacija $(1\ 2\ 6\ 7\ 8\ 5)(3\ 4)$ ni avtomorfizem kocke $\text{GP}(4, 1)$.



Slika 2.1: Nekonsistenten 6-cikel v kocki $\text{GP}(4, 1)$.

Tu navajamo znameniti Conwayev rezultat [28], ki pove, da ima ločno tranzitivna podgrupa G grupe avtomorfizmov kubičnega grafa pri delovanju na množici vseh G -konsistentnih usmerjenih ciklov natanko dve orbiti. Dokaz tega rezultata je zapisal Biggs v [14] (glej tudi [109]).

Trditev 2.2.3 [14, 28] Naj bo G ločno tranzitivna podgrupa grupe avtomorfizmov d -valentnega grafa X ($d \geq 2$). Naj bo Ω množica vseh G -konsistentnih usmerjenih ciklov v X . Potem ima G pri delovanju na Ω natanko $d - 1$ orbit.

2.2.7 Semiregularni avtomorfizmi in $I_k^n(t)$ -poti

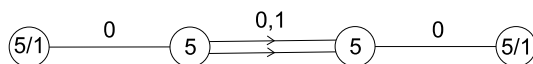
Naj bo X graf in \mathcal{W} particija njegove množice točk $V(X)$. Potem je *kvocientni graf* $X_{\mathcal{W}}$ grafa X glede na \mathcal{W} , graf z množico točk \mathcal{W} in množico povezav inducirano naravno z množico povezav $E(X)$. Kadar particija \mathcal{W} ustreza množici orbit podgrupe H v $\text{Aut}X$, kvocientni graf $X_{\mathcal{W}}$ označujemo z X_H . Če je $H = \langle h \rangle$ generirana z enim samim elementom, uporabljamo oznako $X_h = X_H$. Kot smo že omenili, podgraf grafa X , ki je inducirani z $W \in \mathcal{W}$, označujemo z $X[W]$. Podobno, $X[W, W']$ (na kratko $[W, W']$), $W, W' \in \mathcal{W}$, označuje dvodelni podgraf grafa X , ki je inducirani s povezavami z enim krajiščem v W in drugim v W' . Z $d(W)$ označujemo valenco podgraфа $X[W]$ in z $d(W, W')$ valenco podgraфа $X[W, W']$, kjer sta $W, W' \in \mathcal{W}$.

Naj bosta $k \geq 1$ in $n \geq 2$ naravni števili. Potem je avtomorfizem grafa (k, n) -*semiregularen*, če ima k orbit dolžine n in nobenih drugih orbit.

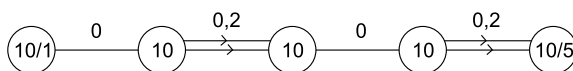
Naj bo X povezan graf, ki premore (k, n) -semiregularen avtomorfizem

$$\rho = (u_0^0 u_0^1 \cdots u_0^{n-1})(u_1^0 u_1^1 \cdots u_1^{n-1}) \cdots (u_{k-1}^0 u_{k-1}^1 \cdots u_{k-1}^{n-1}), \quad (2.2)$$

in naj bo $\mathcal{W} = \{W_i \mid i \in \mathbb{Z}_k\}$ množica orbit $W_i = \{u_i^s \mid s \in \mathbb{Z}_n\}$ avtomorfizma ρ . Potem lahko X predstavimo s Fruchtovo notacijo [51] na sledeči način. Vsako orbito avtomorfizma ρ predstavimo s krožcem. Simbol n/T , kjer je $T = T^{-1} \subseteq \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$, v notranjosti krožca, ki predstavlja orbito W_i , pomeni, da je za vsak $s \in \mathbb{Z}_n$ točka u_i^s povezana s točkami u_i^{s+t} , kjer je $t \in T$. Kadar je $|T| \leq 2$, uporabljamo poenostavljeno notacijo n/t , ko je $T = \{t, -t\}$, $n/(n/2)$, ko je $T = \{n/2\}$, oziroma n , ko je $T = \emptyset$. Puščica iz krožca, ki predstavlja orbito W_i , v krožec, ki predstavlja orbito W_j , $j \neq i$, označena z $y \in \mathbb{Z}_n$ pomeni, da je za vsak $s \in \mathbb{Z}_n$ točka $u_i^s \in W_i$ povezana s točko $u_j^{s+y} \in W_j$. Kadar je oznaka puščice enaka 0, ponavadi namesto puščice narišemo le črto. Primeri, ki ponazarjajo to notacijo so podani na slikah 2.2, 2.3 in 2.4, kjer so F_nA , F_nB , itd. Fosterjeve notacije kubičnih simetričnih grafov (n pove številu točk grafa; ker pa lahko obstaja več neizomorfni grafov istega reda so na koncu dodane črke A, B, itd. (glej [16, 23])).



Slika 2.2: Dodekaeder $GP(10,2)$ podan v Fruchtovi notaciji glede na $(4,5)$ -semiregularen avtomorfizem.



Slika 2.3: Kubični simetrični graf $F050A$ reda 50 podan v Fruchtovi notaciji glede na $(5,10)$ -semiregularen avtomorfizem.

Naj bo X povezan kubični graf, ki premore (k, n) -semiregularen avtomorfizem

$$\rho = (u_0^0 u_0^1 \cdots u_0^{n-1})(u_1^0 u_1^1 \cdots u_1^{n-1}) \cdots (u_{k-1}^0 u_{k-1}^1 \cdots u_{k-1}^{n-1}),$$



Slika 2.4: Kubična simetrična grafa F080A in F240C podana v Fruchtovi notaciji glede na $(4, 20)$ -oziroma $(4, 60)$ -semiregularen avtomorfizem.

kjer je $k \geq 2$. Naj bo $\mathcal{W} = \{W_i \mid i \in \mathbb{Z}_k\}$ množica orbit $W_i = \{u_i^s \mid s \in \mathbb{Z}_n\}$ avtomorfizma ρ . Potem pravimo, da je X $I_k^n(t)$ -pot, če za vsak $s \in \mathbb{Z}_n$ velja: $N(u_0^s) = \{u_0^{s\pm 1}, u_1^s\}$,

$$N(u_i^s) = \begin{cases} \{u_{i-1}^s, u_{i+1}^s, u_{i+1}^{s+2}\} & , \text{ če je } i \text{ lih} \\ \{u_{i-1}^s, u_{i-1}^{s-2}, u_{i+1}^s\} & , \text{ če je } i \text{ sod} \end{cases}$$

za $i \in \mathbb{Z}_k \setminus \{0, k-1\}$ in

$$N(u_{k-1}^s) = \begin{cases} \{u_{k-2}^s, u_{k-2}^{s-2}, u_{k-1}^{s+t}\} & , \text{ kjer je } t = n/2, \text{ če je } k \text{ lih} \\ \{u_{k-2}^s, u_{k-1}^{s\pm t}\} & , \text{ kjer je } 2t \equiv 2 \pmod{n}, \text{ če je } k \text{ sod} \end{cases} .$$

Torej je v primeru, ko je k sod, $t = 1$ ali pa je n sod in $t = \frac{n}{2} + 1$. Na primer, graf F050A na sliki 2.3 je $I_5^{10}(5)$ -pot.

Očitno je vsaka $I_k^n(t)$ -pot ožine 6, cikel induciran na točkah v orbiti W_0 pa je $\langle \rho \rangle$ -konsistenten. V razdelku 3.1 bodo dokazali, da so kubični 2-regularni grafi ožine 6 ravno $I_k^n(t)$ -poti. Še več, izkazalo se bo, da je v teh grafih n sodo število, $k = n/2$ ali $k = n/6$, $t = n/2$, če je k liho število, in $t = n/2 + 1$, če je k sodo število (glej izrek 3.1.13).

2.2.8 Ciklična stabilnost in ciklična povezavna povezanost

V skadu z [118] pravimo, da je v grafu X (ali bolj splošno, v multigrafu brez zank) podmnožica S množice točk $V(X)$ *ciklično stabilna*, če je $X[S]$ gozd (ne vsebuje nobenega cikla). Moč $|S|$ maksimalne ciklično stabilne podmnožice S množice $V(X)$ imenujemo *ciklično stabilno število* grafa X .

Naj bo X povezan graf. Potem podmnožico $T \subseteq E(X)$ množice povezav grafa X imenujemo *ciklični prerez*, če je $X - T$ nepovezan graf, v katerem vsaj dve povezanostni komponenti vsebujeta cikel. Graf X je *ciklično- k -povezavno povezan* (na kratko, *ciklično- k -povezan*), če nobena podmnožica povezav moči manjše od k ni ciklični prerez. Če je podmnožica $T \subseteq E(X)$ ciklični prerez moči k , jo imenujemo *ciklični- k -prerez*. Ciklični- k -prerez je *trivialen ciklični- k -prerez*, če vsaj ena od dobljenih komponent inducira k -cikel C_k . Nadalje, *ciklična povezavna povezanost* $\zeta(X)$ grafa X je največje število k , ki ne presega Bettijevega števila $|E(X)| - |V(X)| + 1$ grafa X , za katero je X ciklično- k -povezavno povezan. (To razlikovanje je potrebno, ker na primer grafi Θ_2 , K_4 in $K_{3,3}$ ne premorejo nobenega cikličnega prereza in so tako ciklično- k -povezavno povezani za vsak k . Njihova ciklična povezavna povezanost je 2, 3 oziroma 4.)

Zdaj poznamo vse potrebne pojme, da navedemo znameniti rezultat Payana in Sakarovitcha iz leta 1975 (glej [118, Théorème 5]), ki bo imel eno ključnih vlog pri

dokazu obstoja hamiltonskih ciklov v posebni družini $(2, s, 3)$ -Cayleyjevih grafov v razdelku 4.

Trditev 2.2.4 [118] *Naj bo X ciklično-4-povezavno povezan kubični graf reda n in naj bo S maksimalna ciklično stabilna podmnožica množice $V(X)$. Potem velja.*

- (i) *Če je $n \equiv 2 \pmod{4}$, je $|S| = (3n - 2)/4$ in $X[S]$ drevo, katerega komplement $V(X) \setminus S$ je neodvisna množica točk.*
- (ii) *Če je $n \equiv 0 \pmod{4}$, je $|S| = (3n - 4)/4$ in $X[S]$ drevo, katerega komplement $V(X) \setminus S$ inducira graf z eno samo povezavo, ali pa ima $X[S]$ dve povezanostni komponenti in je $V(X) \setminus S$ neodvisna množica točk.*

Za konec tega razdelka navajamo rezultat, ki sta ga leta 1995 dokazala Nedela in Škoviera v [113, Theorem 17].

Trditev 2.2.5 [113] *Ciklična povezavna povezanost $\zeta(X)$ povezanega kubičnega točkovno tranzitivnega grafa je enaka njegovi ožini $g(X)$.*

2.2.9 Krovi grafov

V tem razdelku bomo podali različne koncepte povezane s tehniko krovnih grafov. Naj bo X graf, r pozitivno celo število in $\zeta: A(X) \rightarrow S_r$ permutacijsko voltažno prirejanje, to je, funkcija iz množice lokov grafa X v simetrično grupo S_r , kjer inverzni loki nosijo inverzno voltažo. Torej imamo označevanje lokov grafa X s permutacijami iz S_r , tako da je za vsak par povezanih točk $u, v \in V(X)$ $\zeta_{u,v}\zeta_{v,u} = \text{id}$, kjer $\zeta_{u,v}$ označuje permutacijsko označevanje loka (u, v) . Voltažno prirejanje ζ se na naravni način razširi na sprehode v grafu X . Natančneje povedano, za poljuben sprehod $\vec{D} = u_1u_2 \dots u_t$ v grafu X $\zeta_{\vec{D}}$ označuje voltažo $\zeta_{u_1,u_2}\zeta_{u_2,u_3} \dots \zeta_{u_{t-1},u_t}$ sprehoda \vec{D} , to je, ζ -voltažo sprehoda \vec{D} . Krovni graf $\tilde{X} = \text{Cov}(X, \zeta)$ grafa X glede na ζ ima množico točk $V(X) \times \mathbb{Z}_r$ in povezave oblike $(u, s)(v, s')$, kjer je $uv \in E(X)$, $s \in \mathbb{Z}_r$ in $s' = s\zeta_{u,v}$. Graf X imenujemo *bazni graf* grafa \tilde{X} , slednjega pa imenujemo *r -kratni krov* grafa X . Množica točk $(u, 0), (u, 1), \dots, (u, r - 1)$ je *vlakno* točke u . Podgrupo K vseh tistih avtomorfizmov grafa \tilde{X} , ki vsako vlakno fiksirajo kot množico, imenujemo *grupa krovnih transformacij*. Graf \tilde{X} imenujemo tudi *K -krov* grafa X . Bralec se bo prepričal sam, da grupa krovnih transformacij povezanega krovnega grafa deluje polregularno na vsakem vlaknu. Če je grupa krovnih transformacij regularna na vlaknih grafa \tilde{X} , pravimo, da je \tilde{X} *regularni K -krov* (na kratko, *regularni krov*). V tem primeru je voltažna grupa $\text{Im}(\zeta)$ regularna grupa stopnje r abstraktno izomorfna grupi krovnih transformacij K .

Naj bo T vpeto drevo grafa X . Potem je voltažno prirejanje ζ *T -reducirano*, če so voltaže lokov, ki pripadajo drevesu, enake identiteti. V [63] je dokazano, da lahko vsak regularni krov \tilde{X} grafa X dobimo s T -reduciranim voltažnim prirejanjem ζ glede na poljubno izbrano vpeto drevo grafa X . Če je ζ reducirano prirejanje, je pripadajoči krovni graf $\text{Cov}(X, \zeta)$ povezan natanko tedaj, ko voltaže na lokih, ki ne ležijo na drevesu, generirajo voltažno grupo K .

Krovne grafe lahko definiramo tudi na sledeči način. Naj bo Y graf in K podgrupa njegove grupe avtomorfizmov $\text{Aut}Y$ z množico orbit \mathcal{W} . Če kvocientna projekcija $\wp: Y \rightarrow Y_{\mathcal{W}}$ glede na orbite podgrupe K ohranja valenco grafa, je \wp *regularna krovna projekcija* z grupo krovnih transformacij K , $\tilde{X} = Y$ je *krovni graf* in $X = Y_{\mathcal{W}}$ *bazni graf*. Pravimo, da se avtomorfizem $\alpha \in \text{Aut}X$ *dvigne* v avtomorfizem grafa \tilde{X} , če obstaja tak avtomorfizem $\tilde{\alpha} \in \text{Aut}\tilde{X}$, ki ga imenujemo *dvig* avtomorfizma α , da je $\tilde{\alpha}\wp = \wp\alpha$. Problem, ali se nek avtomorfizem α grafa X dvigne ali ne, v jeziku voltaž pomeni naslednje. Naj bo $\alpha \in \text{Aut}X$. Potem definiramo funkcijo $\bar{\alpha}$ iz množice voltaž fundamentalnih sklenjenih sprehodov pri izbrani točki $v \in V(X)$ v voltažno grupo K na sledeči način: za vsak fundamentalni sklenjen sprehod C v točki v je $\zeta_C^{\bar{\alpha}} = \zeta_{C^{\alpha}}$, kjer sta ζ_C in $\zeta_{C^{\alpha}}$ voltaži cikla C oziroma C^{α} . Če je K abelska, je $\bar{\alpha}$ neodvisna od izbora bazne točke in fundamentalne sklenjene sprehode v točki v lahko nadomestimo s fundamentalnimi cikli, ki so generirani z loki grafa X , ki ne pripadajo drevesu.

Naslednji trditvi podati relacijo med avtomorfizmi krovnega grafa in avtomorfizmi baznega grafa. Prva trditev je bila dokazana v [92, Theorem 4.2, Corollary 4.3], medtem ko lahko na veljavnost druge trditve sklepamo iz [94, Corollaries 9.4, 9.7, 9.8].

Trditev 2.2.6 [92] *Naj bo $\tilde{X} = \text{Cov}(X, \zeta)$ regularni K -krov grafa X glede na voltažno prirejanje ζ . Potem se avtomorfizem α grafa X dvigne natanko tedaj, ko lahko $\bar{\alpha}$ razširimo v avtomorfizem grupe K .*

Trditev 2.2.7 [94] *Naj bo \tilde{X} regularni K -krov grafa X . Grupa $G \leq \text{Aut}X$, ki deluje polregularno na $V(X)$, se dvigne kot direktni produkt $G \times K$ natanko tedaj, ko obstaja tako voltažno prirejanje $\zeta: A(X) \rightarrow K$, da za vsak $\alpha \in G$ in vsak sprehod W v grafu X velja: $\zeta_W = \zeta_{W^{\alpha}}$.*

Naj bosta $\wp_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$ in $\wp_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ krovni projekciji. Potem sta krovna grafa \tilde{X}_1 in \tilde{X}_2 grafa X *izomorfna*, če obstaja izomorfizem grafov $\tilde{\alpha}: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ in $\beta \in \text{Aut}X$, tako da je $\tilde{\alpha}\wp_2 = \wp_1\beta$. Če je $\beta = id$ pravimo, da sta krovna grafa *ekvivalentna*. Naslednja trditev je v teoriji krovnih tehnik dobro poznana.

Trditev 2.2.8 [69] *Dva regularna \mathbb{Z}_r -krova $\text{Cov}(X, \zeta)$ in $\text{Cov}(X, \zeta')$, kjer sta ζ in ζ' T -reducirani, sta ekvivalentna natanko tedaj, ko obstaja tak avtomorfizem $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_r)$, da je $\zeta_{(u,v)}^{\sigma} = \zeta'_{(u,v)}$ za vsak lok (u, v) grafa X .*

Razdelek zaključujemo s trditvama o regularnih krovih kubičnih simetričnih grafov, ki ju bomo potrebovali v naslednjem poglavju. Prvo trditev je dokazal Lorimer v [90, Theorem 9], drugo pa Jones in Surowski v [74].

Trditev 2.2.9 [90] *Naj bo X povezan kubični simetrični graf in naj bo G s -regularna podgrupa grupe $\text{Aut}X$ za nek $s \geq 1$. Naj bo N podgrupa edinka grupe G in \mathcal{W} množica njenih orbit. Če je $|\mathcal{W}| > 2$, je N jedro delovanja grupe G na množici \mathcal{W} in G/N s -regularna podgrupa grupe $\text{Aut}X_{\mathcal{W}}$. Še več, X je regularni krov grafa $X_{\mathcal{W}}$ z grupo krovnih transformacij N .*

Trditev 2.2.10 [74] *Naj bo \tilde{X} povezan simetričen \mathbb{Z}_r -krov dodekaedra $\text{GP}(10, 2)$. Potem je $r = 1, 2, 3, 4, 6$ ali 12 , graf \tilde{X} pa je izomorfen enemu izmed naslednjih grafov: $\text{GP}(10, 2)$, F040A, F060A, F080A, F120B ali F240C.*

Poglavje 3

Kubični simetrični grafi

Rezultati tega poglavja so objavljeni v [54, 81]. Kot smo omenili že v poglavju 1, so bili kubični simetrični grafi v zadnjih letih predmet številnih raziskav, ki jih lahko v grobem razdelimo na dve vrsti raziskav (glej [24, 25, 26, 27, 45, 47, 49, 71, 87, 120, 121, 132]). Prvo sestavljajo raziskave, ki obravnavajo grupe avtomorfizmov kubičnih simetričnih grafov. V drugi vrsti raziskav pa se raziskovalci ukvarjajo s konstrukcijami novih neskončnih družin, predvsem z metodo krovnih tehnik (glej razdelek 2.2.9).

Leta 1966 je Tutte [129, 7.53, str. 59] dokazal, da je vsak točkovno in povezavno tranzitiven graf lihe valence simetričen. Torej so vsi kubični točkovno in povezavno tranzitivni grafi simetrični. Leta 1947 je prav tako Tutte [128] dokazal, da je vsak končni kubični simetrični graf s -regularen za nek $s \leq 5$. Kasneje sta Djoković in Miller [36] dokazala, da je stabilizator točke v s -regularni podgrupi grupe avtomorfizmov kubičnega simetričnega grafa izomorfen ciklični grupi \mathbb{Z}_3 , če je $s = 1$, simetrični grupi S_3 , če je $s = 2$, grupi $S_3 \times \mathbb{Z}_2$, če je $s = 3$, grupi S_4 , če je $s = 4$, in grupi $S_4 \times \mathbb{Z}_2$, če je $s = 5$. Poleg tega sta dokazala, da na končnih kubičnih grafih obstaja sedem tipov ločno tranzitivnih delovanj. Vendar ta karakterizacija o danem grafu ni podala popolne informacije. Zato sta nedavno Conder in Nedela [27] naredila analizo vseh možnih kombinaciji tipov grupnih delovanj, ki lahko nastopijo v danem kubičnem simetričnem grafu. Na ta način sta glede na tip ločno tranzitivnega delovanja kubične simetrične grafe razdelila v 17 razredov: $\{1\}$, $\{1, 2^1\}$, $\{2^1\}$, $\{2^2\}$, $\{1, 2^1, 2^2, 3\}$, $\{2^1, 2^2, 3\}$, $\{2^1, 3\}$, $\{2^2, 3\}$, $\{3\}$, $\{1, 4^1\}$, $\{4^1\}$, $\{4^2\}$, $\{1, 4^1, 4^2, 5\}$, $\{4^1, 4^2, 5\}$, $\{4^1, 5\}$, $\{4^2, 5\}$ in $\{5\}$. Na primer, razred $\{2^2, 3\}$ vsebuje kubične 3-regularne grafe, katerih grupa avtomorfizmov premora 2-regularno podgrupo, v kateri element, ki obrne povezavo grafa, ni involucija. Z uporabo te karakterizacije in računalniškega programa MAGMA [15] je nato Conder [22] dopolnil Fosterjevo listo kubičnih simetričnih grafov [16, 23] v listo vseh kubičnih simetričnih grafov do 2048 točk. Ta lista nam je bila v veliko pomoč pri raziskovanju kubičnih simetričnih grafov ožine 6.

V razdelku 3.1 bomo naredili popolno klasifikacijo kubičnih simetričnih grafov ožine 6. Med drugim bomo pokazali, da so z izjemo Desarguesovega grafa $GP(10, 3)$ vsi kubični simetrični grafi ožine 6 Cayleyjevi grafi posplošenih diedrskih grup.

V razdelku 3.2 bomo raziskovali strukturne lastnosti kubičnih simetričnih grafov, katerih grupa avtomorfizmov vsebuje 1-regularno podgrupo z $(2, s, 3)$ -prezentacijo,

ki jih bomo potrebovali pri iskanju hamiltonskih ciklov v kubičnih Cayleyjevih grafih grup $z(2, s, 3)$ -prezentacijo v razdelku 4.1. V analizi bomo potrebovali Lorimerjev rezultat [89, 90], ki pravi naslednje. Naj bo X kubični graf in naj bo G podgrupa grupe avtomorfizmov $\text{Aut}X$, ki na grafu X deluje ločno tranzitivno. Potem je grupa G generirana z $G = \langle H, a \rangle$, kjer je $H = G_v$ stabilizator točke $v \in V(X)$ v grupi G in $a \in G$ element, ki lok (u, v) preslika v lok (v, u) , za neko točko $v \in N(u)$. V razdelku 3.2 bomo potrebovali tudi naslednji dobro znan rezultat o kubičnih simetričnih grafih majhnih ožin (glej [55, Proposition 3.4]).

Trditev 3.0.11 *Edini kubični grafi ožine manj kot 6, katerih grupa avtomorfizmov premore 1-regularno podgrupo so: theta graf Θ_2 , polni graf K_4 , polni dvodelni graf $K_{3,3}$, kocka $\text{GP}(4, 1)$ in dodekaeder $\text{GP}(10, 2)$.*

3.1 Klasifikacija kubičnih simetričnih grafov ožine 6

Namen tega razdelka je predstaviti popolno klasifikacijo kubičnih simetričnih grafov ožine 6 (glej izrek 3.1.13 in izrek 3.1.22), rezultat, ki je objavljen v [81]. Znano je (glej na primer [55]), da obstaja le pet povezanih kubičnih simetričnih grafov, ki so ožine manjše od 6. To so: F004A (polni graf K_4), F006A (polni dvodelni graf $K_{3,3}$), F008A (kocka $\text{GP}(4, 1)$), F010A (Petersenov graf $\text{GP}(5, 2)$) in F020A (dodekaeder $\text{GP}(10, 2)$). Obstaja pa neskončno mnogo kubičnih simetričnih grafov ožine 6. Grupe avtomorfizmov slednjih je leta 1971 Miller [111, Theorem 2.2] karakteriziral kot grupe generirane z dvema elementoma, ki zadoščata določenim relacijam. Natančneje, dokazal je, da je s končno mnogo izjemami grupa avtomorfizmov danega kubičnega simetričnega grafa X ožine 6 generirana z

$$\text{Aut}(X) = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ba)^6 = (bab^{-1}a)^{sk} = (bab^{-1}a)^{st}(b^{-1}aba)^{-s} = 1 \rangle,$$

kjer je $0 < 2t \leq k + 1$ in $t^2 + t + 1 \equiv 0 \pmod{k}$. Leta 1985 je Negami [115] pokazal, da je kubični s -regularni graf, $s \geq 2$, ožine 6 dual triangulacije torusa ali Kleinove steklenice. Leta 2006 sta Feng in Nedela [48] pokazala, da so z izjemo polnega grafa $K_{3,3}$, Moebius-Kantorjevega grafa $\text{GP}(8, 3)$, Desarguesovega grafa $\text{GP}(10, 3)$ in dobro znanega Coxeterjevega grafa F028A, vsi kubični simetrični grafi ožine $g \leq 7$ 1-skelet trivalentnih regularnih zemljevidov z lici dolžine g . Nedavno pa sta Conder in Nedela [26] dokazala, da je kubični simetrični graf ožine $g \leq 9$ 1-regularen, 2-regularen ali pa pripada posebni družini petnajstih simetričnih grafov (glej [26, Theorem 2.3]). Za grafe ožine 6 nam njun rezultat skupaj z [48, Corollary 6.3] pove, da velja naslednja trditev.

Trditev 3.1.1 [26, 48] *Naj bo X kubični simetrični graf ožine 6. Potem je X dvodelen in velja ena izmed naslednjih trditev:*

- (i) X je izomorfen Heawoodovemu grafu F014A, ki je 4-regular;
- (ii) X je izomorfen Pappusovemu grafu F018A ali Desarguesovemu grafu $\text{GP}(10, 3)$, ki sta oba 3-regular;
- (iii) X je 2-regularen;

(iv) X je 1-regularen.

Tako pri klasifikaciji 2-regularnih (razdelek 3.1.2) kot tudi pri klasifikaciji 1-regularnih grafov ožine 6 (razdelek 3.1.3) bomo uporabili tehnike teorije grup in kombinatorike. Glavno vlogo v dokazih pa bo imel koncept konsistentnih ciklov in Conwayev rezultat [28] o številu orbit konsistentnih usmerjenih ciklov (glej trditev 2.2.3). (Spomnimo, da je cikel v grafu konsistenten, če obstaja avtomorfizem, ki na njem deluje kot rotacija za ena naprej, glej razdelek 2.2.6.) Dokazali bomo, da so v kubičnem 1-regularnem grafu ožine 6 vsi konsistentni cikli dolžine 6, in da so v kubičnem 2-regularnem grafu, ki ni Moebius-Kantorjev graf $GP(8, 3)$, konsistentni cikli dolžine 6 in $2m \geq 8$ (glej trditev 3.1.9). Drsni avtomorfizem vsakega izmed teh konsistentnih $2m$ -ciklov je semiregularen. (Znano je, da vsak kubični točkovno tranzitiven graf premore semiregularen avtomorfizem [105]. Pred kratkim je bil obstoj semiregularnega avtomorfizma dokazan tudi v točkovno tranzitivnih grafih valence 4, problem obstoja semiregularnega avtomorfizma v točkovno tranzitivnih grafih večjih valenc pa je še vedno odprt [95].)

V razdelku 3.1.1 bomo obravnavali *izjeme*, družino štirih kubičnih simetričnih grafov ožine 6: Heawoodov graf $F014A$, Moebius-Kantorjev graf $GP(8, 3)$, Pappusov graf $F018A$ in Desarguesov graf $GP(10, 3)$. V razdelku 3.1.2 bomo klasificirali kubične 2-regularne in v razdelku 3.1.3 kubične 1-regularne grafe ožine 6. Po trditvi 3.1.1 rezultati teh dveh razdelkov podajo popolno klasifikacijo kubičnih simetričnih grafov ožine 6.

3.1.1 Izjeme

Po izreku [134, Theorem 3.1] je simetrični graf ožine g lahko največ $(g + 2)/2$ -ločno tranzitiven. Torej je lahko kubični simetrični graf ožine 6 največ 4-ločno tranzitiven. Pred kratkim sta Conder in Nedela (glej trditev 3.1.1) pokazala, da v resnici obstajajo le trije kubični simetrični grafi, ki so več kot 2-regularni, to so: Heawoodov graf $F014A$, Pappusov graf $F018A$ in Desarguesov graf $GP(10, 3)$. Te grafe skupaj z Moebius-Kantorjevim grafom $GP(8, 3)$ (poznani tudi kot $F016A$) imenujemo *izjeme*. Izjemni so v smislu, da so edini kubični simetrični grafi ožine 6, v katerih 2-lok leži na več kot enem 6-ciklu. Ta izjava drži po naslednji trditvi, ki sta jo prva dokazala Feng in Nedela v [48, Lemma 4.2]. Trditev sta dokazala v jeziku vložitve grafov na orientabilne ploskve. Tu navajamo dokaz bolj kombinatorične narave.

Trditev 3.1.2 [48] *Naj bo X povezan kubični graf ožine 6 in naj bo c število 6-ciklov, ki vsebujejo izbrano povezavo grafa X . Potem je $c = 2, 4, 6$ ali 8 . Če je $c > 2$, je graf X izomorfen enemu izmed naslednjih štirih grafov: Heawoodov graf $F014A$, Moebius-Kantorjev graf $GP(8, 3)$, Pappusov graf $F018A$ in Desarguesov graf $GP(10, 3)$.*

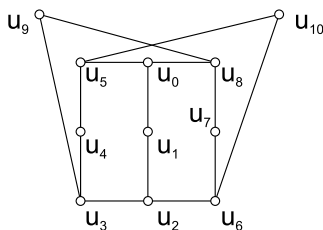
DOKAZ. Naj bo $\mu = (u_0, u_1, u_2)$ 2-lok v grafu X . Ker je X valence 3, poljuben 2-lok ne more ležati na več kot štirih 6-ciklih. Zaradi simetričnosti grafa X pa velja tudi, da vsi 2-loki v grafu X ležijo na enako mnogo 6-ciklih. Glede na število 6-ciklov, ki vsebujejo 2-lok μ , ločimo tri primere.

MOŽNOST 1. Naj 2-lok μ leži na štirih 6-ciklih.

Potem poljubna povezava grafa X leži na osmih 6-ciklih. Obstaja osem točk $u_i \in V(X)$, $i \in \{3, 4, \dots, 10\}$, tako da so

$$u_0u_1u_2u_3u_4u_5u_0, u_0u_1u_2u_6u_7u_8u_0, u_0u_1u_2u_3u_9u_8u_0 \text{ in } u_0u_1u_2u_6u_{10}u_5u_0$$

štirje 6-cikli, ki vsebujejo μ (glej sliko 3.1). Poiskati moramo tretjega soseda točke u_7 . Ker je X ožine 6, ta točka ni nobena izmed točk u_i , $i \in \{0, 1, \dots, 10\}$. Torej obstaja točka u_{11} , ki je sosednja točki u_7 in je različna od točk u_i , $i \in \{0, 1, \dots, 10\}$. Sedaj si oglejmo 2-lok (u_7, u_6, u_2) . Ker mora pripadati štirim različnim 6-ciklom, imata u_3 in u_{11} skupno soseda. Ta je lahko točka u_4 ali točka u_9 . Vendar, ker je v slednjem primeru $u_9u_8u_7u_{11}u_9$ 4-cikel v grafu X , ugotovimo, da je $u_4 \in N(u_3) \cap N(u_{11})$. Torej je $u_4 \sim u_{11}$ in točki u_1 in u_{11} imata skupno soseda, ki je različna od točk u_i , $i \in \{0, 1, \dots, 11\}$. Označimo jo z u_{12} . Z iskanjem štirih 6-ciklov, ki vsebujejo 2-lok (u_3, u_4, u_{11}) , ugotovimo, da $N(u_9) \cap N(u_{12}) \neq \emptyset$ in $u_i \notin N(u_9) \cap N(u_{12})$, za vsak $i \in \{0, 1, \dots, 12\}$. Torej obstaja neka točka u_{13} , različna od točk u_i , $i \in \{0, 1, \dots, 12\}$, ki je sosednja točki u_9 in točki u_{12} . Nadalje, ker (u_0, u_1, u_{12}) leži na štirih 6-ciklih, se hitro prepričamo, da je u_{10} skupna soseda točk u_5 in u_{13} . Torej je X reda 14, izomorfen je Heawoodovemu grafu F014A (glej sliko 3.4).

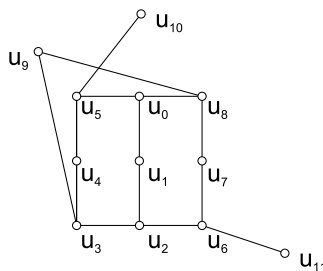


Slika 3.1: 6-cikli, ki vsebujejo 2-lok $\mu = (u_0, u_1, u_2)$, ko vsak 2-lok v grafu X leži na štirih 6-ciklih.

MOŽNOST 2. Naj μ leži na treh 6-ciklih.

Potem lahko predpostavimo, da obstaja devet točk $u_i \in V(X)$, $i \in \{3, 4, \dots, 10, 11\}$, tako da so $u_0u_1u_2u_3u_4u_5u_0$, $u_0u_1u_2u_6u_7u_8u_0$, $u_0u_1u_2u_3u_9u_8u_0$ trije 6-cikli, ki vsebujejo μ , in da je $N(u_5) \cap N(u_6) = \emptyset$, $u_5 \sim u_{10}$ ter $u_6 \sim u_{11}$ (glej sliko 3.2). Nadalje, ker je X ožine 6, je $N(u_1) \cap N(u_7) = \emptyset$ ter tretja soseda točke u_1 in tretja soseda točke u_7 sta obe različni od točk $u_i \in V(X)$, $i \in \{0, 1, \dots, 10, 11\}$. Torej obstaja točka u_{12} povezana z u_1 in točka u_{13} povezana z u_7 .

Denimo, da $u_4 \not\sim u_{13}$. Potem obstaja točka u_{14} , različna od točk $u_i \in V(X)$, $i \in \{0, 1, \dots, 13\}$. Ker (u_6, u_2, u_3) leži na treh 6-ciklih, $N(u_4) \cap N(u_7) = \emptyset$ in $N(u_5) \cap \{u_{11}\} = \emptyset$, mora biti $u_{11} \sim u_{14}$ in $N(u_9) \cap N(u_{11}) \neq \emptyset$. Ko uporabimo dejstvo, da je X ožine 6, ugotovimo, da obstaja točka u_{15} , različna od točk $u_i \in V(X)$, $i \in \{0, 1, \dots, 14\}$, za katero velja: $N(u_9) \cap N(u_{11}) = \{u_{15}\}$. Nadalje, ker (u_5, u_0, u_8) leži na treh 6-ciklih in po predpostavki $N(u_4) \cap N(u_7) = \emptyset$, ugotovimo, da je $N(u_{10}) = \{u_5, u_{13}, u_{15}\}$. Vrh tega je $N(u_{11}) \cap N(u_0) = \emptyset$ in 2-lok (u_1, u_2, u_6) leži na treh 6-ciklih. Zato je $N(u_{12}) = \{u_1, u_{13}, u_{14}\}$. Torej je X reda 16 in izomorfen Moebius-Kantorjevemu grafu GP(8, 3) (glej sliko 3.5).



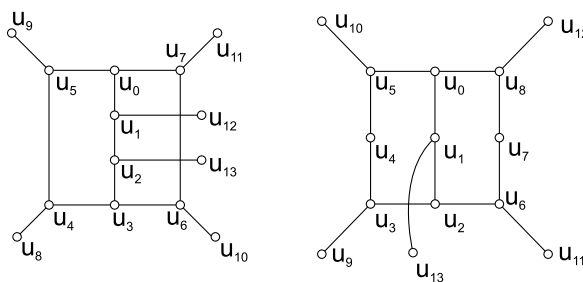
Slika 3.2: 6-cikli, ki vsebujejo 2-lok $\mu = (u_0, u_1, u_2)$, ko vsak 2-lok v grafu X leži na treh 6-ciklih.

Denimo, da je $u_4 \sim u_{13}$, in si oglejmo 2-lok (u_8, u_0, u_5) . Ta 2-lok leži na 6-ciklu $u_8u_0u_5u_4u_1u_3u_7u_8$ in 6-ciklu $u_8u_0u_5u_4u_3u_9u_8$. Ker mora ležati na treh 6-ciklih je $N(u_7) \cap N(u_{10}) \neq \emptyset$ ali $N(u_{10}) \cap N(u_9) \neq \emptyset$. Če je $N(u_7) \cap N(u_{10}) \neq \emptyset$, mora biti $u_{10} \sim u_{13}$. Vendar potem pa je $u_{10}u_{13}u_4u_5u_{10}$ 4-cikel, protislovje. Odtod sledi, da obstaja točka u_{14} , različna od točk $u_i \in V(X)$, $i \in \{0, 1, \dots, 13\}$, za katero velja: $N(u_{10}) \cap N(u_9) = \{u_{14}\}$. Sedaj si oglejmo 2-lok (u_1, u_2, u_6) . Ker je $N(u_0) \cap N(u_{11}) = \emptyset$, je $u_{12} \sim u_{13}$ in obstaja točka u_{15} , različna od točk $u_i \in V(X)$, $i \in \{0, 1, \dots, 14\}$, za katero velja: $N(u_{10}) \cap N(u_9) = \{u_{15}\}$. Nadalje, ker tudi 2-lok (u_8, u_7, u_6) leži na treh 6-ciklih, ugotovimo, da je $N(u_{11}) \cap N(u_9) = \{u_{14}\}$. Vendar potem 2-lok (u_9, u_{14}, u_{11}) leži le na dveh 6-ciklih, protislovje.

MOŽNOST 3. Naj μ leži na dveh 6-ciklih.

Potem obstaja enajst točk $u_i \in V(X)$, $i \in \{3, 4, 5, \dots, 13\}$, tako da imata 6-cikla, ki vsebujeta μ , tri ali dve skupni povezavi (glej sliko 3.3).

Denimo, da imata 6-cikla, ki vsebujeta μ , tri skupne povezave (glej levi graf na sliki 3.3). Tedaj mora poljubni 2-lok v grafu X ležati na dveh 6-ciklih take oblike. Torej, če si ogledamo 2-loka (u_1, u_2, u_3) in (u_2, u_3, u_4) , ugotovimo, da je $u_{12} \sim u_8$ in $u_{13} \sim u_9$. Vendar potem 2-lok (u_5, u_4, u_1) leži na treh 6-ciklih, protislovje.



Slika 3.3: Dve možnosti za lokalno strukturo grafa X v primeru, ko 2-lok $\mu = (u_0, u_1, u_2)$ leži na dveh 6-ciklih.

Odtod sledi, da lokalna struktura dveh 6-ciklov, ki vsebujeta μ , izgleda kot je prikazano na desni strani slike 3.3. Ker je X ožine 6, je tretja soseda točke u_7 različna od točk $u_i \in V(X)$, $i \in \{0, 1, \dots, 13\}$, in zato $N(u_7) = \{u_6, u_8, u_{14}\}$. Očitno je tudi, da je $N(u_4) \cap \{u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}\} = \emptyset$.

PODMOŽNOST 3.1. Naj bo $u_4 \sim u_{14}$.

Ker 2-lok (u_8, u_0, u_5) leži na dveh 6-ciklih, je $N(u_{10}) \cap N(u_{12}) \neq \emptyset$. Nadalje, ker je X ožine 6, za vsak $i \in \{0, 1, \dots, 14\}$ velja: $u_i \notin N(u_{10}) \cap N(u_{12})$. Torej obstaja točka u_{15} , različna od točk $u_i \in V(X)$, $i \in \{0, 1, \dots, 14\}$, za katero velja: $u_{15} \in N(u_{10}) \cap N(u_{12})$. Ker (u_0, u_8, u_7) že leži na dveh 6-ciklih $u_0u_8u_7u_6u_2u_1u_0$ in $u_0u_8u_7u_{14}u_4u_5u_0$, je tretja soseda točke u_{14} različna od točk $u_i \in V(X)$, $i \in \{0, 1, \dots, 15\}$, in zato $N(u_{14}) = \{u_4, u_7, u_{16}\}$. Sedaj si oglejmo 2-lok (u_1, u_2, u_3) . Ker leži na dveh 6-ciklih, mora biti $N(u_{13}) \cap N(u_9) \neq \emptyset$. Očitno $u_i \notin N(u_{13}) \cap N(u_9)$, $i \in \{0, 1, \dots, 16\}$. Zato obstaja točka u_{17} , različna od točk $u_i \in V(X)$, $i \in \{0, 1, \dots, 16\}$. Ker (u_6, u_2, u_3) leži na dveh 6-ciklih, ugotovimo, da je $N(u_{11}) \cap N(u_9) \neq \emptyset$. Vrh tega je $N(u_{11}) \cap N(u_9) = \{u_{17}\}$ ali pa $N(u_{11}) \cap N(u_9) = \{u_{18}\}$, kjer je $u_{18} \neq u_i$ za vsak $i \in \{0, 1, \dots, 17\}$. V prvem primeru je 2-lok (u_2, u_6, u_{11}) vsebovan na 6-ciklu $u_2u_6u_{11}u_{17}u_9u_3u_2$ in obstaja točka $u_j \in N(u_{11})$, za katero velja: $N(u_1) \cap N(u_j) = \{u_{13}\}$. Vendar potem je pa $u_{13}u_{17}u_{11}u_ju_{13}$ 4-cikel v grafu X , protislovje. Torej je $N(u_{11}) \cap N(u_9) = \{u_{18}\}$, kjer $u_{18} \neq u_i$, za vsak $i \in \{0, 1, \dots, 17\}$. Ker 2-lok (u_5, u_4, u_3) leži na dveh 6-ciklih, sledi, da je $N(u_{10}) \cap N(u_9) = \{u_{18}\}$ ali pa je $N(u_{10}) \cap N(u_9) = \{u_{17}\}$.

Če je $N(u_{10}) \cap N(u_9) = \{u_{18}\}$, je $N(u_{15}) \cap N(u_{14}) = \{u_{16}\}$ in 2-lok (u_{10}, u_5, u_4) leži na 6-ciklu $u_{10}u_5u_4u_3u_9u_{18}u_{10}$. Nadalje, ker (u_7, u_6, u_2) leži na dveh 6-ciklih, je $N(u_{12}) \cap N(u_{13}) \neq \emptyset$. Očitno nobena točka u_i , $i \in \{0, 1, \dots, 18\}$ ne pripada preseku $N(u_{12}) \cap N(u_{13})$ in zato obstaja točka $u_{19} \in N(u_{12}) \cap N(u_{13})$, ki je različna od točk u_i , $i \in \{0, 1, \dots, 18\}$. Ker tudi (u_{17}, u_9, u_3) leži na dveh 6-ciklih, mora veljati, da je $u_{17} \sim u_{16}$, in posledično, da je $u_{11} \sim u_{19}$ (saj je X 3-povezan). Vendar potem pa (u_{10}, u_{18}, u_9) leži na enem samem 6-ciklu, protislovje.

Torej je $N(u_{10}) \cap N(u_9) = \{u_{17}\}$. Posledično ugotovimo, da (u_4, u_3, u_9) leži na 6-ciklu $u_4u_3u_9u_{17}u_{10}u_5u_4$. Poleg tega, se lahko bralec hitro prepriča, da je $N(u_{14}) \cap N(u_{18}) = \{u_{16}\}$. Dejstvo, da (u_1, u_2, u_6) leži na dveh 6-ciklih implicira, da obstaja točka u_{19} , ki je različna od točk $u_i \in V(X)$, $i \in \{0, 1, \dots, 18\}$. Če pretehtamo možnosti glede dveh 6-ciklov, ki vsebujeta (u_{10}, u_{15}, u_{12}) , ugotovimo, da je $u_{12} \sim u_{19}$. Ker je X 3-povezavno povezan, sledi, da je $u_{15} \sim u_{16}$ in zato je X izomorfen Desarguesovemu grafu $GP(10, 3)$ (glej sliko 3.7).

PODMOŽNOST 3.2. Naj bo $u_4 \not\sim u_{14}$.

Potem obstaja točka u_{15} , različna od točk $u_i \in V(X)$, $i \in \{0, 1, \dots, 13, 14\}$, ki pripada množici $N(u_4)$. Ker 2-loki (u_7, u_6, u_2) , (u_0, u_5, u_4) , (u_0, u_8, u_7) in (u_2, u_3, u_4) ležijo na dveh 6-ciklih, ugotovimo, da je $N(u_3) \cap N(u_{14}) \neq \emptyset$, $N(u_8) \cap N(u_{15}) \neq \emptyset$, $N(u_5) \cap N(u_{14}) \neq \emptyset$ in $N(u_6) \cap N(u_{15}) \neq \emptyset$, ter zato $u_{14} \sim u_9$, $u_{15} \sim u_{12}$, $u_{10} \sim u_{14}$ in $u_{15} \sim u_{11}$. Sedaj si oglejmo 2-loka (u_1, u_2, u_3) in (u_1, u_2, u_6) . Ker ležita na dveh 6-ciklih, obstajata taki točki u_{16} in u_{17} , obe različni od točk u_i , $i \in \{0, 1, \dots, 15\}$, da je $N(u_9) \cap N(u_{13}) = \{u_{16}\}$ in $N(u_{11}) \cap N(u_{12}) = \{u_{17}\}$. Poleg tega dejstvo, da (u_{10}, u_5, u_0) leži na dveh 6-ciklih implicira, da je $N(u_{10}) \cap N(u_{13}) \neq \emptyset$. Posledično je $u_{10} \sim u_{16}$. Ker pa je X 3-povezavno povezan, ugotovimo, da je $u_{13} \sim u_{16}$. Odtod sledi, da je X izomorfen Pappusovemu grafu $F018A$ (glej sliko 3.6). S tem je dokaz trditve 3.1.2 končan. ■

Lastnosti izjem, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju, podajamo v spodnjih primerih 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5 in 3.1.6.

Primer 3.1.3 Heawoodov graf F014A, graf na sliki 3.4, je edini kubični simetrični graf reda 14. F014A je 4-regularen in ožine 6. Omenimo še, da je F014A Cayleyjev graf $\text{Cay}(D_{14}, \{x, xy, xy^3\})$ diedrske grupe $D_{14} = \langle x, y \mid x^2 = y^7 = 1, y^x = y^{-1} \rangle$.

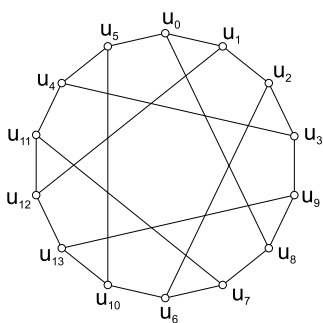
Ker sta permutaciji s ciklično dekompozicijo

$$(u_0 u_8 u_7 u_{11} u_{12} u_{13} u_{10} u_5)(u_1 u_9 u_6 u_4)(u_2 u_3)$$

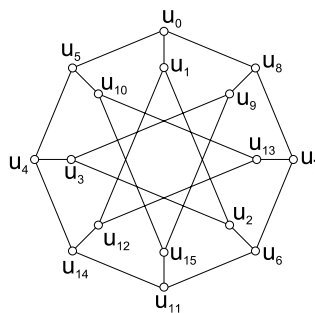
in

$$(u_0 u_1 u_2 u_3 u_4 u_5)(u_8 u_{12} u_6 u_9 u_{11} u_{10})(u_7 u_{13})$$

avtomorfizma grafa F014A, sledi, da so konsistentni cikli v F014A dolžine 6 in 8. Več informacij o grafu F014A lahko bralec najde v [16, 23, 68].



Slika 3.4: Heawoodov graf F014A.



Slika 3.5: Moebius-Kantorjev graf GP(8,3).

Primer 3.1.4 Moebius-Kantorjev graf GP(8,3), poznan tudi kot F016A (graf na sliki 3.5), je edini kubični simetrični graf reda 16. GP(8,3) je 2-regularen, ožine 6 in Cayleyjev graf $\text{Cay}(D_{16}, \{x, xy, xy^3\})$ diedrske grupe $D_{16} = \langle x, y \mid x^2 = y^8 = 1, y^x = y^{-1} \rangle$. (GP(8,3) je edini posplošeni Petersenov graf z izjemo prizem GP(n,1), $n \geq 3$, ki je Cayleyjev graf diedrske grupe.) GP(8,3) je tudi Cayleyjev graf grupe $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Moebius-Kantorjev graf GP(8,3) ima heksagonalno vložitev na torus in oktogonalno vložitev na dvojni torus (glej [29]). Ker sta permutaciji s ciklično dekompozicijo

$$(u_0 u_8 u_7 u_6 u_{11} u_{14} u_4 u_5)(u_1 u_9 u_{13} u_2 u_{15} u_{12} u_3 u_{10})$$

in

$$(u_0 u_1 u_{12} u_{13} u_7 u_6 u_{11} u_{15} u_9 u_3 u_4 u_5)(u_8 u_2 u_{14} u_{10})$$

avtomorfizma grafa GP(8,3), sledi, da so konsistentni cikli v GP(8,3) dolžine 8 in 12. Več informacij o tem grafu lahko bralec najde v [16, 23, 104].

Primer 3.1.5 Pappusov graf F018A, graf na sliki 3.6, je edini kubični simetrični graf reda 18. F018A je 3-regularen, ožine 6 in Cayleyjev graf $\text{Cay}((\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2, \{xz, yz, z\})$ grupe $H = (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2 = \langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^2 = 1, x^z = x^{-1}, y^z = y^{-1}, xy = yx \rangle$. Njegova grupa avtomorfizmov, grupa izomorfná grupi $\mathbb{Z}_3 \rtimes ((S_3 \times S_3) \rtimes \mathbb{Z}_2)$, ima eno samo 1-regularno podgrupo, izomorfná je grupi $H \rtimes \mathbb{Z}_3$.

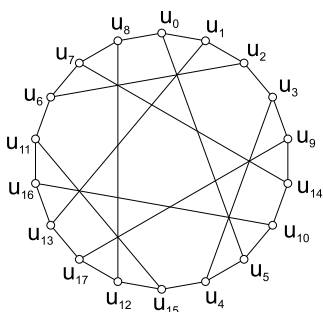
Ker sta permutaciji s ciklično dekompozicijo

$$(u_0 u_1 u_{13} u_{16} u_{10} u_5)(u_8 u_2 u_{17} u_{11} u_{14} u_4)(u_7 u_3 u_{12} u_6 u_9 u_{15})$$

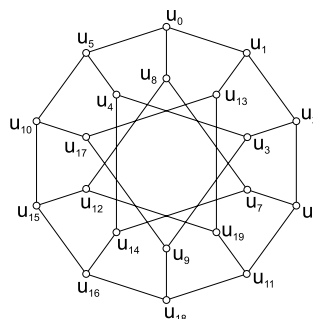
in

$$(u_{11} u_{15} u_{12} u_{17} u_9 u_{14} u_{10} u_5 u_0 u_1 u_2 u_6)(u_{16} u_4 u_8 u_{13} u_3 u_7)$$

avtomorfizma grafa F018A, sledi, da so konsistentni cikli v F018A dolžine 6 in 12. Omenimo še, da je drsni avtomorfizem konsistentnega 6-cikla v grafu F018A $(3, 6)$ -semiregularen. Če si ogledamo pripadajoči kvocientni graf, ugotovimo, da je Pappusov graf $I_3^6(3)$ -pot (glej sliko 3.11). Več informacij o tem grafu si bralec lahko ogleda v [16, 23, 46, 47, 75].



Slika 3.6: Pappusov graf F018A.



Slika 3.7: Desarguesov graf GP(10, 3).

Primer 3.1.6 Desarguesov graf $GP(10, 3)$, poznan tudi kot graf z oznako F020B (graf na sliki 3.7), je eden izmed dveh kubičnih simetričnih grafov reda 20. $GP(10, 3)$ je 3-regularen, ima ožino 6 in po [114, Theorem 1] ni Cayleyjev graf. Kot bomo videli v nadaljevanju, je $GP(10, 3)$ tudi edini kubični simetrični graf ožine 6, ki ni Cayleyjev.

Ker sta permutaciji s ciklično dekompozicijo

$$(u_0 u_1 u_2 u_6 u_7 u_8)(u_5 u_{13} u_3 u_{11} u_{14} u_{12})(u_4 u_{19})(u_{10} u_{17} u_9 u_{18} u_{16} u_{15})$$

in

$$(u_0 u_1 u_2 u_6 u_{11} u_{18} u_{16} u_{15} u_{10} u_5)(u_8 u_{13} u_3 u_7 u_{19} u_9 u_{14} u_{12} u_{17} u_4)$$

avtomorfizma grafa $GP(10, 3)$, sledi, da so konsistentni cikli v $GP(10, 3)$ dolžine 6 in 10. Več informacij o tem grafu si lahko bralec ogleda v [23, 75].

Ker je Heawoodov graf F014A 4-regularen, Moebius-Kantorjev graf $GP(8, 3)$ 2-regularen ter sta Pappusov graf F018A in Desarguesov graf $GP(10, 3)$ 3-regularna, velja naslednja posledica trditve 3.1.2.

Posledica 3.1.7 Naj bo X kubični 2-regularni graf ožine 6, v katerem vsak 2-lok leži na več kot enem 6-ciklu. Potem je X Moebius-Kantorjev graf $GP(8, 3)$.

3.1.2 Kubični 2-regularni grafi ožine 6

Namen tega podrazdelka je klasifikacija kubičnih 2-regularnih grafov ožine 6 (glej izrek 3.1.13). V dokazu bomo potrebovali naslednje trditve in pomožne trditve. Najprej navajamo trditev, ki jo je moč izveliči iz [48, Lemma 6.1].

Trditev 3.1.8 [48] *Naj bo X kubični simetrični graf ožine 6 in naj bo G 1-regularna podgrupa grupe avtomorfizmov $\text{Aut}X$. Če je $G = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^3 = \beta^2 = (\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})^3 = 1, \dots \rangle$, je G prava podgrupa grupe $\text{Aut}X$.*

S pomočjo trditve 3.1.2 in trditve 3.1.8 lahko dokažemo sledeči rezultat o konsistentnih usmerjenih ciklih v kubičnih simetričnih grafih ožine 6. Kot bomo videli v nadaljevanju, je ta trditev ključnega pomena pri klasifikaciji kubičnih simetričnih grafov ožine 6.

Trditev 3.1.9 *Naj bo X kubični simetrični graf ožine 6. Potem veljajo naslednje trditve.*

- (i) *Če je X Heawoodov graf F014A, so konsistentni usmerjeni cikli dolžine 6 in 8; če je X Moebius-Kantorjev graf $\text{GP}(8, 3)$, so konsistentni usmerjeni cikli dolžine 8 in 12; če je X Pappusov graf F018A, so konsistentni usmerjeni cikli dolžine 6 in 12; če je X Desarguesov graf $\text{GP}(10, 3)$, so konsistentni usmerjeni cikli dolžine 6 in 10.*
- (ii) *Če je X 2-regularen, ki ni Moebius-Kantorjev graph $\text{GP}(8, 3)$, so konsistentni usmerjeni cikli dolžine 6 in $n > 6$.*
- (iii) *Če je X 1-regularen, so vsi konsistentni usmerjeni cikli dolžine 6.*

DOKAZ. Točka (i) velja po primerih 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5 in 3.1.6. Torej lahko predpostavimo, da je X različen od grafov v (i). Naj bo $\vec{C} = u_0u_1u_2u_3u_4u_5u_0$ usmerjen 6-cikel v grafu X in naj bo za vsak $i \in \mathbb{Z}_6$ točka $v_i \in N(u_i) \setminus V(\vec{C})$.

Denimo, da je X 2-regularen, ki ni Moebius-Kantorjev graph $\text{GP}(8, 3)$. Potem po posledici 3.1.7 vsak 2-lok v grafu X leži na natanko enem 6-ciklu. Ker je X 2-regularen, obstaja avtomorfizem $\alpha \in \text{Aut}X$, ki 2-lok (u_0, u_1, u_2) preslika v 2-lok (u_1, u_2, u_3) . Ker je pripadajoči cikel usmerjenega cikla \vec{C} edini cikel, ki gre skozi 2-lok (u_1, u_2, u_3) , je $\vec{C}^\alpha = \vec{C}$, in zato $u_i^\alpha = u_{i+1}$ za vsak $i \in \mathbb{Z}_6$. Sledi, da so usmerjeni 6-cikli v grafu X konsistentni. Vrh tega obstaja avtomorfizem grafa X , ki \vec{C} preslika v njemu nasprotno usmerjen 6-cikel $u_0u_5u_4u_3u_2u_1u_0$ (saj je X 2-regularen). Zato usmerjeni 6-cikli v grafu X tvorijo eno samo orbito konsistentnih usmerjenih ciklov. Po trditvi 2.2.3 velja točka (ii).

Z namenom dokazati točko (iii) predpostavimo, da je graf X 1-regularen. Po trditvi 3.1.2 obstaja tak 6-cikel C' , različen od cikla C , da sta C in C' edina 6-cikla, ki vsebujeta lok (u_5, u_0) . Naj $\alpha \in \text{Aut}X_{u_0}$ deluje na sosedih točke u_0 kot permutacija $(v_0 u_5 u_1)$ in naj β deluje na točkah, ki so sosednje krajiščem povezave u_5u_0 kot permutacija $(u_4 u_1)(v_5 v_0)$ ali kot permutacija $(u_4 v_0)(u_1 v_5)$ (β je avtomorfizem, ki lok (u_5u_0) preslika v lok (u_0u_5)). Z drugimi besedami, β fiksira C in C' , ali pa C in C' zamenja. Če β fiksira C in C' , potem se bo bralec prepričal sam, da je $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$

reda 3, kar je v protislovju s trditvijo 3.1.8. Torej β zamenja C in C' , in posledično $\beta\alpha$ fiksira C in preslika lok (u_4, u_5) v lok (u_5, u_0) . Sledi, da je \vec{C} konsistenten. Nadalje, z uporabo dejstva, da je X 1-regularen, ugotovimo, da za poljuben 6-cikel v grafu X pripadajoča usmerjena 6-cikla pripadata različnim orbitam konsistentnih usmerjenih 6-ciklov. Zopet rezultat sledi po trditvi 2.2.3. ■

S trditvijo 3.1.9 lahko dokažemo naslednje tri pomožne trditve.

Lema 3.1.10 *Naj bo X kubični 2-regularni graf ožine 6, ki ni Moebius-Kantorjev graf $\text{GP}(8, 3)$. Potem je drsni avtomorfizem konsistentnega usmerjenega n -cikla \vec{D} , $n > 6$, (k, n) -semiregularen, kjer je $k \geq 2$, in graf X $I_k^n(t)$ -pot. Nadalje, če je $k = 2$, je X posplošeni Petersenov graf $\text{GP}(12, 5) \cong \text{GP}(12, 7)$.*

DOKAZ. Označimo točke konsistentnega usmerjenega cikla \vec{D} na tak način, da je $\vec{D} = u_0^0 u_0^1 u_0^2 \cdots u_0^{n-1} u_0^0$, in naj bo ρ njegov drsni avtomorfizem; z drugimi besedami: $(u_0^s)^\rho = u_0^{s+1}$ za vsak $s \in \mathbb{Z}_n$. Ker X ni $\text{GP}(8, 3)$, po posledici 3.1.7 vsak 2-lok v grafu X leži na natanko enem 6-ciklu. Očitno je ρ reda n , saj bi drugače $\rho^n \neq 1$ fiksiral $(n-1)$ -lok $(u_0^0, u_0^1, u_0^2, \dots, u_0^{n-1})$, kar nasprotuje dejstvu, da je X 2-regularen. Naj bo \mathcal{W} množica orbit avtomorfizma ρ pri njegovem delovanju na $V(X)$ in naj bo $|\mathcal{W}| = k$. Očitno je $V(\vec{D}) \in \mathcal{W}$. Nadalje, ker so edini simetrični cirkulanti Cayleyjevi grafi $\text{Cay}(\mathbb{Z}_n, \{\pm 1, n/2\})$, ki so ožine 4, velja, da je $|\mathcal{W}| = k \geq 2$. Lemo bomo dokazali z indukcijo po številu k . Glede na strukturo obravnavanih grafov baza indukcije zajema vse vrednosti števila k iz množice $\{2, 3, 4, 5\}$.

Naj bodo orbite v \mathcal{W} označene na tak način, da je $W_0 = V(\vec{D})$ in W_1 orbita povezana z orbito W_0 . Ker je X kubičen in je ρ reda n , klasičen argument preštevanja (glej razdelek 2.1.1 o delovanju grup) pokaže, da so orbite v \mathcal{W} lahko naslednjih dolžin: n , $n/2$ in $n/3$. Očitno je $|W_0| = n$.

Naj oznake točk v orbiti $W_1 = \{u_1^s \mid s \in \mathbb{Z}_n\}$ sledijo delovanju avtomorfizma ρ , to je $(u_1^s)^\rho = u_1^{s+1}$, in naj bo $u_0^s \sim u_1^s$ za vsak $s \in \mathbb{Z}_n$. Denimo, da je W_1 dolžine $n/3$. Potem je $|\mathcal{W}| = 2$ in za vsak $s \in \mathbb{Z}_n$ velja, da je $u_1^s = u_1^{s+n/3} = u_1^{s+2n/3}$. Torej je $N(u_1^s) = \{u_0^s, u_0^{s+n/3}, u_0^{s+2n/3}\}$. Vendar, ker je $n/3 > 2$, 2-lok $(u_0^1, u_1^1, u_0^{1+n/3})$ leži na dveh različnih 6-ciklih $u_0^0 u_1^0 u_0^{n/3} u_0^{1+n/3} u_1^1 u_0^0$ in $u_0^1 u_1^1 u_0^{1+n/3} u_0^{2+n/3} u_1^2 u_0^1$, protislovje. Denimo, da je W_1 dolžine $n/2$. Potem za vsak $s \in \mathbb{Z}_n$ velja, da je $u_1^s = u_1^{s+n/2}$ in $u_0^s, u_0^{s+n/2} \in N(u_1^s)$. Vendar potem 2-lok $(u_0^1, u_1^1, u_0^{1+n/2})$ leži na dveh različnih 6-ciklih $u_0^0 u_1^0 u_0^{n/2} u_0^{1+n/2} u_1^1 u_0^0$ in $u_0^1 u_1^1 u_0^{1+n/2} u_0^{2+n/2} u_1^2 u_0^1$, zopet protislovje. Torej je W_1 dolžine n , $d(W_0, W_1) = 1$ in $X[W_0, W_1] = nK_2$. Če je $|\mathcal{W}| = k = 2$, je ρ $(2, n)$ -semiregularen, in zato je X posplošeni Petersenov graf. Ker so $\text{GP}(8, 3)$, $\text{GP}(10, 3)$ in $\text{GP}(12, 5)$ edini simetrični posplošeni Petersenovi grafi ožine 6 in je graf $\text{GP}(10, 3)$ 3-regularen, sledi, da je X izomorfen grafu $\text{GP}(12, 5) \cong \text{GP}(12, 7)$, ki je očitno $I_2^{12}(7)$ -pot.

Potentakem lahko sedaj predpostavimo, da je $|\mathcal{W}| \geq 3$. V tem primeru je valenca podgrafa $X[W_1]$ enaka 0 ali 1 in obstaja orbita v \mathcal{W} , ki je različna od orbite W_0 in povezana z orbito W_1 .

Oglejmo si 2-lok (u_0^0, u_0^1, u_0^2) . Ta 2-lok leži na enem samem 6-ciklu, imenujmo ga C . Enoličnost tega 6-cikla implicira, da so u_0^0 , u_0^1 in u_0^2 edine točke iz W_0 , ki so vsebovane v C , in zato morata biti točki u_1^0 in u_1^2 vsebovani v C . Nadalje, ker je

valenca podgrafa $X[W_1]$ enaka 0 ali 1, mora šesta točka u cikla C , ki je povezana z obema u_1^0 in u_1^2 , pripadati orbiti, ki ni orbita W_0 in je povezana z orbito W_1 . Imenujmo to orbito W_2 . Sledi, da je $d(W_1) = 0$, $d(W_1, W_2) = 2$ in $|W_2| = n$. Poleg tega lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da so točke v orbiti $W_2 = \{u_2^s \mid s \in \mathbb{Z}_n\}$ označene na tak način, da je $(u_2^s)^\rho = u_2^{s+1}$ in $u_1^s \sim u_2^s$ za vsak $s \in \mathbb{Z}_n$ ter $u = u_2^2$. Odtod sledi, da za vsak $s \in \mathbb{Z}_n$ velja: $N(u_1^s) = \{u_0^s, u_2^s, u_2^{s+2}\}$. Torej, če je $k = 3$, je $\rho(3, n)$ -semiregularen. Ker je X kubičen in $d(W_1, W_2) = 2$, mora biti n sod in $N(u_2^s) = \{u_1^s, u_1^{s-2}, u_2^{s+n/2}\}$ za vsak $s \in \mathbb{Z}_n$. Odtod pa sledi, da je $X I_3^n(n/2)$ -pot.

Odslej denimo, da je $|W| > 3$. Torej so točke v W_2 povezane tudi z neko orbito, ki ni orbita W_1 . Imenujmo to orbito W_3 . Kot pri orbitah W_i , $i \leq 2$, lahko predpostavimo, da so točke v $W_3 = \{u_3^s \mid s \in \mathbb{Z}_n\}$ označene na tak način, da je za vsak $s \in \mathbb{Z}_n$: $(u_3^s)^\rho = u_3^{s+1}$ in $u_2^s \sim u_3^s$. Trdimo, da je $|W_3| = n$. Denimo nasprotno, da je $|W_3| = n/3$. Potem je $u_3^s = u_3^{s+n/3} = u_3^{s+2n/3}$ za vsak $s \in \mathbb{Z}_n$ in zato $N(u_3^s) = \{u_2^s, u_2^{s+n/3}, u_2^{s+2n/3}\}$. Oglejmo si 2-lok (u_2^0, u_1^0, u_2^2) . Ta 2-lok mora ležati na enolično določenem 6-ciklu, imenujmo ga C , ki je različen od 6-cikla potekajočega skozi 2-lok (u_1^0, u_2^0, u_1^{-2}) in 6-cikla potekajočega skozi (u_1^0, u_2^2, u_1^2) . Torej morata biti obe točki u_3^0 in u_3^2 vsebovani v C . Vendar, ker je $N(u_3^0) \cap N(u_3^2) = \emptyset$, to ni mogoče, in zato $|W_3| \neq n/3$. Predpostavka, da je $|W_3| = n/2$, nas pripelje do protislovja na podoben način. Torej je $|W_3| = n$ kot smo trdili. Vrh tega mora 6-cikel, ki vsebuje 2-lok (u_2^0, u_1^0, u_2^2) , očitno vsebovati tudi točki u_3^0 in u_3^2 . Ker je $d(W_2, W_3) = 1$, bodisi obstaja tak $t \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$, da je $2t \equiv 2 \pmod{n}$ in $u_3^s \sim u_3^{s+t}$ za vsak $s \in \mathbb{Z}_n$, bodisi obstaja točka $u \in W_4$, kjer je $W_4 \in \mathcal{W}$ različna od orbit W_i , $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, ki je povezana z obema točkama u_3^0 in u_3^2 . V prvem primeru je $k = 4$ in je torej $X I_4^n(t)$ -pot. V drugem primeru pa lahko točke v orbiti $W_4 = \{u_4^s \mid s \in \mathbb{Z}_n\}$ označimo na tak način, da je $(u_4^s)^\rho = u_4^{s+1}$ in $u_3^s \sim u_4^s$ za vsak $s \in \mathbb{Z}_n$ ter $u = u_4^2$. Sledi, da za vsak $s \in \mathbb{Z}_n$ velja: $N(u_3^s) = \{u_2^s, u_4^s, u_4^{s+2}\}$. To zaključimo bazo naše indukcije.

Za indukcijski korak predpostavimo, da je za vsak $j < i$, kjer je $i \in \mathbb{Z}_k \setminus \{0, 1, 2, 3, 4\}$, orbita $W_j \in \mathcal{W}$ dolžine n ter $N(u_{j-1}^s) \cap W_j = \{u_j^s\}$, $s \in \mathbb{Z}_n$, če je j lih in $N(u_{j-1}^s) \cap W_j = \{u_j^s, u_j^{s+2}\}$, $s \in \mathbb{Z}_n$, če je j sod. Nadalje, če je $j \neq 0$, je orbita W_j neodvisna množica točk. (Z drugimi besedami: inducirani podgraf $X[\cup_{j=0}^{i-1} W_j]$ grafa X je skoraj identičen $I_i^n(t)$ -poti z edino razliko v zadnji orbiti.) Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da so točke v orbiti $W_i = \{u_i^s \mid s \in \mathbb{Z}_n\}$ označene na tak način, da je $(u_i^s)^\rho = u_i^{s+1}$ in $u_{i-1}^s \sim u_i^s$ za vsak $s \in \mathbb{Z}_n$. Denimo, da W_i ni dolžine n .

Najprej predpostavimo, da je W_i taka orbita, da je $d(W_{i-2}, W_{i-1}) = 1$ (torej je i liho število). Potem je po predpostavki $d(W_{i-3}, W_{i-2}) = 2$ in 2-lok $(u_{i-2}^0, u_{i-3}^0, u_{i-2}^2)$ leži na enolično določenem 6-ciklu, imenujmo ga C , ki ni niti 6-cikel potekajoč skozi 2-lok $(u_{i-3}^0, u_{i-2}^0, u_{i-3}^{-2})$ niti 6-cikel potekajoč skozi $(u_{i-3}^0, u_{i-2}^2, u_{i-3}^2)$. Torej sta obe točki u_{i-1}^0 in u_{i-1}^2 vsebovani v C in zato mora biti $N(u_{i-1}^0) \cap N(u_{i-1}^2) \neq \emptyset$. Nadalje, ker je po predpostavki $i \leq k-1$, je $N(u_{i-1}^0) \cap N(u_{i-1}^2) \subseteq V(W_i)$. Odtod pa sledi, da v primeru, ko je $|W_i| = n/3$ oziroma $|W_i| = n/2$, velja $n/3 = 2$ oziroma $n/2 = 2$. Ker oboje nasprotuje dejstvu, da je $n > 6$, je $|W_i| = n$ in $u_{i-1}^{s-2}, u_{i-1}^s \in N(u_i^s)$ za vsak $s \in \mathbb{Z}_n$. Če je $i = k-1$, je $X I_k^n(n/2)$ -pot. V nasprotnem primeru obstaja orbita W_{i+1} , ki je povezana z orbito W_i in je različna od orbite W_{i-1} . Očitno lahko točke v tej orbiti označimo na tak način, da je $W_{i+1} = \{u_{i+1}^s \mid s \in \mathbb{Z}_n\}$ in $u_i^s \sim u_{i+1}^s$, kjer

je $(u_{i+1}^s)^\rho = u_{i+1}^{s+1}$.

Sedaj predpostavimo, da je W_i taka orbita, da je $d(W_{i-2}, W_{i-1}) = 2$ (torej je i sodo število). Potem je $d(W_{i-3}, W_{i-2}) = 1$. Ker je X kubičen, sta W_{i-2} in W_i edini orbiti v \mathcal{W} , ki sta povezani z orbito W_{i-1} , in je $X[W_{i-1}]$ neodvisna množica točk. Denimo, da je $|W_i| = n/3$. Potem je $u_i^s = u_i^{s+n/3} = u_i^{s+2n/3}$ in $N(u_i^s) = \{u_{i-1}^s, u_{i-1}^{s+n/3}, u_{i-1}^{s+2n/3}\}$ za vsak $s \in \mathbb{Z}_n$. Oglejmo si 2-lok $(u_{i-1}^0, u_i^0, u_{i-1}^{n/3})$. Ker mora ležati na 6-ciklu in je $d(W_{i-3}, W_{i-2}) = 1$, ugotovimo, da je $\emptyset \neq N(u_{i-2}^{n/3}) \cap N(u_{i-2}^0) \subseteq W_{i-1}$ ali $\emptyset \neq N(u_{i-2}^{n/3}) \cap N(u_{i-2}^{-2}) \subseteq W_{i-1}$ ali $\emptyset \neq N(u_{i-2}^{n/3-2}) \cap N(u_{i-2}^0) \subseteq W_{i-1}$ ali $\emptyset \neq N(u_{i-2}^{n/3-2}) \cap N(u_{i-2}^{-2}) \subseteq W_{i-1}$. Vendar, ker je $n > 6$, se bo bralec prepričal sam, da se nobena izmed navedenih možnosti ne more zgoditi. Sedaj denimo, da je $|W_i| = n/2$. Potem je $u_i^s = u_i^{s+n/2}$ in $u_{i-1}^s, u_{i-1}^{s+n/2} \in N(u_i^s)$ za vsak $s \in \mathbb{Z}_n$. Torej je $(u_{i-1}^0, u_i^0, u_{i-1}^{n/2})$ 2-lok. Ker je $d(W_{i-3}, W_{i-2}) = 1$, dejstvo, da ta 2-lok leži na 6-ciklu, implicira, da je $\emptyset \neq N(u_{i-2}^{n/2}) \cap N(u_{i-2}^0) \subseteq W_{i-1}$ ali $\emptyset \neq N(u_{i-2}^{n/2}) \cap N(u_{i-2}^{-2}) \subseteq W_{i-1}$ ali $\emptyset \neq N(u_{i-2}^{n/2-2}) \cap N(u_{i-2}^0) \subseteq W_{i-1}$ ali $\emptyset \neq N(u_{i-2}^{n/2-2}) \cap N(u_{i-2}^{-2}) \subseteq W_{i-1}$. Zopet, ker je $n > 6$, ugotovimo, da se nobena izmed navedenih možnosti ne more zgoditi. Sledi, da je $|W_i| = n$ in $X[W_{i-1}, W_i] = nK_2$. Po indukciji je ρ (k, n) -semiregularen in očitno sledi, da je $X I_k^n(t)$ -pot. S tem je dokaz končan. ■

Lema 3.1.11 *Naj bo X kubični 2-regularni graf ožine 6, ki ni Moebius-Kantorjev graf $GP(8, 3)$, s konsistentnim usmerjenim n -ciklom \vec{D} , $n > 6$. Potem je $X I_k^n(t)$ -pot in n sodo število. Poleg tega velja:*

- (i) če je k lih, je $n \equiv 2 \pmod{4}$;
- (ii) če je k sod in je $t = n/2 + 1$, je $n \equiv 0 \pmod{4}$;

kjer je k število orbit drsnega avtomorfizma konsistentnega usmerjenega cikla \vec{D} .

DOKAZ. Ker X ni $GP(8, 2)$, po posledici 3.1.7 vsak 2-lok leži na enem samem 6-ciklu. Nadalje, po lemi 3.1.10 je drsni avtomorfizem ρ cikla \vec{D} (k, n) -semiregularen in graf X je $I_k^n(t)$ -pot. Torej je X_ρ pot dolžine $k \geq 2$. Za $k = 2$ je graf X izomorfen posplošenemu Petersenovemu grafu $GP(12, 7) \cong GP(12, 5)$, za katerega trditev očitno velja. Zato lahko predpostavimo, da je $k \geq 3$.

Naj bodo W_i , $i \in \mathbb{Z}_k$, orbite avtomorfizma ρ , tako da je v X_ρ orbita W_i povezana z orbito W_{i+1} za vsak $i \in \mathbb{Z}_k \setminus \{k-1\}$. Ker je $X I_k^n(t)$ -pot, lahko točke grafa X označimo na tak način, da je $u_i^s \in W_i$, kjer je $(u_i^s)^\rho = u_i^{s+1}$, za vsak $i \in \mathbb{Z}_k$ in vsak $s \in \mathbb{Z}_n$, $\vec{D} = u_0^0 u_0^1 \cdots u_0^{n-1} u_0^0$ in $N(u_1^s) = \{u_0^s, u_2^s, u_2^{s+2}\}$ za vsak $s \in \mathbb{Z}_n$. Ker je po trditvi 3.1.1 X dvodelen graf, je n sodo število.

Za dokaz točke (i) denimo, da je k liho število in da je $n \equiv 0 \pmod{4}$. Potem je $n/2$ sodo število. Ker je $X I_k^n(t)$ -pot, ugotovimo, da je podgraf $X[W_{k-2}, W_{k-1}]$ disjunktna unija dveh grafov Y in Y' reda n . Tako Y kot Y' premoreta točke valence 2 (točke iz orbite W_{k-2}) in točke valence 3 (točke iz orbite W_{k-1}). Ker je X 2-regularen, obstaja avtomorfizem γ , ki 2-lok (u_0^0, u_0^1, u_0^2) preslika v 2-lok $(u_{k-2}^0, u_{k-1}^0, u_{k-2}^{-2})$. Z uporabo dejstva, da vsak 2-lok v X leži na enem samem 6-ciklu, se bo bralec prepričal sam, da je $\vec{D}^\gamma = Y$ ali pa $\vec{D}^\gamma = Y'$. Vendar, ker je

$X[W_0] = D$ valence 2, Y in Y' pa sta neregularna grafa, to ni mogoče. Torej, če je k liho število, je $n \equiv 2 \pmod{4}$.

Za dokaz točke (ii) predpostavimo, da je k sodo število, $n \equiv 2 \pmod{4}$ in $t = n/2 + 1$. Potem je t sod in je $X[W_{k-1}]$ disjunktna unija dveh ciklov

$$u_{k-1}^0 u_{k-1}^t u_{k-1}^{2t} \cdots u_{k-1}^{-2t} u_{k-1}^{-t} u_{k-1}^0$$

in

$$u_{k-1}^1 u_{k-1}^{1+t} u_{k-1}^{1+2t} \cdots u_{k-1}^{1-2t} u_{k-1}^{1-t} u_{k-1}^1$$

dolžine $n/2$. Vendar, ker vsak 2-lok v X leži na enem samem 6-ciklu, sledi, da avtomorfizem, ki preslika 2-lok (u_0^0, u_0^1, u_0^2) v 2-lok $(u_{k-1}^0, u_{k-1}^t, u_{k-1}^{2t})$ preslika \vec{D} v $u_{k-1}^0 u_{k-1}^t u_{k-1}^{2t} \cdots u_{k-1}^{-2t} u_{k-1}^{-t} u_{k-1}^0$, protislovje. To zaključuje dokaz Leme 3.1.11. ■

Med drugim nam lema 3.1.11 pove, da je v primeru, ko je k sodo število podgraf inducirani na zadnji orbiti 2-regularne $I_k^n(t)$ -poti n -cikel.

Pri naslednji lemi bomo potrebovali lastnosti posplošenih diedrskih grup, ki so navedene v razdelku 2.1.2, ter lastnosti normalnih Cayleyjevih grafov navedene v razdelku 4.1.

Lema 3.1.12 *Naj bo X kubični 2-regularni graf ožine 6, ki ni Moebius-Kantorjev graf $GP(8,3)$. Potem je X $I_k^n(t)$ -pot, kjer je $n > 6$ sod, $k = n/2$ ali $k = n/6$, $t = n/2$, če je k lih, in $t = n/2 + 1$, če je k sod. Poleg tega je X normalni Cayleyjev graf posplošene diedrske grupe $Dih(\mathbb{Z}_{n/2} \times \mathbb{Z}_k) = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xyz)^2 = (xy)^{n/2} = (yz)^{n/2} = (zx)^{n/2} = 1, (xy)^k = (yz)^k = (zx)^k \rangle$.*

DOKAZ. Naj bo \vec{D} konsistentni usmerjeni n -cikel, $n > 6$, grafa X . Rezultati Leme 3.1.10 in Leme 3.1.11 implicirajo, da je n sodo število, da je drsni avtomorfizem ρ usmerjenega cikla \vec{D} (k, n) -semiregularen in da je X $I_k^n(t)$ -pot za nek primeren t . Iz omenjenih lem sledi tudi, da je v primeru, ko je k lih, \vec{D} edini usmerjeni n -cikel, katerega drsni avtomorfizem je avtomorfizem ρ .

Naj bodo W_i , $i \in \mathbb{Z}_k$, orbite avtomorfizma ρ , tako da je za vsak $i \in \mathbb{Z}_k \setminus \{k-1\}$ v X_ρ orbita W_i povezana z orbito W_{i+1} . Dalje, brez škode za splošnost lahko točke grafa X označimo na tak način, da je $u_i^s \in W_i$, kjer je $(u_i^s)^\rho = u_i^{s+1}$, za vsak $i \in \mathbb{Z}_k$ in vsak $s \in \mathbb{Z}_n$.

Naj bo Ω množica neusmerjenih konsistentnih n -ciklov grafa X . Oglejmo si naravno delovanje grupe $\text{Aut}X$ na množici Ω . Ker je X 2-regularen in $|V(X)| = nk$, je grupa avtomorfizmov $\text{Aut}X$ grafa X reda $6kn$. Bralec se bo prepričal sam, da je $\text{Aut}X_D = D_{2n}$. Zato standardni argument preštevanja pokaže, da je

$$|\text{Orb}_{\text{Aut}X}(D)| = |\text{Aut}X : \text{Aut}X_D| = 3k.$$

Z uporabo trditve 2.2.3 ugotovimo, da je v grafu X natanko $3k$ konsistentnih n -ciklov (in zato $6k$ konsistentnih usmerjenih n -ciklov).

Po lemi 3.1.11, je n sod, kar pomeni, da je za vsak lih $i \in \mathbb{Z}_k \setminus \{k-1\}$ podgraf $X[W_i, W_{i+1}]$ disjunktna unija dveh n -ciklov. Če je k sod, naj bo C podgraf inducirani

na $X[W_{k-1}]$. Definirajmo množico \mathcal{C} kot množico k ciklov dolžine n grafa X na sledeči način:

$$\mathcal{C} = \begin{cases} \{X[W_i, W_{i+1}] \mid i \in \mathbb{Z}_k \setminus \{k-1\} \text{ lih}\} \cup \{D\}, & \text{če } k \text{ lih} \\ \{X[W_i, W_{i+1}] \mid i \in \mathbb{Z}_k \setminus \{k-1\} \text{ lih}\} \cup \{D\} \cup \{C\}, & \text{če } k \text{ sod} \end{cases}.$$

Označimo n -cikle v \mathcal{C} na sledeči način: $C_0 = D$ ter za vsak lih $i \in \mathbb{Z}_k \setminus \{k-1\}$ je C_i n -cikel induciran s točkami v $X[W_i, W_{i+1}]$ z lihimi oznakami in C_{i+1} n -cikel induciran s točkami v $X[W_i, W_{i+1}]$ s sodimi oznakami. Če je k sod, naj bo $C_{k-1} = C$. Dokazali bomo, da je \mathcal{C} blok neprimitivnosti za delovanje grupe $\text{Aut}X$ na množici Ω . V ta namen moramo najprej pokazati, da so vsi n -cikli v množici \mathcal{C} konsistentni (torej, da je $\mathcal{C} \subseteq \Omega$). Ker je X 2-regularen, za vsak 2-lok $a_i = (u_{i+1}^0, u_i^0, u_{i+1}^2)$, kjer je $i \in \mathbb{Z}_k \setminus \{k-1\}$ lih, obstaja avtomorfizem $\beta_i \in \text{Aut}X$, ki 2-lok (u_0^0, u_0^1, u_0^2) preslika v a_i . Če je k sod, zaradi 2-regularnosti grafa X obstaja tudi avtomorfizem $\beta \in \text{Aut}X$, ki (u_0^0, u_0^1, u_0^2) preslika v $(u_{k-1}^0, u_{k-1}^1, u_{k-1}^2)$. Ker vsak 2-lok v X leži na enem samem 6-ciklu, sledi, da je $C_0^{\beta_i} = C_i$ in $C_0^\beta = C_{k-1}$, ko je k sod. Poleg tega za vsak lih $i \in \mathbb{Z}_k \setminus \{k-1\}$ velja $C_i^{\rho^2} = C_{i+1}$. Torej je $C_i \in \Omega$ za vsak $i \in \mathbb{Z}_k$ in zato je $\mathcal{C} \subseteq \Omega$. Preostane pokazati, da je \mathcal{C} blok neprimitivnosti za delovanje grupe $\text{Aut}X$ na Ω . Ker je \mathcal{C} 2-faktor v grafu X , je tudi \mathcal{C}^γ 2-faktor za vsak avtomorfizem $\gamma \in \text{Aut}X$. Denimo, da obstaja tak avtomorfizem $\gamma \in \text{Aut}X$, da je $\mathcal{C}^\gamma \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Potem obstajata taki števili $i, j \in \mathbb{Z}_k$, da je $C_i^\gamma = C_j$. Najprej predpostavimo, da je $j \notin \{0, k-1\}$ lih. Potem je $C_j = u_j^0 u_{j+1}^0 u_j^{-2} \cdots u_{j+1}^{-2} u_j^0$. Ker je \mathcal{C}^γ 2-faktor, sledi, da za vsako sodo število s povezave

$$u_{j-l}^s u_{j-l-1}^s, \quad (3.1)$$

kjer je $l \in \{0, 1, \dots, j-1\}$ in povezave

$$u_{j+l}^s u_{j+l+1}^s, \quad (3.2)$$

kjer je $l \in \{1, 2, \dots, k-j-2\}$, če je k sod, in $l \in \{1, 2, \dots, k-j-3\}$, če je k lih, niso vsebovane v nobenem n -ciklu iz množice \mathcal{C}^γ . Odtod sledi, da $C_0, C_{2r+1} \in \mathcal{C}^\gamma$, kjer je $2r+1 \in \{1, 3, 5, \dots, k-3\} \cup \{k-1\}$, če je k sod, in $2r+1 \in \{1, 3, 5, \dots, k-2\}$, če je k lih. Sedaj dejstvo, da je $C_0 \in \mathcal{C}^\gamma$ implicira, da tudi za lihe vrednosti števila s povezave v (3.1) in (3.2) niso vsebovane v nobenem n -ciklu iz \mathcal{C}^γ . Torej je $\mathcal{C}^\gamma = \mathcal{C}$. Z uporabo enakih argumentov se lahko bralec prepriča, da tudi v primeru, ko je $j \in \{0, k-1\}$ ali ko je j sodo število, velja, da je $\mathcal{C}^\gamma = \mathcal{C}$. To dokaže, da je \mathcal{C} blok neprimitivnosti. Ker je $|\Omega| = 3k$, sledi, da obstajata še dva bloka, imenujmo ju \mathcal{D} in \mathcal{E} , ki vsebujeta po k konsistentnih n -ciklov, tako da je $\Omega = \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{E}$.

Očitno vsak 2-lok v X leži na konsistentnem n -ciklu. Ker je $|\Omega| = 3k$ in $|V(X)| = kn$, velja tudi, da vsaka točka leži na natanko treh konsistentnih n -ciklih, na enem iz vsakega bloka \mathcal{C} , \mathcal{D} in \mathcal{E} .

Ker so \mathcal{C} , \mathcal{D} in \mathcal{E} bloki neprimitivnosti za delovanje grupe $\text{Aut}X$, $\text{Aut}X$ deluje na množici $\{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}\}$ kot grupa stopnje 3. Torej obstaja taka podgrupa edinka G grupe $\text{Aut}X$, da je $\text{Aut}X/G \cong S_3$ ali $\text{Aut}X/G \cong \mathbb{Z}_3$. Vendar slednje se ne more zgoditi, saj vsaka točka v X leži na enem konsistentnem n -ciklu iz vsakega bloka \mathcal{C} , \mathcal{D} in \mathcal{E} . Natančneje povedano, ker je stabilizator točke v $\text{Aut}X$ izomorfen S_3 ,

obstaja avtomorfizem, ki fiksira \mathcal{C} in zamenja \mathcal{D} in \mathcal{E} . Torej je $\text{Aut}X/G \cong S_3$. Ker je $|\text{Aut}X| = 6kn$, je grupa G reda nk . Dejstvo, da je G jedro delovanja grupe $\text{Aut}X$ na $\{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}\}$, implicira, da G fiksira množice \mathcal{C} , \mathcal{D} in \mathcal{E} . Zato je stabilizator točke $G_u = 1$ trivialen za vsako točko $u \in V(X)$. Standardni argument preštevanja pokaže, da je $|\text{Orb}_G(u)| = |G : G_u| = |G| = nk$, kar pomeni, da G deluje regularno na grafu X . Ker je G podgrupa edinka v $\text{Aut}X$, sledi, da je X normalni Cayleyjev graf grupe G . Lastnosti o simetričnih normalnih Cayleyjevih grafih (glej razdelek 2.2.3) povedo, da je $X = \text{Cay}(G, S)$, kjer je S množica treh involucij $S = \{x, y, z\}$. Poleg tega obstaja tak avtomorfizem $\alpha \in \text{Aut}G$, da je $x^\alpha = y$, $y^\alpha = z$ in $z^\alpha = x$.

Naj bo $X_{\mathcal{C}}$ kvocientni graf grafa X glede na \mathcal{C} , to je graf z množico točk \mathcal{C} in povezavami induciranimi na naraven način s povezavami $E(X)$. Očitno G deluje na $X_{\mathcal{C}}$. Z uporabo leme 3.1.11 ugotovimo tudi, da je $X_{\mathcal{C}}$ cikel dolžine k . Zato G deluje na $X_{\mathcal{C}}$ kot diedrska grupa reda $2k$. Torej obstaja taka podgrupa edinka K grupe G , da je $G/K \cong D_{2k}$. Ker ρ^2 fiksira n -cikle v \mathcal{C} , je $\rho^2 \in K$. Ker je $|G| = kn$, $|D_{2k}| = 2k$ in ρ^2 reda $n/2$, je $K = \langle \rho^2 \rangle$. Naj bo $u \in V(X)$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $u^{\rho^2} = L_{xy}u$, in torej $\rho^{-2}L_{xy} \in G_u$ (kjer L_G označuje levo regularno reprezentacijo grupe G). Ker je G regularna na $V(X)$, sledi, da je $\rho^2 = L_{xy}$. Sedaj nam dejstvo, da je ρ^2 reda $n/2$, pove, da je $(xy)^{n/2} = 1$. (Grupna relacija $(xy)^{n/2}$ nam porodi n -cikle v \mathcal{C} .) Zaradi simetrije (z uporabo avtomorfizma α) dobimo tudi, da je

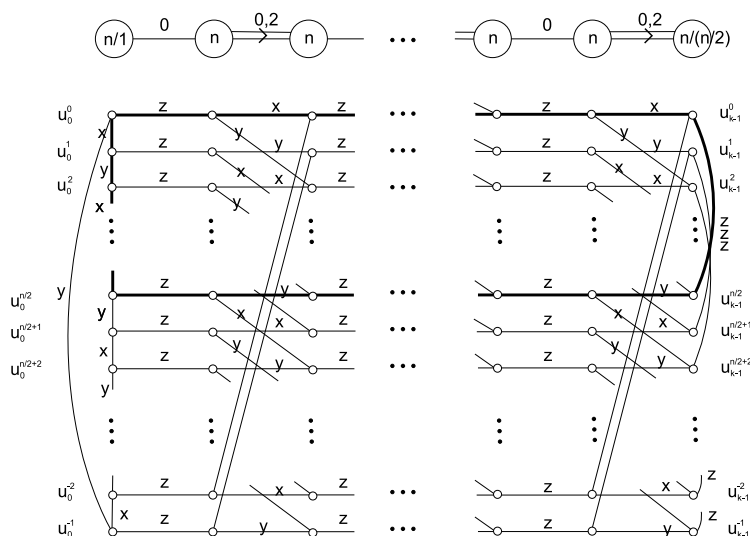
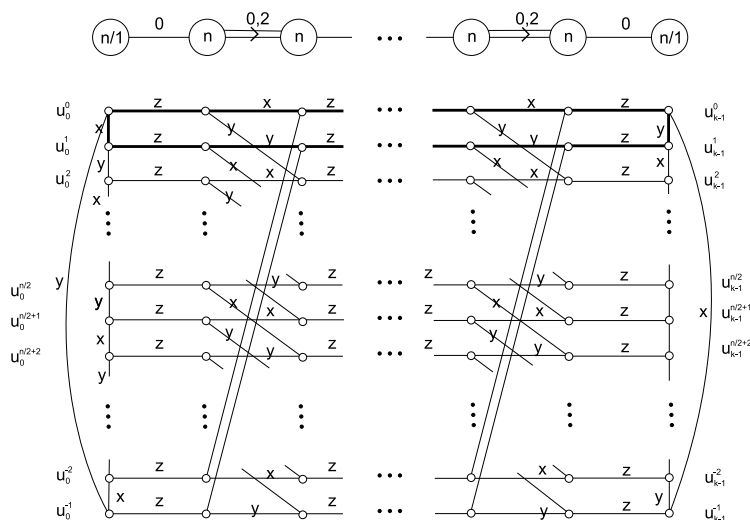
$$(xy)^{n/2} = (yz)^{n/2} = (zx)^{n/2} = 1.$$

Obstajata dve možnosti za 6-cikle v X . Bodisi 6-cikli ustrezajo relaciji $xyzyxz$ bodisi relaciji $(xyz)^2$. V prvem primeru je $xzx = yzy$ in z uporabo avtomorfizma α ugotovimo, da je $xyx = zxz$. Vendar, če točke grafa X preimenujemo na tak način, da je $u_0^1 = 1 \in G$, vidimo, da je $u_0^4 = yxy = zxz \in W_0$. Odtod sledi, da je $k = 2$ in $n/2 + 1 = 3$, protislovje. (Namreč, če je $k > 2$, je $zxz \in W_2 \cup W_3$.) Torej 6-cikli v X ustrezajo grupni relaciji $(xyz)^2$ in zato je

$$G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^{n/2} = (yz)^{n/2} = (zx)^{n/2} = (xyz)^2 = 1, \dots \rangle. \quad (3.3)$$

Glede na lihost in sodost števila k , lema 3.1.11 pove, da je struktura grafa X kot je prikazano na slikah 3.8, 3.9 in 3.10.

Naj bo $a = xy$, $b = yz$ in $c = zx$. Z uporabo relacij (3.3) ugotovimo, da a , b in c med seboj komutirajo. Poleg tega veljajo naslednje relacije: $a^\alpha = b$, $b^\alpha = c$, $c^\alpha = a$ in $ab = c^{-1}$. Naj bo H abelska podgrupa grupe G generirana z elementoma a in b . Ker je $ab = c^{-1}$, je $c \in H$. Bralec bo preveril sam, da je $a^x = a^y = a^z = a^{-1}$ in $b^x = b^y = b^z = b^{-1}$. Odtod sledi, da je H edinka v grupi G . Ker je G generirana z elementi x , y in z , velja tudi, da je $G/H = \langle xH, yH, zH \rangle$. Nadalje, ker je $a = xy \in H$ in $b = yz \in H$, je $xH = yH = zH$ in zato $G/H = \langle xH \rangle \cong \mathbb{Z}_2$. ($xH \neq H$, saj bi v nasprotnem primeru $x \in H$ in zato tudi $y = x \cdot xy \in H$. To pa bi impliciralo, da x in y komutirata. Vendar, ker sta x in y involuciji, njun produkt xy pa je reda $n/2$, to ni mogoče.) Ker je $|G| = kn$, je $|H| = kn/2$. Ker je H abelska grupa generirana z dvema elementoma reda $n/2$, sledi, da je $H \cong \langle a \rangle \langle b \rangle \cong (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) / (\langle a \rangle \cap \langle b \rangle)$. Med drugim nam to dejstvo pove, da k deli $n/2$. Preostane poiskati presek $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle$. Glede na sodost in lihost števila k ter število t je potrebno premisliti tri možnosti.

Slika 3.8: Struktura grafa X , če je k lih.Slika 3.9: Struktura grafa X , če je k sod in $t = 1$.

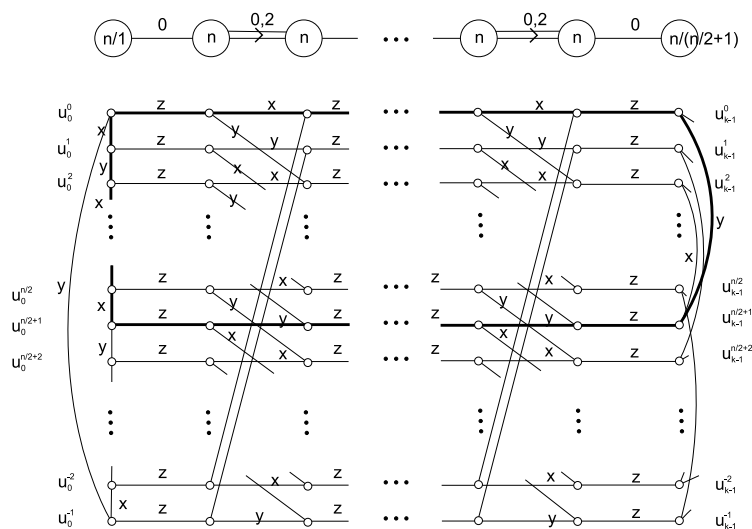
MOŽNOST 1. Naj bo k liho število.

Potem je

$$u_0^0 u_1^0 u_2^0 \cdots u_{k-1}^0 u_{k-1}^{n/2} u_{k-2}^{n/2} u_{k-3}^{n/2} \cdots u_1^{n/2} u_0^{n/2} u_0^{n/2-1} u_0^{n/2-2} \cdots u_0^2 u_0^1 u_0^0$$

cikel v grafu X (del tega cikla je prikazan na sliki 3.8). Ker je $n/2$ liho število (spomnimo, da je po lemi 3.1.11 $n \equiv 2 \pmod{4}$), je pripadajoča relacija v grupi G relacija $(zx)^{(k-1)/2} z (yz)^{(k-1)/2} (xy)^{(n-2)/4} x$, in zaradi tega velja:

$$xz(xz)^{(k-1)/2}(yz)^{(k-1)/2} = (yx)^{(n-2)/4}. \quad (3.4)$$



Slika 3.10: Struktura grafa X , če je k sod in $t = n/2 + 1$.

Ker je yx reda $n/2$ ter elementi a, b in c med seboj komutirajo po enačbi (3.4) sledi, da je $(xz)^k(yz)^k = 1$. Torej je $b^k = c^k$. Ker je $b^\alpha = c$ in $c^\alpha = a$, velja tudi, da je $a^k = b^k = c^k$. Dejstvo, da je $ab = c^{-1}$, implicira: $a^{3k} = b^{3k} = c^{3k} = 1$. Ker je a reda $n/2$, sledi, da $n/2$ deli $3k$. Odtod dobimo, da je $k = n/2$ ali $k = n/6$ (saj k deli $n/2$). Torej je $H \cong \mathbb{Z}_{n/2}^2$ ali $H \cong \mathbb{Z}_{n/2} \times \mathbb{Z}_{n/6}$.

MOŽNOST 2. Naj bo k sodo število in $t = 1$.

Potem je

$$u_0^0 u_1^0 u_2^0 \cdots u_{k-1}^0 u_{k-1}^1 u_{k-2}^1 u_{k-3}^1 \cdots u_1^1 u_0^1 u_0^1$$

$2k$ -cikel v X (del tega cikla je prikazan na sliki 3.9). Pripadajoča relacija v grupi G je $(zx)^{k/2-1}(zy)^{k/2}zx$. Ker a, b in c komutirajo in je $b^\alpha = c$, dobimo: $a^{k/2} = b^{k/2} = c^{k/2}$. Ker je $ab = c^{-1}$, sledi, da je $a^{3k/2} = b^{3k/2} = c^{3k/2} = 1$. Ker je a reda $n/2$, ugotovimo, da $n/2$ deli $3k/2$. Vendar, ker k deli $n/2$, se bo bralec prepričal sam, da se ta primer ne more zgoditi.

MOŽNOST 3. Naj bo k sodo število in $t = n/2 + 1$.

Potem je

$$u_0^0 u_1^0 u_2^0 \cdots u_{k-1}^0 u_{k-1}^{n/2+1} u_{k-2}^{n/2+1} u_{k-3}^{n/2+1} \cdots u_1^{n/2+1} u_0^{n/2+1} u_0^{n/2} u_0^{n/2-1} \cdots u_0^2 u_0^1 u_0^0$$

cikel v X (del tega cikla je prikazan na sliki 3.10). Po lemi 3.1.11 je $n \equiv 0 \pmod{4}$ in zato je pripadajoča relacija v grupi G relacija $(zx)^{k/2-1}zy(zy)^{k/2-1}z(xy)^{n/4}x$. Odtod sledi, da je $x(zx)^{k/2-1}(zy)^{k/2}z = (yx)^{n/4}$ in zato je $(xz)^{k/2}(yz)^{k/2} = (yx)^{n/4}$. Ker je yx reda $n/2$ ter a, b in c med seboj komutirajo, sledi, da je $(xz)^k(yz)^k = 1$. Z uporabo avtomorfizma α sedaj dobimo, da je $a^k = b^k = c^k$. Ker je $ab = c^{-1}$, sledi tudi, da je $a^{3k} = b^{3k} = c^{3k} = 1$. Z uporabo enakih argumentov kot pri Možnosti 1 ugotovimo, da je $k = n/2$ ali $k = n/6$. Torej je $G \cong \text{Dih}(\mathbb{Z}_{n/2}^2)$ ali $G \cong \text{Dih}(\mathbb{Z}_{n/2} \times \mathbb{Z}_{n/6})$. S tem je dokaz Leme 3.1.12 končan. ■

S predhodnimi pomožnimi trditvami lahko sedaj dokažemo sledeči izrek, ki klasificira kubične 2-regularne grafe ožine 6.

Izrek 3.1.13 *Kubični simetrični graf ožine 6, ki ni Moebius-Kantorjev graf $GP(8, 3)$, je 2-regularen natanko tedaj, ko je izomorfen $I_k^{2m}(t)$ -poti, normalnemu Cayleyjevemu grafu $Cay(G, \{x, y, z\})$ posplošene diedrske grupe $G = Dih(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_k) = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xyz)^2 = (xy)^m = (yz)^m = (zx)^m = 1, (xy)^k = (yz)^k = (zx)^k \rangle$, kjer $m > 3$, $k = m$ ali $k = m/3$, $t = m$, če je k lih, in $t = m + 1$, če je k sod.*

DOKAZ. Če je X kubični 2-regularni graf ožine 6, ki ni F016A, lema 3.1.12 pove, da je X $I_k^n(t)$ -pot, normalni Cayleyjev graf grupe $G = Dih(\mathbb{Z}_{n/2} \times \mathbb{Z}_k)$ s prezentacijo $\langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xyz)^2 = (xy)^{n/2} = (yz)^{n/2} = (zx)^{n/2} = 1, (xy)^k = (yz)^k = (zx)^k, \dots \rangle$ glede na množico $S = \{x, y, z\}$, kjer je $n > 6$, $k = n/2$ ali $k = n/6$, in $t = n/2$, če je k lih, in $t = n/2 + 1$, če je k sod. Če definiramo $m = n/2$, vidimo, da prvi del izreka 3.1.13 drži.

Za dokaz obrata denimo, da je $X = Cay(G, S)$ Cayleyjev graf grupe $G = Dih(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_k) = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xyz)^2 = (xy)^m = (yz)^m = (zx)^m = 1, (xy)^k = (yz)^k = (zx)^k, \dots \rangle$ glede na $S = \{x, y, z\}$, kjer je $m > 3$, in $k = m$ ali $k = m/3$. Ker so x, y in z involucije in $(xyz)^2 = 1$, je X očitno valence 3 in ožine 6. Velja tudi, da je X $I_k^{2m}(t)$ -pot glede na orbite podgrupe $\langle x, y \rangle$. Preostane pokazati, da je X 2-regularen.

Vsak element v G lahko zapišemo v obliki $a^i b^j z^\epsilon$, kjer je $a = xy$, $b = yz$, $i, j \in \mathbb{Z}_m$ in $\epsilon \in \{0, 1\}$. Naj bo $c = zx$. Potem je $H = \langle a, b, c \rangle = \langle a, b \rangle \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_k$ abelska grupa. Naj bo $\alpha: G \rightarrow G$ definirana z

$$(a^i b^j z^\epsilon)^\alpha = \begin{cases} a^{-j} b^{-j+i}, & \text{če } \epsilon = 0 \\ a^{-j+1} b^{-j+i+1} z, & \text{če } \epsilon = 1 \end{cases} . \quad (3.5)$$

Pokazali bomo, da je $\alpha \in \text{Aut}G$. Ker je $a^z = a^{-1}$ in $b^z = b^{-1}$, velja:

$$\begin{aligned} (a^i b^j z^\epsilon a^{i'} b^{j'} z^{\epsilon'})^\alpha &= \begin{cases} (a^{i-i'} b^{j-j'} z^{1+\epsilon'})^\alpha, & \text{če } \epsilon = 1 \\ (a^{i+i'} b^{j+j'} z^{\epsilon'})^\alpha, & \text{če } \epsilon = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} a^{-j+j'} b^{-j+j'+i-i'}, & \text{če } \epsilon = 1 \text{ in } \epsilon' = 1 \\ a^{-j+j'+1} b^{-j+j'+i-i'+1} z, & \text{če } \epsilon = 1 \text{ in } \epsilon' = 0 \\ a^{-j-j'+1} b^{-j-j'+i+i'+1} z, & \text{če } \epsilon = 0 \text{ in } \epsilon' = 1 \\ a^{-j-j'} b^{-j-j'+i+i'}, & \text{če } \epsilon = 0 \text{ in } \epsilon' = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} (a^i b^j z^\epsilon)^\alpha (a^{i'} b^{j'} z^{\epsilon'})^\alpha &= \begin{cases} a^{-j+1} b^{-j+i+1} z a^{-j'+\epsilon'} b^{-j'+i'+\epsilon'} z^{\epsilon'}, & \text{če } \epsilon = 1 \\ a^{-j} b^{-j+i} a^{-j'+\epsilon'} b^{-j'+i'+\epsilon'} z^{\epsilon'}, & \text{če } \epsilon = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} a^{-j+j'+1-\epsilon'} b^{-j+j'+i-i'+1-\epsilon'} z^{1+\epsilon'}, & \text{če } \epsilon = 1 \\ a^{-j-j'+\epsilon'} b^{-j-j'+i+i'+\epsilon'} z^{\epsilon'}, & \text{če } \epsilon = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} a^{-j+j'} b^{-j+j'+i-i'}, & \text{če } \epsilon = 1 \text{ in } \epsilon' = 1 \\ a^{-j+j'+1} b^{-j+j'+i-i'+1} z, & \text{če } \epsilon = 1 \text{ in } \epsilon' = 0 \\ a^{-j-j'+1} b^{-j-j'+i+i'+1} z, & \text{če } \epsilon = 0 \text{ in } \epsilon' = 1 \\ a^{-j-j'} b^{-j-j'+i+i'}, & \text{če } \epsilon = 0 \text{ in } \epsilon' = 0 \end{cases} , \end{aligned}$$

kjer so $i, i', j, j' \in \mathbb{Z}_m$ in $\epsilon, \epsilon' \in \{0, 1\}$. Torej je α endomorfizem grupe G . Nadalje, denimo, da je $(a^i b^j z^\epsilon)^\alpha = 1$ za $i, j \in \mathbb{Z}_m$ in $\epsilon \in \{0, 1\}$. Če je $\epsilon = 1$, potem (3.5) implicira, da je $a^{-j+1} b^{-j+i+1} = z \in H$. Zato je $x = zc \in H$ in $y = xa \in H$, kar pa je v protislovju z dejstvom, da G ni abelska. Če je $\epsilon = 0$, potem po (3.5) velja: $a^j = b^{-j+i}$. Ko je $k = m$, je $j = -j + i = 0$ in posledično $i = j = 0$. Ko je $k = m/3$, ugotovimo, da je $j = i - j \equiv \delta k \pmod{m}$, kjer je $\delta \in \{0, 1, 2\}$. Torej je $i = j = 0$, ali $i = 2k$ in $j = k$, ali pa $i = k$ in $j = 2k$. Ker je $a^k = b^k$, v vseh treh primerih dobimo, da je $a^i b^j = 1$. Odtod sledi, da je endomorfizem α injektiven, torej $\alpha \in \text{Aut } G$. Ker je $x^\alpha = (abz)^\alpha = a^{1-1} b^{-1+1+1} z = y$, $y^\alpha = (bz)^\alpha = a^{-1+1} b^{-1+1} z = z$ in $z^\alpha = abz = x$, avtomorfizem $\alpha \in \text{Aut } X_1$ ciklično permutira sosedne točke 1, torej je X simetričen. Zaradi relacije $(xyz)^2 = 1$ je ožina grafa X enaka 6. Ker je X $I_k^{2m}(t)$ -pot, obstaja konsistentni usmerjeni $2m$ -cikel. Po točki (iii) trditve 3.1.9 je X 2-regularen. ■

Posledica 3.1.14 *Naj bo m celo število. Potem velja.*

- (i) Če je $m = 1$, potem ne obstaja kubični 2-regularni graf ožine 6 in reda $2m^2$ ali $6m^2$.
- (ii) Če je $m = 2$, potem ne obstaja kubični 2-regularni graf ožine 6 in reda $2m^2$; in obstaja natanko en kubični 2-regularni graf ožine 6 in reda $6m^2$, izomorfen je $I_2^{12}(7)$ -poti.
- (iii) Če je $m = 3$, potem ne obstaja kubični 2-regularni graf ožine 6 in reda $2m^2$; in obstaja natanko en kubični 2-regularni graf ožine 6 in reda $6m^2$, izomorfen je $I_3^{18}(9)$ -poti.
- (iv) Če je $m \geq 4$, potem obstaja natanko en kubični 2-regularni graf ožine 6 in reda $2m^2$, izomorfen je $I_m^{2m}(t)$ -poti, kjer je $t = m$, če je m lih, in $t = m + 1$, če je m sod; in obstaja natanko en kubični 2-regularni graf ožine 6 in reda $6m^2$, izomorfen je $I_m^{6m}(t)$ -poti, kjer je $t = 3m$, če je m lih, in $t = 3m + 1$, če je m sod.

3.1.3 Kubični 1-regularni grafi ožine 6

Namen tega razdelka je klasifikacija kubičnih 1-regularnih grafov ožine 6 (glej izrek 3.1.22)

Grupa avtomorfizmov kubičnega 1-regularnega grafa X s konsistentnimi usmerjenimi 6-cikli ima prezentacijo $\text{Aut } X = \langle a, b \mid a^2 = b^6 = (ab)^3 = 1, \dots \rangle$ (glej [36, 55]). Skupaj s trditvijo 3.1.9 nam to dejstvo pove, da velja naslednja trditev.

Trditev 3.1.15 *Naj bo X kubični 1-regularni graf ožine 6. Potem je $\text{Aut } X = \langle a, b \mid a^2 = b^6 = (ab)^3 = 1, \dots \rangle$.*

Komutatorska podgrupa $G' = [G, G]$ grupe G je podgrupa generirana z $G' = [G, G] = \langle [a, b] \mid a, b \in G \rangle$, kjer je $[a, b] = a^{-1} b^{-1} a b$. Bralec se bo prepričal sam, da je $[G, G]$ edinka v G ter da je $G/[G, G]$ abelska (glej tudi [125, Theorem 2.23]).

V dokazu trditve, da so kubični 1-regularni grafi ožine 6 normalni Cayleyjevi grafi posplošenih diedrskih grup, bomo potrebovali Millerjev rezultat [110] iz leta 1932, ki pravi, da je komutatorska podgrupa grupe generirane z dvema elementoma a in c generirana z elementi oblike $a^{-i}c^{-j}a^i c^j$. Tu navajamo le poseben primer tega rezultata, ko je element a involucija, c element reda 3 in njun produkt ac reda 6.

Trditev 3.1.16 [110] *Naj bo $G = \langle a, c \mid a^2 = c^3 = (ac)^6 = 1, \dots \rangle$ grupa. Potem je njena komutatorska podgrupa G' generirana z $G' = \langle acac^{-1}, ac^{-1}ac \rangle$.*

DOKAZ. Naj bo $w = acac^{-1}$, $\bar{w} = ac^{-1}ac$ in $H = \langle w, \bar{w} \rangle$. Ker je $w = [a, c^{-1}]$ in $\bar{w} = [a, c]$, je H vsebovana v komutatorski podgrupi G' grupe G . Naj bo $b = ac$. Potem je $w = abab^{-1}$ in $\bar{w} = ab^{-1}ab$. Ker je $w^a = w^{-1}$, $\bar{w}^a = \bar{w}^{-1}$, $w^c = \bar{w}^{-1}$ in $\bar{w}^c = (ab^3)^{-1} = w\bar{w}^{-1}$, je H edinka v grupi G . Ker je $G' = \langle w^g \mid g \in G \rangle$ (glej [85, str. 141]), sledi, da je $H = G'$. ■

Trditev 3.1.17 *Naj bo X kubični 1-regularni graf ožine 6. Potem je $\text{Aut}X \cong (\mathbb{Z}_{rm} \times \mathbb{Z}_m) \rtimes \mathbb{Z}_6$ za neka $m, r \in \mathbb{Z}$ in graf X je normalni Cayleyjev graf posplošene diedrske grupe $\text{Dih}(\mathbb{Z}_{rm} \times \mathbb{Z}_m)$. Poleg tega je $r \neq 1, 3$.*

DOKAZ. Po trditvi 3.1.15 je $G = \text{Aut}X = \langle a, b \mid a^2 = b^6 = (ab)^3 = 1, \dots \rangle$. Naj bo $c = ab$. Potem je G generirana tudi z elementoma a in c . Zato je po trditvi 3.1.16 komutatorska podgrupa G' grupe G generirana z $G' = \langle ac^{-1}ac, acac^{-1} \rangle$. Naj bo $w = ac^{-1}ac$ in $\bar{w} = acac^{-1}$. Po kratkem izračunu ugotovimo, da je $w\bar{w} = \bar{w}w$, kar pomeni, da je G' abelska grupa. (To dejstvo med drugim implicira, da je G' prava podgrupa grupe G .) Ker je $w^{ab^{-1}} = \bar{w}^{-1}$, velja tudi, da sta w in \bar{w} enakega reda. Zato je $G' \cong \langle w \rangle \times \langle \bar{w} \rangle / \langle w \rangle \cap \langle \bar{w} \rangle \cong \mathbb{Z}_{rm} \times \mathbb{Z}_m$, kjer je $w^{rm} = \bar{w}^{rm} = 1$. (To pomeni, da je v primeru, ko je $m = 1$, komutatorska grupa $G' \cong \mathbb{Z}_r$ ciklična.)

Ker je $G = \langle a, c \mid a^2 = c^3 = (ac)^6 = 1, \dots \rangle$, je kvocientna grupa $G/G' = \langle aG', cG' \mid (aG')^2 = (cG')^3 = 1, \dots \rangle$ abelska in izomorfná podgrupi grupe \mathbb{Z}_6 . Najprej bomo pokazali, da je $aG' \neq G'$. V ta namen predpostavimo nasprotno, da je $aG' = G'$. Potem je $a \in G'$. Ker je G' abelska, je $w^a = w$. Enačba

$$awa = aac^{-1}aca = c^{-1}aca = ac^{-1}ac = w$$

implicira, da je $w^{-1} = w$, torej je w involucija. Odtod sledi, da je G' izomorfná podgrupi v grupi $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ in zato $|G'| \leq 24$; protislovje, saj je najmanjši kubični 1-regularni graf reda 26 (glej [16, 23]). Torej $aG' \neq G'$.

Denimo, da je $c \in G'$. Potem je $cw = wc$ in po izračunu, dobimo, da je $w = \bar{w}^{-1}$. Odtod sledi, da je $G' = \langle w \rangle$ ciklična in $G/G' = \langle aG' \rangle \cong \mathbb{Z}_2$. Ker je $w^a = w^{-1}$, je G diedrska grupa. Torej mora veljati, da je $c^a = c^{-1}$. Vendar, ker slednje implicira, da je $b^2 = 1$, to ni mogoče. S tem smo pokazali, da $c \notin G'$. Posledično je $G/G' \cong \mathbb{Z}_6$ in $G \cong (\mathbb{Z}_{rm} \times \mathbb{Z}_m) \rtimes \mathbb{Z}_6$.

Naj bo $H = \langle G', a \rangle$. Ker $a \notin G'$, $w^a = w^{-1}$, $\bar{w}^a = \bar{w}^{-1}$ in je G' abelska edinka v H , je H posplošena diedrska grupa $\text{Dih}(G') \cong (\mathbb{Z}_{rm} \times \mathbb{Z}_m) \rtimes \mathbb{Z}_2$. Ker je $w^b = ab^3 = [a, b][a, b^{-1}] \in G'$, $\bar{w}^b = w \in G'$ in $a^b = b^{-1}ab = aab^{-1}ab \in H$, velja tudi, da je $H^a = H$ in $H^b = H$. Odtod pa sledi, da je $H \triangleleft G$.

Podgrupa H deluje na grafu X z levo translacijo. Denimo, da obstaja tak $h \in H$, $h \neq 1$, da je $h \in H_v$ za neko točko $v \in V(X)$. Graf X si lahko predstavljamo tudi kot orbitalni graf levega delovanja grupe G na množici \mathcal{C} levih odsekov podgrupe $C = \langle c \rangle = \langle ab \rangle = \mathbb{Z}_3$, ki izhaja iz podorbite $\{aH, abaH, ababaH\}$ dolžine 3. Zato je $v = gC$ za nek $g \in G$. Torej, če je $hgC = gC$, je $g^{-1}hgC = C$ in posledično $g^{-1}hg \in C$. Vendar, ker je H edinka v G , je $g^{-1}hg \in H$, protislovje. Odtod sledi, da je stabilizator točke H_v trivialen za vsako točko $v \in V(X)$. Vrh tega nam lastnost orbita-stabilizator pove, da H deluje regularno na grafu X (saj je $|H| = |V(X)|$). Ker je H edinka v grupi G , sledi, da je X normalni Cayleyjev graf grupe $H \cong \text{Dih}(\mathbb{Z}_{rm} \times \mathbb{Z}_m)$. Ker je X 1-regularen, izrek 3.1.13 pove, da $r \neq 1, 3$. ■

V dokazu izreka 3.1.22 bomo potrebovali naslednje štiri trditve. Prvo so dokazali Malnič, Marušič, Potočnik in Wang leta 2004 [93], drugo sta dokazala Marušič in Pisanski leta 2000 [103], tretjo Feng in Wang leta 2003 [49], četrta pa je bila prvič dokazana v [81].

Trditev 3.1.18 [93] *Naj bo $r > 3$ celo število. V grupi \mathbb{Z}_r^* obstaja taka podgrupa $\langle k \rangle$ reda 3, da je $k^2 + k + 1 \equiv 0 \pmod{r}$ natanko tedaj, ko je faktorizacija števila r oblike $r = 3^s p_1^{e_1} \dots p_t^{e_t}$, kjer je $s \in \{0, 1\}$, $t \geq 1$ in $p_i \equiv 1 \pmod{3}$.*

Ker je Cayleyjev graf $\text{Cay}(D_{2r}, \{\tau\rho^i, \rho^j, \rho^{-j}\})$ diedrske grupe $D_{2r} = \langle \tau, \rho \mid \tau^2 = \rho^r = 1, (\tau\rho)^2 = 1 \rangle$ ožine 4, naslednja trditev poda popolno karakterizacijo kubičnih 1-regularnih Cayleyjevih grafov diedrskih grup ožine 6. V spodnji trditvi oznaka

$$\{i_1, i_2, i_3\} \sim \{0, 1, k + 1\}$$

pomeni, da je Cayleyjev graf $\text{Cay}(D_{2r}, \{\tau\rho^{i_1}, \tau\rho^{i_2}, \tau\rho^{i_3}\})$ izomorfen Cayleyjevemu grafu $\text{Cay}(D_{2r}, \{\tau, \tau\rho, \tau\rho^{k+1}\})$.

Trditev 3.1.19 [103] *Naj bo r naravno število in naj bo $S = \{i_1, i_2, i_3\}$ podmnožica množice \mathbb{Z}_r . Potem je graf $X = \text{Cay}(D_{2r}, \{\tau\rho^{i_1}, \tau\rho^{i_2}, \tau\rho^{i_3}\})$ povezan in 1-regularen, kjer je $D_{2r} = \langle \tau, \rho \mid \tau^2 = \rho^r = 1, (\tau\rho)^2 = 1 \rangle$, natanko tedaj, ko je $r \geq 11$ liho število in obstaja tak netrivialen element $k \in \mathbb{Z}_r^*$, da je $k^2 + k + 1 \equiv 0 \pmod{r}$, $S \sim \{0, 1, k + 1\}$ in $X \cong \text{Cay}(D_{2r}, \{\tau, \tau\rho, \tau\rho^{k+1}\})$. Graf X je ožine 6.*

Pri formulaciji naslednjega rezultata potrebujemo $CQ(k, r)$ grafe (krovi kocke $\text{GP}(4, 1)$), ki sta jih prvič definirala Feng in Wang [49]. Naj bo

$$V(\text{GP}(4, 1)) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$$

množica točk kocke $\text{GP}(4, 1)$. Potem je za nenegativni celi števili k in r , za kateri velja $1 \leq k \leq r - 1$ in $(k, r) = 1$, graf $CQ(k, r)$ definiran, tako da je $V(CQ(k, r)) = V(\text{GP}(4, 1)) \times \mathbb{Z}_r$ in

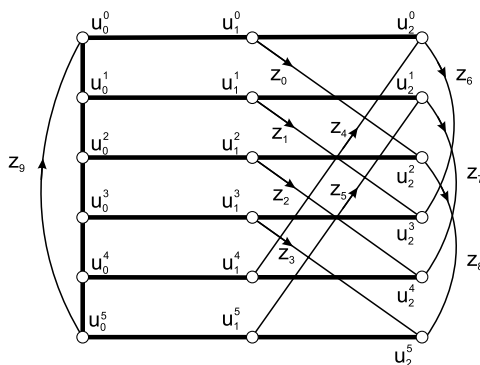
$$\begin{aligned} E(CQ(k, r)) = & \{(u_1, i)(u_6, i), (u_1, i)(u_7, i), (u_1, i)(u_8, i), (u_2, i)(u_5, i), \\ & (u_2, i)(u_8, i), (u_3, i)(u_8, i), (u_4, i)(u_7, i), \\ & (u_2, i)(u_7, i + 1), (u_3, i)(u_5, i + k), (u_3, i)(u_6, i - k^{-1}), \\ & (u_4, i)(u_5, i - k^{-1} - 1), (u_4, i)(u_6, i + k) \mid i \in \mathbb{Z}_r\}. \end{aligned}$$

Trditev 3.1.20 [49, Theorem 1.1] Naj bo \tilde{X} regularni \mathbb{Z}_r -krov kocke $\text{GP}(4, 1)$. Potem je \tilde{X} 1-regularen ali 2-regularen. Poleg tega velja naslednje.

- (i) \tilde{X} je 1-regularen ožine 6 natanko tedaj, ko je \tilde{X} izomorfen grafu $\text{CQ}(k, r)$ za nek $2 \leq k \leq r - 3$, ki zadošča pogoju $r \mid (k^2 + k + 1)$ in je $r \geq 7$.
- (ii) \tilde{X} je 2-regularen natanko tedaj, ko je izomorfen enemu izmed naslednjih štirih posplošenih Petersenovih grafov: $\text{GP}(4, 1)$, $\text{GP}(8, 3)$, $\text{GP}(12, 5)$ in $\text{GP}(24, 5)$.

Naj bo $X = \text{F018A}$ Pappusov graf in naj bo $V(X) = \{u_i^j \mid i \in \mathbb{Z}_3, j \in \mathbb{Z}_6\}$ njegova množica točk kot je prikazano na sliki 3.11. Potem je za nenegativni celi števili k in r , za kateri velja $1 \leq k \leq r - 1$ in $(k, r) = 1$, graf $\text{CP}(k, r)$ definiran, tako da je $V(\text{CP}(k, r)) = V(X) \times \mathbb{Z}_r$ in

$$\begin{aligned} E(\text{CP}(k, r)) = & \{(u_0^j, i)(u_1^j, i), (u_1^j, i)(u_2^j, i), (u_0^j, i)(u_0^{j+1}, i) \mid j \in \mathbb{Z}_6, i \in \mathbb{Z}_r\} \cup \\ & \{(u_1^0, i)(u_2^2, i + 1), (u_1^2, i)(u_2^4, i + k), (u_1^4, i)(u_2^0, i + k^2) \mid i \in \mathbb{Z}_r\} \cup \\ & \{(u_1^1, i)(u_2^3, i - k^2), (u_1^3, i)(u_2^5, i - 1), (u_1^5, i)(u_2^1, i - k) \mid i \in \mathbb{Z}_r\} \cup \\ & \{(u_2^0, i)(u_2^3, i - k^2), (u_2^1, i)(u_2^4, i + k), (u_2^2, i)(u_2^5, i - 1) \mid i \in \mathbb{Z}_r\}. \end{aligned}$$



Slika 3.11: Pappusov graf F018A z voltažnim prirejanjem ζ . Vpeto drevo sestavljajo povezave v krepkem zapisu, ki vse nosijo voltažo 0.

Trditev 3.1.21 Naj bo \tilde{X} regularni \mathbb{Z}_r -krov Pappusovega grafa $X = \text{F018A}$. Potem je

- (i) \tilde{X} 1-regularen ožine 6 natanko tedaj, ko je \tilde{X} izomorfen grafu $\text{CP}(k, r)$ za nek $2 \leq k \leq r - 3$, ki zadošča pogoju $r \mid (k^2 + k + 1)$ in je $r \geq 7$;
- (ii) \tilde{X} 2-regularen ožine 6 natanko tedaj, ko je \tilde{X} izomorfen grafu F054A, to je $I_3^{18}(9)$ -poti.

DOKAZ. Pappusov graf F018A je Cayleyjev graf grupe $H = \text{Dih}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) = \langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^2 = 1, x^z = x^{-1}, y^z = y^{-1}, xy = yx \rangle$ glede na množico generatorjev $\{xz, yz, z\}$. Njegova grupa avtomorfizmov premore eno samo 1-regularno podgrupo, izomorfnna je grupi $G = H \rtimes \mathbb{Z}_3$ (glej primer 3.1.5).

Naj bo $V(X) = \{u_i^j \mid i \in \mathbb{Z}_3, j \in \mathbb{Z}_6\}$ kot na sliki 3.11. Potem 6-cikli

$$u_0^0 u_0^1 u_0^2 u_0^3 u_0^4 u_0^5 u_0^0, \quad u_1^0 u_2^2 u_1^4 u_2^4 u_1^0 u_2^0 \quad \text{in} \quad u_1^1 u_2^3 u_1^3 u_2^5 u_1^5 u_2^1 u_1^1$$

ustrezajo grupni relaciji $(xz \cdot yz)^3$ v grupi H , 6-cikli oblike $u_0^j u_0^{j+1} u_0^{j+2} u_1^{j+2} u_2^{j+2} u_1^j u_0^j$, $j \in \mathbb{Z}_6$, pa ustrezajo grupni relaciji $(xz \cdot yz \cdot z)^2$. Naj točka u_0^0 ustreza grupnemu elementu $u_0^0 = 1 \in H$, naj bo $\alpha \in G_1$ stabilizator točke $u_0^0 = 1$, tako da je $(1, xz)^\alpha = (1, yz)$, $(1, yz)^\alpha = (1, z)$ in $(1, z)^\alpha = (1, xz)$ (z drugimi besedami: α deluje na sosedih točke $u_0^0 = 1$ kot permutacija $(u_0^1 u_0^5 u_1^0)$), in naj bo $\sigma = xz \cdot yz = xy^{-1} \in G$. (Očitno σ deluje na ciklu $u_0^0 u_0^1 u_0^2 u_0^3 u_0^4 u_0^5 u_0^0$ kot rotacija za 2 naprej.)

Naj bo $\zeta: A(X) \rightarrow \mathbb{Z}_r$ tako voltažno prirejanje, da imajo loki vpetega drevesa T , ki ga sestavlja množica povezav $\{u_0^j u_1^j, u_1^j u_2^j, u_0^0 u_0^1, u_0^1 u_0^2, u_0^2 u_0^3, u_0^3 u_0^4, u_0^4 u_0^5 \mid j \in \mathbb{Z}_6\}$, voltažo 0 (glej sliko 3.11). Potem v grafu X obstaja deset fundamentalnih ciklov

$$\begin{aligned} &u_0^0 u_1^0 u_2^2 u_1^2 u_0^1 u_0^0, \quad u_0^1 u_1^3 u_2^3 u_0^3 u_2^2 u_0^1, \quad u_0^2 u_1^2 u_2^4 u_1^4 u_0^4 u_0^2, \quad u_0^3 u_1^3 u_2^5 u_1^5 u_0^5 u_0^3, \\ &u_0^4 u_1^4 u_2^0 u_1^0 u_0^0 u_0^2 u_0^3 u_0^4, \quad u_0^5 u_1^5 u_2^1 u_1^1 u_0^1 u_0^2 u_0^3 u_0^4 u_0^5, \quad u_0^0 u_1^0 u_2^0 u_0^3 u_1^3 u_0^2 u_0^1 u_0^0, \\ &u_0^1 u_1^1 u_2^4 u_1^4 u_0^4 u_0^3 u_0^2 u_0^1, \quad u_0^2 u_1^2 u_2^5 u_1^5 u_0^5 u_0^4 u_0^3 u_0^2 \quad \text{in} \quad u_0^0 u_1^1 u_0^2 u_0^3 u_0^4 u_0^5 u_0^0, \end{aligned}$$

ki so generirani z desetimi loki, ki ne pripadajo drevesu T : (u_1^0, u_2^2) , (u_1^1, u_2^3) , (u_1^2, u_2^4) , (u_1^3, u_2^5) , (u_1^4, u_2^0) , (u_1^5, u_2^1) , (u_2^0, u_2^3) , (u_2^1, u_2^4) , (u_2^2, u_2^5) in (u_0^5, u_0^0) . Z delovanjem avtomorfizmov α in σ se ti cikli preslikajo v cikle enakih dolžin (glej tabelo 3.1 in tabelo 3.2, kjer so zapisani vsi cikli in njihove voltaže).

C	ζ_C	C^α	ζ_{C^α}
$u_0^0 u_1^0 u_2^2 u_1^2 u_0^1 u_0^0$	z_0	$u_0^0 u_1^1 u_2^1 u_1^5 u_0^5 u_0^0$	$-z_5 + z_9$
$u_0^1 u_1^3 u_2^3 u_0^3 u_2^2 u_0^1$	z_1	$u_0^1 u_1^0 u_2^0 u_1^5 u_0^5 u_0^1$	z_3
$u_0^2 u_1^2 u_2^4 u_1^4 u_0^4 u_0^2$	z_2	$u_0^2 u_1^5 u_2^5 u_1^0 u_0^0 u_0^2$	$-z_5 + z_7 - z_2 + z_8$
$u_0^3 u_1^3 u_2^5 u_1^5 u_0^5 u_0^3$	z_3	$u_0^3 u_1^0 u_2^0 u_1^5 u_0^5 u_0^3$	$-z_3 - z_6 + z_0 + z_8$
$u_0^4 u_1^4 u_2^0 u_1^0 u_0^0 u_0^2 u_0^3 u_0^4$	z_4	$u_0^4 u_1^2 u_2^2 u_1^0 u_0^0 u_1^5 u_0^5 u_2^2$	$-z_9 - z_8$
$u_0^5 u_1^5 u_2^1 u_1^1 u_0^1 u_0^2 u_0^3 u_0^4 u_0^5$	z_5	$u_0^5 u_1^4 u_2^4 u_1^0 u_0^0 u_1^5 u_0^5 u_2^0$	$-z_4 - z_8 - z_0$
$u_0^0 u_1^1 u_2^4 u_1^4 u_0^4 u_0^3 u_0^2 u_0^1$	z_6	$u_0^0 u_1^0 u_2^0 u_1^3 u_0^3 u_1^5 u_0^5 u_0^0$	$z_3 - z_9$
$u_0^1 u_1^3 u_2^3 u_0^3 u_2^2 u_0^1$	z_7	$u_0^1 u_0^4 u_1^4 u_2^2 u_0^2 u_0^3 u_1^5 u_0^5$	$-z_2 + z_7$
$u_0^2 u_1^2 u_2^4 u_1^4 u_0^4 u_0^3 u_0^2 u_0^1$	z_8	$u_0^2 u_1^5 u_2^5 u_1^0 u_0^0 u_0^2 u_0^3 u_1^5$	$z_5 + z_1 - z_6 + z_0 + z_8$
$u_0^3 u_1^3 u_2^5 u_1^5 u_0^5 u_0^3 u_0^2 u_0^1$	z_9	$u_0^3 u_0^5 u_1^5 u_2^2 u_1^0 u_0^0$	$-z_9 - z_8 - z_0$

Tabela 3.1: Fundamentalni cikli, slike le-teh pri delovanju avtomorfizma α in pripadajoče voltaže.

Sedaj si oglejmo preslikavi $\bar{\alpha}$ in $\bar{\sigma}$ iz množice $\{z_i \mid i \in \mathbb{Z}_{10}\}$ voltaž desetih fundamentalnih ciklov grafa X v ciklično grupo \mathbb{Z}_r , ki sta definirani z $\zeta_{\bar{\alpha}} = \zeta_{C^\alpha}$ in $\zeta_{\bar{\sigma}} = \zeta_{C^\sigma}$. Ker je G edina 1-regularna podgrupa grupe $\text{Aut}X$, nam trditev 2.2.6 pove, da se preslikavi $\bar{\alpha}$ in $\bar{\sigma}$ razširita v avtomorfizma grupe \mathbb{Z}_r . Označimo pripadajoča razširjena avtomorfizma z α^* in σ^* . Iz tabele 3.1 in tabele 3.2 razberemo, da velja:

$$\begin{aligned} z_0^{\sigma^*} &= z_2, & z_1^{\sigma^*} &= z_3, \\ z_2^{\sigma^*} &= z_4 - z_9, & z_3^{\sigma^*} &= z_5 - z_9, \\ z_6^{\sigma^*} &= z_8, & z_7^{\sigma^*} &= -z_6 - z_9, \\ z_0^{\alpha^*} &= -z_5 - z_9, & z_4^{\alpha^*} &= -z_9 - z_8. \end{aligned} \tag{3.6}$$

C	ζ_C	C^σ	ζ_{C^σ}
$u_0^0 u_1^0 u_2^2 u_3^2 u_4^1 u_5^0 u_0^0$	z_0	$u_0^2 u_1^2 u_3^4 u_4^4 u_5^3 u_0^2$	z_2
$u_0^0 u_1^1 u_2^3 u_3^3 u_4^0 u_5^1 u_0^0$	z_1	$u_0^3 u_1^3 u_2^5 u_3^5 u_4^4 u_5^3 u_0^0$	z_3
$u_0^2 u_1^2 u_2^4 u_3^4 u_4^0 u_5^2 u_0^0$	z_2	$u_0^4 u_1^4 u_2^0 u_3^0 u_4^5 u_5^4 u_0^0$	$z_4 - z_9$
$u_0^3 u_1^3 u_2^5 u_3^5 u_4^0 u_5^3 u_0^0$	z_3	$u_0^5 u_1^5 u_2^1 u_3^1 u_4^0 u_5^5 u_0^0$	$z_5 - z_9$
$u_0^4 u_1^4 u_2^0 u_3^0 u_4^2 u_5^3 u_0^0$	z_4	$u_0^0 u_1^0 u_2^7 u_3^7 u_4^0 u_5^0 u_0^0$	$z_0 + z_9$
$u_0^5 u_1^5 u_2^1 u_3^1 u_4^0 u_5^5 u_0^0$	z_5	$u_0^1 u_1^3 u_2^3 u_3^3 u_4^4 u_5^0 u_0^0$	$z_1 + z_9$
$u_0^0 u_1^0 u_2^3 u_3^3 u_4^0 u_5^2 u_0^0$	z_6	$u_0^2 u_1^2 u_2^5 u_3^5 u_4^0 u_5^3 u_0^0$	z_8
$u_0^1 u_1^1 u_2^4 u_3^4 u_4^0 u_5^3 u_0^0$	z_7	$u_0^3 u_1^3 u_2^0 u_3^0 u_4^0 u_5^4 u_0^0$	$-z_6 - z_9$
$u_0^2 u_1^2 u_2^5 u_3^5 u_4^0 u_5^3 u_0^0$	z_8	$u_0^4 u_1^4 u_2^1 u_3^1 u_4^0 u_5^5 u_0^0$	$-z_7 - z_9$
$u_0^3 u_1^3 u_2^0 u_3^0 u_4^2 u_5^3 u_0^0$	z_9	$u_0^5 u_1^5 u_2^0 u_3^0 u_4^0 u_5^0 u_0^0$	z_9

Tabela 3.2: Fundamentalni cikli, slike le-teh pri delovanju avtomorfizma σ in pripadajoče voltaže.

Ker mora biti \tilde{X} ožine 6, se mora vsaj en izmed dveh 6-ciklov $D = u_0^0 u_1^0 u_2^2 u_1^2 u_2^0 u_1^0 u_0^0$ in $D' = u_0^0 u_1^0 u_2^2 u_0^3 u_4^0 u_5^0 u_0^0$, ki vsebujeta 2-lok (u_0^0, u_1^0, u_2^0) dvigniti v 6-cikel grafa \tilde{X} . Če se D dvigne v 6-cikel v \tilde{X} , potem je $z_0 = 0$ in po enačbah v tabeli 3.1 in tabeli 3.2 so tudi $z_i = 0$ za vsak $i \in \mathbb{Z}_{10}$, protislovje. Torej je $z_0 \neq 0$ in $D' = u_0^0 u_1^0 u_2^2 u_0^3 u_4^0 u_5^0 u_0^0$ se dvigne v 6-cikel, drugače povedano: $z_9 = 0$. Zdaj enačbe v (3.6) povedo, da so $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$ in z_8 v \mathbb{Z}_r enakega reda. Ker je $\mathbb{Z}_r = \langle z_i \mid i \in \mathbb{Z}_{10} \rangle$, sledi, da vsak $z_i, i \in \mathbb{Z}_{10} \setminus \{9\}$, generira grupo \mathbb{Z}_r . Po trditvi 2.2.8 lahko predpostavimo, da je $z_0 = 1$ in $z_2 = k$ za nek $k \in \mathbb{Z}_r^*$. Ker je $z_0^{\sigma^*} = z_2$, je σ^* avtomorfizem grupe \mathbb{Z}_r inducirani z $1 \mapsto k$. Torej, iz $z_2^{\sigma^*} = z_4 - z_9 = z_4$ in $z_4^{\sigma^*} = z_0 + z_9 = z_0 = 1$, dobimo, da je $z_4 = k^2$ in $k^3 = 1$. Ker se mora 6-cikel $u_1^0 u_2^2 u_1^4 u_2^4 u_1^0 u_2^0 u_1^0$ dvigniti v 6-cikel, ugotovimo, da je $1 + k + k^2 = 0 \pmod{r}$. Ker je $z_1^{\alpha^*} = z_3 = z_1^*$ (glej tabelo 3.1 in tabelo 3.2), je tudi α^* avtomorfizem grupe \mathbb{Z}_r inducirani z $1 \mapsto k$. Torej enakost $z_9^{\alpha^*} = -z_9 - z_8 - z_0 = -z_8 - z_0$ implicira, da je $z_8 = -z_0 = -1$. Zdaj iz enačbe $z_8^{\sigma^*} = -z_7 - z_9 = -z_7$ sledi, da je $z_7 = k$. Zato po enačbi $z_7^{\sigma^*} = -z_6 - z_9 = -z_6$ velja: $z_6 = -k^2$. Enačbe $z_6^{\alpha^*} = z_3 - z_9, z_3^{\sigma^*} = z_5 - z_9 = z_5$ in $z_5^{\sigma^*} = z_1 + z_9 = z_1$, zdaj povedo, da je $z_3 = -1, z_5 = -k$ in $z_1 = -k^2$. Sledi, da je \tilde{X} izomorfen grafu $CP(k, r)$.

Ugotoviti moramo še, kdaj je konstruirani \mathbb{Z}_r -krov grafa X tudi 2-regularen. V ta namen denimo, da se avtomorfizem $\beta \in \text{Aut}X_{u_0^0}$, ki fiksira lok (u_0^0, u_1^0) in zamenja (u_0^0, u_1^0) in (u_0^0, u_5^0) , dvigne. Če si pogledamo delovanje avtomorfizma β na ciklu $u_0^0 u_1^0 u_2^2 u_1^2 u_0^2 u_0^0 u_0^0$, ugotovimo, da je $z_0^{\beta^*} = -z_4 = -k^2$ in $z_4^{\beta^*} = z_0 = 1$. Torej je $k^4 = 1$, kar skupaj z $k^3 = 1$ pove, da je $k = 1$. Odtod sledi, da je $r = 3$ in zato je \tilde{X} izomorfen grafu F0544A, edinemu kubičnemu grafu reda 54, ki je 2-regularen.

Da bo dokaz končan moramo pokazati še, da je v primeru, ko je \tilde{X} 1-regularen, $k \leq r - 3$. Ker $r \mid k^2 + k + 1$, je očitno $k \neq r - 1$. Če je $k = r - 2$, pa nam enačba $k^2 + k + 1 = 0 \pmod{r}$ pove, da je $r = 3$ in $k = 1$, in je torej \tilde{X} izomorfen grafu F0544A. S tem je dokaz končan. \blacksquare

Naj bo $m > 3, t = m$, če je m liho število, in $t = m + 1$, če je m sodo število. Nadalje, naj bosta k in r nenegativni celi števili, za kateri velja: $1 \leq k \leq r - 1$ in $(k, r) = 1$. Potem je graf $CI(m, k, r)$ \mathbb{Z}_r -krov $I_m^{2m}(t)$ -poti definiran na sledeči način. Naj bo X $I_m^{2m}(t)$ -pot, Cayleyjev graf $\text{Cay}(G, \{x, y, z\})$ posplošene diedrske grupe

$G = \text{Dih}(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m) = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xyz)^2 = (xy)^m = (yz)^m = (zx)^m = 1 \rangle$. Potem je $CI(m, k, r)$ graf z množico točk $V(CI(m, k, r)) = V(X) \times \mathbb{Z}_r$ (kjer smo $V(X)$ identificirali z G) in množico povezav

$$E(CI(m, k, r)) = \{(g, i)(gx, i - k), (g, i)(gy, i - k^2), (g, i)(gz, i - 1) \mid g \in G, i \in \mathbb{Z}_r\}.$$

Zdaj smo pripravljene na dokaz izreka, ki bo klasificiral kubične 1-regularne grafe ožine 6.

Izrek 3.1.22 *Kubični simetrični graf ožine 6 je 1-regularen natanko tedaj, ko obstaja naravno število r s faktorizacijo $r = 3^s p_1^{e_1} \dots p_t^{e_t} > 3$, kjer je $s \in \{0, 1\}$, $t \geq 1$, in $p_i \equiv 1 \pmod{3}$, ter naravno število m , tako da je X izomorfen normalnemu Cayleyjevemu grafu posplošene diedrske grupe $\text{Dih}(\mathbb{Z}_{rm} \times \mathbb{Z}_m)$; natančneje:*

- (i) če je $m = 1$, je X is izomorfen Cayleyjevemu grafu $\text{Cay}(D_{2r}, \{\tau, \tau\rho, \tau\rho^{k+1}\})$ diedrske grupe $D_{2r} = \langle \tau, \rho \mid \tau^2 = \rho^r = 1, \rho^\tau = \rho^{-1} \rangle$, kjer je $r \geq 11$ liho število;
- (ii) če je $m = 2$, je X \mathbb{Z}_r -krov kocke $\text{GP}(4, 1)$, izomorfen grafu $CQ(k, r)$;
- (iii) če je $m = 3$, je X \mathbb{Z}_r -krov Pappusovega grafa F018A, izomorfen grafu $CP(k, r)$;
- (iv) če je $m \geq 4$, je X \mathbb{Z}_r -krov $I_m^{2m}(t)$ -poti, kjer je $t = m$, če je m liho število, in $t = m + 1$, če je m sodo število, izomorfen grafu $CI(m, k, r)$;

kjer $k \in \mathbb{Z}_r^*$ zadošča enačbi $k^2 + k + 1 = 0$.

DOKAZ. Naj bo X kubični 1-regularni graf ožine 6. Potem je po trditvi 3.1.17 $\text{Aut}X \cong (\mathbb{Z}_{rm} \times \mathbb{Z}_m) \rtimes \mathbb{Z}_6$ in X je normalni Cayleyjev graf posplošene diedrske grupe $H = \text{Dih}(\mathbb{Z}_{rm} \times \mathbb{Z}_m) = \langle a, w, \bar{w} \mid a^2 = w^{rm} = \bar{w}^{rm} = 1, w^a = w^{-1}, \bar{w}^a = \bar{w}^{-1}, w\bar{w} = \bar{w}w, \dots \rangle$, kjer $r, m \in \mathbb{Z}$ in $r \neq 1, 3$. Relacije, ki veljajo v grupi H nam povedo, da je $\langle w \rangle \cap \langle \bar{w} \rangle \cong \mathbb{Z}_r$ edinka v H . Torej je po trditvi 2.2.9, X \mathbb{Z}_r -krov kubičnega simetričnega Cayleyjevega grafa reda $2m^2$.

Če je $m = 1$, je X Cayleyjev graf diedrske grupe D_{2r} . Zato po trditvi 3.1.18 in trditvi 3.1.19 velja točka (i). Če je $m = 2$, je X \mathbb{Z}_r -krov Cayleyjevega grafa grupe $\text{Dih}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$, ki je očitno kocka $\text{GP}(4, 1)$. Torej trditev 3.1.20 pove, da je X izomorfen grafu $CQ(k, r)$ kot trdimo v točki (ii). Če je $m = 3$, je X \mathbb{Z}_r -krov kubičnega simetričnega grafa reda 18, torej Pappusovega grafa F018A. Zato po trditvi 3.1.21 velja točka (iii).

Torej lahko predpostavimo, da je $m \geq 4$. Potem je X \mathbb{Z}_r -krov kubičnega simetričnega grafa Y reda $2m^2$ in ožine največ 6. Vendar, ker red nobenega izmed petih kubičnih simetričnih grafov, ki so ožine manj kot 6 ni oblike $2m^2$, je ožina grafa Y natanko 6. Zato izrek 3.1.13 pove, da je Y normalni Cayleyjev graf grupe $G = \text{Dih}(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m) = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xyz)^2 = (xy)^m = (yz)^m = (zx)^m = 1 \rangle$ glede na množico generatorjev $S = \{x, y, z\}$. Po lastnostih normalnih Cayleyjevih grafov, podanih v razdelku 2.2.3, obstaja tak avtomorfizem $\alpha \in \text{Aut}G$, ki porodi avtomorfizem grafa Y (zaradi enostavnosti bomo tudi tega označevali z α), da je $x^\alpha = y$, $y^\alpha = z$ in $z^\alpha = x$.

Naj a_x označuje poljuben lok grafa Y oblike (g, gx) , a_y poljuben lok oblike (g, gy) in a_z poljuben lok oblike (g, gz) , kjer je $g \in G$. Potem obstaja šest različnih tipov 2-lokov v grafu Y : $(a_x a_y)$, $(a_y a_x)$, $(a_y a_z)$, $(a_z a_y)$, $(a_x a_z)$ in $(a_z a_x)$. Naj \mathcal{A}_{xy} , \mathcal{A}_{yx} ,

$\mathcal{A}_{yz}, \mathcal{A}_{zy}, \mathcal{A}_{zx}$ in \mathcal{A}_{xz} označujejo pripadajoče množice 2-lokov. Očitno so te množice orbite za podgrupo $M = \langle xy, yz, zx \rangle = \langle xy, yz \rangle$ grupe G , ki je izomorfná grupi $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$. Velja tudi, da je $\mathcal{A}_{xy}^\alpha = \mathcal{A}_{yz}$, $\mathcal{A}_{yz}^\alpha = \mathcal{A}_{zx}$ in $\mathcal{A}_{zx}^\alpha = \mathcal{A}_{xy}$ ter da je poljuben 6-cikel v Y obike $(a_x a_y a_z)^2$.

Zdaj moramo določiti vse možne 1-regularne \mathbb{Z}_r -krove $X = \text{Cov}(Y)$ grafa Y , ki so ožine 6. Po trditvi 3.1.9, ima X konsistentne 6-cikle, ki so dvigi konsistentnih 6-ciklov v grafu Y . Seveda ima po rezultatih v razdelku 3.1.2 graf Y tudi konsistentne $2m$ -cikle. Torej mora 1-regularna podgrupa grupe $\text{Aut}Y$, ki se dvigne v grupo $\text{Aut}X$, imeti konsistentne 6-cikle (in nobenih konsistentnih $2m$ -ciklov). Taka 1-regularna podgrupa je grupa $G \rtimes \langle \alpha \rangle \leq \text{Aut}Y$, saj vsak element te grupe fiksira množice x -povezav, y -povezav in z -povezav ali pa jih ciklično permutira. Posledično ta grupa ne vsebuje drsnega avtomorfizma konsistentnega $2m$ -cikla, saj vsak izmed teh ciklov ustreza eni od naslednjih grupnih relacij: $(xy)^m$, $(yz)^m$ in $(zx)^m$. Torej je $G \rtimes \langle \alpha \rangle$ 1-regularna podgrupa grupe $\text{Aut}Y$, ki se dvigne v $\text{Aut}X$. Poleg tega M centralizira grupo krovnih transformacij, ki je izomorfná grupi \mathbb{Z}_r . Zato po trditev 2.2.7 obstaja tako voltažno prirejanje $\zeta: A(Y) \rightarrow \mathbb{Z}_r$, da za vsak $\sigma \in M$ in vsak sprehod W v grafu Y velja: $\zeta_W = \zeta_{W\sigma}$. Ker so $\mathcal{A}_{xy}, \mathcal{A}_{yz}$ in \mathcal{A}_{zx} orbite grupe M , sledi, da imajo vsi 2-loki oblike $(a_x a_y)$ enako voltažo, imenujmo jo $\zeta_{(a_x a_y)}$ (enako velja za 2-loke oblike $(a_y a_z)$ in 2-loke oblike $(a_z a_x)$, katerih voltaže bomo označevali z $\zeta_{(a_y a_z)}$ oziroma $\zeta_{(a_z a_x)}$). Dejstvo, da se 6-cikli grafa Y dvignejo v 6-cikle grafa X , implicira, da je $\zeta_{(a_x a_y a_z)^2} = \zeta_{(a_x a_y)(a_z a_x)(a_y a_z)} = 0$, in zato je

$$\zeta_{(a_z a_x)} = -\zeta_{(a_x a_y)} - \zeta_{(a_y a_z)}. \quad (3.7)$$

Naj bodo $C_{xy} = (a_x a_y)$, $C_{yz} = (a_y a_z)$ in $C_{zx} = (a_z a_x)$ 2-loki, ki se stikajo v točki $v = 1$ grafa Y , ki ustreza identiteti grupe G . Spomnimo, da avtomorfizem $\alpha \in \text{Aut}Y$ ciklično permutira te tri 2-loke. Ker α inducira avtomorfizem α^* grupe krovnih transformacij, ki jo tu identificiramo z grupo \mathbb{Z}_r , velja:

$$\zeta_{C_{xy}}^{\alpha^*} = \zeta_{C_{yz}}, \quad \zeta_{C_{yz}}^{\alpha^*} = \zeta_{C_{zx}} \quad \text{and} \quad \zeta_{C_{zx}}^{\alpha^*} = \zeta_{C_{xy}}. \quad (3.8)$$

Ker je X povezan, je $\langle \zeta_{(a_x a_y)}, \zeta_{(a_y a_z)} \rangle = \mathbb{Z}_r$. Odtod sledi, da tako $\zeta_{(a_x a_y)}$ kot tudi $\zeta_{(a_y a_z)}$ generira grupo \mathbb{Z}_r . Torej lahko predpostavimo, da je $\zeta_{(a_x a_y)} = 1$ in $\zeta_{(a_y a_z)} = k$ za nek $k \in \mathbb{Z}_r^*$. Zdaj (3.8) implicira, da α^* preslika 1 v k . Odtod pa sledi, da je $\zeta_{(a_z a_x)} = \zeta_{(a_x a_y)}^{\alpha^{*2}} = k^2$. Z uporabo (3.7) in trditve 3.1.18 ugotovimo, da je $k^2 + k + 1 = 0$. Torej je r zelene oblike. Nadalje, če izberemo, da je $\zeta_{a_x} = -k$, $\zeta_{a_y} = -k^2$ in $\zeta_{a_z} = -1$, ugotovimo, da je X izomorfen grafu $CI(m, k, r)$.

Za dokončanje dokaza moramo pokazati še, da je konstruiran \mathbb{Z}_r -krov grafa Y 1-regularen. V ta namen denimo nasprotno, da se avtomorfizem $\beta \in \text{Aut}Y_v$, ki fiksira lok a_z ter zamenja a_x in a_y , dvigne. Potem inducirani avtomorfizem $\beta^* \in \mathbb{Z}_r^*$ preslika 1 v -1 (saj je $(a_x a_y)^\beta = (a_y a_x)$). Ker je

$$(a_y a_z)^\beta = (a_x a_z),$$

ugotovimo tudi, da je $-k = -k^2$. Vendar potem $k^2 + k + 1 = 0$ implicira, da je $r = 3$, protislovje. S tem je dokaz izreka 3.1.22 končan. ■

Posledica 3.1.23 Naj bo m celo število in $r > 3$ celo število s faktorizacijo $r = 3^s p_1^{e_1} \dots p_t^{e_t} > 3$, kjer je $s \in \{0, 1\}$, $t \geq 1$ in $p_i \equiv 1 \pmod{3}$. Potem velja:

- (i) Če je $m = 1$ in $r = 7$, ne obstaja kubični 1-regularni graf ožine 6 in reda $2rm^2$.
- (ii) Če je $m = 1$ in $r \geq 11$, obstaja kubični 1-regularni graf ožine 6 in reda $2rm^2$.
- (iii) Če je $m > 1$ in $r > 3$, obstaja kubični 1-regularni graf ožine 6 in reda $2rm^2$.

Posledica 3.1.24 Naj bo $m > 3$ celo število. Potem je 2-regularna $I_m^{6m}(t)$ -pot \mathbb{Z}_3 -krov 2-regularne $I_m^{2m}(t)$ -poti.

3.1.4 Opombe in sklepi

Conder in Nedela sta dokazala, da so z izjemo Heawoodovega grafa F014A, Pappusovega grafa F018A in Desarguesovega grafa GP(10, 3) vsi kubični simetrični grafi ožine 6 1-regularni ali 2-regularni (glej trditev 3.1.1). Zato z združitvijo rezultatov iz podrazdelka 3.1.2 (glej izrek 3.1.13) z rezultati iz podrazdelka 3.1.3 (glej izrek 3.1.22) dobimo klasifikacijo kubičnih simetričnih grafov ožine 6. Kot smo že uvodoma naznanili, je ključno vlogo pri klasifikaciji, poleg teorije grup in teorije krovnih tehnik, imela analiza strukture obravnavanih grafov glede na orbite drsnih avtomorfizmov konsistentnih ciklov. Med drugim nam klasifikacija pove, da so vsi kubični simetrični grafi dvodelni. Sta pa to dejstvo dokazala že Feng in Nedela v [48].

Za konec tega razdelka navajamo listo vseh kubičnih simetričnih grafov ožine 6 do 2048 točk (glej tabele 3.3, 3.4 in 3.5). V stolpcu z oznako d so navedene dolžine konsistentnih ciklov pripadajočega grafa, s pa pove s -regularnost grupe avtomorfizmov grafa. Lista je povzeta iz Conderjeve liste vseh kubičnih simetričnih grafov do 2048 točk [16, 22, 23]. Grafi do 1000 točk so označeni s standardno notacijo F_nA , F_nB , itd (Fosterjeva notacija [16, 23]). Grafi, ki so večjega reda, pa so označeni s Conderjevimi oznakami [22] $Cn.i$, kjer n pomeni število točk grafa, i pa je število, ki je v pomoč, kadar obstaja več neizomorfni grafov enakega reda.

3.2 Kubični simetrični grafi z 1-regularno podgrupo

Rezultati tega razdelka so objavljeni v [54]. Raziskovali bomo strukturne lastnosti kubičnih simetričnih grafov, katerih grupa avtomorfizmov vsebuje 1-regularno podgrupo z $(2, s, 3)$ -prezentacijo. Analizirali bomo njihove strukturne lastnosti glede na orbite drsnih avtomorfizmov konsistentnih ciklov. Z analizo bomo ugotovili podrobnosti o številu s (glej posledico 3.2.7). Posledično bomo dobili natančnejšo informacijo o ciklični povezanosti teh grafov (glej lemo 3.2.8), rezultat, ki ga bomo potrebovali v poglavju 4 pri iskanju hamiltonskih ciklov v $(2, s, 3)$ -Cayleyjevih grafih.

Skozi ta razdelek naj bo

$$G = \langle a, x \mid a^2 = x^s = (ax)^3 = 1, \dots \rangle \quad (3.9)$$

grupa z $(2, s, 3)$ -prezentacijo in naj bo Y orbitalni graf levega delovanja grupe G na množici levih odsekov \mathcal{H} podgrupe $H = \langle ax \rangle$ izhajajoč iz podorbite

$$\{aH, x^{-1}H, ax^2H\}$$

Graf	s	Ožina	d	Graf	s	Ožina	d	Graf	s	Ožina	d
F026A	1	6	6	F456A	1	6	6	F854B	1	6	6
F038A	1	6	6	F458A	1	6	6	F866A	1	6	6
F042A	1	6	6	F474A	1	6	6	F872A	1	6	6
F056A	1	6	6	F482A	1	6	6	F878A	1	6	6
F062A	1	6	6	F488A	1	6	6	F882A	1	6	6
F074A	1	6	6	F494A	1	6	6	F888B	1	6	6
F078A	1	6	6	F494B	1	6	6	F896A	1	6	6
F086A	1	6	6	F504A	1	6	6	F906A	1	6	6
F098A	1	6	6	F518A	1	6	6	F914A	1	6	6
F104A	1	6	6	F518B	1	6	6	F926A	1	6	6
F114A	1	6	6	F536A	1	6	6	F936B	1	6	6
F122A	1	6	6	F542A	1	6	6	F938A	1	6	6
F126A	1	6	6	F546A	1	6	6	F938B	1	6	6
F134A	1	6	6	F546B	1	6	6	F942A	1	6	6
F146A	1	6	6	F554A	1	6	6	F950A	1	6	6
F152A	1	6	6	F558A	1	6	6	F962A	1	6	6
F158A	1	6	6	F566A	1	6	6	F962B	1	6	6
F168A	1	6	6	F582A	1	6	6	F974A	1	6	6
F182A	1	6	6	F584A	1	6	6	F978A	1	6	6
F182B	1	6	6	F602A	1	6	6	F992A	1	6	6
F186A	1	6	6	F602B	1	6	6	F998A	1	6	6
F194A	1	6	6	F608A	1	6	6	C1014.1	1	6	6
F206A	1	6	6	F614A	1	6	6	C1016.1	1	6	6
F218A	1	6	6	F618A	1	6	6	C1022.1	1	6	6
F222A	1	6	6	F626A	1	6	6	C1022.2	1	6	6
F224A	1	6	6	F632A	1	6	6	C1026.1	1	6	6
F234A	1	6	6	F650A	1	6	6	C1032.2	1	6	6
F248A	1	6	6	F654A	1	6	6	C1046.1	1	6	6
F254A	1	6	6	F662A	1	6	6	C1050.2	1	6	6
F258A	1	6	6	F666A	1	6	6	C1064.1	1	6	6
F266A	1	6	6	F672B	1	6	6	C1064.2	1	6	6
F266B	1	6	6	F674A	1	6	6	C1082.1	1	6	6
F278A	1	6	6	F686A	1	6	6	C1086.1	1	6	6
F294B	1	6	6	F686C	1	6	6	C1094.1	1	6	6
F296A	1	6	6	F698A	1	6	6	C1098.1	1	6	6
F302A	1	6	6	F702B	1	6	6	C1106.1	1	6	6
F312A	1	6	6	F722A	1	6	6	C1106.2	1	6	6
F314A	1	6	6	F728A	1	6	6	C1112.1	1	6	6
F326A	1	6	6	F728B	1	6	6	C1118.1	1	6	6
F338A	1	6	6	F734A	1	6	6	C1118.2	1	6	6
F342A	1	6	6	F744B	1	6	6	C1134.1	1	6	6
F344A	1	6	6	F746A	1	6	6	C1142.1	1	6	6
F350A	1	6	6	F758A	1	6	6	C1154.1	1	6	6
F362A	1	6	6	F762A	1	6	6	C1158.1	1	6	6
F366A	1	6	6	F774A	1	6	6	C1176.1	1	6	6
F378A	1	6	6	F776A	1	6	6	C1178.1	1	6	6
F386A	1	6	6	F794A	1	6	6	C1178.2	1	6	6
F392A	1	6	6	F798A	1	6	6	C1184.1	1	6	6
F398A	1	6	6	F798B	1	6	6	C1194.1	1	6	6
F402A	1	6	6	F806A	1	6	6	C1202.1	1	6	6
F416A	1	6	6	F806B	1	6	6	C1206.1	1	6	6
F422A	1	6	6	F818A	1	6	6	C1208.1	1	6	6
F434A	1	6	6	F824A	1	6	6	C1214.1	1	6	6
F434B	1	6	6	F834A	1	6	6	C1226.1	1	6	6
F438A	1	6	6	F842A	1	6	6	C1238.1	1	6	6
F446A	1	6	6	F854A	1	6	6	C1248.2	1	6	6

Tabela 3.3: Vsi kubični 1-regularni grafi ožine 6 do 1250 točk.

Graf	s	Ožina	d	Graf	s	Ožina	d	Graf	s	Ožina	d
C1256.1	1	6	6	C1526.1	1	6	6	C1778.2	1	6	6
C1262.1	1	6	6	C1526.2	1	6	6	C1784.1	1	6	6
C1264.1	1	6	6	C1538.1	1	6	6	C1806.1	1	6	6
C1274.1	1	6	6	C1544.1	1	6	6	C1806.2	1	6	6
C1274.2	1	6	6	C1550.1	1	6	6	C1814.1	1	6	6
C1274.3	1	6	6	C1554.1	1	6	6	C1824.1	1	6	6
C1286.1	1	6	6	C1554.2	1	6	6	C1832.1	1	6	6
C1302.1	1	6	6	C1568.1	1	6	6	C1838.1	1	6	6
C1302.2	1	6	6	C1574.1	1	6	6	C1842.1	1	6	6
C1304.1	1	6	6	C1586.1	1	6	6	C1850.1	1	6	6
C1314.1	1	6	6	C1586.2	1	6	6	C1854.1	1	6	6
C1322.1	1	6	6	C1592.1	1	6	6	C1862.1	1	6	6
C1338.1	1	6	6	C1608.2	1	6	6	C1862.2	1	6	6
C1346.1	1	6	6	C1622.1	1	6	6	C1862.3	1	6	6
C1352.1	1	6	6	C1626.1	1	6	6	C1874.1	1	6	6
C1358.1	1	6	6	C1634.1	1	6	6	C1878.1	1	6	6
C1358.2	1	6	6	C1634.2	1	6	6	C1896.2	1	6	6
C1368.1	1	6	6	C1638.1	1	6	6	C1898.1	1	6	6
C1374.1	1	6	6	C1638.2	1	6	6	C1898.2	1	6	6
C1376.1	1	6	6	C1646.1	1	6	6	C1922.1	1	6	6
C1382.1	1	6	6	C1658.1	1	6	6	C1928.1	1	6	6
C1400.1	1	6	6	C1662.1	1	6	6	C1934.1	1	6	6
C1406.1	1	6	6	C1664.1	1	6	6	C1946.1	1	6	6
C1406.2	1	6	6	C1674.1	1	6	6	C1946.2	1	6	6
C1418.1	1	6	6	C1680.1	1	6	6	C1950.2	1	6	6
C1422.1	1	6	6	C1688.1	1	6	6	C1952.1	1	6	6
C1442.1	1	6	6	C1694.1	1	6	6	C1962.1	1	6	6
C1442.2	1	6	6	C1698.1	1	6	6	C1976.1	1	6	6
C1446.1	1	6	6	C1706.1	1	6	6	C1976.2	1	6	6
C1448.1	1	6	6	C1718.1	1	6	6	C1982.1	1	6	6
C1454.1	1	6	6	C1736.1	1	6	6	C1986.1	1	6	6
C1464.2	1	6	6	C1736.2	1	6	6	C1994.1	1	6	6
C1466.1	1	6	6	C1742.1	1	6	6	C1998.1	1	6	6
C1478.1	1	6	6	C1742.2	1	6	6	C2016.2	1	6	6
C1482.1	1	6	6	C1746.1	1	6	6	C2018.1	1	6	6
C1482.2	1	6	6	C1752.1	1	6	6	C2022.1	1	6	6
C1502.1	1	6	6	C1754.1	1	6	6	C2042.1	1	6	6
C1512.4	1	6	6	C1766.1	1	6	6				
C1514.1	1	6	6	C1778.1	1	6	6				

Tabela 3.4: Vsi kubični 1-regularni grafi ožine 6 od 1250 do 2048 točk.

dolžine 3. Natančneje povedano, množica točk grafa Y je množica \mathcal{H} , množica povezav pa je definirana takole: odsek yH , $y \in G$, je povezan z odseki $yaH (= yxH)$, $yx^{-1}H$ in $yax^2H (= yaxaH)$. Očitno G deluje 1-regularno na grafu Y , kar pomeni, da je Y kubični simetrični graf, katerega grupa avtomorfizmov vsebuje 1-regularno podgrupo. (Odslej bomo elemente grupe G gledati tudi kot avtomorfizme grafa Y .) Obratno, naj bo Y kubični simetrični graf, katerega grupa avtomorfizmov $\text{Aut}Y$ premore 1-regularno delovanje podgrupe G . Naj bo $v \in V(Y)$ in naj bo h generator stabilizatorja točke v : $H = \langle h \rangle = G_v \cong \mathbb{Z}_3$. Potem mora po Lorimerjevemu rezultatu [89] obstajati tak element $a \in G$, da je $G = \langle a, h \rangle$ in je Y izomorfen orbitalnemu grafu grupe G glede na podorbito $\{aH, haH, h^2aH\}$. Še več, s kratkim izračunom se bo bralec prepričal, da za a lahko izberemo involucijo. Če definiramo $x = ah$, dobimo zeleno prezentacijo grupe G . Torej lahko vsak kubični simetrični graf, ki premore

Graf	s	Ožina	d	Graf	s	Ožina	d	Graf	s	Ožina	d
F016A	2	6	8, 12	F338B	2	6	6, 26	C1058.1	2	6	6, 46
F024A	2	6	6, 12	F384A	2	6	6, 48	C1152.2	2	6	6, 48
F032A	2	6	6, 8	F392B	2	6	6, 28	C1176.3	2	6	6, 84
F050A	2	6	6, 10	F450A	2	6	6, 30	C1250.1	2	6	6, 50
F054A	2	6	6, 18	F486A	2	6	6, 54	C1350.1	2	6	6, 90
F072A	2	6	6, 12	F512A	2	6	6, 32	C1352.2	2	6	6, 52
F096A	2	6	6, 24	F578A	2	6	6, 34	C1458.10	2	6	6, 54
F098B	2	6	6, 14	F600B	2	6	6, 60	C1536.2	2	6	6, 96
F128A	2	6	6, 16	F648A	2	6	6, 36	C1568.2	2	6	6, 56
F150A	2	6	6, 30	F722B	2	6	6, 38	C1682.1	2	6	6, 58
F162A	2	6	6, 18	F726A	2	6	6, 66	C1734.1	2	6	6, 102
F200A	2	6	6, 20	F800A	2	6	6, 40	C1800.2	2	6	6, 60
F216A	2	6	6, 36	F864A	2	6	6, 72	C1922.2	2	6	6, 62
F242A	2	6	6, 22	F882B	2	6	6, 42	C1944.7	2	6	6, 108
F288A	2	6	6, 24	F968A	2	6	6, 44	C2048.8	2	6	6, 64
F294A	2	6	6, 42	C1014.2	2	6	6, 78				

Tabela 3.5: Vsi kubični 2-regularni grafi ožine 6 do 2048 točk.

1-regularno podgrupo, konstruiramo kot orbitalni graf grupe z $(2, s, 3)$ -prezentacijo.

Očitno je s -cikel $\mathcal{C} = H, xH, x^2H, \dots, x^{s-1}H, H$ v grafu Y G -konsistenten s -cikel z drsnim avtomorfizmom $x \in G$. V tem razdelku bomo naredili natančno analizo vseh možnih lokalnih struktur grafa Y v okolici s -cikla \mathcal{C} glede na orbite drsnega avtomorfizma $x \in G$. Zaradi enostavnosti izražanja v nadaljevanju definirajmo t.i. *obročje* glede na cikel \mathcal{C} . Naj bo *prvi obroč* R_1 množica točk s -cikla \mathcal{C} v grafu Y , to je $R_1 = \{x^i H \mid i \in \mathbb{Z}_s\}$. Množico točk, ki so povezane s točkami v prvem obroču R_1 s povezavami, ki ne ležijo na konsistentnem ciklu \mathcal{C} , imenujemo *drugi obroč* $R_2 = \{x^i ax^2 H \mid i \in \mathbb{Z}_s\}$. *Tretji obroč* R_3 so točke povezane s točkami v drugem obroču, ki ne ležijo v $R_1 \cup R_2$. Na ta način lahko definiramo t -ti obroč R_t za poljubno naravno število t . Naj \mathcal{R} označuje množico vseh teh obročev v grafu Y .

Pred začetkom analize lokalne strukture grafa Y , naj omenimo še, da v primeru kot je Y *graf šestkotnikov* $\text{Hex}(X)$ kubičnega Cayleyjevega grafa X grupe z $(2, s, 3)$ -prezentacijo (glej razdelek 4.1), točke prvega obroča R_1 ustrezajo s -tim šestkotnikom, ki obkrožajo izbrano s -kotno lice v Cayleyjevem zemljevidu grafa X , in šestkotniki povezani s temi šestkotniki ustrezajo točkam v drugem obroču R_2 (podrobnosti bomo spoznali v razdelku 4.1). V splošnem R_1 in R_2 nista nujno različna.

V lemah 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5 in 3.2.6 bomo obravnavali orbitalni graf Y , ki izhaja iz 1-regularnega delovanja grupe

$$G = \langle a, x \mid a^2 = x^s = (ax)^3 = 1, \dots \rangle$$

na množici levih odsekov podgrupe $H = \langle ax \rangle$ glede na podorbito $\{aH, x^{-1}H, ax^2H\}$ dolžine 3. Struktura tega grafa bo opisana glede na kvocientni graf Y_x in glede na različne možnosti, ki lahko nastopijo za prve tri obročje $R_1, R_2, R_3 \in \mathcal{R}$. V dokazih bomo pogosto uporabljali dejstvo, da je produkt generatorjev a in x grupe G reda 3:

$$(ax)^3 = 1. \tag{3.10}$$

Lema 3.2.1 *Velja ena izmed naslednjih trditev:*

- (i) $R_1 \cap R_2 = \emptyset$;
- (ii) $R_2 = R_1$, $Y \cong \theta_2$ in $G = \langle a, x \mid a^2 = x^6 = (ax)^3 = 1, a = x^3 \rangle$;
- (iii) $R_2 = R_1$, $Y \cong K_{3,3}$ in $G = S_3 \times \mathbb{Z}_3 = \langle a, x \mid a^2 = x^6 = (ax)^3 = 1, ax^2 = x^2a \rangle$.

DOKAZ. Denimo najprej, da je $a \in \langle x \rangle$ (spomnimo, da ima G prezentacijo (3.9)). Potem je s sodo število, G je ciklična grupa in $a = x^{s/2}$. Iz (3.10) sledi, da je $s = 6$ in torej $Y \cong \theta_2$.

Zdaj lahko predpostavimo, da $a \notin \langle x \rangle$. Recimo, da $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$. Potem je $x^j a x^2 H = H$ za nek $j \in \mathbb{Z}_s$. Z drugimi besedami, $x^j a x^2 \in H = \{1, ax, (ax)^2\}$. Potem je Y cirkulant in zato mora biti $j = s/2$. Torej je Y kolo W_s . Edini ločno tranzitivni kolesi W_s sta kolesi $W_4 = K_4$ in $W_6 = K_{3,3}$. Vendar, če je Y polni graf K_4 , je $s = 4$, $j = 2$ in $x^2 a x^2 \in H$, protislovje saj je $x^2 a x^2$ involucija, $H = \langle ax \rangle$ pa reda 3.

Torej je Y polni dvodelni graf, $K_{3,3}$, $s = 6$ in $j = 3$. Preostane določiti grupo G . Ker $x^j a x^2 \in H$ lahko nastopijo tri možnosti. Prvič, če je $x^j a x^2 = 1$, je $a \in \langle x \rangle$, protislovje. Drugič, če je $x^j a x^2 = ax$, je $x^j a x a = 1$ in zato $x^j x^{-1} a x^{-1} = 1$. Odtod sledi, da je $x^{j-2} a = x a = 1$, zopet protislovje. Tretjič, če je $x^j a x^2 = x^3 a x^2 = (ax)^2 = x^{-1} a$, je $ax^2 a = x^{-4} = x^2$. Torej a centralizira x^2 in $G = \langle a, x \mid a^2 = x^6 = (ax)^3 = 1, ax^2 = x^2 a \rangle$. S kratkim izračunom se bo bralec prepričal sam, da je $G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6 \cong S_3 \times \mathbb{Z}_3$. ■

Po lemi 3.2.1 sta prva dva oborča R_1 in R_2 enaka (v tem primeru je $Y \cong \theta_2$ ali $Y \cong K_{3,3}$) ali pa sta si različna. Odslej bomo v tem razdelku obravnavali drugi primer. To je primer, ko sta oborča R_1 in R_2 različna. V nadaljevanju tega razdelka bomo pogosto uporabljali naslednji posledici te predpostavke. Prvič,

$$a \notin \langle x \rangle. \quad (3.11)$$

In drugič, ker je v primeru, ko je $R_1 \cap R_2 = \emptyset$, za vsak i odsek $x^i a H \in R_1$ različen od odseka $a x^2 H \in R_2$, velja:

$$\langle x^2 \rangle \text{ ni edinka v } G. \quad (3.12)$$

Lema 3.2.2 *Naj bo $R_1 \cap R_2 = \emptyset$. Če je orbita W elementa $x \in G$ dolžine s , je orbita povezana z orbito W dolžine s ali $s/3$. Poleg tega velja: če $|R_2| \neq s$, je $Y \cong K_4$ in $s = 3$ ali pa je $Y \cong \text{GP}(4, 1)$ in $s = 6$.*

DOKAZ. Naj bo W orbita elementa $x \in G$ dolžine s . Denimo, da obstaja orbita W' povezana z orbito W , ki ni dolžine s . Naj bo yH točka, ki leži v W' . Ker je Y valence 3 in x reda s , ugotovimo, da je ta orbita lahko dolžine $s/2$ ali pa dolžine $s/3$. Očitno se prvi primer ne more zgoditi, saj bi v tem primeru iz enačbe $yH = x^{s/2} y H$ sledilo, da je $x^{s/2}$ reda 3. Torej je W' dolžine $s/3$.

Denimo, da je $|R_2| \neq s$. Potem po ugotovitvi v predhodnem odstavku 3 deli s in $|R_2| = s/3$. Če je $s = 3$, je $|R_2| = 1$ in zato Y polni graf K_4 . Če je $s = 6$, potem je $|R_2| = 2$, kar nam da kocko $\text{GP}(4, 1)$. Če je $s > 6$, nam dejstvo, da

je $Hax^2Hx^{s/3}Hx^{s/3+1}Hxax^2HxHH$ 6-cikel v Y , in trditev 3.1.9 povesta, da je Y Moebius-Kantorjev graf $GP(8,3)$ (= F016A) in $s = 12$. Torej je $ax^2H = x^4ax^2H$. Odtod sledi, da je $x^{-2}ax^4ax^2 \in H$. Potemtakem lahko nastopijo tri možnosti. Prvič, če je $x^{-2}ax^4ax^2 = 1$, sledi, da je $x^4 = 1$, protislovje. Drugič, če je $x^{-2}ax^4ax^2 = ax$, je $x^{-1}ax^4axax = 1$ in zato po (3.10) $axa = x^3$, v protislovju s (3.12). In tretjič, če je $x^{-2}ax^4ax^2 = x^{-1}a$, je $ax^{-1}ax^4ax^2 = 1$. Odtod po (3.10) sledi, da je $xax^5ax^2 = 1$ in zato $ax^5a = x^{-3}$. To pa ni mogoče, saj je x^5 reda 12 in x^{-3} reda 4. ■

Oglejmo si točke, ki so sosednje točkam obroča R_2 , a ne ležijo v R_1 . Ali je mogoče, da te sosede ležijo znotraj obroča R_2 ? Kot bomo videli v lemi 3.2.3 ta možnost lahko nastopi le v primeru, ko je Y posplošeni Petersenov graf ali Heawoodov graf F014A. Teorija simetričnih posplošenih Petersenovih grafov $GP(s, k)$ (glej podrazdelek 2.2.5) nam pove, da je (s, k) eden izmed naslednjih sedmih parov: $(4, 1)$, $(5, 2)$, $(8, 3)$, $(10, 2)$, $(10, 3)$, $(12, 5)$ in $(24, 5)$. Naslednja pomožna trditev poda natančno informacijo o primeru, ko je $R_2 \cap N(R_2) \neq \emptyset$, kjer je $N(R_2) = \{v \in N(u) \mid u \in R_2\}$.

Lema 3.2.3 *Naj bo $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ in $R_2 \cap N(R_2) \neq \emptyset$. Potem je*

- (i) $\mathcal{R} = \{R_1, R_2\}$, in Y je simetrični posplošeni Petersenov graf $GP(4, 1)$, $GP(5, 2)$, $GP(8, 3)$, $GP(10, 2)$, $GP(10, 3)$, $GP(12, 5)$ ali $GP(24, 5)$; ali
- (ii) $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, R_3\}$, $s = 6$ in $Y \cong F014A$.

DOKAZ. Ker je v polnem grafu K_4 za $s = 3$, in v kocki $GP(4, 1)$ za $s = 6$, $N(R_2) \cap R_2 = \emptyset$, lema 3.2.2 implicira, da je $|R_2| = s$. Spomnimo se, da je $R_2 = \{x^i ax^2H \mid i \in \mathbb{Z}_s\}$. Oglejmo si $N(ax^2H) = \{H, ax^3H, (ax^2)^2H\}$ in denimo, da je $R_2 \cap N(R_2) \neq \emptyset$. Če je $\mathcal{R} = \{R_1, R_2\}$, je očitno $Y[R_2]$ valence 2. Torej je Y simetrični posplošeni Petersenov graf, in zato eden izmed grafov v točki (i).

Denimo, da je $Y[R_2]$ valence 1, torej je izomorfen grafu $s/2K_2$. Očitno je v tem primeru s sodo število. Poleg tega $s \neq 4$, saj je za $s = 4$ graf Y ožine ≤ 4 , in zato po trditvi 3.0.11 in lemi 3.2.1 $Y \cong GP(4, 1)$, za katerega pa $Y[R_2] \neq s/2K_2$. Če je $s = 6$, 2-lok $HxHx^2H$ leži na vsaj dveh različnih 6-ciklih: $H, xH, x^2H, x^3H, x^4H, x^5H, H$ in $H, xH, x^2H, x^3H, x^3ax^2H, ax^2H, H$. Zato po trditvi 3.1.2 sledi, da je $Y \cong F014A$. Torej lahko predpostavimo, da je $s \geq 8$. Pokazali bomo, da se ta primer ne more zgoditi.

Ker je $Y[R_2] \cong s/2K_2$, je točka $ax^2H \in R_2$ povezana z $x^{s/2}ax^2H \in R_2$. Torej je $x^{s/2}ax^2H = ax^3H$ ali $x^{s/2}ax^2H = (ax^2)^2H$. Možnosti bomo analizirali ločeno. Prikladno bo uporabljati naslednjo notacijo: $J = x^{s/2}H \in R_1$ in $K = x^{s/2+1}H \in R_1$.

MOŽNOST 1. $x^{s/2}ax^2H = ax^3H$.

Potem je $x^{-3}ax^{s/2}ax^2 \in H$. Če je $x^{-3}ax^{s/2}ax^2 = 1$, je po (3.10) $x^{s/2} = axa = x^{-1}ax^{-1}$, in zato $a = x^{s/2+2}$, v protislovju s (3.11). Če je $x^{-3}ax^{s/2}ax^2 = ax$, je $x^{s/2} = ax^3ax^{-1}a$, in zato $(ax^3ax^{-1}a)^2 = 1$. To implicira, da je $ax^2a = x^{-2}$, v protislovju s (3.12). Torej nam preostane še možnost $x^{-3}ax^{s/2}ax^2 = x^{-1}a$. V tem primeu dobimo

$$x^{s/2} = ax^2ax^{-2}a. \quad (3.13)$$

Po predpostavki je točka J sosednja s točko ax^3H , in zato je $J = ax^4H$ ali $J = ax^3ax^2H$. V prvem primeru iz (3.13) sledi, da je $ax^2H = x^{-2}aH \in R_1$, protislovje,

saj $ax^2 \in R_2$. Torej je $J = ax^3ax^2H$ in $K = xJ$, sosed točke J , je enak $K = ax^3ax^3H$ ali $K = ax^3(ax^2)^2H$.

PODMOŽNOST 1.1. $K = ax^3ax^3H$.

Potem je $ax^3ax^3H = K = xJ = xax^3ax^2H$, in zato $(ax^3ax^2)^{-1}x^{-1}(ax^3ax^2)x \in H$. Z uporabo (3.10) dobimo $x^{-2}ax^{-2}ax^4ax^3 \in H$. Če je $x^{-2}ax^{-2}ax^4ax^3 = 1$, z izračunom ugotovimo, da je $ax^3 = x^3a$, in zato $ax^3H = x^3aH = x^4H$. Vendar $ax^3H \in R_2$ in $x^4H \in R_1$, v protislovju z $R_1 \cap R_2 = \emptyset$. Nadalje, denimo, da je $x^{-2}ax^{-2}ax^4ax^3 = ax$. Potem je $x^{-2}ax^{-2}ax^4ax^2 = a$, in zato $x^{-2}ax^{-2}(ax^2)x^2ax^2 = a$. Torej je ax^2 involucija in zato $ax^2a = x^{-2}$, v protislovju s (3.12). Nazadnje, če je $x^{-2}ax^{-2}ax^4ax^3 = x^{-1}a$, z izračunom z uporabo (3.10) ugotovimo, da je $ax^5a = x^{-5}$. Torej je $ax^5H = x^{-5}aH \in R_1$. Vendar ax^5H je soseda točke $ax^4H \in R_3$, ki ne pripada $\mathcal{R} \setminus \{R_1, R_2\}$, protislovje.

PODMOŽNOST 1.2. $K = ax^3ax^2ax^2H$.

Potem je $ax^3ax^2ax^2H = K = xJ = xax^3ax^2H$, in zato $x^{-2}ax^{-3}ax^{-1}ax^3ax^2ax^2 \in H$. To implicira, da je $z = x^{-2}ax^{-2}ax^4ax^2ax^2 = (x^4)^{ax^2ax^2} \in H$. Ker $s \notin \{4, 6\}$, je $z \in \{ax, x^{-1}a\}$ in x reda 12. Zato je po (3.13) $x^6 = ax^2ax^{-2}a$ in

$$ax^{-2}a = x^{-2}ax^6, \quad (3.14)$$

kot tudi $x^4 = ax^2ax^{-2}ax^{-2}$. S substitucijo zadnje enakosti in (3.14) v izraz za z dobimo $z = x^6ax^{-4}ax^2$. Če je $z = ax$, z izračunom ugotovimo, da je $ax^5a = x^5$, in zato $ax^5H = x^5aH \in R_1$, kar vodi v isto protislovje kot v Podmožnosti 1.1. Nazadnje, če je $z = x^{-1}a$, je $x^6ax^{-4}ax^2a = x^{-1}$ in z uporabo (3.14) dobimo $ax^2a = x^3$, kar očitno ni mogoče.

MOŽNOST 2. $x^{s/2}ax^2H = (ax^2)^2H$.

Potem je $x^{-2}ax^{-2}ax^{s/2}ax^2 \in H$. Če je $x^{-2}ax^{-2}ax^{s/2}ax^2 = 1$, je $x^{-2}ax^{s/2} = 1$, in zato $a = x^{s/2-2}$, v protislovju s (3.11). Če je $x^{-2}ax^{-2}ax^{s/2}ax^2 = x^{-1}a$, potem z uporabo (3.10) dobimo, da je $x^{s/2} = ax^2axax^{-2}a = x^{-1}ax^{-4}a$, in zato $(x^{-1}ax^{-4}a)^2 = 1$, kar implicira $ax^2a = x^{-2}$, v protislovju s (3.12). Torej preostane možnost $x^{-2}ax^{-2}ax^{s/2}ax^2 = ax$, ki implicira naslednjo enakost

$$x^{s/2} = ax^2ax^3ax. \quad (3.15)$$

Zato je $J = x^{s/2}H = ax^2ax^3axH = ax^2ax^3H$, in posledično je $K = xJ$, sosed točke J , enak ax^2ax^4H ali $ax^2ax^3ax^2H$.

PODMOŽNOST 2.1. $K = ax^2ax^4H$.

Potem je $ax^2ax^4H = K = xJ = xax^2ax^3H$, in zato $x^{-4}ax^{-2}axax^2ax^3 \in H$. Ker je $(axax^2)^2 = 1$, dobimo $x^{-4}ax^{-2}axax^2ax^3 = x^{-4}ax^{-4}ax^2 \in H$. Torej je $z = x^{-2}ax^{-4}ax^2 \in x^2H$, in zato $z \in \{x^2, x^2ax, xa\}$. V prvem primeru je $x^{-2}ax^{-4}ax^2 = x^2$, in zato $ax^2a = x^{-4}$, v protislovju s (3.12). V drugem primeru je $x^{-2}ax^{-4}ax^2 = x^2ax$. Z uporabo (3.10) dobimo $x^{-2}ax^{-5}ax^{-3} = 1$. Odtod pa $ax^5a = x^{-5}$, kar vodi v protislovje kot v podmožnosti 1.1. V zadnjem primeru je $(x^{-4})^{ax^2} = z = xa$ reda 3. Ker $s \notin \{4, 6\}$, sledi, da je $s = 12$. Z uporabo (3.15) dobimo $ax^2a = x^5ax^{-3}$, in zato $(x^{-4})^{ax^2} = z = xa$ implicira, da je $x^{-2}axax^{-3} = x$ in posledično $a = x^8 \in \langle x \rangle$, v protislovju s (3.11).

PODMOŽNOST 2.2. $K = ax^2ax^3ax^2H$.

Potem je $ax^2ax^3ax^2H = K = xJ = xax^2ax^3H$, in zato $x^{-3}ax^{-2}ax^{-1}ax^2ax^3ax^2 \in H$. Z uporabo (3.10) ugotovimo, da je $z = x^{-2}ax^4ax^3ax^2 \in H$. Če je $z = 1$, je $a = x^{-7}$, v protislovju s (3.11). Če je $z = ax$, z uporabo (3.10) dobimo

$$x^{-2}ax^4ax^2ax^{-1} = 1, \quad (3.16)$$

in zato je $x^{-2}ax^4ax^2 = xa$. To implicira, da je x^4 reda 3. Kot v podmožnosti 2.1 dobimo, da je $s = 12$. Zato iz (3.15) sledi, da je $x^6 = ax^2ax^3ax$. Vendar potem je $ax^2a = x^5ax^{-3}$ in s substitucijo te enakosti v (3.16) dobimo $ax^9a = x^6$, protislovje, saj x^9 in x^6 očitno nista enakega reda. Nazadnje, če je $z = x^{-1}a$, je $ax^{-1}ax^4ax^3ax^2 = 1$, $xax^5ax^3ax^2 = 1$ in posledično $xax^3(x^2ax^3ax)x = 1$. Z uporabo (3.15) dobimo $xax^3ax^{s/2+1} = 1$, in zato $ax^3 = x^{-s/2-2}a$. Torej je $ax^3H = x^{-s/2-2}aH = x^{-s/2-1}H \in R_1$, protislovje, saj $ax^3 \in R_3$. S tem je dokaz lemme 3.2.3 končan. ■

Odslej bo $R_2 \cap N(R_2) = \emptyset$ (torej R_2 je neodvisna množica točk). To pomeni, da obstaja tretji obroč R_3 . Najprej si bomo ogledali primer, ko R_3 sestoji iz ene same orbite avtomorfizma $x \in G$. V tem primeru obstaja tak $j \in \mathbb{Z}_s$, da je $x^j ax^3 H = (ax^2)^2 H$.

Lema 3.2.4 *Naj bo $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ in $R_2 \cap N(R_2) = \emptyset$. Če je R_3 ena sama orbita elementa $x \in G$, velja ena izmed naslednjih trditev:*

- (i) *a centralizira x^5 , $s \in \{5, 10, 15, 20, 30, 60\}$, Y ima štiri orbite elementa $x \in G$ in je regularni $\mathbb{Z}_{s/5}$ -krov dodekaedra $GP(10, 2)$: $GP(10, 2)$, F040A, F060A, F080A, F120B ali F240C; ali*
- (ii) *$(ax^2)^2(ax^{-2})^2 = 1$, in $s = 6$ ali pa je Y $I_k^s(t)$ -pot, kjer je $k = s/2$ ali $k = s/6$, $t = s/2$, če je k lih, in $t = s/2 + 1$, če je k sod; ali*
- (iii) *$(ax^2)^2(ax^{-2})^2 = x^{s/2}$.*

DOKAZ. Ker R_3 sestoji iz ene same orbite elementa $x \in G$, obstaja tak $j \in \mathbb{Z}_s$, da je $x^j ax^3 H = (ax^2)^2 H$. To dejstvo porodi tri možnosti. Kot bomo videli, bo prva možnost dala direktno protislovje, druga šest grafov navedenih v točki (i) in tretja točko (ii) oziroma (iii).

Ker je $x^j ax^3 H = (ax^2)^2 H$, je $x^j ax^3 \in (ax^2)^2 H$. Denimo najprej, da je $x^j ax^3 = (ax^2)^2$. Potem zaradi (3.10) velja naslednja veriga enakosti:

$$x^j ax = ax^2 a \quad \Rightarrow \quad x^j = ax^2 ax^{-1} a = ax^3 ax \quad \Rightarrow \quad x^{j-1} = ax^3 a.$$

Torej je $ax^3 H = x^{j-1} a H = x^j H \in R_1$, protislovje, saj $ax^3 H \in R_3$. Sedaj naj bo $x^j ax^3 = (ax^2)^2 (ax)^2$. Potem zaradi (3.10) velja:

$$\begin{aligned} x^j ax^3 &= (ax^2)^2 x^{-1} a = ax^2 ax a = ax^2 x^{-1} ax^{-1} = axax^{-1} \\ &\Rightarrow x^j = axax^{-4} a = x^{-1} ax^{-5} a \\ &\Rightarrow x^{j+1} = ax^{-5} a. \end{aligned}$$

Odtod sledi, da je $x^{j+1} = ax^{-4}x^{-1}a = ax^{-4}axax$, in zaradi (3.10) $ax^{-5} = x^{-5}a$. Z drugimi besedami, $a \in C_G(\langle x^5 \rangle)$ in podgrupa $K = \langle x^5 \rangle$ je edinka v grupi G . Po (3.12) 5 deli s in zato je $s = 5r$ za neko naravno število r . Ker je grupa G generirana z $G = \langle a, x \mid a^2 = x^{5r} = (ax)^3 = 1 \rangle$, ima $G/K = \langle aK, xK \mid (aK)^2 = (xK)^5 = (axK)^3 = 1 \rangle$ (2, 5, 3)-prezentacijo. Ker je $A_5 \cong \text{PSL}_2(5)$ edina grupa z (2, 5, 3)-prezentacijo, sledi, da je $G/K \cong A_5$. Ker mora G/K delovati 1-regularno na kvocientnem grafu Y_K , sledi, da je Y_K kubični simetrični graf reda 20. Obstajata dva taka grafa, dodekaeder $\text{GP}(10, 2)$ in Desarguesov graf $\text{GP}(10, 3)$ (glej [16]). Vendar, ker grupa avtomorfizmov grafa $\text{GP}(10, 3)$ ne premore 1-regularne podgrupe, sledi, da je $Y_K \cong \text{GP}(10, 2)$ in Y je regularni \mathbb{Z}_r -krov dodekaedra $\text{GP}(10, 2)$. Z uporabo trditve 2.2.10 dobimo, da je $s = 5r \in \{5, 10, 15, 20, 30, 60\}$. Regularni \mathbb{Z}_4 -krov grafa $\text{GP}(10, 2)$ je graf F080A, \mathbb{Z}_{12} -krov pa graf F240C (glej sliko 2.4).

Še zadnji primer. Denimo, da je $x^j ax^3 = (ax^2)^2 ax$. Z izračunom (z uporabo (3.10)) dobimo $x^j = ax^2 ax^2 ax^{-2} a$ in $x^{j+1} = ax^{-3} ax^{-3} a$. Poleg tega je $x^{j-2} = (ax^2)^2 (ax^{-2})^2$ in $x^{j-2} = (ax^{-3})^3$. Pokazali bomo, da je $(x^{j-2})^2 = 1$. Odtod bo sledilo, da je $j \in \{2, s/2 + 2\}$.

Prvič, z uporabo enačbe $x^{j-2} = (ax^2)^2 (ax^{-2})^2$ ugotovimo, da je $ax^{j-2} = x^{2-j} a$. Drugič, iz enačbe $x^{j-2} = (ax^{-3})^3$ dobimo $a(ax^{-3})^3 = (x^3 a)^3 a$, ki (po krajšanju elementa a) pove, da je $x^{-3} ax^{-3} ax^{-3} = x^3 ax^3 ax^3$ in zaradi tega je $(x^{-3} ax^{-3} ax^{-3})^2 = 1$. Torej je $x^{-3} ax^{-3} ax^{-6} ax^{-3} ax^{-3} = 1$. Odtod sledi, da je $x^{j+1} x^{-6} x^{j+1} = 1$ oziroma $x^{2j-4} = 1$. Torej je $x^{j-2} \in \{1, x^{s/2}\}$.

Če je $x^{j-2} = x^{s/2}$, velja točka (iii). Torej lahko predpostavimo, da je $x^{j-2} = 1$. Tedaj je $(ax^2)^2 (ax^{-2})^2 = 1$ in bralec se bo prepričal sam, da je

$$H, xH, x^2H, x^2ax^2H, x^2ax^3H, ax^2H, H$$

6-cikel v grafu Y . Če je $s = 6$, velja točka (ii). Denimo, da je $s > 6$. Ker noben od petih kubičnih simetričnih grafov ožine manjše od 6, nima zelene prezentacije, sledi, da je Y kubični simetrični graf ožine 6. Ker je s -cikle \mathcal{C} v R_1 G -konsistenten in je $|\mathcal{R}| > 2$, rezultati trditve 3.1.9 in leme 3.2.2 povedo, da je $s \geq 8$ sodo število in Y $I_k^s(t)$ -pot, kjer je $k = s/2$ ali $k = s/6$, $t = s/2$, če je k lih, in $t = s/2 + 1$, če je k sod. S tem je dokaz leme 3.2.4 končan. ■

Lema 3.2.5 *Naj bo $R_1 \cap R_2 = \emptyset$, $R_2 \cap N(R_2) = \emptyset$ in naj R_3 sestoji iz ene same orbite elementa $x \in G$. Če je $R_3 \cap N(R_3) \neq \emptyset$, je $s = 6$ in Y je Pappusov graf F018A, ali pa je $s = 18$ in je Y $I_3^{18}(9)$ -pot.*

DOKAZ. Veljajo vse ugotovitve leme 3.2.4. Pokazati moramo le, da zaradi predpostavke $N(R_3) \cap R_3 \neq \emptyset$ točki (i) in (iii) leme 3.2.4 ne nastopita ter da točka (ii) leme 3.2.4 vodi do Pappusovega graf F018A oziroma do $I_3^{18}(9)$ -poti.

Zaradi regularnosti ima Y samo tri orbite elementa $x \in G$, vse dolžine s . Torej je Y reda $3s$. Ker je Y kubični graf, je odsek $(ax^2)^2 H \in R_3$ povezan z odsekom $x^{s/2} (ax^2)^2 H \in R_3$. Prvič, točka (i) leme 3.2.4 se ne zgodi, saj imajo regularni \mathbb{Z}_r -krovi grafa $\text{GP}(10, 2)$ štiri orbite elementa $x \in G$. Drugič, denimo, da velja točka (ii) leme 3.2.4. Potem z uporabo dejstva, da je $k = 3$ ugotovimo, da je Y $I_3^6(3)$ -pot (Pappusov graf F018A) ali $I_3^{18}(9)$ -pot (edini kubični simetrični graf reda

54, ki je poznan kot graf F054A). Tretjič, denimo, da velja točka (iii) leme 3.2.4. Potem je $x^{s/2+2}ax^3H = (ax^2)^2H$ in $x^{s/2+2}ax^2H = ax^2ax^3H$. Odtod sledi, da oba soseda ax^2H in ax^2ax^3H odseka $(ax^2)^2H$ pripadata obroču R_2 . Zaradi tega je $x^{s/2}(ax^2)^2H = (ax^2)^3H$. Torej je $x^{s/2}(ax^2)^2H = (ax^2)^2(ax^{-2})^2(ax^2)^2H = (ax^2)^3H$ in zato $(ax^{-2})^2(ax^2)^2 \in ax^2H$. Nastopijo lahko tri možnosti. Če je $(ax^{-2})^2(ax^2)^2 = ax^2$, je $(ax^{-2})^2ax^2 = 1$ in zaradi tega je $x^{s/2} = ax^2$. Torej je $a = x^{s/2-2}$, v protislovju s (3.11). Če je $(ax^{-2})^2(ax^2)^2 = ax^2x^{-1}a$, je $ax^{-1}a = x^{-2}ax^{-2}ax^2ax^2a$ in zato $ax^{-1}a = x^{-2}ax^{s/2}ax^2$. Odtod sledi, da je $s = 2$, zopet protislovje. Če pa je $(ax^{-2})^2(ax^2)^2 = ax^2ax$, z izračunom ugotovimo, da je $a = x^3ax^6$. Torej je $\langle x^3 \rangle$ edinka v G . Po (3.12) 3 deli s . Torej je kvocientni graf $Y_{\langle x^3 \rangle}$ kubični simetrični graf reda $3s/(s/3) = 9$, protislovje. ■

Kot v [70] Y -graf $Y(s, 1, l, k)$, kjer $l, k \in \mathbb{Z}_s$, označuje graf, ki premore $(4, s)$ -semiregularen avtomorfizem z orbitami $W_i = \{u_i^j \mid j \in \mathbb{Z}_s\}$, $i \in \mathbb{Z}_4$, in množico povezav $E(X) = \{u_0^j u_0^{j+1} \mid j \in \mathbb{Z}_s\} \cup \{u_1^j u_1^{j+l} \mid j \in \mathbb{Z}_s\} \cup \{u_2^j u_2^{j+k} \mid j \in \mathbb{Z}_s\} \cup \{u_0^j u_3^j \mid j \in \mathbb{Z}_s\} \cup \{u_1^j u_3^j \mid j \in \mathbb{Z}_s\} \cup \{u_2^j u_3^j \mid j \in \mathbb{Z}_s\}$. Na primer, Coxeterjev graf F028A je Y -graf $Y(7, 1, 2, 4)$. Naslednja pomožna trditev karakterizira tiste kubične grafe z 1-regularno podgrupo, v katerih je $|\mathcal{R}| = 3$.

Lema 3.2.6 *Naj bo $R_1 \cap R_2 = \emptyset$. Če je $|\mathcal{R}| = 3$, potem velja ena izmed naslednjih trditev:*

- (i) $s = 6$, in $Y \cong \text{F014A}$ ali $Y \cong \text{F018A}$ ali $Y \cong \text{GP}(12, 5)$;
- (ii) $s = 12$ in $Y \cong \text{GP}(24, 5)$;
- (iii) $s = 18$ in Y je $I_3^{18}(9)$ -pot;
- (iv) $s = 28$ in $Y \cong Y(28, 1, 3, 9)$;
- (v) $s = 56$ in $Y \cong Y(56, 1, 9, 25)$.

DOKAZ. Očitno je v tem primeru $|R_1| = |R_2| = s$. Če je $R_2 \cap N(R_2) \neq \emptyset$, potem je po lemi 3.2.3 $s = 6$ in $Y \cong \text{F014A}$. Torej lahko predpostavimo, da $N(R_2) \cap R_2 = \emptyset$. Če R_3 sestoji iz ene same orbite elementa $x \in G$, lema 3.2.5 pove, da je $s = 6$ in $Y \cong \text{F018A}$ ali pa je $s = 18$ in je Y $I_3^{18}(9)$ -pot. Torej lahko odslej predpostavimo, da je R_3 unija dveh orbit W in W' avtomorfizma $x \in G$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $ax^3 \in W$ in $(ax^2)^2H \in W'$.

Najprej bomo pokazali, da sta W in W' obe dolžine s . Torej, da je graf Y reda $4s$. Denimo nasprotno, da vsaj ena od orbit W in W' ni velikosti s . Potem po lemi 3.2.2 sledi, da je ta orbita dolžine $s/3$ (torej je s deljiv s 3). Če sta obe orbiti W in W' dolžine $s/3$, potem je $ax^2Hax^3Hx^{s/3}ax^2H(ax^2)^2Hax^2H$ 4-cikel v Y , protislovje. Torej le ena od orbit W in W' ni dolžine s . Zato je Y reda $3s + s/3 = 10s/3$. Poleg tega je $s \geq 9$. Namreč, če je $s \in \{3, 6\}$, so edini možni grafi Petersenov graf $\text{GP}(5, 2)$, dodekaeder $\text{GP}(10, 2)$ in Desarguesov graf $\text{GP}(10, 3)$. Vendar $\text{GP}(5, 2)$ in $\text{GP}(10, 2)$ ne premoreta 1-regularne podgrupe, medtem ko ima $\text{GP}(10, 2)$ konsistentne cikle dolžine 5 in 10, kar je v protislovju z dejstvom, da 3 deli s . Ločimo dve možnosti.

MOŽNOST 1. $|W| = s/3$.

Potem je $ax^3H = x^{s/3}ax^3H = x^{2s/3}ax^3H$ in $N(ax^3H) = \{ax^2H, ax^4H, ax^3ax^2H\} = \{ax^2H, x^{s/3}ax^2H, x^{2s/3}ax^2H\}$. Torej je $ax^4H = x^{s/3}ax^2H$ ali $ax^4H = x^{2s/3}ax^2H$. Drugače povedano, $ax^4H = x^{rs/3}ax^2H$, kjer $r \in \{1, 2\}$, in zato $x^{-4}ax^{rs/3}ax^2 \in H$. Prvič, če je $x^{-4}ax^{rs/3}ax^2 = 1$, potem z izračunom dobimo, da je $ax^2a = x^{rs/3}$, v protislovju s (3.12). Drugič, če je $x^{-4}ax^{rs/3}ax^2 = ax$, potem po kratkem izračunu dobimo, da je $ax^{rs/3-1}a = x^5$. Torej je $\langle x^5 \rangle$ edinka v G . Po (3.12) 5 deli s in Y je regularni $\mathbb{Z}_{s/5}$ -krov grafa reda $10s/(3s/5) = 50/3 \notin \mathbb{Z}$, protislovje. In tretjič, če je $x^{-4}ax^{rs/3}ax^2 = x^{-1}a$, potem z izračunom ugotovimo, da je $x^{-3}ax^{rs/3}ax^2 = a$. Odtod sledi, da je $x^{-3}ax^{rs/3}ax^2$ involucija. To pa implicira, da je $ax^{rs/3+2}a = x^{-rs/3-2}$. Torej je $\langle x^{rs/3+2} \rangle$ edinka v G . Ker $3 \mid s$, največji skupni delitelj števil $rs/3+2$ in s pripada množici $\{1, 2, 3, 6\}$ (torej $(s/3+2, s), (2s/3+2, s) \in \{1, 2, 3, 6\}$). To pa pomeni, da je Y regularni $\mathbb{Z}_{s/d}$ -krov kubičnega simetričnega grafa reda $10s/(3s/d)$, kjer je $d \in \{3, 6\}$, in zato krov grafa GP(5, 2), GP(10, 2) ali GP(10, 3). Vendar GP(5, 2) in GP(10, 3) nista možna, ker ne premoreta 1-regularne podgrupe, medtem ko GP(10, 2) ni možen, ker nima konsistentnih ciklov dolžine $d = 6$. (Konsistentni cikli v GP(10, 2) so dolžine 5 in 10.)

MOŽNOST 2. $|W'| = s/3$.

Potem je $(ax^2)^2H = x^{s/3}(ax^2)^2H = x^{2s/3}(ax^2)^2H$ in

$$N((ax^2)^2H) = \{ax^2H, (ax^2)^2xH, (ax^2)^3H\} = \{ax^2H, x^{s/3}ax^2H, x^{2s/3}ax^2H\}.$$

Sledi, da je $(ax^2)^2xH = x^{rs/3}ax^2H$, kjer je $r \in \{1, 2\}$, in zato $x^{-2}ax^{rs/3}ax^2 \in ax^3H$. Prvič, če je $x^{-2}ax^{rs/3}ax^2 = ax^3$, potem z uporabo (3.10) dobimo, da je $x^{-1}ax^{rs/3} = ax^{-1}$ in posledično $x^{rs/3+1} = axa$. Torej je $\langle x \rangle$ edinka v G , v protislovju s (3.12). Drugič, če je $x^{-2}ax^{rs/3}ax^2 = ax^3x^{-1}a = ax^2a$, je x^2 reda 3 in zato $s = 6$, protislovje. In tretjič, če je $x^{-2}ax^{rs/3}ax^2 = ax^3ax$, je

$$x^{rs/3} = ax^2ax^3ax^{-1}a. \quad (3.17)$$

Z večkratno uporabo (3.10) dobimo $x^{rs/3} = ax^2ax^4ax$ in zato je

$$x^{rs/3} = xaxax^{-1}ax^3a = ax^{-2}ax^3a. \quad (3.18)$$

Če združimo enačbi (3.17) in (3.18), ugotovimo, da je $ax^3a = x^{-4}ax^4$. Torej je x^3 involucija in zato $s = 6$, protislovje.

S tem smo dokazali, da sta W in W' obe dolžine s . Torej je Y reda $4s$, $W = \{x^i ax^3H \mid i \in \mathbb{Z}_s\}$ in $W' = \{x^i (ax^2)^2H \mid i \in \mathbb{Z}_s\}$. Ker je po predpostavki $|\mathcal{R}| = 3$, lahko nastopi ena izmed naslednjih možnosti: $d(W, W') = 0$ in $d(W) = d(W') = 2$; ali $d(W, W') = 1$ in $d(W) = d(W') = 1$; ali $d(W, W') = 2$ in $d(W) = d(W') = 0$.

Denimo, da je $d(W, W') = 1$ in $d(W) = d(W') = 1$. Potem je odsek $x^i ax^3H$ povezan z odsekom $x^{i+s/2}ax^3H$ in odsek $x^i (ax^2)^2H$ z odsekom $x^{i+s/2}(ax^2)^2H$, za vsak $i \in \mathbb{Z}_s$. Ker je $d(W, W') = 1$, obstaja tudi nek $j \in \mathbb{Z}_s$, tako da je za vsak $i \in \mathbb{Z}_s$ odsek $x^i ax^3H$ povezan z odsekom $x^{i+j}(ax^2)^2H$. Vendar potem pa je $ax^3H, x^j(ax^2)^2H, x^{j+s/2}(ax^2)^2H, x^{s/2}ax^3H, ax^3H$ 4-cikel v Y , protislovje.

Denimo, da je $d(W, W') = 0$ in $d(W) = d(W') = 2$. Potem je Y Y -graf. Po rezultatu, ki sta ga dokazala Horton in Bouwer [70], so med Y -grafi simetrični le $Y(7, 1, 2, 4)$, $Y(14, 1, 3, 9)$, $Y(28, 1, 3, 9)$ in $Y(56, 1, 9, 25)$. V Fosterjevi listi so ti grafi imenovani: F028A, F056C, F112B in F244C. Iz tabele v [27] sledi, da med njimi le grafa $Y(28, 1, 3, 9)$ in $Y(56, 1, 9, 25)$ vsebujeta 1-regularno podgrupo.

Poglejmo si še zadnjo možnost, ki lahko nastopi. Torej denimo, da je $d(W, W') = 2$ in $d(W) = d(W') = 0$. Potem obstaja $j \in \mathbb{Z}_s$, tako da je $ax^4H = x^j(ax^2)^2H$ in zato $x^{-2}ax^{-2}ax^{-j}ax^4 \in H$. Prvič, če je $x^{-2}ax^{-2}ax^{-j}ax^4 = 1$, je $ax^{-2}ax^{-j}ax^2 = 1$, in zato $x^{-j}ax^2 = ax^2a$, kar implicira $x^{-j}ax^2H = ax^2aH$. Vendar to ni mogoče, saj $x^{-j}ax^2H \in R_2$ in $ax^2aH = ax^3H \in R_3$.

Drugič, če je

$$x^{-2}ax^{-2}ax^{-j}ax^4 = ax, \quad (3.19)$$

je po (3.10) $x^{-1}ax^{-2}ax^{-j}ax^4 = xax = ax^{-1}a$, in zato $ax^{-1}ax^{-2}ax^{-j}ax^4 = x^{-1}a$. Z dvakratno uporabo (3.10) dobimo $xax^{-1}ax^{-j}ax^4 = x^{-1}a$ in $x^2ax^{-j+1}ax^4 = x^{-1}a$. Torej je $ax^{-j+1}a = x^{-3}ax^{-4}$. Odtod pa sledi, da je $ax^{-j} = x^{-3}ax^{-4}ax^{-1} = x^{-3}ax^{-3}axa$. Torej je $ax^{-j}a = x^{-3}ax^{-3}ax$. Iz (3.19) sledi, da je $x^{-2}ax^{-5}ax^{-3}ax^4 = a$, $x^{-4}ax^{-3}ax^4 = xax^2a = ax^{-1}axa$. To implicira, da je x^{-3} involucija in zato $s = 6$. Torej je Y reda 24 in $Y \cong \text{GP}(12, 5)$.

In tretjič, če je $x^{-2}ax^{-2}ax^{-j}ax^4 = x^{-1}a$, z večkratno uporabo (3.10) dobimo, da je $x^{-1}ax^{-2}ax^{-j}ax^4 = a$, $xax^{-1}ax^{-j}ax^4 = 1$ in $ax^{-j+1}a = x^{-6}$. Torej je $\langle x^6 \rangle$ edinka v G . Po (3.12) $\langle x^6 \rangle \neq \langle x \rangle$ in $\langle x^6 \rangle \neq \langle x^2 \rangle$. Torej je Y regularni \mathbb{Z}_s/d -krov kubičnega simetričnega grafa reda $4s/(s/d) = 4d$, kjer je $d \in \{3, 6\}$. Vendar $d = 3$ ni mogoče, saj kubični simetrični graf reda 12 ne obstaja (glej [16]). Torej je $d = 6$, $4s/(s/6) = 24$ in $Z \cong \text{GP}(12, 5)$. (Saj je $\text{GP}(12, 5)$ edini kubični simetrični graf reda 24.) Ker je $d(W, W') = 2$, obstaja nek $i \in \mathbb{Z}_s$, tako da je $ax^3ax^2H = x^i(ax^2)^2H$. Potem je $x^i(ax^2)^2 \in ax^3ax^2H$. Prvič, če je $x^i(ax^2)^2 = ax^3ax^2$, je $axa = x^i$, protislovje s (3.12). Drugič, če je $x^i(ax^2)^2 = ax^3ax^2ax$, je $x^i ax^2 axa = ax^3 ax^2$, in z večkratno uporabo (3.10) dobimo $x^{i-1}a = ax^3 ax^4$. Torej je $x^{i-1}ax^{-6} = ax^3 ax^{-2}$. Ker je $x^{j-1} = ax^6 a$, dobimo, da je $x^{i-j}ax^2 = ax^3 a$. To pa implicira, da je $x^{i-j}ax^2H = ax^3 aH = ax^4 H$, protislovje, saj je $x^{i-j}ax^2H \in R_2$ in $ax^4 \in R_3$. Torej lahko predpostavimo, da nastopi tretja možnost, to je, $x^i(ax^2)^2 = ax^3 ax^2 x^{-1}a$. Potem je $x^i = ax^3 axa x^{-2} ax^{-2} a$ in z uporabo (3.10) dobimo

$$x^i = ax^2 ax^{-3} ax^{-2} a. \quad (3.20)$$

S kvadriranjem te enačbe dobimo $x^{2i} = ax^2 ax^{-6} ax^{-2} a$. Z uporabo dejstva, da je $ax^6 a = x^{j-1}$, dobimo $x^{2i} = x^{-6}$. Od tod sledi, da je $i = -3$ ali $i = s/2 - 3$. Če je $i = -3$, je $x^{-3} = x^i = ax^3 axa x^{-2} ax^{-2} a$. Po izračunu dobimo $x^{-2} ax^{-3} ax^{-3} ax^2 = axa x^{-1} a$. Od tod pa sledi, da je $x^{-3} ax^{-3}$ involucija. Sledi, da je

$$ax^6 a = x^{-6}. \quad (3.21)$$

Ker je po (3.20), $ax^2 = x^{-3} ax^2 ax^3 a$, dobimo $x^2 ax^4 ax^3 ax^2 = x^{-1} a$ in odtod

$$x^4 = ax^{-3} ax^{-2} ax^{-3} a. \quad (3.22)$$

Ker je po (3.10) $axa = x^{-1} ax^{-1}$, z uporabo (3.21) dobimo $x^{-6} = (x^{-1} ax^{-1})^6$ in zato $x^{-4} = (ax^{-2})^5 a$. Z uporabo (3.22) vidimo, da je $ax^3 ax^2 ax^3 a = x^{-4} = (ax^{-2})^5 a$.

Zato je $x^5ax^2ax^5 = (ax^{-2})^3a$ in posledično $x^6ax^2ax^6 = x(ax^{-2})^3ax$. Če vstavimo (3.21) v to enačbo, dobimo $ax^{-10}a = x(ax^{-2})^3ax$, in zato z uporabo (3.10) dobimo $x^{-8} = ax^{-3}ax^{-2}ax^{-3}a$. Sedaj (3.22) implicira, da je $x^{-8} = x^4$. Torej je $s = 12$ in je Y reda $4s = 48$. To pa implicira, da je $Y \cong \text{GP}(24, 5)$. In nazadnje, denimo, da je $i = s/2 - 3$. Potem iz (3.20) sledi, da je $x^{-3}ax^{s/2-3}$ involucija in zato $ax^{s/2-6}a = x^{6-s/2}$. S kvadriranjem te enačbe dobimo

$$ax^{-12}a = x^{12}. \quad (3.23)$$

Z uporabo (3.10) sedaj ugotovimo, da je $x^{-12} = ax^{12}a = (x^{-1}ax^{-1})^{12}$, in posledično $x^{-10} = (ax^{-2})^{11}a$. Po drugi strani je zaradi (3.23) $x^{-10} = x^2ax^{12}a$. Torej je $x^2ax^{12}a = x^{-10} = (ax^{-2})^{11}a$ in posledično $ax^2ax^{14} = x^{-2}(ax^{-2})^9a$. Ker je $ax^2a = x^{-1}ax^{-2}ax^{-1}$, dobimo $x^{-1}ax^{-2}ax^{13} = x^{-2}(ax^{-2})^9a$. Zato je $(x^2a)^9xax^{-2}ax^{13} = a$. Večkratna uporaba (3.10) da enačbo $x^{-1}ax^{-12}ax^{13} = 1$ in potemtakem $ax^{-12}a = x^{-12}$. Ta enačba skupaj z (3.23) sedaj pove, da je $s = 24$ in zato je Y reda $4s = 96$. Obstajata dva kubična simetrična grafa reda 96, F096A in F096B (glej [16, 27]). Toda noben izmed njiju se ne more zgoditi, saj F096B nima konsistentnih 24-ciklov, medtem ko je F096A 2-regularen ožine 6, in je zato po trditvi 3.1.9 in izreku 3.1.13 kvicientni graf Y_x pot. S tem je dokaz leme 3.2.6 končan. ■

Rezultati pomožnih trditev 3.2.1, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5 in 3.2.6 implicirajo naslednjo posledico.

Posledica 3.2.7 *Naj bo $G = \langle a, x \mid a^2 = x^s = (ax)^3 = 1, \dots \rangle$ grupa z $(2, s, 3)$ -prezentacijo, $H = \langle ax \rangle$, Y orbitalni graf grupe G glede na njeno 1-regularno delovanje na množici levih odsekov podgrupe H glede na podorbito $\{aH, x^{-1}H, ax^2H\}$ dolžine 3 in \mathcal{R} množica obročev v Y . Če je $s \equiv 0 \pmod{4}$, veljajo naslednje trditve.*

- (i) Če je $|\mathcal{R}| = 2$ je $s = 4$ in $Y \cong \text{GP}(4, 1)$, ali $s = 8$ in $Y \cong \text{GP}(8, 3)$, ali $s = 12$ in $Y \cong \text{GP}(12, 5)$, ali $s = 24$ in $Y \cong \text{GP}(24, 5)$;
- (ii) Če je $|\mathcal{R}| = 3$, je $s = 12$ in $Y \cong \text{GP}(24, 5)$, ali $s = 28$ in $Y \cong Y(28, 1, 3, 9)$, ali $s = 56$ in $Y \cong Y(56, 1, 9, 25)$.
- (iii) Če je $|\mathcal{R}| \geq 3$ in R_3 sestoji iz ene same orbite elementa $x \in G$, potem je $|\mathcal{R}| > 3$ in velja ena izmed naslednjih trditev:
 - (a) $|\mathcal{R}| = 4$ in Y je $\mathbb{Z}_{s/5}$ -krov dodekaedra $\text{GP}(10, 2)$, kjer je $s = 20$ in $Y \cong \text{F080A}$, ali $s = 60$ in $Y \cong \text{F240C}$;
 - (b) $s \geq 8$ in Y je $I_{s/2}^s(s/2 + 1)$ -pot ali $I_{s/6}^s(s/2 + 1)$ -pot;
 - (c) $x^{s/2} = (ax^2)^2(ax^{-2})^2$.
- (iv) V vseh drugih primerih je $|\mathcal{R}| > 3$, $|R_1| = |R_2| = s$ in R_3 je unija dveh orbit elementa $x \in G$.

Naslednji rezultat o ciklični povezanosti kubičnih simetričnih grafov z 1-regularno podgrupo bomo potrebovali v poglavju 4 pri dokazu obstoja hamiltonskih ciklov v $(2, s, 3)$ -Cayleyjevih grafih.

Lema 3.2.8 Naj bo $G = \langle a, x \mid a^2 = x^s = (ax)^3 = 1, \dots \rangle$ grupa z $(2, s, 3)$ -prezentacijo, $H = \langle ax \rangle$, in Y orbitalni graf grupe G glede na njeno 1-regularno delovanje na množici levih odsekov podgrupe H glede na podorbito $\{aH, x^{-1}H, ax^2H\}$ dolžine 3. Potem veljajo naslednje trditve.

- (i) Če je Y ciklično- k -povezavno povezan za $k \leq 5$, je Y theta graf Θ_2 , polni graf K_4 , polni dvodelni graf $K_{3,3}$, kocka $\text{GP}(4, 1)$ ali dodekaeder $\text{GP}(10, 2)$.
- (ii) Če je Y ciklično-6-povezavno povezan, je $s = 6$ ali pa je $s \geq 8$ sodo število in je Y Moebius-Kantorjev graf $\text{GP}(8, 3)$ ali $I_k^s(t)$ -pot, kjer je $k = s/2$ ali $k = s/6$, $t = s/2$, če je k lih, in $t = s/2 + 1$, če je k sod.
- (iii) Če je Y ciklično-7-povezavno povezan, je $s = 7$.
- (iv) V vseh drugih primerih je Y ciklično-8-povezavno povezan.

DOKAZ. Ker grupa

$$G = \langle a, x \mid a^2 = x^s = (ax)^3 = 1, \dots \rangle$$

na grafu Y deluje 1-regularno, z združitvijo rezultatov trditve 2.2.5 in trditve 3.0.11 ugotovimo, da velja točka (i).

Denimo, da je Y ciklično-6-povezavno povezan in da $s \neq 6$. Potem je po trditvi 2.2.5, Y ožine 6. Ker je s -cikel v R_1 G -konsistenten in $s \neq 6$, z združitvijo rezultatov trditve 3.1.9 in leme 3.2.2 ugotovimo, da je Y Moebius-Kantorjev graf $\text{GP}(8, 3)$, Desarguesov graf $\text{GP}(10, 3)$ ali $I_k^s(t)$ -pot, kjer je $k = s/2$ ali $k = s/6$, $t = s/2$, če je k lih, in $t = s/2 + 1$, če je k sod. Vendar $Y \neq \text{GP}(10, 3)$, saj le-ta ne vsebuje 1-regularne podgrupe. To dokaže točko (ii).

Denimo, da je Y ciklično-7-povezavno povezan. Potem je po trditvi 2.2.5, Y ožine 7. V [48] sta Feng in Nedela dokazala, da je Coxeterjev graf F028A edini kubični simetrični graf ožine 7, v katerem 2-lok leži na več kot enem 7-ciklu. Ker Coxeterjev graf F028A ne premore 1-regularne podgrupe, sledi, da vsak 2-lok v Y leži na natanko enem 7-ciklu. Naj bo

$$m = |V(Y)|.$$

Potem ima Y $3m/2$ povezav in $3m$ 2-lokov. Odtod sledi, da Y premore $3m/7$ različnih 7-ciklov. Očitno G deluje tranzitivno na množici vseh 7-ciklov v Y . Poleg tega je $|G| = 3m$ (spomnimo, da je G 1-regularna grupa). Zato nam standardni argument preštevanja pove, da je stabilizator 7-cikla S reda 7, torej je izomorfen grupi \mathbb{Z}_7 . Če $g \in \mathbb{Z}_7$ ni drsni avtomorfizem 7-cikla S , je pa neka njegova potenca, saj je 7 praštevilo. Torej so G -konsistentni cikli dolžine 7, kar pomeni, da je $s = 7$. (Spomnimo, da ima po Conwayevem rezultatu ločno tranzitivna grupa natanko dve orbiti konsistentnih usmerjenih ciklov. Ker pa v 1-regularni grupi ne obstaja element, ki fiksira lok, usmerjena 7-cikla danega 7-cikla pripadata različnim orbitam.) Torej velja točka (iii).

Ker je po trditvi 2.2.5 ciklična povezavna povezanost grafa Y enaka njegovi ožini, je dokaz končan. ■

Ker je s -cikel v prvem obroču R_1 grafa Y G -konsistenten in so konsistentni cikli v dodekaedru $\text{GP}(10, 2)$ dolžne 5 in 10, velja naslednja posledica leme 3.2.8.

Posledica 3.2.9 Naj bo $s \equiv 0 \pmod{4}$. Naj bo $G = \langle a, x \mid a^2 = x^s = (ax)^3 = 1, \dots \rangle$ grupa z $(2, s, 3)$ -prezentacijo, naj bo $H = \langle ax \rangle$, in naj bo Y orbitalni graf grupe G glede na njeno 1-regularno delovanje na množici levih odsekov podgrupe H glede na podorbito $\{aH, x^{-1}H, ax^2H\}$ dolžine 3. Potem velja:

- (i) Y je ciklično-4-povezavno povezan natanko tedaj, ko je izomorfen kocki $\text{GP}(4, 1)$;
- (ii) Y je ciklično-6-povezavno povezan natanko tedaj, ko je $s \geq 8$ in Y izomorfen Moebius-Kantorjevemu grafu $\text{GP}(8, 3)$ ali $I_{s/2}^s(s/2 + 1)$ -poti ali $I_{s/6}^s(s/2 + 1)$ -poti;
- (iii) v vseh drugih primerih je Y ciklično-8-povezavno povezan.

Poglavje 4

Hamiltonski cikli v točkovno tranzitivnih grafih

Rezultati tega poglavja so objavljeni v [54, 79]. Leta 1969 je Lovász [91] postavil vprašanje, ali ima vsak končen povezan točkovno tranzitiven graf hamiltonsko pot. Vsi znani povezani točkovno tranzitivni grafi imajo hamiltonsko pot, medtem ko z izjemo polnega grafa K_2 poznamo štiri točkovno tranzitivne grafe, ki nimajo hamiltonskega cikla: Petersenov graf $GP(5, 2)$ in Coxeterjev graf F028A ter grafa dobljena s trisekcijo točk teh dveh grafov. Ker ti grafi niso Cayleyjevi, je prišlo do domneve, da ima vsak povezan Cayleyjev graf na več kot dveh točkah hamiltonski cikel. Čeprav so se v zadnjih 30 letih v literaturi pojavile številne publikacije, ki obravnavajo ta dva problema, smo še vedno daleč od popolne rešitve (glej [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 19, 37, 43, 56, 58, 76, 79, 84, 96, 97, 98, 99, 101, 102, 136, 137, 138]).

Znano je, da imajo povezani točkovno tranzitivni grafi reda p , $2p$ (z izjemo Petersenovega grafa $GP(5, 2)$), $3p$, p^2 , p^3 , p^4 in $2p^2$, kjer je p praštevilo, hamiltonski cikel (glej [2, 19, 21, 97, 98, 99, 133]). Za povezane točkovno tranzitivne grafe reda $4p$, $5p$ in $6p$ je bilo doslej znano le, da imajo hamiltonsko pot (glej [84, 101, 102]). V disertaciji pa bomo pokazali, da imajo povezani točkovno tranzitivni grafi reda $4p$ z izjemo Coxeterjevega grafa F028A tudi hamiltonski cikel (glej izrek 5.1.4 v razdelku 4.2).

Večina doslej dokazanih rezultatov v primeru Cayleyjevih grafov se nanaša na omejitve, kot so posebni razredi grup in množice generatorjev grup. Na primer, ni težko videti, da ima vsak Cayleyjev graf abelske grupe hamiltonski cikel. Posledica serije člankov [43, 76, 96] je, da ima vsak Cayleyjev graf grupe s ciklično komutatorsko podgrupo moči p^k , kjer je p praštevilo in $k \in \mathbb{N}$, hamiltonski cikel. Ta rezultat je bil kasneje posplošen na povezane točkovno tranzitivne grafe, katerih grupa avtomorfizmov vsebuje tranzitivno podgrupo s ciklično komutatorsko podgrupo moči p^k , kjer je p praštevilo in $k \in \mathbb{N}$, z izjemo Petersenovega grafa $GP(5, 2)$ [37]. Eden največjih prispevkov k temu problemu pa je Morrisov rezultat [138], da ima vsak Cayleyjev (di)graf poljubne p -grupe hamiltonski cikel. Še nekatere rezultate, ki jih tu nismo eksplicitno omenili, lahko bralec najde v [30]. V disertaciji bomo dokazali obstoj hamiltonskega cikla v $(2, s, 3)$ -Cayleyjevih grafih, v primeru, ko je število s deljivo s 4 (glej izrek 4.1.8 v razdelku 4.1).

4.1 Hamiltonski cikli v $(2, s, 3)$ -Cayleyjevih grafih

Leta 2006 sta Glover in Marušič [55] raziskovala problem hamiltonskosti $(2, s, 3)$ -Cayleyjevih grafov in dokazala, da ima $(2, s, 3)$ -Cayleyjev graf grupe G hamiltonski cikel, če je red grupe $|G|$ (torej tudi število s) kongruenten 2 po modulu 4, in hamiltonsko pot, če je red grupe $|G|$ deljiv s 4. V tem razdelku bomo s posplošitvijo metode uporabljene v [55] dokazali obstoj hamiltonskih ciklov v razredu $(2, s, 3)$ -Cayleyjevih grafov, ko sta tako red pripadajoče grupe kot število s deljiva s 4 (glej izrek 4.1.8). S tem rezultatom ostaja problem obstoja hamiltonskih ciklov v tej posebni družini kubičnih Cayleyjevih grafov nerešen samo še za primer, ko je red pripadajoče grupe kongruenten 0 po modulu 4 in je s liho število ali kongruentno 2 po modulu 4.

V podrazdelku 4.1.1 bomo na nekaj primerih ilustrirali metodo v dokazu tega rezultata. Strategija v dokazu sloni na vložitvi Cayleyjevega grafa $X = \text{Cay}(G, S)$ grupe G glede na $(2, s, 3)$ -prezentacijo na zaprto orientabilno ploskev s s -kotnimi in šestkotnimi lici, v kateri bomo poiskali *hamiltonsko drevo lic*, to je, drevo lic, katerega rob je hamiltonski cikel grafa X . To hamiltonsko drevo bomo našli preko grafu X prirejenega grafa. Natančneje, kot v metodi, ki sta jo uporabila Glover in Marušič v [55], $(2, s, 3)$ -Cayleyjevemu grafu $X = \text{Cay}(G, S)$ priredimo kubični simetrični graf, katerega grupa avtomorfizmov premore 1-regularno podgrupo. Ker si ta graf lahko predstavljamo kot graf šestkotnih lic v grafu X , ga imenujemo *graf šestkotnikov* $\text{Hex}(X)$ (formalna definicija je navedena v podrazdelku 4.1.1). Graf šestkotnikov bomo modificirali na tak način, da bo ustrezal grafu lic v grafu X , ki ne vključuje vseh šestkotnih lic, a vsebuje tudi eno s -kotno lice (kako naredilo to modifikacijo je razloženo v podrazdelku 4.1.1). Dalje, z uporabo rezultatov o ciklični povezavnosti povezanosti kubičnih simetričnih grafov, katerih grupa avtomorfizmov premore 1-regularno podgrupo, in rezultatov o strukturi le-teh glede na orbite drsnega avtomorfizma konsistentnega cikla (glej razdelek 3.2) bomo dokazali, da v modificiranem grafu šestkotnikov, če graf šestkotnikov ni ne $\text{GP}(12, 5)$ ne $\text{GP}(24, 5)$, obstaja podmnožica točk, ki inducira drevo, katere komplement je neodvisna množica točk (glej podrazdelek 4.1.2). Ključnega pomena pri dokazu te trditve bo Payan-Sakarovitchev rezultat [118] iz leta 1975 o maksimalnih ciklično stabilnih podmnožicah v ciklično-4-povezanih kubičnih grafih (glej razdelek 2.2.8). Z uporabo teh rezultatov bomo nato v podrazdelku 4.1.3 dokazali obstoj hamiltonskih ciklov v $(2, s, 3)$ -Cayleyjevih grafih za $s \equiv 0 \pmod{4}$.

Skozi ta razdelek naj bo

$$G = \langle a, x \mid a^2 = x^s = (ax)^3 = 1, \dots \rangle$$

grupa s $(2, s, 3)$ -prezentacijo in $X = \text{Cay}(G, S)$ Cayleyjev graf grupe G glede na množico generatorjev

$$S = \{a, x, x^{-1}\}.$$

Torej je grupa G generirana z involucijo a in elementom x reda s , katerih produkt je reda 3, graf X pa je $(2, s, 3)$ -Cayleyjev graf.

4.1.1 Ilustracija metode

Kot je bilo omenjeno že v [55] graf X premore kanoničen Cayleyjev zemljevid dobljen z njegovo vložitvijo na zaprto orientabilno ploskev roda

$$g = 1 + (s - 6)|G|/12s \quad (4.1)$$

z $|G|/s$ disjunktными s -kotnimi lici in $|G|/3$ šestkotnimi lici. Z uporabo enake rotacije x -povezav, a -povezav in x^{-1} -povezav pri vsaki točki na tem zemljevidu pri vsaki točki dobimo eno s -kotno in dve šestkotni lici (glej primer 2.2.1 v razdelku 2.2.4). Cayleyjevemu grafu $X = \text{Cay}(G, S)$ priredimo tako imenovan *graf šestkotnikov* $\text{Hex}(X)$ na sledeči način. Množica točk grafa $\text{Hex}(X)$ je sestavljena iz vseh šestkotnikov grafa X , ki prihajajo iz grupne relacije $(ax)^3$. Dva šestkotnika pa sta povezana v $\text{Hex}(X)$, če imata v grafu X skupno povezavo. Ni težko videti, da je $\text{Hex}(X)$ izomorfen orbitalnemu grafu levega delovanja grupe G na množici levih odsekov \mathcal{H} podgrupe $H = \langle ax \rangle$ izhajajoč iz podorbite $\{aH, x^{-1}H, ax^2H\}$ dolžine 3. Natančneje povedano, množica točk grafa je množica \mathcal{H} , povezave pa so definirane na sledeči način: odsek yH , $y \in G$, je povezan s tremi odseki $yaH (= yxH)$, $yx^{-1}H$ in $ya^2H (= yaxaH)$. Očitno, G deluje 1-regularno na $\text{Hex}(X)$. Torej je $\text{Hex}(X)$ kubični simetrični graf, katerega grupa avtomorfizmov premore 1-regularno podgrupo (grafi, katerih strukturo smo študirali v razdelku 3.2). Poleg tega je s -cikel

$$HxHx^2H \dots x^{s-1}HH$$

v $\text{Hex}(X)$ G -konsistenten z drsnim avtomorfizmom $x \in G$.

Odslej naj bo $s \equiv 0 \pmod{4}$. Naj bo \mathcal{S} fiksno s -kotno lice v X vložnem na orientabilno ploskev roda g (glej (4.1)). Označimo točke grafa šestkotnikov $\text{Hex}(X)$, ki ustrezajo s -tim šestkotnikom okoli s -kotnega lica \mathcal{S} v Cayleyjevem zemljevidu grafa X , na tak način, da $HxHx^2H \dots x^{s-1}HH$ ustreza s -ciklu \mathcal{S} v $\text{Hex}(X)$. Potem je *modificirani graf šestkotnikov* $\text{Mod}_H(X)$ graf z množico točk

$$V(\text{Mod}_H(X)) = V(\text{Hex}(X)) \setminus \{x^{2i+1}H, x^{2i}ax^2H \mid i \in \mathbb{Z}_s\} \cup \{ax^2H, x^{s/2}ax^2H\} \cup \{v\}$$

in množico povezav

$$E(\text{Mod}_H(X)) = E(X[V(\text{Hex}(X)) \setminus \{x^{2i+1}H, x^{2i}ax^2H \mid i \in \mathbb{Z}_s\} \cup \{ax^2H, x^{s/2}ax^2H\}]) \cup \{x^{2i}Hv \mid i \in \mathbb{Z}_s\}.$$

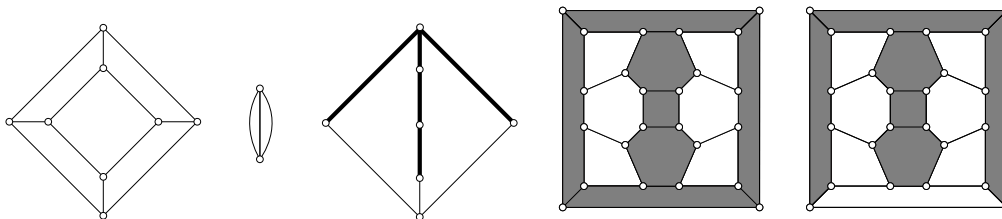
V kontekstu prvotnega Cayleyjevega grafa X si lahko konstrukcijo modificiranega grafa šestkotnikov $\text{Mod}_H(X)$ predstavljamo takole. Pobarvamo vsa šestkotna lica v X , izberemo s -kotno lice \mathcal{S} v X in potem odstranimo barvo na vsakem drugem šestkotnem licu okoli \mathcal{S} . Nato razbarvamo šestkotna lica, ki si delijo povezavo s pobarvanimi šestkotniki okoli \mathcal{S} , z izjemo enega para antipodnih šestkotnikov. Nazadnje pobarvamo s -kotno lice \mathcal{S} . Modificiran graf šestkotnikov $\text{Mod}_H(X)$ je potem graf, katerega množica točk je sestavljena iz pobarvanih lic. Dve lici pa sta povezani v $\text{Mod}_H(X)$, če si delita povezavo v X .

Metoda za konstrukcijo hamiltonskih ciklov v $(2, s, 3)$ -Cayleyjevem grafu X za $s \equiv 0 \pmod{4}$ sloni na iskanju podmnožice S množice točk $V = V(\text{Mod}_H(X))$, ki

inducira drevo, njen komplement $V \setminus S$ pa je neodvisna množica točk. Iz tega drevesa bomo konstruirali drevo lic v X (eno lice tega drevesa bo s -kotno, vsa druga lica pa šestkotna), katerega rob je hamiltonski cikel grafa X . Ta metoda bo delovala v vseh primerih z izjemo dveh primerov, ko je graf šestkotnikov izomorfen posplošenemu Petersenovemu grafu $GP(12, 5)$ ali $GP(24, 5)$. V teh dveh primerih bomo hamiltonski cikel našli z nekoliko drugačno metodo (glej slike 4.3 in 4.4 v podrazdelku 4.1.2).

Tu podajamo dva primera konstrukcije hamiltonskih ciklov v $(2, s, 3)$ -Cayleyjevih grafih za $s \equiv 0 \pmod{4}$.

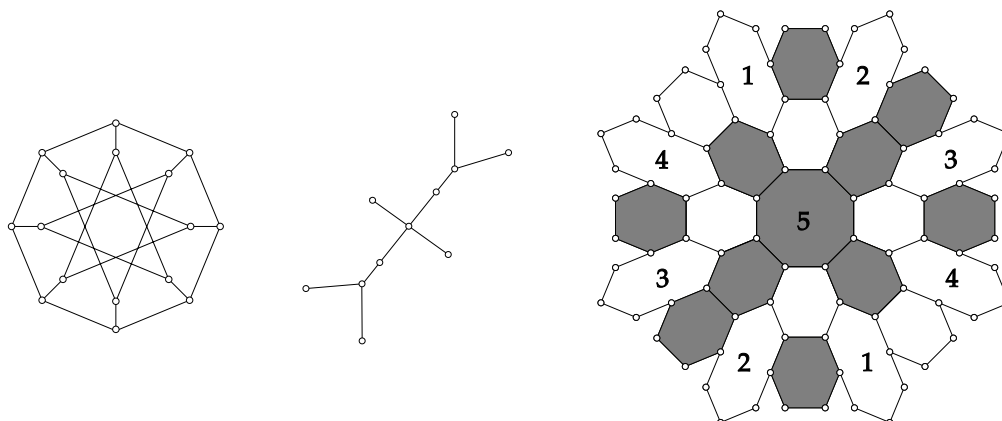
Primer 4.1.1 Na desni strani slike 4.1 je prikazano drevo lic, katerega rob je hamiltonski cikel v sferičnem Cayleyjevem zemljevidu Cayleyjevega grafa X grupe $G = S_4$ z $(2, 4, 3)$ -prezentacijo $\langle a, x \mid a^2 = x^4 = (ax)^3 = 1 \rangle$, kjer je $a = (12)$ in $x = (1234)$. Poleg je to isto drevo prikazano v modificiranem grafu šestkotnikov $\text{Mod}_H(X)$ ter pripadajoči modificirani graf šestkotnikov $\text{Mod}_H(X)$ kot graf lic v sferičnem Cayleyjevem zemljevidu grafa X . Na levi strani slike 4.1 je narisana pripadajoči graf šestkotnikov, ki je v tem primeru kocka $GP(4, 1)$, in theta graf Θ_2 , graf, ki ga dobimo iz modificiranega grafa šestkotnikov $\text{Mod}_H(X)$ s supresijo točk valence 2 (to je, 2-pot uvw , kjer je v valence 2, nadomestimo s povezavo uv).



Slika 4.1: Hamiltonsko drevo lic v sferičnem Cayleyjevem zemljevidu Cayleyjevega grafa grupe S_4 , na dva načina prikazan pripadajoči modificirani graf šestkotnikov $\text{Mod}_H(X)$, kot graf in kot graf lic, graf dobljen iz $\text{Mod}_H(X)$ s supresijo točk valence 2, in graf šestkotnikov $\text{Hex}(X)$.

Primer 4.1.2 Na desni strani slike 4.2 je Cayleyjev zemljevid roda 2 Cayleyjevega grafa X grupe $G = Q_8 \rtimes S_3$ glede na $(2, 8, 3)$ -prezentacijo $\langle a, x \mid a^2 = x^8 = (ax)^3 = 1, \dots \rangle$, kjer je $a = (1, (23))$ in $x = (i, (12))$. Delovanje transpozicije $(12) \in S_3$ na Q_8 je definirano z: $(12)i = -j$, $(12)j = -i$, $(12)k = -k$. Poleg tega je $(123)i = (23)(12)i = j$, $(123)j = k$ in $(123)k = i$. Bralec se bo prepričal sam, da je a involucija, x element reda 8 in njun produkt ax reda 8.

Zemljevid je narisana v ravnini, kjer si moramo predstavljati, da so antipodni osemkotniki isti, kot je oštevilčeno. Poleg tega, šestega osemkotnika ni na sliki, a so njegove povezave zunanje povezave zunanjih šestkotnikov. Prikazano je drevo lic, katerega rob je hamiltonski cikel v grafu X . Na sredini je modificirani graf šestkotnikov $\text{Mod}_H(X)$ in na levi pripadajoči graf šestkotnikov, ki je v tem primeru Moebius-Kantorjev graf $GP(8, 3)$.



Slika 4.2: Hamiltonsko drevo lic v Cayleyjevem zemljevidu roda 2 Cayleyjevega grafa grupe $Q_8 \times S_3$, pripadajoči graf šestkotnikov in modificirani graf šestkotnikov.

4.1.2 Modificirani graf šestkotnikov

Tudi skozi ta podrazdelek naj bo X $(2, s, 3)$ -Cayleyjev graf grupe $G = \langle a, x \mid a^2 = x^s = (ax)^3 = 1, \dots \rangle$ glede na množico generatorjev $S = \{a, x, x^{-1}\}$, kjer je $s \equiv 0 \pmod{4} \geq 4$. Naj bo $\text{Hex}(X)$ pripadajoči graf šestkotnikov in $\text{Mod}_H(X)$ pripadajoči modificirani graf šestkotnikov.

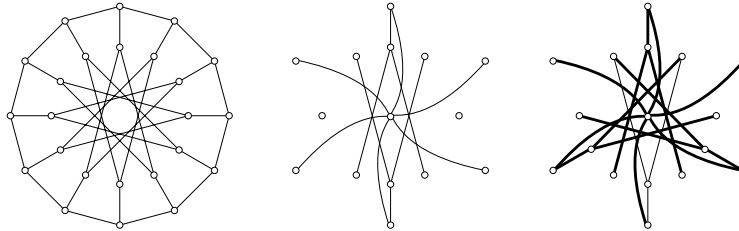
$\text{Ker } G$ deluje 1-regularno na $\text{Hex}(X)$ in je s -cikel v $\text{Hex}(X)$, ki ustreza s šestkotnikom okoli fiksnega s -kotnega lica \mathcal{S} v X , G -konsistenten, lahko za $\text{Hex}(X)$ uporabimo rezultate o tako imenovanih obročih iz razdelka 3.2.

Spomnimo se (glej podrazdelek 4.1.1), da modificirani graf šestkotnikov $\text{Mod}_H(X)$ dobimo iz grafa šestkotnikov $\text{Hex}(X)$, tako da izbrišemo vse "lihe" točke v prvem obroču R_1 , vse "sode" točke z izjemo dveh antipodnih točk v drugem obroču, dodamo dodatno točko v , ki predstavlja s -kotno lice \mathcal{S} (znotraj R_1) in povežemo točko v z vsemi "sodimi" točkami v R_1 . Kjer so obroči R_i definirani tako kot v razdelku 3.2.

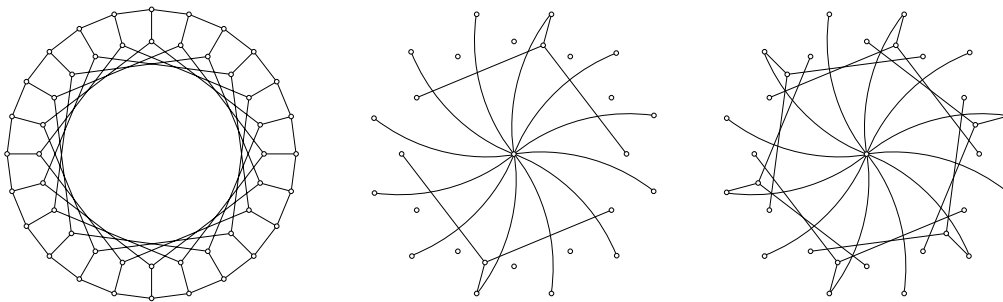
Graf $\text{Mod}_H(X)$ si lahko predstavljamo kot graf lic v Cayleyjevem zemljevidu grafa X , ki vsebuje s -kotno lice \mathcal{S} in vse šestkotnike z izjemo šestkotnikov, ki ustrezajo točkam $x^{2i+1}H$, $i \in \mathbb{Z}_s$, in $x^{2i}ax^2H$, $i \in \mathbb{Z}_s \setminus \{0, s/4\}$, v grafu šestkotnikov $\text{Hex}(X)$. Ker je red grafa $\text{Hex}(X)$ večji od 6 in je za $s \equiv 0 \pmod{4}$ v simetričnem posplošenemu Petersenovemu grafu $\text{GP}(s, k)$ število k liho (glej Lemo 3.2.1), so po posledici 3.2.7 šestkotniki, ki smo jih pri konstrukciji grafa $\text{Mod}_H(X)$ izbrisali iz $\text{Hex}(X)$, neodvisni. To pomeni, da rob grafa lic $\text{Mod}_H(X)$ v Cayleyjevem zemljevidu grafa X vsebuje vse točke grafa X . Torej, če je $\text{Mod}_H(X)$ drevo, je hamiltonsko drevo lic v Cayleyjevem zemljevidu, ki nam da hamiltonski cikel v grafu X . (Na primer, v primeru 4.1.2 je $\text{Mod}_H(X)$ drevo.)

Poleg tega posledica 3.2.7 implicira, da je $\text{Mod}_H(X)$ povezan v vseh primerih razen, ko je $\text{Hex}(X) = \text{GP}(12, 5)$ (in $s = 12$) in ko je $\text{Hex}(X) = \text{GP}(24, 5)$ (in $s = 24$). Če je $\text{Hex}(X)$ posplošeni Petersenov graf $\text{GP}(12, 5)$ in $s = 12$, je modificirani graf šestkotnikov $\text{Mod}_H(X)$ drevo unija dve neodvisni točki. Če grafu $\text{Mod}_H(X)$ dodamo dve primerni točki (glej sliko 4.3) dobimo nov modificirani graf, v katerem obstaja inducirano drevo, ki ustreza hamiltonskemu ciklu v prvotnem Cayleyjevem grafu. Če

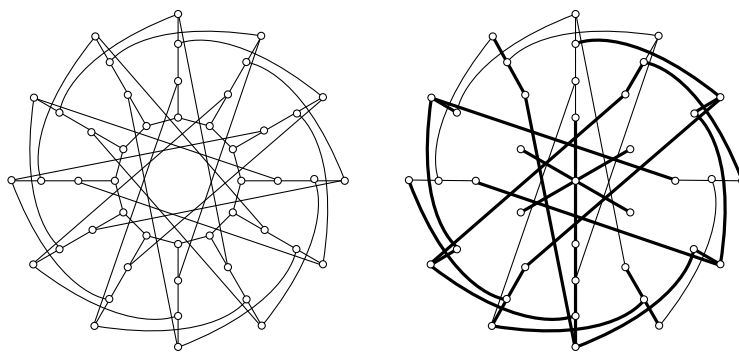
pa je $\text{Hex}(X)$ posplošeni Petersenov graf $\text{GP}(24, 5)$, je $\text{Mod}_H(X)$ drevo unija osem neodvisnih točk. Vendar grafu $\text{Mod}_H(X)$ lahko dodamo točke, tako da dobimo drevo, ki porodi hamiltonski cikel v grafu X (glej sliko 4.4).



Slika 4.3: $\text{GP}(12, 5)$, modificirani graf šestkotnikov in novi modificirani graf šestkotnikov z induciranim drevesom, katerega komplement je ena sama točka.



Slika 4.4: $\text{GP}(24, 5)$, modificirani graf šestkotnikov za $s = 24$ in novi modificirani graf šestkotnikov.



Slika 4.5: $\text{GP}(24, 5)$ in modificirani graf šestkotnikov $\text{Mod}_H(X)$ za $s = 12$ z induciranim drevesom, katerega komplement je množica petih točk.

Če je $s = 12$ in je $\text{Hex}(X)$ posplošeni Petersenov graf $\text{GP}(24, 5)$, je modificirani graf šestkotnikov $\text{Mod}_H(X)$ graf na desni strani slike 4.5, v katerem obstaja

inducirano drevo, katerega komplement je neodvisna množica točk. Zato to drevo porodi hamiltonski cikel v Cayleyjevem grafu X (glej sliko 4.5). Vse to, skupaj s primerom 4.1.1 in primerom 4.1.2, zagotovi veljavnost naslednje trditve.

Trditev 4.1.3 *Če je $\text{Hex}(X)$ posplošeni Petersenov graf, X ima hamiltonski cikel.*

Z izjemo točke v , ki je valence $s/2$, so vse točke v $\text{Mod}_H(X)$ valence 1, 2 ali 3. Poleg tega so z izjemo dveh vse točke povezane s točko v valence 1. Naj bo $\text{Mod}(X)$ graf, ki ga dobimo iz grafa $\text{Mod}_H(X)$, če izberemo vse točke valence 1 in supresiramo točke valence 2. Dobljeni graf $\text{Mod}(X)$ imenujemo *modificirani graf*. Kadar je $\text{Mod}_H(X)$ povezan in vsebuje cikel, je modificirani graf $\text{Mod}(X)$ povezan kubični graf (glej tudi primer 4.1.1). Naslednja pomožna trditev pove, da je $\text{Hex}(X)$ posplošeni Petersenov graf ali pa je $\text{Mod}(X)$ kubični graf, katerega red pri deljenju s 4 da ostanek 2.

Lema 4.1.4 *Naj bo $\text{Hex}(X)$ različen od posplošenih Petersenovih grafov. Potem je modificirani graf $\text{Mod}(X)$ povezan kubični graf in $|V(\text{Mod}(X))| = 2 \pmod{4}$.*

DOKAZ. Naj bo \mathcal{R} množica obročev v $\text{Hex}(X)$. Po posledici 3.2.7 je $|\mathcal{R}| \geq 3$ ter $\text{Mod}_H(X)$ je povezan graf, ki vsebuje cikel. Torej je modificirani graf $\text{Mod}(X)$ povezan kubični graf. Preostane pokazati, da je $|V(\text{Mod}(X))| = 2 \pmod{4}$.

Po posledici 3.2.7 moramo premisliti nekaj možnosti. Prvič, bralec se bo prepričal sam, da je v primeru, ko je $\text{Hex}(X)$ Y -grafov $Y(28, 1, 3, 9)$ ali $Y(56, 1, 9, 25)$, modificirani graf $\text{Mod}(X)$ reda 30 oziroma 58. Drugič, če je $\text{Hex}(X)$ tak graf, da R_3 sestoji iz ene same orbite elementa x , je po posledici 3.2.7, $|\mathcal{R}| \geq 4$. Poleg tega modificirani graf šestkotnikov $\text{Mod}_H(X)$ vsebuje točko v , ki predstavlja centralno s -kotno lice \mathcal{S} , $s/2$ točk iz prvega obroča R_1 , med katerimi je $s/2 - 2$ točk valence 1 in dve točki valence 2, $s/2 + 2$ točk iz drugega obroča R_2 , med katerimi jih je $s/2$ valence 2 in dve valence 3, in vse točke iz preostalih obročev. Ko pozabimo na točke valence 1 in supresiramo točke valence 2 v $\text{Mod}_H(X)$, ugotovimo, da modificirani graf $\text{Mod}(X)$ nima nobene točke iz prvega obroča R_1 in ima 2 točki iz R_2 , $s/2$ točk iz R_3 , $s/2 + 4$ točk iz R_4 in vse točke iz preostalih obročev (če obstajajo). Z drugimi besedami, $|V(\text{Mod}(X))| = |V(\text{Hex}(X))| - s - (s - 2) - s/2 - (s/2 - 4) = |\text{Hex}(X)| - 3s + 6$, kar je očitno kongruentno 2 po modulu 4, saj je $s \equiv 0 \pmod{4}$. In tretjič, če je R_3 unija dveh orbit elementa $x \in G$, potem z brisanjem točk valence 1 in supresiranjem točk valence 2 v $\text{Mod}_H(X)$, izgubimo točko v , vse točke iz prvega obroča R_1 , $s - 2$ točk iz R_2 in $s/2 - 2$ točk iz vsake od dveh orbit v tretjem obroču R_3 . Ker je $|\text{Hex}(X)| \equiv 0 \pmod{4}$ in $s \equiv 0 \pmod{4}$, odtod sledi, da je tudi v tem primeru število

$$|V(\text{Mod}(X))| = |\text{Hex}(X)| - s - (s - 2) - 2(s/2 - 2) = |\text{Hex}(X)| - 3s + 6$$

kongruentno 2 po modulu 4. ■

Naslednji pomožni trditvi in posledica 3.2.7 povedo, da je modificirani graf $\text{Mod}(X)$ ciklično-4-povezavno povezan, ko je $\text{Hex}(X)$ različen od posplošenih Petersenovih grafov.

Lema 4.1.5 Naj bo $\text{Hex}(X)$ kubični 2-regularni graf ožine 6. Potem velja ena izmed naslednjih trditev:

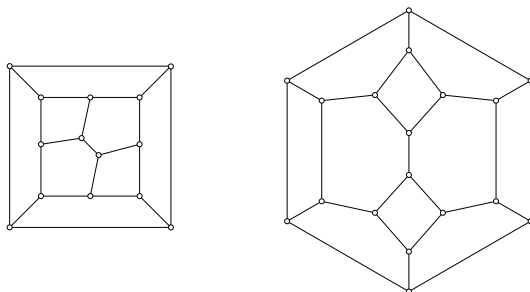
- (i) $\text{Hex}(X) \cong \text{GP}(8, 3)$; ali
- (ii) $\text{Hex}(X) \cong \text{GP}(12, 5)$; ali
- (iii) $s \geq 8$, $\text{Hex}(X)$ je $I_{s/2}^s(s/2 + 1)$ -pot ali $I_{s/6}^s(s/2 + 1)$ -pot in $\text{Mod}(X)$ je ciklično-4-povezavno povezan.

DOKAZ. Naj bo $\text{Hex}(X)$ kubični 2-regularni graf ožine 6. Potem je po trditvi 3.1.9 in izreku 3.1.13 $\text{Hex}(X)$ Moebius-Kantorjev graf $\text{GP}(8, 3)$ ali $I_k^s(t)$ -pot, kjer je $s \geq 8$, $k = s/2$ ali $k = s/6$, in $t = s/2 + 1$.

Ker je po predpostavki $s \equiv 0 \pmod{4}$, je $s \geq 8$. Če je $s = 12$ in $k = s/6 = 2$, potem je $I_k^s(t)$ -pot posplošeni Petersenov graf $\text{GP}(12, 5)$. V vseh drugih primerih dejstvo, da je $s \equiv 0 \pmod{4}$, implicira, da je k sodo število večje ali enako 4.

Torej lahko predpostavimo, da je $\text{Hex}(X)$ $I_k^s(t)$ -pot, različna od $I_2^{12}(7)$ -poti. Potem posledica 3.2.9 pove, da je $\text{Hex}(X)$ ciklično-6-povezavno povezan. Pokazali bomo, da je modificirani graf $\text{Mod}(X)$, ki je po lemi 4.1.4 povezan kubični graf, ciklično-4-povezavno povezan.

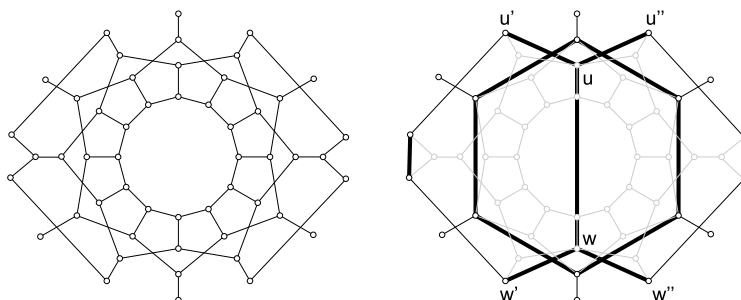
V ta namen se spomnimo, da s -cikel \mathcal{S} v prvi orbiti $I_k^s(t)$ -poti sestoji iz točk v prvem obroču R_1 (glej dokaz leme 3.2.4). Poleg tega ima $\text{Hex}(X)$ natanko k obročev in vsak obroč R_i , $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, sestoji iz ene same orbite elementa x .



Slika 4.6: Na levi strani modificirani graf $\text{Mod}(X)$, v primeru, ko je graf šestkotnikov $\text{Hex}(X)$ $I_4^8(5)$ -pot, na desni strani $\text{Mod}(X)$, v primeru, ko je $\text{Hex}(X)$ $I_4^{12}(7)$ -pot.

Ni težko videti, da je $\text{Mod}(X)$ ciklično-4-povezavno povezan, če je $\text{Hex}(X)$ $I_4^8(5)$ -pot ali $I_4^{12}(7)$ -pot (glej sliko 4.6). Torej lahko predpostavimo, da je $s \geq 12$ in $k \geq 6$. Potem glede na naše predpostavke lokalna struktura modificiranega grafa $\text{Mod}(X)$ izgleda kot je ilustrirano na sliki 4.7 za $s = 12$. Naj $M = E(\text{Mod}(X)) \setminus E(\text{Hex}(X))$ označuje množico novih povezav grafa $\text{Mod}(X)$, to je, množico povezav grafa $\text{Mod}(X)$, ki niso povezave grafa šestkotnikov $\text{Hex}(X)$ (krepke povezave na desni strani slike 4.7). Povezave iz M tvorijo disjunktno unijo drevesa reda 6, ki ima dve točki valence 3, preostale štiri točke pa so valence 1, dve $(s/4 - 2)$ -pot in $s/2$ -cikel Q . Označimo šest točk drevesa, ki ga tvorijo povezave iz M , z u, u', u'', w, w' in w'' kot na sliki 4.7. Potem struktura grafa $\text{Hex}(X)$ implicira, da obstajata dve povezavi v $\text{Hex}(X)$, ki povezujeta 3-lok $u'uw'w'$ z eno od dveh $(s/4 - 2)$ -poti, ki ju sestavljajo

povezave iz M , na tak način, da dobimo $(s/4 + 3)$ -cikel (glej sliko 4.7). Podobno, 3-lok $u''uww''$ skupaj s primernima povezavama grafa $\text{Hex}(X)$ in drugo od dveh $(s/4 - 2)$ -poti tvori $(s/4 + 3)$ -cikel. Označimo ta dva $(s/4 + 3)$ -cikla z Q' in Q'' . Iz postopka modificiranja sledi, da $s/2$ -cikel Q vsebuje točke $x^{2i+1}ax^3H \in V(\text{Hex}(X))$, $i \in \mathbb{Z}_s$, iz tretjega obroča R_3 . Poleg tega so povezave tega $s/2$ -cikla Q oblike $x^{2i+1}ax^3Hx^{2i+3}ax^3H$, $i \in \mathbb{Z}_s$. Vsaka povezava $x^{2i+1}ax^3Hx^{2i+3}ax^3H$, $i \in \mathbb{Z}_s$, leži tudi na 5-ciklu, poimenujmo ga f_i , ki nastane iz enolično določenega 6-cikla skozi 2-lok $x^{2i+1}ax^3Hx^{2i+1}ax^2Hx^{2i+3}ax^3H$ v $\text{Hex}(X)$ (glej tudi trditev 3.1.2). Dva 5-cikla f_i in f_j skupno povezavo natanko tedaj, ko imata povezavi $x^{2i+1}ax^3Hx^{2i+3}ax^3H$ in $x^{2j+1}ax^3Hx^{2j+3}ax^3H$ skupno krajišče na $s/2$ -ciklu Q oziroma je $j \in \{i - 1, i + 1\}$.



Slika 4.7: Na levi strani lokalna struktura $I_k^s(t)$ -poti za $s = 12$ in $k = 6$. Na desni strani lokalna struktura pripadajočega modificiranega grafa $\text{Mod}(X)$.

Denimo, da $\text{Mod}(X)$ ni ciklično-4-povezavno povezan. Potem obstaja ciklični prerez $T \subseteq E(\text{Mod}(X))$ moči t , kjer je $t \in \{1, 2, 3\}$, in z odstranitvijo povezav v T graf $\text{Mod}(X)$ razpade na dve komponenti (ne nujno povezani) imenujmo ju C in C' , ki vsebujeta cikel. Očitno so krajišča povezav v T medseboj različna (povezave v T niso incidentne). Ker je $\text{Mod}(X)$ očitno 2-povezavno povezan, je $t \in \{2, 3\}$. Ker eno krajišče poljubne povezave v T pripada komponenti C in drugo komponenti C' , se bo bralec prepričal sam, da mora biti v vsakem ciklu v grafu $\text{Mod}(X)$ sodo mnogo povezav, ki ležijo v T . (Najlažje se o tem prepričamo, tako da točke ene komponente pobarvamo recimo z belo barvo, točke druge komponente pa recimo s črno barvo. Potem množico T sestavljajo povezave s krajišči različnih barv. Vzemimo cikel, ki vsebuje dvoobarvno povezavo. Potem so točke na ciklu na eni strani te povezave bele barve, na drugi pa črne. Ker med poljubnima točkama na ciklu obstajata dve različni poti, sledi, da se na ciklu nahaja vsaj še ena dvoobarvna povezava.) Iz predpostavke, da je $t \leq 3$, sledi, da v poljubnem ciklu v $\text{Mod}(X)$ bodisi nobena povezava ali natanko dve povezavi ležita v T . Poleg tega struktura grafa $\text{Hex}(X)$ implicira, da vsaka povezava grafa $\text{Mod}(X)$ leži na vsaj dveh različnih ciklih.

Denimo, da je $M \cap T = \emptyset$. Potem je vsaka povezava iz T tudi povezava grafa šestkotnikov $\text{Hex}(X)$. Očitno vsaka povezava grafa $\text{Hex}(X)$ leži na dveh različnih 6-ciklih v $\text{Hex}(X)$, in zaradi tega vsaka povezava v T leži na dveh ciklih dolžine manjše ali enake 6 v $\text{Mod}(X)$. Z uporabo dejstva, da vsak cikel vsebuje dve povezavi ali nobeno povezavo iz T , ugotovimo da $t \neq 2$, in zaradi tega $t = 3$ (namreč, če je $t = 2$, potem obstaja povezava, ki je tudi povezava grafa $\text{Hex}(X)$, ki leži na enem samem ciklu, kar pa ni mogoče). Sledi, da obstajajo tri povezave v T , ki tvorijo

kolobar treh ciklov v $\text{Mod}(X)$, ki ustrezajo trem 6-ciklom v $\text{Hex}(X)$. Vendar, ker je $\text{Hex}(X)$ $I_k^s(t)$ -pot, je edina možnost, da imajo te tri povezave v T skupno krajišče, protislovje.

Denimo, da je $M \cap T \neq \emptyset$. Množica M ima štiri tipe povezav: centralno povezavo uw drevesa reda 6; preostale štiri povezave tega drevesa; povezave $s/2$ -cikla Q ; in povezave dveh $(s/4 - 2)$ -poti. To porodi štiri možnosti za presek $M \cap T \neq \emptyset$, ki jih moramo premisliti. S podrobno analizo vsake izmed njih (na podoben način kot v primeru $M \cap T \neq \emptyset$) dobimo protislovje.

Denimo, da je neka povezava iz M , ki leži na $s/2$ -ciklu Q , vsebovana v T . Torej, obstaja tak $i \in \mathbb{Z}_s$, da je povezava

$$e_i = x^{2i+1}ax^3Hx^{2i+3}ax^3H \in T.$$

Potem po zgornjih opombah, obstaja tak $j \in \mathbb{Z}_s$, $j \neq i$, da tudi povezava

$$e_j = x^{2j+1}ax^3Hx^{2j+3}ax^3H,$$

ki leži na $s/2$ -ciklu Q , pripada množici T . Spomnimo se, da e_i leži na 5-ciklu f_i in e_j na 5-ciklu f_j . Ker je $t \leq 3$, sledi, da imata f_i in f_j skupno povezavo. Torej sta e_i in e_j sosednji povezavi na Q . Vendar potem T sestoji iz treh povezav s skupnim krajiščem, protislovje.

Denimo, da T vsebuje povezavo drevesa reda 6, ki ga sestavljajo povezave iz M . Očitno povezava $e = uw$ tega drevesa, ki izhaja iz 2-loka v $\text{Mod}_H(X)$, ki povezuje točko v z dvema antipodnima točkama prvega obroča R_1 grafa $\text{Hex}(X)$ (vertikalna krepka povezava uw na desni strani slike 4.7) ni vsebovana v T . Namreč, povezava e leži na ciklu Q' in ciklu Q'' , katerih edina skupna povezava je e . Torej, če bi e pripadala množici T , bi obstajali, dve povezavi, recimo e' in e'' (obe različni od e), od katerih bi ena ležala na Q' in druga na Q'' , ki bi tudi pripadali množici T . Vendar, potem bi morali povezavi e' in e'' ležati na skupnem ciklu, ki je nastal iz 6-cikla v $\text{Hex}(X)$, kar pa je očitno nemogoče. Zaradi simetrije je dovolj pokazati, da tudi primer, ko povezava $u'u \in T$ pripelje do protislovja. Torej recimo, da $u'u \in T$. Potem morata obstajati dve povezavi (obe različni od povezave $u'u$), od katerih ena leži na Q' in druga na 4-ciklu, ki vsebuje 2-lok $u'uu''$, ki sta vsebovani v T . Vendar, ker je $t \leq 3$, morata te dve povezavi ležati na skupnem ciklu, ki izhaja iz 6-cikla v $\text{Hex}(X)$, kar pa ni mogoče. Podobno se bo bralec prepričal sam, da nobena povezava na $(s/4 - 2)$ -poteh, ki ju sestavljajo povezave iz M , ne pripada množici T . S tem je dokaz končan. ■

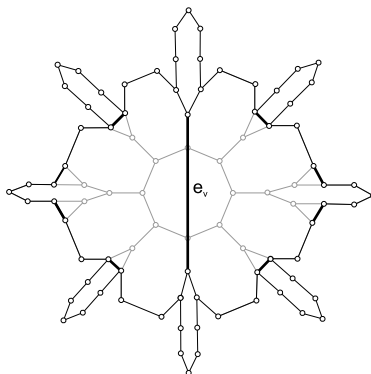
V danem grafu X vložnem na zaprto orientabilno ploskev roda g sta dve lici f in f' povezani, če premoreta skupno povezavo. Pot lic dolžine r $f_0f_1 \dots f_r$ v X je zaporedje $r + 1$ lic, tako da je lice f_i povezano z licem f_{i+1} za vsak $i \in \mathbb{Z}_{r+1} \setminus \{r\}$, in $f_i \neq f_j$ za $i \neq j$. Število r imenujemo *dolžina poti lic*. Če je $f_0 = f_r$ in $f_i \neq f_j$ za $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{Z}_{r+1} \setminus \{0, r\}$, potem pot lic imenujemo *cikel lic*. Dve lici sta na razdalji r , če je najkrajša pot lic med njima dolžine r .

Lema 4.1.6 *Naj bo $\text{Hex}(X)$ različen od posplošenih Petersenovih grafov. Potem je modificirani graf $\text{Mod}(X)$ ciklično-4-povezavno povezan.*

DOKAZ. Če je $\text{Hex}(X)$ $I_k^s(t)$ -pot, je po lemi 4.1.5 $\text{Mod}(X)$ ciklično-4-povezavno povezan. Torej lahko po posledici 3.2.9 predpostavimo, da je $\text{Hex}(X)$ ciklično-8-povezavno povezan.

Naj bo X vložen na zaprto orientabilno ploskev roda $g = 1 + (s - 6)|G|/12s$ s -kotnimi in šestkotnimi lici. Potem je tudi $\text{Hex}(X)$ in posledično $\text{Mod}(X)$ vložljiv na enako ploskev roda g . Lica v $\text{Hex}(X)$ s -kotna, v $\text{Mod}(X)$ pa poleg s -kotnih lic obstajajo tudi lica drugačnih dolžin. Pravimo, da je lice v $\text{Mod}(X)$ *staro lice*, če je tudi lice grafa $\text{Hex}(X)$. *Novo lice* pa je lice v $\text{Mod}(X)$, ki ni lice v $\text{Hex}(X)$, torej nastane preko modifikacijskega procesa iz nekaj lic grafa $\text{Hex}(X)$. Naj bo e_v povezava v $\text{Mod}(X)$, ki nastane iz 2-poti $Hvx^{s/2}H$ v $\text{Mod}_H(X)$ (glej sliko 4.8).

Predpostavimo nasprotno, da $\text{Mod}(X)$ ni ciklično-4-povezavno povezan. Potem obstaja ciklični prerez $T \subseteq E(\text{Mod}(X))$ moči t , kjer je $t \leq 3$, in z odstranitvijo povezav v T graf $\text{Mod}(X)$ razpade na dve komponenti (ne nujno povezani), imenujmo ju C in C' , ki obe vsebujeta cikel. Ker eno krajišče poljubne povezave v T pripada komponenti C in drugo krajišče komponenti C' , se bo bralec prepričal sam (podobno kot v dokazu leme 4.1.5), da na poljubnem ciklu v $\text{Mod}(X)$ obstaja sodo mnogo povezav, ki ležijo v T . Ker je po predpostavki $t \leq 3$, sledi, da cikel v $\text{Mod}(X)$ bodisi ne vsebuje nobene povezave iz T bodisi vsebuje natanko dve povezavi iz T . Poleg tega, dejstvo, da vsaka povezava v $\text{Mod}(X)$ leži na dveh licih, implicira, da je $t \in \{2, 3\}$. Odtod sledi, da obstaja cikel t -ih lic, imenujmo ga Q , v $\text{Mod}(X)$, tako da so lica v Q povezana preko povezav v T .



Slika 4.8: Lokalna struktura grafa $\text{Mod}(X)$ vloženega na zaprto orientabilno ploskev, če je $|\mathcal{R}| > 3$ in tretji obroč R_3 sestoji iz dveh orbit elementa $x \in G$, za $s = 8$.

Najprej si oglejmo splošen primer, ko je $|\mathcal{R}| > 3$ in tretji obroč R_3 sestoji iz dveh orbit elementa $x \in G$. Potem lokalna struktura modificiranega grafa $\text{Mod}(X)$ (struktura območja, na katerem se $\text{Mod}(X)$ razlikuje od $\text{Hex}(X)$) vloženega na orientabilno ploskev roda g izgleda kot je ilustrirano na sliki 4.8 za $s = 8$. Poleg s -kotnih lic modificiran graf $\text{Mod}(X)$ vsebuje tudi s lic velikosti $s - 1$ in dve veliki lici, ki sta povezani preko povezave e_v (glej sliko 4.8).

Če Q sestoji iz t -tih starih lic, je T tudi ciklični- t -prerez grafa $\text{Hex}(X)$, $t \leq 3$, kar je v protislovju s ciklično-8-povezavno povezanostjo grafa šestkotnikov $\text{Hex}(X)$. Bralec se bo prepričal sam, da tudi primer, ko Q sestoji iz t -tih lic, med katerimi so nekatera stara lica, druga nova lica velikosti $s - 1$ in nobeno veliko novo lice, vodi

v protislovje. Zdaj denimo, da Q vsebuje vsaj eno novo veliko lice. Če Q vsebuje obe novi veliki lici, potem je $e_v \in T$, in ker Q sestoji iz $t \leq 3$ lic, sledi, da imata ti dve veliki lici poleg povezave e_v še eno drugo skupno povezavo ali pa obstaja lice f , velikosti s ali $s - 1$, ki skupaj z dvema velikima licema tvori cikel lic Q . Vendar za poljubni dve povezavi e in e' v $\text{Mod}(X)$, od katerih ena leži na enem velikem licu, druga pa na drugem velikem licu, sta pripadajoči s -kotni lici v $\text{Hex}(X)$ (dve s -kotni lici v $\text{Hex}(X)$, ki vsebujeta povezavo e oziroma e' , in sta bili v modifikacijskem procesu modificirani) največ na oddaljenosti 5 (glej sliko 4.8). Torej obstaja cikel $t - 2 + 5 = t + 3 \leq 6$ lic v $\text{Hex}(X)$, kar pomeni, da $\text{Hex}(X)$ vsebuje ciklični prerez moči manjše od 7, protislovje. Nazadnje, če Q vsebuje le eno od dveh velikih lic v $\text{Mod}(X)$, sta povezavi velikega lica, ki skupaj z nekim licem, če je $t = 2$, oziroma skupaj z dvema licema, če je $t = 3$, v $\text{Mod}(X)$ tvorijo cikel Q , zopet največ na razdalji 5 v $\text{Hex}(X)$. Torej v $\text{Hex}(X)$ obstaja cikel lic dolžine $t - 1 + 5 \leq 7$, zopet protislovje s ciklično-8-povezanostjo grafa $\text{Hex}(X)$.

Po posledici 3.2.7 se lahko zgodijo še naslednji primeri: $\text{Hex}(X) \cong Y(28, 1, 3, 9)$ ali $\text{Hex}(X) \cong Y(56, 1, 9, 25)$ ali pa je $|\mathcal{R}| > 3$ in R_3 sestoji iz ene same orbite elementa $x \in G$. Za prva dva primera se bo bralec prepričal sam, da je $\text{Mod}(X)$ ciklično 4-povezavno povezan. Medtem ko v primeru, ko je $|\mathcal{R}| > 3$ in R_3 sestoji iz ene same orbite elementa $x \in G$, z enakimi argumenti kot v prejšnjem odstavku ugotovimo, da ne obstaja ciklični prerez, ki sestoji iz največ treh povezav. Podrobnosti prepuščamo bralec. ■

Z združitvijo rezultatov leme 4.1.4, leme 4.1.6 in trditve 2.2.4, dobimo naslednjo posledico. Spomnimo, da je ciklično stabilna podmnožica v grafu, podmnožica množice točk, ki inducira graf brez cikla (glej razdelek 2.2.8).

Posledica 4.1.7 *Naj bo $\text{Hex}(X)$ različen od posplošenih Petersenovih grafov. Potem v modificiranem grafu $\text{Mod}(X)$ obstaja taka maksimalna ciklično stabilna podmnožica S , da je $\text{Mod}(X)[S]$ drevo in $V(\text{Mod}(X)) \setminus S$ neodvisna množica točk.*

4.1.3 Dokaz obstoja hamiltonskih ciklov

Z rezultati prejšnjega podrazdelka lahko dokažemo, da $(2, s, 3)$ -Cayleyjevi grafi za $s \equiv 0 \pmod{4}$ premorejo hamiltonski cikel.

Izrek 4.1.8 *Naj bo $s \equiv 0 \pmod{4} \geq 4$ in naj bo $G = \langle a, x \mid a^2 = x^s = (ax)^3 = 1, \dots \rangle$ grupa z $(2, s, 3)$ -prezentacijo. Potem Cayleyjev graf $X = \text{Cay}(G, \{a, x, x^{-1}\})$ ima hamiltonski cikel.*

DOKAZ. Naj bo $s \equiv 0 \pmod{4} \geq 4$ in X Cayleyjev graf grupe $G = \langle a, x \mid a^2 = x^s = (ax)^3 = 1, \dots \rangle$ s $(2, s, 3)$ -prezentacijo, glede na množico generatorjev $S = \{a, x, x^{-1}\}$. Naj bo X vložen na zaprto orientabilno ploskev roda $g = 1 + (s - 6)|G|/12s$ s s -kotnimi in šestkotnimi lici. Naj bo $\text{Hex}(X)$ njegov pripadajoči graf šestkotnikov.

Če je $\text{Hex}(X)$ eden izmed posplošenih Petersenovih grafov, potem po trditvi 4.1.3 graf X ima hamiltonski cikel. Torej lahko predpostavimo, da $\text{Hex}(X)$ ni posplošeni Petersenov graf. Potem po posledici 4.1.7 v modificiranem grafu $\text{Mod}(X)$

obstaja maksimalna ciklično stabilna podmnožica S , ki inducira drevo, njen komplement $V(\text{Mod}(X)) \setminus S$ pa je neodvisna množica točk. Z dodajanjem točk modificiranega grafa šestkotnikov $\text{Mod}_H(X)$, ki smo jih izbrisali iz $\text{Mod}_H(X)$, da smo dobili graf $\text{Mod}(X)$, k drevesu $\text{Mod}(X)[S]$ dobimo inducirano drevo modificiranega grafa šestkotnikov $\text{Mod}_H(X)$, katerega komplement je neodvisna množica točk. Kot smo ilustrirali v podrazdelku 4.1.1 to drevo ustreza drevesu lic v Cayleyjevem grafu X , katerega rob je hamiltonski cikel grafa X . ■

4.1.4 Opombe in sklepi

V tem razdelku smo s posplošitvijo metode uporabljene v [55] dokazali obstoj hamiltonskih ciklov v razredu $(2, s, 3)$ -Cayleyjevih grafov, ko sta tako red pripadajoče grupe kot število s deljiva s 4 (glej izrek 4.1.8). Poleg metode, ki sta jo razvila Glover in Marušič v [55], vložitve Cayleyjevega grafa na orientabilno ploskev, pri kateri namesto hamiltonskega cikla iščemo hamiltonsko drevo lic, so v dokazu ključno vlogo imeli tudi naslednji rezultati: klasifikacija kubičnih simetričnih grafov ožine 6, ki smo jo naredili v razdelku 3.1; Payan-Sakarovitchev rezultat o ciklično stabilnih podmnožicah v ciklično-4-povezavno povezanih kubičnih grafih (trditev 2.2.4); Conwayev rezultat o številu orbit konsistentnih ciklov v simetričnih grafih (trditev 2.2.3); ter analiza strukture kubičnih simetričnih grafov, katerih grupa avtomorfizmov premora 1-regularno podgrupo (narejeno v razdelku 3.2). Naj omenimo še to, da ostaja z našim rezultatom problem obstoja hamiltonskih ciklov v tej posebni družini kubičnih Cayleyjevih grafov nerešen samo še za primer, ko je red pripadajoče grupe deljiv s 4 in je s liho število ali kongruentno 2 po modulu 4.

Uporabljeno Glover-Marušič metodo za iskanje hamiltonskih ciklov v $(2, s, 3)$ -Cayleyjevih grafih lahko posplošimo na iskanje hamiltonskih ciklov v $(2, s, t)$ -Cayleyjevih grafih na sledeči način: $(2, s, t)$ -Cayleyjev graf X grupe G vložimo na ploskev z $2t$ -kotnimi in s -kotnimi lici in mu priredimo graf $2t$ -kotnikov $T(X)$ (prej graf šestkotnikov). Dve točki v $T(X)$ sta povezani, če imata pripadajoči $2t$ -kotni lici v X skupno povezavo. Bralec se bo prepričal sam, da je $T(X)$ t -valentni graf, na katerem grupa G deluje 1-regularno. Če v $T(X)$ najdemo inducirano drevo, katerega komplement je neodvisna množica točk, dobimo hamiltonski cikel v X . Torej potrebujemo le posplošitev Payan-Sakarovitchevega rezultat na t -valentne grafe.

4.2 Hamiltonski cikli v točkovno tranzitivnih grafih reda $4p$

Rezultati tega razdelka so objavljeni v [79]. V tem razdelku bomo dokazali, da imajo z izjemo Coxeterjevega grafa F028A vsi točkovno tranzitivni grafi reda $4p$, kjer je p praštevilo, hamiltonski cikel, glej izrek 4.2.14. (Skozi ta razdelek bomo s p vedno označevali praštevilo.) Dokaz Izreka 4.2.14 je izpeljan skozi sledeče podrazdelke. Naredili bomo natančno analizo vseh možnih delovanj grupe avtomorfizmov (glede na (ne)primitivnost) točkovno tranzitivnega grafa reda $4p$ (podrazdelek 4.2.1). Natančneje, točkovno tranzitivni graf reda $4p$ glede na neprimitivnostne sisteme blokov,

ki jih premore njegova grupa avtomorfizmov, pripada eni izmed osmih skupin (glej tabelo 4.1 v podrazdelku 4.2.1). Za grafe teh osmih skupin podamo zadostne pogoje za obstoj hamiltonskih ciklov (glej leme 4.2.4, 4.2.6 in 4.2.7). S pomočjo le-teh dokažemo trditev 4.2.10, ki pravi, da ima povezan točkovno tranzitiven graf reda $4p$, ki ni izomorfen Coxeterjevemu grafu F028A, hamiltonski cikel ali pa ima neprimitivnostni sistem blokov, ki sestoji iz blokov velikosti p ali $2p$.

Ta rezultat, ki reducira celotno število skupin grafov, v podrazdelku 4.2.2 združimo z rezultati naše druge analize, pri kateri uporabimo dobro znano dejstvo, da ima vsak točkovno tranzitiven graf reda mp , kjer je $m \leq p$, (m, p) -semiregularen avtomorfizem [95]. Natančneje, če je γ $(4, p)$ -semiregularen avtomorfizem točkovno tranzitivnega grafa X reda $4p$, je pripadajoči kvocientni graf X_γ grafa X glede na orbite avtomorfizma γ eden izmed šestih povezanih grafov reda 4. V [102] sta Marušič in Parsons z natančno analizo teh šestih grafov uspela dokazati, da imajo točkovno tranzitivni grafi reda $4p$ hamiltonsko pot. Čeprav se zdi koncept hamiltonske poti zelo blizu konceptu hamiltonskega cikla v grafu, je zahtevnost konstrukcije hamiltonskega cikla v grafu ponavadi veliko bolj zahtevna. Torej ni presenečenje, da samo drugi pristop v [102] ni zadoščal pri konstrukciji hamiltonskih ciklov. Z združitvijo teh dveh pristopov pa bomo uspeli dokazati tudi obstoj hamiltonskega cikla v teh grafih (seveda z izjemo Coxeterjevega grafa F028A).

Tu navajamo Jacksonov rezultat [72], ki poda zadosten pogoj za obstoj hamiltonskih ciklov v regularnih grafih velike valence.

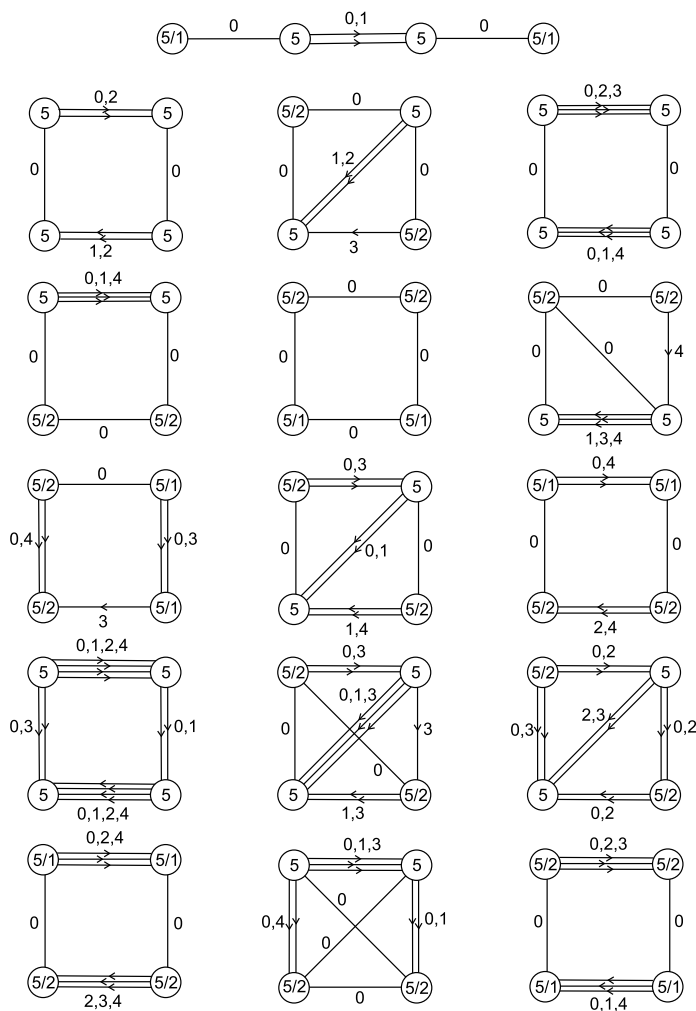
Trditev 4.2.1 [72, Theorem 6] *Vsak 2-povezan regularni graf reda n in valence vsaj $n/3$ je hamiltonski.*

Predno se lotimo zgoraj omenjenih analiz navajamo še trditev, ki pove, da imajo točkovno tranzitivni grafi reda $4p$, kjer je $p \leq 5$ praštevilo, hamiltonski cikel. Rezultat bo poenostavil analizo hamiltonskosti v nadaljnjih podrazdelkih. V dokazu bomo potrebovali tako imenovano *LCF kodo* [52]. LCF koda hamiltonskega kubičnega grafa glede na enega izmed njegovih hamiltonskih ciklov $v_0v_1 \dots v_{n-1}v_0$ je lista $\text{LCF}[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$ elementov iz $\mathbb{Z}_n \setminus \{0, 1, n-1\}$, tako da je v_i povezan z v_{i+a_i} za vsak $i \in \mathbb{Z}_n$. Če obstaja pravi delitelj k števila n , tako da je $a_i = a_{i+rk}$ za vsak $i \in \mathbb{Z}_k$ in $r \in \{1, 2, \dots, n/k - 1\}$, uporabljamo poenostavljeno notacijo $\text{LCF}[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}]^{n/k}$.

Trditev 4.2.2 *Povezan točkovno tranzitiven graf reda $4p$, kjer je $p \leq 5$ praštevilo, je hamiltonski.*

DOKAZ. Za $p = 2$ trditev velja po [97]. Za $p = 3$ je po [107] vsak točkovno tranzitiven graf reda $4p = 12$ tudi Cayleyjev graf. Po trditvi 4.2.1, zadostuje premisliti samo grafe, ki so valence največ 3. Obstaja pet takih grafov: C_{12} , $C_6 \times K_2$, graf dobljen iz polnega grafa K_4 , tako da vsako točko zamenjamo s trikotnikom, $\text{Cay}(\mathbb{Z}_{12}, \{1, 6\})$ in graf z LCF kodo $[5, -5]^6$. Vsi tej grafi so hamiltonski. Zato lahko odslej predpostavimo, da je $p = 5$. (Po [108] obstaja 1190 povezanih točkovno tranzitivnih grafov reda 20.) Naj bo X povezan točkovno tranzitiven graf reda 20. Po trditvi 4.2.1 lahko predpostavimo, da je X valence manjše od 7. Denimo, da je X Cayleyjev graf grupe G in naj bo P sylowska 5-podgrupa grupe G . Potem je

P edinka v G in kvocientna grupa G/P je reda 4 in zato abelska. Torej je tudi G abelska ali pa je komutatorska podgrupa grupe G ciklična reda 5. Po [43, 96] sledi, da X ima hamiltonski cikel. Sedaj naj bo X ne-Cayleyjev graf reda 20. Iz liste vseh točkovno tranzitivnih grafov [108] je moč videti, da obstaja 80 možnosti za graf X , od katerih jih je le 16 valence manjše od 7. Za te grafe smo z uporabo programa MAGMA [15] poiskali kvocientne grafe glede na orbite $(4, p)$ -semiregularnega avtomorfizma (glej sliko 4.9). Prvi graf na sliki 4.9 ustreza dodekaedru $GP(10, 2)$, za katerega je dobro znano, da ima hamiltonski cikel (glej tudi izrek 5.1.5 in sliko 5.6). V vseh drugih primerih (z izjemo grafa v drugem stolpcu tretje vrstice, za katerega je obstoj hamiltonskega cikla enostavno preveriti) hamiltonski cikel najdemo z dobro znanim dvigom hamiltonskega cikla v kvocientnem grafu (glej tudi Trditev 4.2.12). ■



Slika 4.9: Vsi povezani ne-Cayleyjevi točkovno tranzitivni grafi reda 20, katerih valenca je manjša od 7, podani v Fruchtovi notaciji.

4.2.1 Analiza glede na delovanje grupe avtomorfizmov $\text{Aut}X$

Eno glavnih vlog v dokazu glavnega izreka tega razdelka igra analiza (ne)primitivnosti cele grupe avtomorfizmov točkovno tranzitivnega grafa reda $4p$, kjer je p praštevilo. Vse točkovno tranzitivne grafe reda $4p$ razdelimo v osem skupin na sledeči način. Za točkovno tranzitiven graf X reda $4p$ naj bo $A = \text{Aut}X$ in izberimo $v \in V(X)$. Naj bo $(A_0, A_1, \dots, A_{k-1})$ tako zaporedje grup, da je $A_0 = A$, $A_{k-1} = A_v$ stabilizator točke in A_i maksimalna podgrupa grupe A_{i-1} , $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Pripadajoče zaporedje indeksov $[A_{i-1} : A_i]$, ($i \in \{1, \dots, k-1\}$), bomo imenovali *tip* grafa X . Rečemo, da graf X pripada *Skupini I*, *Skupini II*, *Skupini III*, *Skupini IV*, *Skupini V*, *Skupini VI*, *Skupini VII* in *Skupini VIII*, če je tipa $(4p)$, $(2 : 2p)$, $(2p : 2)$, $(2 : p : 2)$, $(p : 2 : 2)$, $(p : 4)$, $(4 : p)$ oziroma $(2 : 2 : p)$ (glej tudi tabelo 4.1). Na primer, *Skupina I* vsebuje točkovno tranzitivne grafe reda $4p$ s primitivno grupo avtomorfizmov in *Skupina II* vsebuje točkovno tranzitivne grafe reda $4p$, katerih grupa avtomorfizmov premore neprimitivnostni sistem dveh blokov velikosti $2p$ in stabilizator bloka deluje primitivno na vsakem od teh dveh blokov. Kot bomo videli v lemah 4.2.8 in 4.2.9 te skupine med seboj niso disjunktne.

<i>Skupina I</i>	$(4p)$
<i>Skupina II</i>	$(2 : 2p)$
<i>Skupina III</i>	$(2p : 2)$
<i>Skupina IV</i>	$(2 : p : 2)$
<i>Skupina V</i>	$(p : 2 : 2)$
<i>Skupina VI</i>	$(p : 4)$
<i>Skupina VII</i>	$(4 : p)$
<i>Skupina VIII</i>	$(2 : 2 : p)$

Tabela 4.1: Osem skupin točkovno tranzitivnih grafov reda $4p$.

Naslednji rezultat o primitivnih grupah stopnje $4p$ je moč izveči iz [86, 88].

Trditev 4.2.3 *Naj bo G primitivna grupa stopnje $4p$, kjer je $p \geq 7$ praštevilo. Potem je grupa G ena izmed naslednjih grup:*

- (i) A_8 ali S_8 , ki deluje na $28 = 4p$ neurejenih parih elementov iz množice moči 8;
- (ii) $\text{PSL}(2, 8)$, ki deluje na $28 = 4p$ odsekih podgrupe D_{18} ;
- (iii) $\text{PGL}(2, 7)$, ki deluje na $28 = 4p$ odsekih podgrupe D_{12} ;
- (iv) $\text{PSL}(2, 16) \leq G \leq \text{P}\Gamma\text{L}(2, 16)$, ki deluje na $68 = 4p$ odsekih podgrupe $N_G(\text{PGL}(2, 4))$;
- (v) $\text{PSL}(3, 3) \leq G \leq \text{PGL}(3, 3)$, ki deluje na $52 = 4p$ incidentnih parih točkopremica ravnine $\text{PG}(2, 3)$.

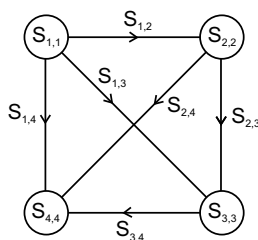
Seveda točkovno tranzitivni grafi, ki izhajajo iz delovanj v trditivi 4.2.3, pripadajo *Skupini I*. V teh grafih smo s pomočjo programa MAGMA [15] poiskali $(4, p)$ -semiregularni avtomorfizem, poiskali hamiltonski cikel v pripadajočem kvocientnem grafu reda 4 in ga dvignili v hamiltonski cikel v prvotnem grafu. Izkaže se, da je

Coxeterjev graf F028A, graf, ki izhaja iz grupnega delovanja (iii), edini graf brez hamiltonskega cikla [13].

Lema 4.2.4 Naj bo X povezan točkovno tranzitiven graf reda $4p$, kjer je p praštevilo, ki pripada Skupini I. Potem je X hamiltonski ali pa je izomorfen Coxeterjevemu grafu F028A.

DOKAZ. Če je $p \leq 5$, po trditvi 4.2.2 X ima hamiltonski cikel. Odslej naj bo $p \geq 7$. Ker X pripada Skupini I, izhaja iz enega izmed grupnih delovanj, ki so navedeni v trditvi 4.2.3. Po trditvi 4.2.1 lahko predpostavimo, da je X točkovno tranzitiven graf reda $4p$, valence manjše od $4p/3$ ter s primitivno grupo avtomorfizmov. S programom MAGMA smo poiskali vse možnosti za graf X , zapisane so v tabeli 4.2, kjer grafe podajamo s simboli. Definicija simbola je podana v naslednjem odstavku.

Naj bo X graf s $(4, p)$ -semiregularnim avtomorfizmom γ z orbitami W_i , $i \in \mathbb{Z}_4$. Naj bo $w_i \in W_i$. Definiramo naslednje podmnožice množice \mathbb{Z}_p , zbirka katerih enolično določa graf X . Za $i, j \in \mathbb{Z}_4$ je $S_{i,j} = \{s \in \mathbb{Z}_p : [w_i, w_j^s] \in E(X)\}$. Očitno je $S_{j,i} = -S_{i,j}$. 4×4 -matriko $\mathbf{S} = (S_{i,j})$, katere (i, j) -ti element je množica $S_{i,j}$, ponavadi imenujemo *simbol* grafa X glede na γ . Povezanost simbola grafa, ki premore $(4, p)$ -semiregularni avtomorfizem, z njegovo Fruchtovo notacijo [51] je prikazana na sliki 4.10.



Slika 4.10: Fruchtova notacija grafa s simbolom $\mathbf{S} = (S_{i,j})$.

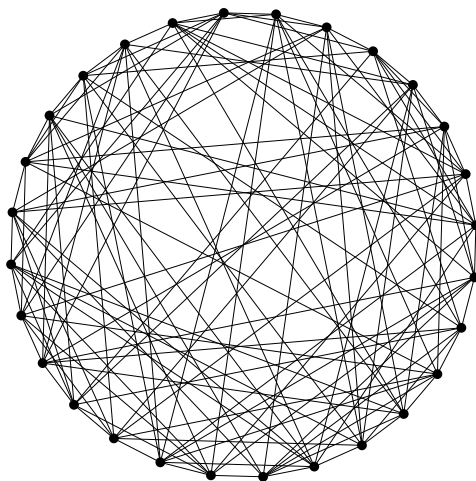
Z uporabo programa MAGMA [15] smo ugotovili, da obstaja le 10 grafov reda $4p$ s primitivno grupo avtomorfizmov, ki so valence manjše od $4p/3$. Za vsakega od teh grafov so v tabeli 4.2 podani elementi $S_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}_4$, njegovega simbola. Med temi grafi je le Coxeterjev graf F028A brez hamiltonskega cikla (graf X_2 v tabeli 4.2). To dejstvo bo bralec preveril sam s pomočjo kvocientnega grafa glede na $(4, p)$ -semiregularen avtomorfizem. Namreč, za vsakega od teh grafov kvocientni graf premore hamiltonski cikel, ki vsebuje večkratno povezavo. Torej se hamiltonski cikel dvigne v hamiltonski cikel prvotnega grafa (glej tudi trditev 4.2.12). V naslednjih odstavkih navajamo bolj natančen opis, kako smo poiskali te grafe.

Za delovanje grupe A_8 na odsekih podgrupe S_6 in delovanje grupe S_8 na odsekih podgrupe $S_6 \times \mathbb{Z}_2$ (točka (i) trditve 4.2.3) so pripadajoči orbitalni grafi valence 12 in 15, torej več kot $28/3$. Po trditvi 4.2.1 so ti grafi hamiltonski.

Za delovanje grupe $\text{PSL}(2, 8)$ na odsekih podgrupe D_{18} (točka (ii) trditve 4.2.3) dobimo, da ima D_{18} tri netrivialne podorbite, ki so vse sebi zrcalne dolžine 9. Pripadajoči grafi so vsi izomorfní grafu X_1 v tabeli 4.2 (glej tudi sliko 4.11).

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
$ V(X_i) $	28	28	28	28	28	28	68	68	68	52
valency	9	3	6	6	9	9	12	15	20	6
$S_{1,1}$	± 3	± 1	\emptyset	\emptyset	$\pm 2, \pm 3$	± 1	$\pm 2, \pm 5$	$\pm 6, \pm 8$	$\pm 2, \pm 3, \pm 6$	\emptyset
$S_{2,2}$	\emptyset	± 2	± 3	\emptyset	$\pm 1, \pm 3$	± 3	$\pm 1, \pm 6$	$\pm 1, \pm 5$	$\pm 5, \pm 7, \pm 8$	\emptyset
$S_{3,3}$	$\pm 1, \pm 3$	± 4	± 1	\emptyset	\emptyset	\emptyset	$\pm 4, \pm 7$	$\pm 2, \pm 7$	± 4	\emptyset
$S_{4,4}$	± 1	\emptyset	± 2	\emptyset	$\pm 1, \pm 2$	± 2	$\pm 3, \pm 8$	$\pm 3, \pm 4$	± 1	\emptyset
$S_{1,2}$	$0, \pm 2$	\emptyset	$0, 3$	$0, 3$	0	$0, 4$	$0, 1$	$0, 5, 7, 9, 14$	$0, 12, 13, 16$	$0, 4$
$S_{1,3}$	$0, 6$	\emptyset	$0, 6$	$0, 6$	$0, \pm 2$	$0, 1, 4$	$0, 15$	0	$0, \pm 1, 9, 10, 11$	$0, 10$
$S_{1,4}$	$0, 4$	0	$0, 5$	$0, 5$	0	$0, 1$	$0, 12, 13, 16$	$0, 1, 2, 6, 13$	$0, \pm 5, 10$	$0, 12$
$S_{2,3}$	$2, 4$	\emptyset	5	$0, 3$	$0, \pm 3$	$0, 2, 4$	$2, 4, 10, 12$	$6, \pm 7, 13, 14$	$3, 6, 9, 12$	$0, 6$
$S_{2,4}$	$0, 1, \pm 3$	0	1	$0, 2$	0	$1, 3$	$1, 10$	11	$\pm 2, 4, 6, 8, 12$	$0, 8$
$S_{3,4}$	1	0	4	$0, 1$	$0, \pm 1$	$0, \pm 1$	$8, 12$	$5, \pm 7, 8, 16$	$\pm 2, 3, \pm 7, 9, 12, 13$	$0, 11$

Tabela 4.2: Simboli povezanih točkovno tranzitivnih grafov, katerih valenca je manjša od tretjine števila točk, ki izhajajo iz delovanj v trditvi 4.2.3.



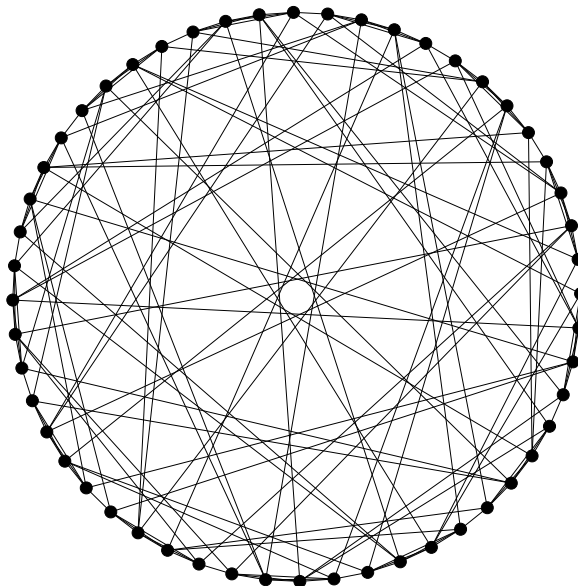
Slika 4.11: Točkovno tranzitivni graf valence 9 na 28 točkah s primitivno grupo avtomorfizmov, ki izhaja iz delovanja grupe $\text{PSL}(2, 8)$ na odsekih podgrupe D_{18} .

Za delovanje grupe $\text{PGL}(2, 7)$ na odsekih podgrupe D_{12} (točka (iii) trditve 4.2.3) dobimo, da ima D_{12} štiri netrivialne podorbite (vse so sebi zrcalne), od katerih je ena dolžine 3, dve dolžine 6 in ena dolžine 12. Graf, ki izhaja iz podorbite dolžine 3 je izomorfen Coxeterjevemu grafu F028A (graf X_2 v tabeli 4.2). Dalje, X_3 in X_4 izhajata iz dveh podorbit dolžine 6. Eden izmed grafov, ki izhaja iz unije podorbit dolžine 3 in dolžine 6, je izomorfen grafu X_5 in drugi grafu X_6 . Graf, ki izhaja iz podorbite dolžine 12, je hamiltonski po trditvi 4.2.1.

Za delovanje $\text{PSL}(2, 16) \leq G \leq \text{PGL}(2, 16)$ na odsekih podgrupe $N_G(\text{PGL}(2, 4))$ (točka (iv) trditve 4.2.3), ugotovimo, da ima $N_G(\text{PGL}(2, 4))$ štiri netrivialne podorbite (vse so sebi zrcalne), med katerimi je ena dolžine 12, ena dolžine 15 in dve dolžine 20. Pripadajoči grafi so grafi X_7 , X_8 in X_9 v tabeli 4.2. (Grafa, ki izhajata iz podorbit dolžine 20 sta oba izomorfna grafu X_9 .)

Za delovanje $\text{PSL}(3, 3) \leq G \leq \text{PGL}(3, 3)$ na 52 incidenčnih parih točka-premica ravnine $\text{PG}(2, 3)$ (točka (v) v trditvi 4.2.3), ugotovimo, da obstaja pet netrivialnih podorbit, dve ne-sebi zrcalni dolžine 9 in tri sebi zrcalne dolžin 3, 3 in 27. Graf, ki

izhaja iz unije dveh sebi nezrcalnih podorbit ima valenco 18. Torej je po trditvi 4.2.1 hamiltonski. Enako velja za graf, ki izhaja iz podorbite dolžine 27. Grafa, ki izhajata iz podorbit dolžine 3 sta oba nepovezana. Njuna unija pa je izomorfna grafu X_{10} v tabeli 4.2 (glej tudi sliko 4.12). ■



Slika 4.12: Točkovno tranzitiven graf valence 6 na 52 točkah s primitivno grupo avtomorfizmov, ki izhaja iz delovanja grupe $\text{PSL}(3,3) \leq G \leq \text{PSL}(3,3)$ na množici $52 = 4p$ incidenčnih parov točka-premica ravnine $\text{PG}(2,3)$.

Tranzitivna grupa G , ki deluje na množici Ω , deluje *2-tranzitivno*, če deluje tranzitivno na množici urejenih parov elementov iz Ω . Nadalje, G je *enostavno primitivna*, če deluje primitivno, vendar ne 2-tranzitivno. Naslednji rezultat o primitivnih grupah stopnje $2p$, ki je dokazan v [88], bomo potrebovali v nadaljevanju.

Trditev 4.2.5 *Primitivna grupa G stopnje $2p$, kjer je p praštevilo, je ena izmed naslednjih grup:*

- (i) G je enostavno primitivna, $p = 5$ in $G = A_5$ ali $G = S_5$;
- (ii) $G = A_{2p}$ ali $G = S_{2p}$;
- (iii) $p = 11$ in $G = M_{22}$;
- (iv) $p = \frac{1+q^{2^t}}{2}$ in G je podgrupa grupe $\text{AutPSL}(2,k)$, ki vsebuje $\text{PSL}(2,k)$, kjer je $k = q^{2^t}$ in q liho praštevilo.

Še več, G je enostavno primitivna v primeru (i), v vseh drugih pa je 2-tranzitivna.

Za permutacijsko grupo G , ki deluje na množici Ω , in podmnožico W množice Ω z $G_W = \{g \in G \mid W^g = W\}$ označujemo stabilizator množice W v grupi G in z $G(w) = \{g \in G \mid w^g = w \text{ za vsak } w \in W\}$ stabilizator vseh točk podmnožice

W v grupi G . Naslednji pomožni trditvi zagotovita obstoj hamiltonskih ciklov v točkovno tranzitivnih grafih reda $4p$, ki pripadajo *Skupini II* oziroma *III*.

Lema 4.2.6 *Povezan točkovno tranzitiven graf reda $4p$, kjer je p praštevilo, ki pripada Skupini II je hamiltonski.*

DOKAZ. Po trditvi 4.2.2, lahko predpostavimo, da je $p \geq 7$. Naj bo X povezan točkovno tranzitiven graf reda $4p$, naj bo $A = \text{Aut}X$ njegova grupa avtomorfizmov in $\mathcal{B} = \{B, B'\}$ neprimitivnostni sistem blokov grupe A , ki sestoji iz dveh blokov velikosti $2p$. Ker je X tipa $(2 : 2p)$, je grupa $A_B = A_{B'}$ primitivna stopnje $2p$ glede na njeno delovanje na B in B' . Po trditvi 4.2.5 sta ti dve delovanji ekvivalentni in $A_B = A_{B'}$ deluje 2-tranzitivno na B in B' . Zaradi regularnosti grafa X sta inducirana podgrafa na B in B' bodisi oba izomorfna polnemu grafu K_{2p} ali pa sta oba popolnoma nepovezana. V prvem primeru, je valenca grafa X večja od $2p - 1$, torej je X hamiltonski po trditvi 4.2.1. V drugem primeru, ko sta $X[B]$ in $X[B']$ popolnoma nepovezana, glede na to ali sta delovanji zvesti ali nezvesti dobimo, da je $X \cong K_{2p,2p} - 2pK_2$ ali $X \cong K_{2p,2p}$. V obeh primerih nam trditev 4.2.1 zagotovi obstoj hamiltonskega cikla v grafu X . ■

Lema 4.2.7 *Povezan točkovno tranzitiven graf reda $4p$, kjer je p praštevilo, ki pripada Skupini III je hamiltonski.*

DOKAZ. Po trditvi 4.2.2, lahko predpostavimo, da je $p \geq 7$. Naj bo X povezan točkovno tranzitiven graf reda $4p$, naj bo $A = \text{Aut}X$ njegova grupa avtomorfizmov, \mathcal{B} neprimitivnostni sistem blokov grupe A , ki ga sestavlja $2p$ blokov velikosti 2 in K jedro delovanja grupe A na \mathcal{B} . Ker je X tipa $(2p : 2)$, kvocientna grupa $\bar{A} = A/K$ deluje primitivno na \mathcal{B} . Po trditvi 4.2.5, \bar{A} deluje 2-tranzitivno. Torej je kvocientni graf $X_{\mathcal{B}}$ izomorfen polnemu grafu K_{2p} . Ker so dvodelni podgrafi $X[B, B']$, $B, B' \in \mathcal{B}$, med seboj izomorfní in regularni, je $X[B, B'] \cong 2K_2$ ali $X[B, B'] \cong K_{2,2}$. Torej je valenca grafa X vsaj $2p - 1$. Po trditvi 4.2.1 sledi, da je X hamiltonski. ■

Lema 4.2.8 *Naj bo X povezan točkovno tranzitiven graf reda $4p$, kjer je p praštevilo, katerega grupa avtomorfizmov $\text{Aut}X$ premore neprimitivnostni sistem blokov \mathcal{B} s p bloki velikosti 4 (torej X pripada Skupini V ali Skupini VI). Če je jedro K delovanja grupe $\text{Aut}X$ na \mathcal{B} trivialno, graf X pripada tudi Skupini IV, Skupini VII ali Skupini VIII, ali pa je X hamiltonski.*

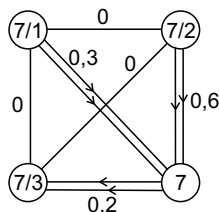
DOKAZ. Ker je po predpostavki $K = 1$, je $A = \text{Aut}X \cong \bar{A} = A/K$ grupa praštevilske stopnje. Če je A rešljiva grupa, je po [106, Proposition 2.1] $A \leq A(1, p)$. Poleg tega iz [35, Theorem 3.5B] sledi, da A vsebuje regularno sylowsko p -podgrupo, ki je edinka v A . Torej, obstaja $(4, p)$ -semiregularni avtomorfizem $\gamma \in A$, tako da je $\langle \gamma \rangle$ edinka v A . Ker orbite podgrupe edinke tvorijo neprimitivnostni sistem blokov (glej [135, Theorem 8.8]) graf X pripada Skupini VII ali Skupini VIII.

Sedaj denimo, da A ni rešljiva. Potem je po [35, Theorem 3.5B] grupa A 2-tranzitivna in zato $X_{\mathcal{B}} = K_p$. Zopet z uporabo [106, Proposition 2.1] in preverjanjem

vseh možnosti za obstoj podgrupe z indeksom 4 v stabilizatorju bloka A_B , $B \in \mathcal{B}$, ugotovimo, da je $\text{PSL}(n, k) \leq A \leq \text{AutPSL}(n, k)$ za primerni števili n in k (saj je $p \geq 7$).

Če je $A = \text{PSL}(n, k)$ ali če A vsebuje kopijo grupe $\text{PSL}(n, k)$ kot pravo podgrupo, ki deluje tranzitivno, potem z uporabo argumentov, ki so bili uporabljeni v [106, p. 307], ugotovimo, da imamo le dve možnosti: grupa $\text{PSL}(3, 2)$, ki deluje na odsekih podgrupe S_3 , in grupa $\text{PSL}(3, 3)$, ki deluje na odsekih podgrupe $2S_3$. Zadnja možnost očitno ni mogoča, saj bi v tem primeru graf X bil reda $468 = 4 \cdot 117$, kar ni oblike $4p$. Za delovanje grupe $\text{PSL}(3, 2)$ na S_3 pa z uporabo programa MAGMA [15] ugotovimo, da ima $\text{PSL}(3, 2)$ šest netrivialnih podorbit. Med njimi sta dve ne-sebi zrcalni dolžine 6. Med štirimi sebi zrcalnimi podorbitami so tri dolžine 3 in ena dolžine 6. Graf, ki izhaja iz unije dveh ne-sebi zrcalnih podorbit, ima valenco 12 in je izomorfen grafu, ki izhaja iz sebi zrcalne podorbite dolžine 12 pri delovanju grupe $\text{PGL}(2, 7)$ na odsekih podgrupe D_{12} , torej s primitivno grupo avtomorfizmov. Po lemi 4.2.4 je graf hamiltonski. Graf, ki izhaja iz ene izmed podorbit dolžine 3 je izomorfen Coxeterjevemu grafu F028A, torej s primitivno grupo avtomorfizmov. Nadalje, grafa, ki izhajata iz drugih dveh podorbit dolžine 3 sta oba nepovezana in izomorfna grafu $7K_4$. Unija teh dveh grafov je izomorfna grafu, ki izhaja iz ene od sebi zrcalnih podorbit dolžine 6 pri delovanju grupe $\text{PGL}(2, 7)$ na odsekih podgrupe D_{12} , torej je po lemi 4.2.4 hamiltonski graf. Graf, ki izhaja iz unije dveh podorbit dolžine 3, od katerih ena porodi graf $7K_4$ in druga Coxeterjev graf F028A, je izomorfen grafu, ki je v Fruchtovi notaciji prikazan na sliki 4.13. Z uporabo dviga hamiltonskega cikla se bo bralec prepričal sam, da ta graf ima hamiltonski cikel. Nazadnje, graf, ki izhaja iz sebi zrcalne podorbite dolžine 6, je izomorfen enemu izmed grafov, ki izhajajo iz delovanja grupe $\text{PGL}(2, 7)$ na odsekih podgrupe D_{12} . Z uporabo trditve 4.2.1 in leme 4.2.4 lahko sedaj sklepamo, da so vsi grafi, ki izhajajo iz delovanja grupe $\text{PSL}(3, 2)$ na odsekih podgrupe S_3 hamiltonski z izjemo Coxeterjevega grafa F028A (katerega cela grupa avtomorfizmov je primitivna).

Če A vsebuje kopijo grupe $\text{PSL}(n, k)$ kot pravo podgrupo, ki ne deluje tranzitivno, potem dejstvo, da je $\text{PSL}(n, k)$ edinka v A , implicira, da grupa A premore neprimitivnostni sistem blokov \mathcal{C} . Ker p ne deli $[\text{AutPSL}(n, k) : \text{PSL}(n, k)]$, sledi, da \mathcal{C} sestoji iz blokov velikosti p ali $2p$. S tem je dokaz končan. ■



Slika 4.13: Točkovno tranzitiven graf z grupo avtomorfizmov $\text{PSL}(3, 2)$ podan v Fruchtovi notaciji glede na $(4, 7)$ -semiregularen avtomorfizem.

Točkovno tranzitivni grafi reda $2p$, kjer je p praštevilo, so opisani v [95]. Med drugim je v tem članku dokazano, da v primeru, ko točkovno tranzitiven graf X reda

$2p$ premore neprimitivno podgrupo G (z bloki velikosti p ali 2), lahko vedno najdemo neprimitivno podgrupo grupe G , ki ima bloke velikosti p . Še več, če ima cela grupa avtomorfizmov $A = \text{Aut}X$ bloke velikosti 2 in nima blokov velikosti p , lahko iz dokaza izreka [95, Theorem 6.2] sklepamo, da je graf X ali pa njegov komplement spletni produkt $Y \wr 2K_1$, kjer je Y p -cirkulant. (Naj bosta X in Y grafa. Potem ima spletni produkt (ali leksikografski produkt) $X \wr Y$ množico $V(X) \times V(Y)$ za svojo množico točk in dve točki (a, u) in (b, v) sta povezani v $X \wr Y$ natanko tedaj, ko je bodisi $ab \in E(X)$ bodisi $a = b$ in $uv \in E(Y)$.) S pomočjo navedenih lastnosti točkovno tranzitivnih grafov reda $2p$ lahko dokažemo naslednji rezultat.

Lema 4.2.9 *Naj bo X povezan točkovno tranzitiven graf reda $4p$, kjer je p praštevilo, ki pripada Skupini V ali Skupini VI in naj bo \mathcal{B} neprimitivnostni sistem blokov za grupo $\text{Aut}X$ z bloki velikosti 4 . Potem je X hamiltonski ali pa velja ena izmed naslednjih trditev:*

- (i) X pripada Skupini IV, Skupini VII ali Skupini VIII;
- (ii) X je Cayleyjev graf abelske grupe;
- (iii) X je izomorfen grafu $Y \wr Z$, kjer je Y povezan točkovno tranzitiven graf reda $2p$ in $Z = 2K_1$ ali $Z = K_2$;
- (iv) X je regularni \mathbb{Z}_2 -krov grafa $K_p \wr 2K_1$; ali
- (v) obstajata povezana bloka B, B' v $X_{\mathcal{B}}$, tako da je $X[B, B'] = K_{4,4}$ ali $X[B, B'] = 2C_4$.

DOKAZ. Naj bo K jedro delovanja grupe $A = \text{Aut}X$ na \mathcal{B} . Če je $K = 1$, lema 4.2.8 implicira, da X pripada Skupini IV, Skupini VII ali Skupini VIII, ali pa je X hamiltonski. Odslej na bo K netrivialna podgrupa. Glede na tranzitivnost in netranzitivnost delovanja grupe K na bloku, ločimo dve možnosti.

MOŽNOST 1. K deluje netranzitivno na vsakem bloku $B \in \mathcal{B}$.

Potem je K^B bodisi \mathbb{Z}_2 za vsak $B \in \mathcal{B}$ bodisi \mathbb{Z}_2^2 za vsak $B \in \mathcal{B}$. Nadalje, orbite jedra K tvorijo neprimitivnostni sistem blokov \mathcal{E} z bloki velikosti 2 . Očitno je K tudi jedro delovanja grupe A na \mathcal{E} . Če je $K \neq \mathbb{Z}_2$, je delovanje grupe K na blokih v \mathcal{E} nezvesto in zato mora biti graf X spletni produkt točkovno tranzitivnega grafa $X_{\mathcal{E}}$ reda $2p$ z $2K_1$ ali K_2 . Torej velja točka (iii). Sedaj denimo, da je $K = \mathbb{Z}_2$. Oglejmo si kako grupa $\bar{A} = A/K$ deluje na \mathcal{B} . Če je \bar{A} rešljiva, potem vsebuje podgrupo edinko PK/K reda p , kjer je P Sylowska p -podgrupa grupe A . Ker je $K = \mathbb{Z}_2$, nam izreki Sylowa povedo, da je P karakteristična podgrupa grupe PK . Ker je PK edinka v A , je P edinka v A . Sledi, da graf X pripada Skupini VII ali Skupini VIII. Torej lahko predpostavimo, da je grupa \bar{A} nerešljiva. Potem po klasičnem Burnsidovem rezultatu (glej [117, Theorem 7.3]) grupa \bar{A} na \mathcal{B} deluje 2-tranzitivno. Odtod sledi, da je $X_{\mathcal{B}} = K_p$. Oglejmo si delovanje grupe \bar{A} na kvocientnem grafu $X_{\mathcal{E}}$. Če poleg blokov velikosti 2 , vsebuje tudi bloke dolžine p , potem X pripada Skupini IV. Torej lahko predpostavimo, da tako \bar{A} kot tudi $\text{Aut}X_{\mathcal{E}}$ nimata blokov velikosti p . Z dejstvi, ki smo jih navedli v odstavku pred lemo 4.2.9, in z uporabo dejstva, da je $X_{\mathcal{B}} = K_p$, ugotovimo, da je graf $X_{\mathcal{E}}$ izomorfen spletnemu produktu $K_p \wr 2K_1$. Posledično je graf X izomorfen grafu $X_{\mathcal{E}} \wr 2K_1$ ali grafu $X_{\mathcal{E}} \wr K_2$, ali pa je regularni \mathbb{Z}_2 -krov grafa $X_{\mathcal{E}}$. Na kratko, bodisi velja točka (iii) bodisi točka (iv).

MOŽNOST 2. K deluje tranzitivno na vsakem bloku $B \in \mathcal{B}$.

Potem je $K^B \in \{\mathbb{Z}_2^2, \mathbb{Z}_4, D_8, A_4, S_4\}$. Denimo, da K deluje zvesto. Potem je $K \in \{\mathbb{Z}_2^2, \mathbb{Z}_4, D_8, A_4, S_4\}$ in lahko predpostavimo, da obstaja karakteristična podgrupa H grupe K reda 4 (\mathbb{Z}_2^2 ali \mathbb{Z}_4). Torej je H edinka v A in zato je H edinka v $\langle \gamma, H \rangle$, kjer je γ eden izmed $(4, p)$ -semiregularnih avtomorfizmov v A . Po Sylowih izrekih sledi, da je $\langle \gamma, H \rangle = H \times \langle \gamma \rangle$. Torej je X Cayleyjev graf grupe \mathbb{Z}_{4p} ali grupe $\mathbb{Z}_{2p} \times \mathbb{Z}_2$. Velja točka (ii).

Sedaj denimo, da K deluje nezvesto. Naj bosta $B, B' \in \mathcal{B}$ povezana bloka v $X_{\mathcal{B}}$. Potem je $K_{(B)}^{B'} \neq 1$ in $K_{(B)}^{B'}$ je edinka v $K^{B'}$. Če je $K_{(B)}^{B'}$ tranzitivna, je $X[B, B'] = K_{4,4}$. Če pa je $K_{(B)}^{B'}$ netranzitivna, je $K^{B'} = K^B \in \{\mathbb{Z}_2^2, \mathbb{Z}_4, D_8\}$. Še več, $K_{(B)}^{B'}$ mora imeti dve orbiti na B' in bodisi $X[B, B'] = K_{4,4}$ ali $X[B, B'] = 2C_4$. Torej velja točka (v). S tem je dokaz leme 4.2.9 končan. ■

V nadaljevanju bomo potrebovali naslednje dejstvo, veljavnost katerega bo bralec preveril sam. Naj bo X graf, ki premore $(4, p)$ -semiregularen avtomorfizem z množico orbit \mathcal{W} , katerega grupa avtomorfizmov $\text{Aut}X$ premore neprimitivnostni sistem blokov \mathcal{B} . Potem velja naslednja enačba

$$|W \cap B| = 1 \text{ ali } W \subseteq B, \quad (4.2)$$

za vsako orbito $W \in \mathcal{W}$ in vsak blok $B \in \mathcal{B}$.

Z rezultati tega podrazdelka lahko dokažemo naslednjo trditve, ki možnosti za obstoj nehamiltonskih grafov reda $4p$ reducira na grafe iz *Skupine IV*, *Skupine VII* in *Skupine VIII*.

Trditev 4.2.10 *Naj bo X povezan točkovno tranzitiven graf reda $4p$, kjer je p praštevilo, različen od Coxeterjevega grafa F028A. Potem X premore hamiltonski cikel ali pa pripada Skupini IV, Skupini VII ali Skupini VIII. Na kratko, X je hamiltonski ali pa ima $\text{Aut}X$ neprimitivnostni sistem blokov, ki sestoji iz blokov velikosti p ali $2p$.*

DOKAZ. Po trditvi 4.2.2 lahko predpostavimo, da je $p \geq 7$. Naj bo X povezan točkovno tranzitiven graf reda $4p$, ki pripada *Skupini I*, *Skupini II*, *Skupini III*, *Skupini V* ali *Skupini VI*, in ne zadošča sklepu te trditve. Potem po lemah 4.2.4, 4.2.6 in 4.2.7 lahko predpostavimo, da X pripada *Skupini V* ali *Skupini VI*. Torej velja ena izmed trditvev (ii)-(v) v lemi 4.2.9.

Prvič, če velja (ii), je X hamiltonski po rezultatih v [96]. Če velja (iii), je X hamiltonski, saj ima vsak povezan točkovno tranzitiven graf reda $2p$, $p \geq 7$, hamiltonski cikel (glej [2]) in spletni produkt hamiltonskega grafa z $2K_1$ je hamiltonski. Če velja (iv), je X regularni \mathbb{Z}_2 -krov grafa $K_p \wr 2K_1$. Torej je njegova valenca enaka $2p - 2$. Po trditvi 4.2.1 sledi, da je X hamiltonski. Nazadnje, denimo, da velja točka (v). Če obstajata povezana bloka B, B' v $X_{\mathcal{B}}$, tako da je $X[B, B']$ izomorfen polnemu dvodelnemu grafu $K_{4,4}$, je X očitno hamiltonski. Torej lahko predpostavimo, da je za poljubna dva povezana bloka B, B' v $X_{\mathcal{B}}$ graf $X[B, B']$ izomorfen $2C_4$.

Naj bo $\mathcal{W} = \{W_i \mid i \in \mathbb{Z}_4\}$ množica orbit $(4, p)$ -semiregularnega avtomorfizma γ grafa X . Po (4.2) lahko predpostavimo, da obstajajo točke $v_0 \in W_0$, $v_1 \in W_1$,

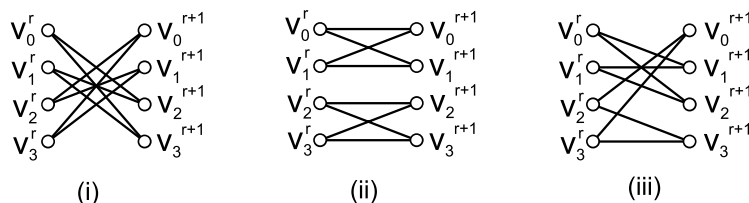
$v_2 \in W_2$ in $v_3 \in W_3$, tako da je $B = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ blok. Naj bo $v_i^r = \gamma^r(v_i)$, za $i \in \mathbb{Z}_4$ in $r \in \mathbb{Z}_p$. Potem je $\mathcal{B} = \{B_r \mid r \in \mathbb{Z}_p\}$, kjer je $B_r = \gamma^r(B) = \{v_0^r, v_1^r, v_2^r, v_3^r\}$ za $r \in \mathbb{Z}_p$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je dvodelni graf $X[B, B']$ eden izmed grafov, ki so prikazani na sliki 4.14. Graf $X[B, B']$ na sliki 4.14(i) porodi vpeti podgraf grafa X , ki je izomorfen spletnemu produktu povezanega točkovno tranzitivnega grafa reda $2p$ z $2K_1$. Očitno je v tem primeru X hamiltonski. Torej lahko predpostavimo, da je $X[B, B']$ graf na sliki 4.14(ii) ali graf na sliki 4.14(iii). V prvem primeru graf X vsebuje vpeti podgraf, ki je izomorfen grafu na levi strani slike 4.15, kjer je $a \in \mathbb{Z}_p$. V drugem primeru pa je X izomorfen grafu na desni strani slike 4.15. Ker je

$$v_1^0 v_1^{-1} \dots v_1^l v_0^{l+1} v_0^{l+2} \dots v_0^l v_1^{l-1} v_1^{l-2} \dots v_1^2 v_1^1 v_2^{a+1} v_2^{a+2} \dots \\ \dots v_2^{a+k} v_3^{a+k+1} v_3^{a+k+2} \dots v_3^{a+k} v_2^{a+k+1} v_2^{a+k+2} \dots v_2^a v_1^0$$

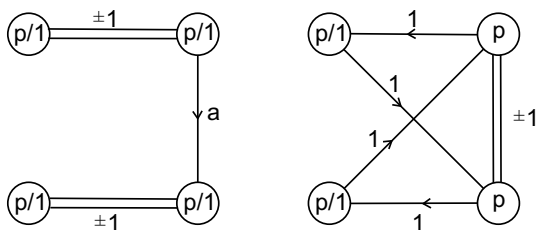
hamiltonski cikel grafa na levi strani slike 4.15 in

$$v_0^0, v_2^1 v_3^2 v_1^3 v_0^4 v_2^5 \dots v_0^{p-4} v_2^{p-3} v_3^{p-2} v_1^{p-1} v_0^0$$

hamiltonski cikel na desnem grafu slike 4.15, je dokaz končan. ■



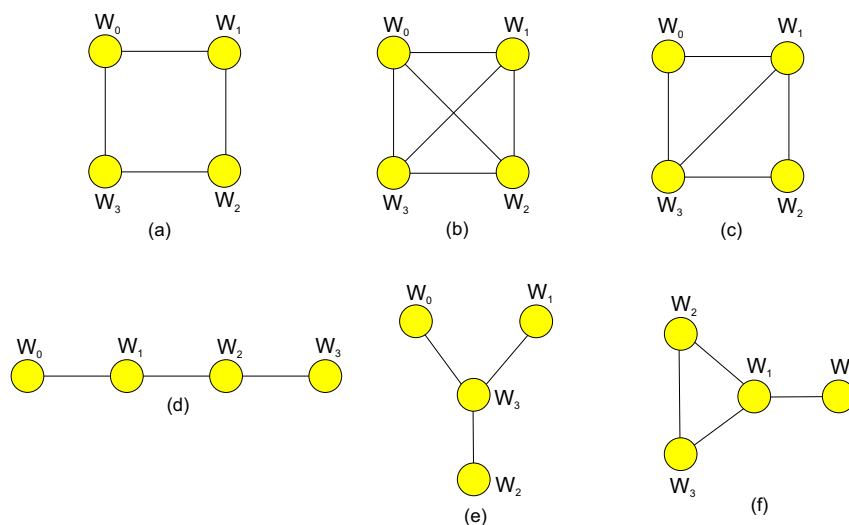
Slika 4.14: Možni dvodelni graf $X[B, B']$, kjer sta B in B' povezana bloka velikosti 4.



Slika 4.15: Dve možnosti za vpeti podgraf grafa X . Graf na levi strani, kjer je $a \in \mathbb{Z}_p$, ustreza grafu na sliki 4.14(ii) in graf na desni strani ustreza grafu na sliki 4.14(iii).

4.2.2 Analiza glede na kvocientni graf X_γ

V tem podrazdelku bomo združili rezultat trditve 4.2.10 z analizo kvocientnega grafa X_γ povezanega točkovno tranzitivnega grafa X reda $4p$, $p \geq 7$, glede na orbite $(4, p)$ -semiregularnega avtomorfizma γ , ki v grafu X obstaja po [95, Theorem 3.4.]. Naj bo $\mathcal{W} = \{W_i \mid i \in \mathbb{Z}_4\}$ množica orbit avtomorfizem γ . Obstaja šest možnosti za obliko kvocientnega grafa X_γ grafa X glede na orbite avtomorfizma γ (glej sliko 4.16).



Slika 4.16: Šest možnosti za kvocientni graf X_γ povezanega točkovno tranzitivnega grafa X reda $4p$.

Tu navajamo lastnosti, ki jih bo bralec preveril sam. Prvič, za poljubno orbito W_i avtomorfizma γ je inducirani podgraf $X[W_i]$ regularen sode valence $d(W_i)$. Še več, če je $d(W_i) > 0$, graf $X[W_i]$ premore hamiltonski cikel. Drugič, za različni števili i, j je dvodelni graf $X[W_i, W_j]$ regularen valence $d(W_i, W_j) \geq 0$. In tretjič, če je $d(W_i, W_j) \geq 2$, graf $X[W_i, W_j]$ ima hamiltonski cikel.

Graf X je *hamiltonsko povezan*, če za vsak par točk u in v obstaja hamiltonska pot, katere končni točki sta točki u in v . Poglavitno vlogo v dokazu izreka 4.2.14 bodo igrali naslednji rezultati, ki so bili dokazni v [20, Theorem 4], [101, Lemma 5] oziroma [5, Theorem 3.9].

Trditev 4.2.11 [20] *Naj bo X povezan Cayleyjev graf abelske grupe valence vsaj 3. Če X ni dvodelen, je X hamiltonsko povezan.*

Trditev 4.2.12 [101]. *Naj bo γ (k, p) -semiregularni avtomorfizem grafa X , kjer je p praštevilo in $k \geq 3$. Naj bo $C = W_0W_1 \cdots W_{k-1}$ cikel v X_γ . Če $\langle C \rangle$ ne vsebuje hamiltonskega cikla, je $d(W_i, W_{i+1}) = 1$ za vsak $i \in \mathbb{Z}_k$, in podgraf inducirani s povezavami grafov $[W_i, W_{i+1}]$, $i \in \mathbb{Z}_k$, je disjunktna unija p ciklov dolžine k v X .*

Pred navedbo tretjega rezultata moramo predstaviti koncept *navoja* cikla v kvocientnem grafu, ki ga je prvi definiral Alspach v [5]. Naj bo X graf, ki premore

(m, n) -semiregularen avtomorfizem α in naj bo $\mathcal{W} = \{W_i \mid i \in \mathbb{Z}_m\}$ množica njegovih orbit. Naj bo $C = W_r W_s W_t \dots W_q W_r$ cikel dolžine k v $X_{\mathcal{W}}$ in naj bo $v_r^0, v_r^1, \dots, v_r^{n-1}$ ciklično označevanje točk v orbiti W_r glede na delovanje avtomorfizma α . Oglejmo si pot v grafu X , ki izhaja iz dviga cikla C . Začnimo v točki v_r^0 , izberimo povezavo iz točke v_r^0 v točko v_s^a orbite W_s in nato izberimo povezavo iz točke v_s^a v točko iz W_t , ki na ciklu C sledi orbiti W_s . Na ta način nadaljujemo, dokler se ne vrnemo v točko v_r^b v orbiti W_r . Če je $b \neq 0$, smo konstruirali pot dolžine k , če pa je $b = 0$, smo dobili cikel dolžine k . V primeru, ko je valenca med dvema zaporednima orbitama na C več kot ena, obstaja več takih poti. Množico vseh poti v grafu X , ki izhajajo iz dviga cikla C imenujemo *navoj cikla* C in jo označujemo s $coil(C)$.

Trditev 4.2.13 [5] *Naj bo X graf, ki premore (m, n) -semiregularen avtomorfizem α , kjer je $m \geq 4$ sodo število in $n \geq 3$. Naj bo $\mathcal{W} = \{W_i \mid i \in \mathbb{Z}_m\}$ množica orbit avtomorfizma α , tako da je vsak podgraf $X[W_i]$ povezan in valence 2. Če $X_{\mathcal{W}}$ vsebuje tak hamiltonski cikel C , da $coil(C)$ vsebuje cikel, graf X ima hamiltonski cikel.*

Zdaj lahko dokažemo glavni izrek tega razdelka.

Izrek 4.2.14 *Z izjemo Coxeterjevega grafa F028A vsak povezan točkovno tranzitiven graf reda $4p$, kjer je p praštevilo, vsebuje hamiltonski cikel.*

DOKAZ. Naj bo X povezan točkovno tranzitiven graf reda $4p$ in valence $d = d(X)$, različen od Coxeterjevega grafa F028A. Po trditvi 4.2.2 lahko predpostavimo, da je $p \geq 7$. Poleg tega lahko predpostavimo, da je $d \geq 3$ (ko je $d = 2$, je $X = C_{4p}$). Naj bo $\mathcal{W} = \{W_i \mid i \in \mathbb{Z}_4\}$ množica orbit $(4, p)$ -semiregularnega avtomorfizma γ grafa X . Za $i, j \in \mathbb{Z}_4$ naj d_i označuje valenco inducirane podgrafa $X[W_i]$ in $d_{i,j}$ valenco dvodelnega grafa $X[W_i, W_j]$. Po trditvi 4.2.10 lahko predpostavimo, da ima $A = \text{Aut} X$ neprimitivnostni sistem blokov \mathcal{B} , ki sestoji iz blokov velikosti p ali $2p$. Ločno tri možnosti.

MOŽNOST 1. X_γ ima 4-cikel $W_0 W_1 W_2 W_3 W_0$ (glej sliko 4.16(a),(b),(c)).

Po trditvi 4.2.12 lahko predpostavimo, da je $d_{i,i+1} = 1$, $i \in \mathbb{Z}_4$, in da je podgraf grafa X napenjajoč s povezavami grafov $X[W_i, W_{i+1}]$, $i \in \mathbb{Z}_4$, disjunktna unija p ciklov dolžine 4.

PODMOŽNOST 1.1. X_γ je 4-cikel C_4 ali poli graf K_4 .

Zaradi povezanosti in regularnosti grafa X ter trditve 4.2.12 lahko predpostavimo, da je za $X_\gamma = C_4$ valenca $d_i = d - 2 \geq 2$, $i \in \mathbb{Z}_4$, in da je za $X_\gamma = K_4$ valenca $d_i = d - 3 \geq 2$, $i \in \mathbb{Z}_4$. Če je $d_i = 2$ za vsak $i \in \mathbb{Z}_4$, po trditvi 4.2.13 graf X ima hamiltonski cikel. Po drugi stani, ko je $d_i \geq 4$, za vsak $i \in \mathbb{Z}_4$, je po trditvi 4.2.11 vsak podgraf $X[W_i]$ hamiltonsko povezan in posledično X ima hamiltonski cikel.

PODMOŽNOST 1.2. X_γ ni niti C_4 niti K_4 (glej sliko 4.16(c)).

V tem primeru lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da je $d_{1,3} > 0$ in $d_{0,2} = 0$. Spomnimo se, da je $d_{i,i+1} = 1$ za vsak $i \in \mathbb{Z}_4$. Torej je valenca točk v $X[W_0 \cup W_2]$ soda in zato je tudi $d \geq 4$ sodo število. Torej je $d_0 = d_2 \geq 2$. Posledično je tudi $d_{1,3}$ sodo število in zato $d_{1,3} \geq 2$. Z uporabo (4.2) se bo bralec prepričal

sam, da \mathcal{B} ne more biti sestavljen iz štirih blokov velikosti p . Torej \mathcal{B} vsebuje dva bloka velikosti $2p$, od katerih je vsak unija dveh orbit avtomorfizma γ . Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $W_0 \cup W_1$ ali $W_0 \cup W_2$ blok B v \mathcal{B} . Vendar prvi primer se ne more zgoditi, ker v tem primeru $X[B]$ ni regularen graf. V drugem primeru, drugi blok $B' = W_1 \cup W_3$ v \mathcal{B} inducira povezan graf, zopet protislovje, saj je $X[B]$ nepovezan graf.

MOŽNOST 2. X_γ je drevo.

PODMOŽNOST 2.1. X_γ je 3-pot (glej sliko 4.16(d)).

Zaradi regularnosti so $d_0, d_3, d_{1,2} \geq 2$. Denimo, da neprimitivnostni sistem blokov \mathcal{B} sestoji iz štirih blokov velikosti p . Potem po (4.2), \mathcal{B} sovpada z množico orbit \mathcal{W} avtomorfizma γ . Ker poljubna dva bloka inducirata izomorfne točkovno tranzitivne podgrafe, sledi, da je $d_i = d_j$, kjer $i, j \in \mathbb{Z}_4$. Vendar, ker je $d_{1,2} \geq 2$, bi bile točke v $W_1 \cup W_2$ večje valence kot točke v $W_0 \cup W_3$, protislovje.

Denimo, da je \mathcal{B} neprimitivnostni sistem blokov z dvema blokoma velikosti $2p$. Po (4.2) je vsak blok v \mathcal{B} unija dveh orbit avtomorfizma γ . Natančneje, množica $W_0 \cup W_1$ ali $W_0 \cup W_2$ ali $W_0 \cup W_3$ je blok v \mathcal{B} . Prva možnost se ne more zgoditi zaradi očitnih aritmetičnih razlogov, saj $d_0 \neq d_1$. Druga možnost implicira, da je $d_0 = d_2$ in $d_1 = d_3$. S primerjavo valenc točk v W_0 in W_1 , ugotovimo, da je $d_0 - d_1 = d_{1,2} \geq 2$. Po drugi strani, pa s primerjavo valenc točk v W_2 in W_3 , ugotovimo, da je $d_1 - d_0 = d_{1,2} \geq 2$, protislovje. Tudi tretja možnost se ne more zgoditi, saj $W_0 \cup W_3$ inducira nepovezan graf, $W_1 \cup W_2$ pa povezanega.

PODMOŽNOST 2.2. X_γ je zvezda $K_{1,3}$ (glej sliko 4.16(e)).

Zaradi regularnosti grafa X je valenca d_3 različna (manjša) od valenc d_i , $i \in \mathbb{Z}_4 \setminus \{3\}$. Zaradi (4.2) to dejstvo implicira, da \mathcal{B} sestoji iz dveh blokov velikosti $2p$. Nadalje, po (4.2) je vsak blok v \mathcal{B} unija dveh orbit avtomorfizma γ . Brez škode za splošnost lahko rečemo, da sta ta dva bloka množici $W_0 \cup W_1$ in $W_2 \cup W_3$. Vendar slednja množica inducira graf, ki ni regularen, protislovje.

MOŽNOST 3. X_γ je graf na sliki 4.16(f).

Zaradi regularnosti grafa X je $d_0 \geq 2$ in $d_1 \neq d_0$. Torej A ne more imeti blokov velikosti p . Zopet z uporabo (4.2) ugotovimo, da \mathcal{B} sestoji iz dveh blokov velikosti $2p$, ki sta uniji dveh orbit avtomorfizma γ . Zaradi regularnosti množica $W_0 \cup W_1$ ni blok. Torej sta bloka množici $W_0 \cup W_2$ in $W_1 \cup W_3$. Vendar, ker $W_1 \cup W_3$ inducira povezan graf in množica $W_0 \cup W_2$ nepovezanega, je to nemogoče. S tem je dokaz izreka 4.2.14 končan. ■

4.2.3 Opombe in sklepi

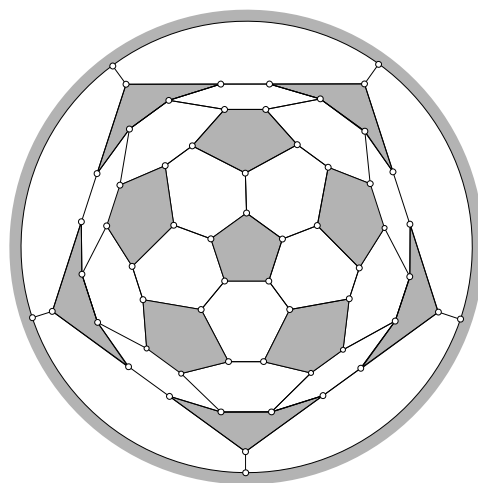
V tem razdelku smo dokazali, da imajo z izjemo Coxeterjevega grafa F028A vsi točkovno tranzitivni grafi reda $4p$, kjer je p praštevilo, hamiltonski cikeli. Na Lovászovo vprašanje o obstoju hamiltonskih poti v povezanih točkovno tranzitivnih grafih za to posebno družino točkovno tranzitivnih grafov sta sicer pritrdilno odgovorila že Marušič in Parsons [102] leta 1983, vendar obstoj hamiltonskih ciklov v teh

grafih doslej ni bil znan. Dokaz našega rezultata sloni na združitvi metode, ki sta jo uporabila Marušič in Parsons [102] za dokaz obstoja hamiltonskih poti v teh grafih, z analizo (ne)primitivnosti delovanja grupe avtomorfizmov.

Poglavje 5

Fulereni

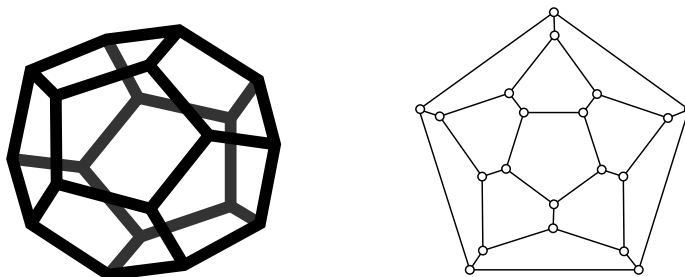
Rezultati tega poglavja so objavljeni v [80]. Fulereni so ogljikove molekule sferičnih oblik s trivalentnim poliedrskim skeletom, ki imajo 12 petkotnih lic, vsa druga lica pa so šestkotna. So izredno pomemben razred molekul in obstaja že ogromno patentov za farmacevtske, elektronske in druge komercialne aplikacije [119, 124]. Najbolj stabilen fuleren je fuleren poznan kot “*Buckminsterfullerene*” C_{60} , ki vsebuje 60 ogljikovih atomov (zgleda kot nogometna žoga, glej sliko 5.1). Ta fuleren so odkrili Curl, Kroto in Smalley [78] leta 1985, ki so za to odkritje prejeli tudi Nobelovo nagrado.



Slika 5.1: Fuleren C_{60} .

V matematičnem jeziku fulereni ustrezajo kubičnim 3-povezavno povezanim ravninskim grafom, ki imajo po dobro znani Eulerjevi formuli o ravninskih grafih 12 petkotnih lic, preostala lica pa so šestkotna. (Graf je 3-povezavno povezan, če moramo odstraniti najmanj 3 povezave, da graf postane nepovezan.) Najmanjši fuleren je dodekaeder $GP(10, 2)$, v kemiji poznan kot fuleren C_{20} , ki ima 12 petkotnih lic in nobenega šestkotnega lica (glej sliko 5.2). Matematično je C_{60} $(2, 5, 3)$ -Cayleyjev graf grupe A_5 . (Dodekaeder in C_{60} sta edina fulerena, ki sta točkovno

tranzitivna grafa.) Leta 1963 sta Grünbaum in Motzkin [65] dokazala, da za vsako sodo število $n \geq 20$, $n \neq 22$, obstaja vsaj en fuleren na n točkah. S podobnim pristopom sta potem Klein in Liu [77] pokazala, da za vsak $n \geq 70$ in $n = 60$ obstaja fuleren, ki zadošča *IPR pravilu* ("Isolate Pentagon Rule") (to je, nobena povezava v fulerenu ne leži na več kot enem petkotniku oziroma drugače povedano: petkotniki v fulerenu so nesosednji). Več o fulerenih si lahko bralec prebere v [50].



Slika 5.2: Fuleren C_{20} .

Z odkritjem fulerenov v ogljikovi kemiji je teorija grafov pridobila pomembno vlogo v kemiji (v smislu pridobivanja sistematičnih kvalitativnih informacij). Veliko vprašanj/problemov o kemiji fulerenov skupaj z metodami za reševanje le-teh najde naravno okolje v kontekstu teorije grafov (glej [17, 31, 32, 33, 59, 61, 60, 62, 116]). Na primer, dva izmed številnih nerešenih problemov z ozirom na fulerene v teoriji grafov sta število popolnih prirejanj, kemijsko gledano število Kekulé struktur (*popolno prirejanje* v grafu je množica disjunktnih povezav, ki vsebujejo vse točke grafa) in obstoj hamiltonskih ciklov. Dolgoletna domneva sugerira, da ima poljuben fuleren hamiltonski cikel (glej [1, 100, 112]).

V razdelku 5.1 bomo obravnavali ciklično povezanost fulerenov. Pokazali bomo, da z izjemo zelo posebne družine, fulereni premorejo le trivialne ciklične-5-prereze (glej izrek 5.1.4). S pomočjo tega rezultata bomo nato v razdelku 5.1.2 rešili problem obstoja hamiltonskih ciklov v fulerenih, ki premorejo netrivialen ciklični-5-prerez (glej izrek 5.1.5). Posledično bomo izboljšali (v primeru netrivialno ciklično-5-povezanih fulerenov) do sedaj najboljšo spodnjo mejo za število popolnih prirejanj v poljubnem fulerenu (glej [131]).

5.1 Ciklična povezavna povezanost fulerenov

Z uporabo teorije grafov bomo poiskati strukturne lastnosti fulerenov nanašajoče se na ciklično povezanost fulerenov, t.j. maksimalno število k , da z odstranitvijo manj kot k povezav fulerena ni mogoče razdeliti na komponente, od katerih vsaj dve vsebujeta cikel (glej razdelek 2.2.8).

Koncept ciklične povezanosti igra pomembno vlogo pri ugotavljanju nekaterih strukturnih lastnosti fulerenov, predvsem pri reševanju problema o obstoju hamiltonskih ciklov in reševanju problema o številu popolnih prirejanj za nekatere posebne družine fulerenov (glej [39, 40, 41, 42, 80, 82, 83, 100, 131]). Očitno v poljubnem fulerenu ciklična povezanosti ne more biti večja od 5, saj z odstranitvijo petih

povezav, ki povezujejo petkotno lice s preostalim delom fulerena, dobimo nepovezan graf z dvema komponentama, ki vsebujeta cikel. Pravzaprav je leta 2003 Doslić v [41] pokazal, da je ciklična povezanost fulerena natanko 5 (glej tudi [122]). Direktna posledica tega rezultata pa je naslednja trditev o ožini fulerenov. (Seveda je ta rezultat moč dokazati tudi direktno brez uporabe ciklične-5-povezanosti.)

Trditev 5.1.1 *Vsak fuleren je ožine 5.*

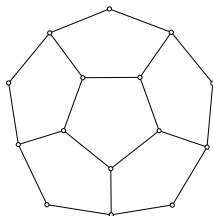
5.1.1 Fulereni z netrivialnim cikličnim-5-prerezom

Naj bo C cikel v fulerenu F , ki je vložen v ravnino. Potem množico točk, ki ležijo na eni izmed dveh strani cikla C , imenujemo *notranjost* $\text{Ins}(C)$ cikla C in množico točk na drugi strani cikla C *zunanost* $\text{Out}(C)$ cikla C . Naslednja trditev je takojšnja posledica Eulerjeve formule za ravninske grafe, ki pravi, da je število lic povezanega ravninskega grafa X v njegovi ravninski vložitvi enako številu $|E(X)| - |V(X)| + 2$.

Trditev 5.1.2 *Naj bo C cikel dolžine 10 v fulerenu F , tako da obstaja natanko pet točk na ciklu C , ki imajo soseda v notranjosti cikla C . Potem v podgrafu, ki je induciran z $V(C) \cup \text{Ins}(C)$ obstaja natanko pet petkotnih lic.*

DOKAZ. Naj bo X podgraf fulerena F , ki je induciran na množici točk $V(C) \cup \text{Ins}(C)$. Potem je X ravninski in z izjemo petih točk na ciklu C , ki so valence 2, so vse njegove točke valence 3. Ker je X podgraf fulerena ima poleg enega 10-kotnega lica tudi petkotna in šestkotna lica. Naj bo f_5 število petkotnih lic in f_6 število šestkotnih lic v grafu X . Potem je po Eulerjevi formuli $f_5 + f_6 + 1 = \frac{n-1}{2}$, kjer je $n = |V(X)|$. Po drugi strani, je $5f_5 + 6f_6 + 10 = 2|E(X)| = 3n - 5$, saj vsaka povezava v X leži na natanko dveh licih. Ko odštejemo dobljeni enačbi, dobimo: $f_5 = 5$. ■

Pentakapica je ravninski graf na 15 točkah, od katerih jih je 5 valence 2 in 10 valence 3, s 7 lici, med katerimi je eno 10-kotno in šest petkotnih (glej sliko 5.3). Na primer, dodekaeder $\text{GP}(10, 2)$ lahko dobimo z unijo dveh pentakapic, tako da identificiramo točke 10-kotnih lic teh dveh pentakapic.



Slika 5.3: Pentakapica.

Naj bo $\{f_i \mid i \in \mathbb{Z}_l\}$ množica l -tih lic fulerena F , tako da je lice f_i povezano z licem f_{i+1} , $i \in \mathbb{Z}_l$, s povezavo e_i . Če so povezave v množici $\{e_i \mid i \in \mathbb{Z}_l\}$ neodvisne (povezave imajo različna krajišča), pravimo, da $\{f_i \mid i \in \mathbb{Z}_l\}$ tvori *obroč l -ih lic*.

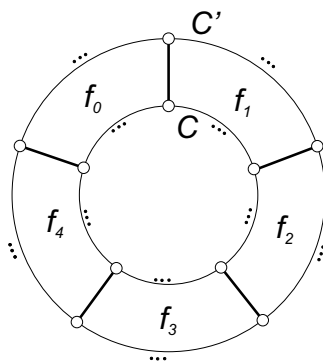
Očitno so povezave, ki pripadajo nekemu cikličnemu-5-prerezu v fulerenu, neodvisne in povezave v cikličnemu-5-prerezu skupaj s incidentnimi povezavami tvorijo obroč petih lic. Namreč, vsako lice, ki vsebuje povezavo iz cikličnega-5-prereza, vsebuje sodo mnogo takih povezav, in ker so v fulerenu lica petkotna in šestkotna, to lice vsebuje natanko dve povezavi iz cikličnega-5-prereza. To nam da natanko pet lic, ki vsebujejo povezave iz cikličnega-5-prereza. Obratno, če fuleren premore obroč petih lic, potem povezave, ki povezujejo ta lica, tvorijo ciklični-5-prerez.

Pri dokazu glavnega izreka tega razdelka (glej izrek 5.1.4) bomo potrebovali naslednjo pomožno trditev.

Lema 5.1.3 *Naj bo F fuleren, ki vsebuje obroč R petih lic. Naj bo C notanji in C' zunanji cikel obroča R . Potem velja:*

- (i) C ali C' je lice; ali
- (ii) C in C' sta dolžine 10 ter vsa lica v obroču R so šestkotna.

DOKAZ. Naj bodo f_0, f_1, f_2, f_3 in f_4 lica obroča R , tako da je f_i povezan z f_{i+1} , $i \in \mathbb{Z}_5$. Naj bo T množica povezav med temi lici (na sliki 5.4 označene krepko). Očitno je T ciklični-5-prerez fulerena F . Če je T trivialni ciklični-5-prerez, potem je C ali pa C' lice. Torej lahko predpostavimo, da je T netrivialen ciklični-5-prerez ter da C in C' nista lici.



Slika 5.4: Lokalna struktura fulerena, ki premore netrivialen ciklični-5-prerez.

Naj bo $S = \text{Ins}(C)$ in $S' = \text{Out}(C')$. Naj bo l dolžina cikla C in l' dolžina cikla C' . Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $l \leq l'$. Ker so lahko vsa lica obroča R petkotna, kot ena ekstremna možnost, ali sva šestkotna, kot druga ekstremna možnost, ali pa so neka lica petkotna neka pa šestkotna, velja:

$$15 \leq l + l' \leq 20. \quad (5.1)$$

Ker je po predpostavki T netrivialen ciklični-5-prerez in C ni lice, mora biti $l \geq 6$.

Če je $l \in \{6, 7\}$, potem obstaja ena povezava ali pa dve povezavi z enim krajiščem na C in drugim v S . Vendar potem z odstranitvijo teh povezav fuleren F postane nepovezan, protislovje s 3-povezanostjo fulerena F . Torej je $l \geq 8$.

Denimo, da je $l = 8$. Potem obstaja množica treh povezav $\{u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3\}$, tako da je $u_1, u_2, u_3 \in V(C)$, $u_i \neq u_j$ za $i \neq j$, in $v_1, v_2, v_3 \in S$. Ker je F ciklično-5-povezan, sledi, da je podgraf fulerena F induciran na množici S gozd in zato je tudi $X = F[S + \{u_1, u_2, u_3\}]$ (graf definiran v razdelku 2.2) gozd. Naj bo $m = |S \cup \{u_1, u_2, u_3\}|$. Ker so vse točke množice S valence 3, je $2|E(X)| = 3(m - 3) + 3$. Po drugi strani je $2|E(X)| = 2(|V(X)| - p) = 2(m - p)$, kjer p označuje število povezanostnih komponent grafa X . Torej je

$$m = 6 - 2p. \quad (5.2)$$

Po (5.2) sledi, da je $p = 1$ in $m = 4$. To implicira, da je $|S| = 1$ in posledično je $v_1 = v_2 = v_3$. Vendar potem pa, ker R vsebuje pet lic, podgraf induciran z $V(C) \cup \text{Ins}(C)$ vsebuje cikel dolžine 3 ali 4, v protislovju s trditvijo 5.1.1.

Denimo, da je $l = 9$. Potem obstaja množica štirih povezav

$$\{u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3, u_4v_4\},$$

tako da $u_1, u_2, u_3, u_4 \in V(C)$, $u_i \neq u_j$ za $i \neq j$, in $v_1, v_2, v_3, v_4 \in S$. Ker je F ciklično-5-povezan, sledi, da je podgraf fulerena F induciran na množici S gozd in zato je tudi $X = F[S + \{u_1, u_2, u_3, u_4\}]$ gozd. Naj bo $m = |S \cup \{u_1, u_2, u_3, u_4\}|$. S preštevanjem (podobno kot v predhodnem odstavku) ugotovimo, da je

$$m = 8 - 2p, \quad (5.3)$$

kjer je p število povezanostnih komponent grafa X . Očitno, je $p \leq 2$. Če je $p = 1$, potem (5.3) pove, da je $m = 6$. Torej v S obstajata dve točki, recimo $v_1 = v_2$ in $v_3 = v_4$. Potem ima X dve točki valence 3 in štiri točke valence 1. Vendar, ker je $l = 9$, ugotovimo, da v tem primeru graf induciran na $V(C) \cup \text{Ins}(C)$ vsebuje cikel dolžine 3 ali 4, v protislovju s trditvijo 5.1.1. Če je $p = 2$, potem (5.3) pove, da je $m = 4$ in $S = \emptyset$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da velja: $u_1 \sim u_2$ in $u_3 \sim u_4$. Vendar zopet dejstvo, da je $l = 9$, v podgrafu induciranem na $V(C) \cup \text{Ins}(C)$ implicira obstoj cikla dolžine manjše od 5, protislovje.

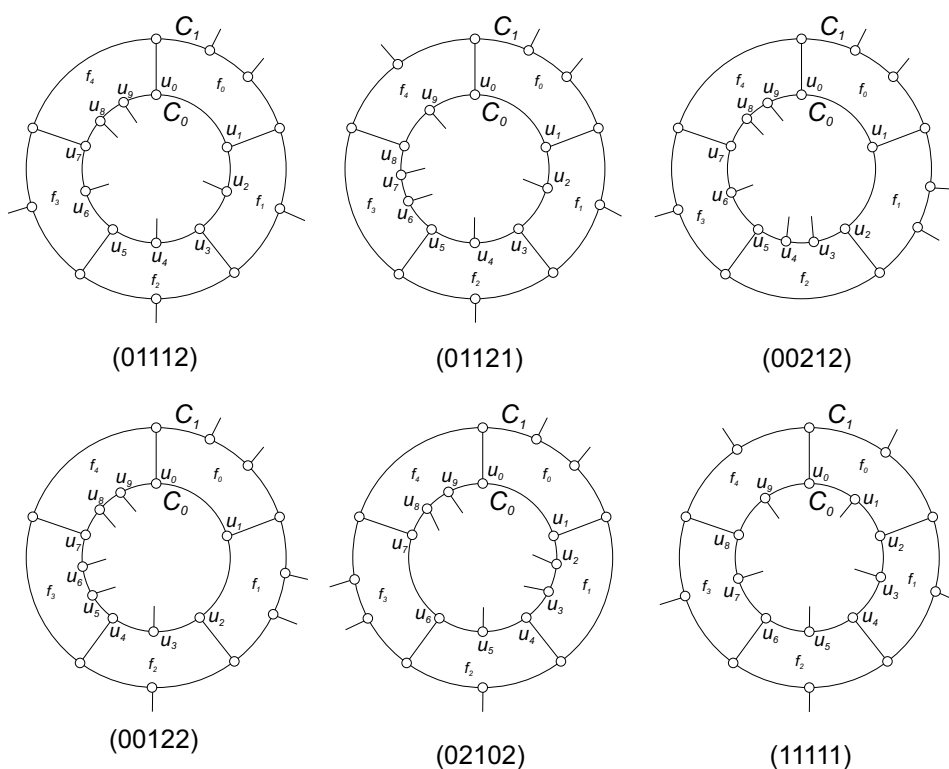
Po (5.1) sledi, da je $l = l' = 10$. Torej so vsa lica f_i , $i \in \mathbb{Z}_5$, na R šestkotna. S tem je dokaz leme 5.1.3 končan. \blacksquare

Naj bo R obroč lic v ravninski vložitvi fulerena F z notranjim ciklom C in zunanjim ciklom C' . Pravimo, da je lice $f \in R$ tipa $(j) = (j)_C$, če obstaja j točk na f , ki imajo tretjega sosedu (sosednjo točko različno od sosedov na C) v $\text{Ins}(C) \cup V(C)$. Očitno je $0 \leq j \leq 2$. Obroč R , ki ga sestavlja r lic f_0, f_1, \dots, f_{r-1} , tako da je lice f_i povezano z licem f_{i+1} , $i \in \mathbb{Z}_r$, je tipa $(j_0 j_1 \dots j_{r-1})$, če je $f_i \in R$ tipa (j_i) za vsak $i \in \mathbb{Z}_r$. Na primer, obroč, katerega notranji cikel je lice, je tipa (00000) , če je notranji cikel petkotnik, in tipa (000000) , če je notranji cikel šestkotnik.

Zdaj lahko dokažemo glavni izrek tega razdelka.

Izrek 5.1.4 *Naj bo F fuleren, ki premore netrivialen ciklični-5-prerez. Potem F premore dve disjunktni antipodni pentakapici.*

DOKAZ. Naj bo T netrivialen ciklični-5-prerez fullerena F . Potem v F obstaja obroč R petih lic f_0, f_1, f_2, f_3 in f_4 , tako da je f_i povezano z f_{i+1} , $i \in \mathbb{Z}_5$, s povezavo iz T . Naj bo C_0 notranji cikel in C_1 zunanji cikel obroča R . Naj bo $S_0 = \text{Ins}(C_0)$ in $S_1 = \text{Out}(C_1)$. Naj bo l_0 dolžina cikla C_0 in l_1 dolžina cikla C_1 . Potem je po lemi 5.1.3 $l_0 = l_1 = 10$. Torej je vseh pet lic obroča R šestkotnih in obstaja natanko pet točk na ciklu C_0 , ki so sosednje krajiščem povezav iz množice T . Glede na ureditev teh točk na ciklu C_0 je lahko obroč R enega izmed naslednjih sedmih tipov: (01112), (01121), (00212), (22010), (00122), (02102) ali (11111), kjer tip (22010) dobimo iz tipa (00212), če zamenjamo območji S_0 in S_1 . Torej moramo preučiti le šest tipov (glej sliko 5.5). (To so vsi možni tipi, saj so povezave v cikličnem-5-prerezu neodvisne in $l_0 = 10$.)



Slika 5.5: Šest možnih tipov obroča R .

Pokazali bomo, da se lahko zgodi le tip (11111). Naj bo $C_0 = u_0u_1 \cdots u_9u_0$ in najprej predpostavimo, da obstajata $i, j \in \mathbb{Z}_{10}$, $j \notin \{i-1, i, i+1\}$, tako da sta u_i in u_j povezani. Potem planarnost in 3-povezanost fullerena F implicirata, da eden od ciklov $u_iu_{i+1} \cdots u_{j-1}u_ju_i$ in $u_ju_{j+1} \cdots u_{i-1}u_iu_j$ določa lice v F , imenujmo ga f (očitno u_i in u_j ležita na nesosednjih licih obroča R). S preverjanjem vseh možnih tipov obroča R ugotovimo, da je R tipa (00212) ali tipa (00122). Vendar potem pa je $ffif_{i+1}f_{i+2}$ (kjer so f_i, f_{i+1} in f_{i+2} , $i \in \mathbb{Z}_5$, lica obroča R neničelnega tipa), obroč štirih lic. Kar je nemogoče, saj je F ciklično-5-povezan.

Denimo, da obstajata $i, j \in \mathbb{Z}_{10}$, $j \neq i$, tako da je $N(u_i) \cap N(u_j) \cap S_0 \neq \emptyset$. Potem planarnost in 3-povezanost fullerena F implicirata, da cikel $u_iu_{i+1} \cdots u_{j-1}u_ju_i$ ali pa

cikel $u_j u_{j+1} \cdots u_{i-1} u_i u_j$ določa lice v fulerenu F , imenujmo ga f . Zato u_i in u_j ležita na nesosednjih licih obroča R . Očitno je f sosed enega ali dveh lic obroča R tipa (0). Če je f sosed enega lica tipa (0), f določa petkotno lice in f skupaj s štirimi lici obroča R , ki so različni od lica tipa (0) povezanega z f , tvori obroč petih lic, kar pa je v protislovju z Lemo 5.1.3. Če je f sosed dveh lic tipa (0) na obroču R , f skupaj s tremi lici, ki so neničelnega tipa (\neq (0)), tvori obroč štirih lic, protislovje s ciklično-5-povezanostjo fulerena F .

Torej je $N(u_i) \cap N(u_j) \cap S_0 = \emptyset$ za $i, j \in \mathbb{Z}_{10}$, $j \neq i$, in $|S_0| \geq 5$. Med drugim to pomeni, da R ni tipa (00212) in tipa (00122) (v nasprotnem primeru v F obstaja lice z vsaj 7 povezavami, ki so sosednje licom tipa (0), glej tudi sliko 5.5). Če je $F[S_0]$ in torej tudi $X = F[S_0 + \{u_{i_0}, u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3}, u_{i_4}\}]$, kjer je $\{u_{i_s} \mid s \in \mathbb{Z}_5\}$ množica petih točk na C_0 , ki niso krajišča povezav v T , gozd, potem preprosto preštevanje pokaže, da je

$$|S_0 \cup \{u_{i_0}, u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3}, u_{i_4}\}| = 10 - 2p,$$

kjer je p število povezanostnih komponent grafa X . Vendar, ker je $p \geq 1$ in $|S_0 \cup \{u_{i_0}, u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3}, u_{i_4}\}| \geq 10$, je to očitno nemogoče. Torej $F[S_0]$ vsebuje cikel in obstaja obroč R' petih lic, katerega zunanji cikel je cikel C_0 . Po lemi 5.1.3 je notranji cikel obroča R' petkotno lice ali pa so vsa lica obroča R' šestkotna. V prvem primeru je očitno, da je R tipa (11111) in da so vsa lica obroča R' petkotna, torej dobimo pentakapico. V drugem primeru ponovimo analizo za obroč R' . Nadaljujemo z uporabo enakih argumentov. Ker je F končen, moramo v neki fazi doseči obroč petih petkotnih lic, ki nam da pentakapico. Natančneje, ker obroč povezan z obročem tipa (01112), (01121) ali (02102) vedno vsebuje šestkotno lice, se lahko ta postopek konča le v primeru, ko je R tipa (11111). S tem je dokaz izreka 5.1.4 končan. ■

Izrek 5.1.4 pove, da so fulereni, ki premorejo netrivialen ciklični-5-prerez, posebni razred *ogljikovih nanocevi*, molekulske cevi grafitnih ogljikov, ki so ena izmed najbolj trdnih in čvrstih vlaken (glej [67]).

5.1.2 Hamiltonski cikli v fulerenih z netrivialnim cikličnim - 5 - prerezom

Že dolgo odprta domneva pravi, da ima vsak fuleren hamiltonski cikel [112]. (V resnici je ta problem posebni primer Barnettove domneve [12], ki pravi, da ima vsak 3-povezan ravninski graf, katerega lica so največ velikosti 6, hamiltonski cikel.) Domneva je bila preverjena za vse fulerene do 176 točk [1]. Prvi dokaz eksistence hamiltonskih ciklov za kakšno pomembno neskončno družino fulerenov pa je pred kratkim naredil Marušič [100]. Gre za družino tako imenovanih leapfrog-fulerenov (za definicijo le-teh glej [34, 130]). Dokazal je, da ima za poljuben fuleren F njegov leapfrog-fuleren $\text{Le}(F)$ hamiltonski cikel, če je moč $|V(F)|$ kongruentna 2 po modulu 4, in hamiltonsko pot, če je moč $|V(F)|$ deljiva s 4. Dokaz sloni na metodi, ki je podobna metodi uporabljeni v razdelku 4 za iskanje hamiltonskih ciklov v kubičnih Cayleyjevih grafih. Uporabljeni pa so tudi rezultati predhodnega razdelka.

V tem razdelku bomo pokazali, da fulereni z netrivialnim cikličnim-5-prerezom premorejo hamiltonski cikel. Ključno vlogo v dokazu bo imel izrek 5.1.4. Namreč po izreku 5.1.4 vemo, da vsak fuleren z netrivialnim cikličnim-5-prerezom vsebuje dve antipodni pentakapici. Poleg tega med pentakapicama obstajajo taki obroči petih šestkotnih lic, da v vsakem šestkotnem licu H obstaja točka, ki ima soseda v notranjosti obroča, v katerem leži H , in točka, ki ima soseda v zunanosti tega obroča.

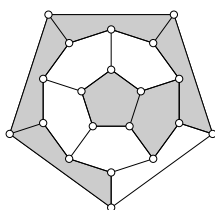
Izrek 5.1.5 *Naj bo F fuleren, ki premore netrivialen ciklični-5-prerez, ali pa dodekaeder $GP(10, 2)$. Potem F ima hamiltonski cikel. Poleg tega velja:*

- (i) *če F premore liho mnogo šestkotnih lic, potem obstaja pot lic, ki iz vsake pentakapice vsebuje natanko dve petkotni lici, katere rob je hamiltonski cikel fulerena F ;*
- (ii) *če F premore sodo mnogo šestkotnih lic, potem obstaja pot lic, ki vsebuje natanko šest petkotnih lic, dve iz prve pentakapice in štiri iz druge pentakapice, katere rob je hamiltonski cikel fulerena F .*

DOKAZ. Če je F dodekaeder, izrek očitno velja (glej sliko 5.6). Torej lahko predpostavimo, da je F fuleren z netrivialnim cikličnim-5-prerezom. Po izreku 5.1.4, F vsebuje dve antipodni pentakapici. Poleg tega lahko iz dokaza tega izreka sklepamo, da med pentakapicama obstajajo obroči petih šestkotnih lic (na kratko jih imenujemo *šestkotni obroči*) za katere velja: v vsakem šestkotniku v obroču obstaja točka, ki ima soseda v notranjosti tega obroča in točka, ki ima soseda v zunanosti tega obroča. Z drugimi besedami: vsi šestkotni obroči v F so tipa (11111).

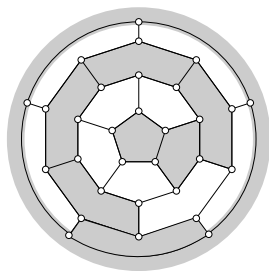
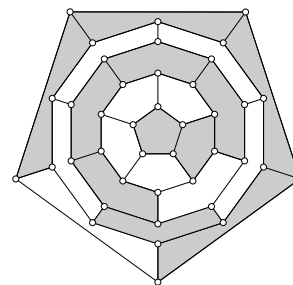
Naj bo k število šestkotnih lic v fulerenu F . Potem je $k = 5r$, kjer je r število šestkotnih obročev v F . Izrek bomo dokazali z indukcijo po številu r .

Na sliki 5.7 je prikazan hamiltonski cikel v F za $r = 1$. Na sliki 5.8 pa je hamiltonski cikel v F za $r = 2$. Torej izrek velja za $r \leq 2$.



Slika 5.6: Hamiltonski cikel v dodekaedru ($r = 0$).

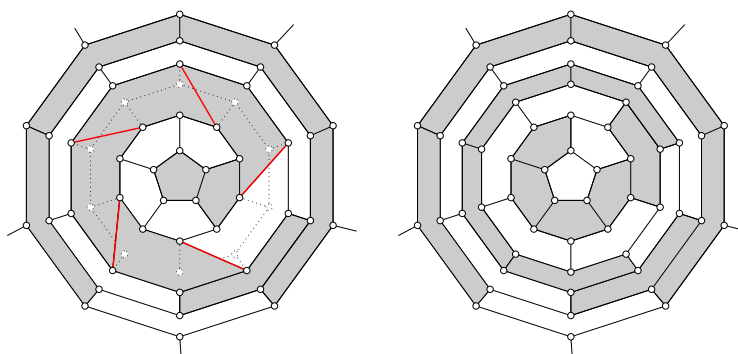
Denimo, da izrek velja za fulerene z $r \geq 2$ šestkotnimi obročmi in naj bo F fuleren z netrivialnim cikličnim-5-prerezom z $r + 1$ šestkotnimi obročmi. Naj bo R šestkotni obroč v F , ki je sosedni eni izmed dveh pentakapic, in naj bo R' šestkotni obroč, ki je povezan z obročem R . Naj bo C_0 notranji in C_1 zunanji cikel obroča R . Očitno je C_1 notranji cikel obroča R' . Naj bo C_2 zunanji cikel obroča R' in naj bodo $v_i^j \in V(C_i)$, $i \in \{0, 1, 2\}$ in $j \in \mathbb{Z}_{10}$, tako da je $v_0^{2j} \sim v_1^{2j}$ in $v_1^{2j+1} \sim v_2^{2j+1}$. Konstruirajmo fuleren z netrivialnim cikličnim-5-prerezom z r šestkotnimi obročmi

Slika 5.7: Hamiltonski cikel v F , če je $r = 1$.Slika 5.8: Hamiltonski cikel v F , če je $r = 2$.

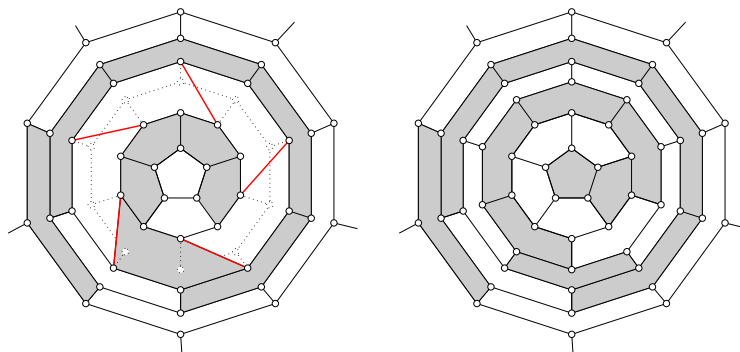
na sledeči način. Izberimo vse točke cikla C_1 , to je, točke v_1^j , $j \in \mathbb{Z}_{10}$ (skupaj z incidentnimi povezavami), in dodajmo povezave $v_0^{2j}v_2^{2j-1}$, $j \in \mathbb{Z}_{10}$. Na ta način smo dobili fuleren z netrivialnim cikličnim-5-prerezom, ki vsebuje r šestkotnih obročev. Naj \bar{F} označuje dobljeni fuleren (glej sliki 5.9 in 5.10).

Če je $r + 1$ sodo število, je r liho število. Torej po indukcijski predpostavki obstaja pot lic, ki vsebuje natanko dve petkotni lici iz vsake pentakapice, katere rob je hamiltonski cikel v \bar{F} . Vendar potem pa lahko iz te poti konstruiramo pot lic v fulerenu F , ki vsebuje natanko šest petkotnih lic, katere rob je hamiltonski cikel v F (kot je ilustrirano na sliki 5.9).

Če je $r + 1$ lih, ima \bar{F} sodo mnogo šestkotnih lic. Torej po indukcijski predpostavki obstaja pot lic, ki vsebuje natanko šest petkotnih lic, dve iz ene in štiri iz druge pentakapice, katere rob je hamiltonski cikel v \bar{F} . Zopet lahko iz te poti konstruiramo pot lic v F , ki vsebuje natanko po dve petkotni lici iz vsake pentakapice, katere rob je hamiltonski cikel v F , kot je ilustrirano na sliki 5.10. S tem je dokaz izreka 5.1.5 končan. ■

Slika 5.9: Na levi strani lokalna struktura hamiltonskega cikla v \bar{F} , na desni pa lokalna struktura hamiltonskega cikla v F , ko je $r + 1$ sodo število.

Pot lic v fulerenu F z netrivialnim cikličnim-5-prerezom, katere rob je hamiltonski cikel v F , ki smo jo konstruirali v dokazu izreka 5.1.5, ni enolična. Kot je prikazano v primeru 5.1.7, se bo bralec prepričal sam, da velja naslednja trditev.



Slika 5.10: Na levi strani lokalna struktura hamiltonskega cikla v \bar{F} , na desni pa lokalna struktura hamiltonskega cikla v F , ko je $r + 1$ liho število.

Trditev 5.1.6 Naj bo F fuleren z netrivialnim cikličnim-5-prerezom reda n in naj bo r število šestkotnih obročev v F . Potem velja:

- (i) če je r sod, ima F vsaj $5 \cdot 2^{\frac{r}{2}+1}$ različnih hamiltonskih ciklov, in
- (ii) če je r lih, ima F vsaj $5 \cdot 2^{\frac{r+1}{2}}$ različnih hamiltonskih ciklov.

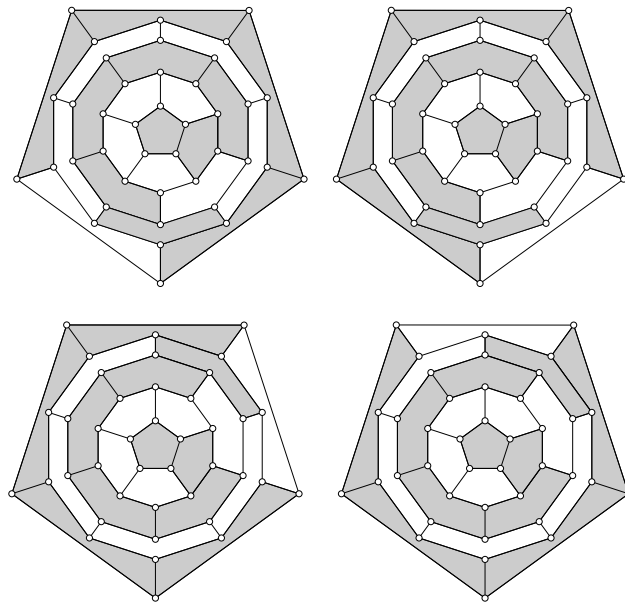
Primer 5.1.7 Na sliki 5.11 so prikazane štiri različne poti lic v fulerenu F z netrivialnim cikličnim-5-prerezom in $r = 2$ šestkotnima obročema, katerih rob je hamiltonski cikel v fulerenu F , za izbrano petkotno lice povezano s centralnim petkotnikom. Ker lahko petkotnik povezan s centralnim petkotnikom izberemo na pet različnih načinov, ima F vsaj $5 \cdot 2^{\frac{r}{2}+1} = 20$ različnih Hamiltonskih ciklov.

Ker vsak hamiltonski cikel v fulerenu F porodi tri različna popolna prirejanja (dva na samem ciklu in enega v njegovem komplementu), trditev 5.1.6 izboljša (v primeru fulerenov z netrivialnim cikličnim-5-prerezom) do sedaj znano najboljšo spodnjo mejo števila popolnih prirejanj $\lceil 3(m+2)/4 \rceil$ v poljubnem fulerenu reda m (glej [131]). Natančneje, izrek 5.1.4 pove, da je število šestkotnih obročev v fulerenu reda n z netrivialnim cikličnim-5-prerezom enako $r = \frac{n}{10} - 2$. Torej velja naslednja posledica o številu popolnih prirejanj oziroma o številu Kekulé struktur.

Posledica 5.1.8 Naj bo F fuleren reda n z netrivialnim cikličnim-5-prerezom. Potem v F obstaja vsaj $15 \cdot 2^{\frac{n}{20}-\frac{1}{2}}$ različnih popolnih prirejanj.

5.2 Opombe in sklepi

V tem poglavju smo obravnavali strukturne lastnosti fulerenov, ki premorejo netrivialen ciklični-5-prerez. Ugotovili smo, da ti fulereni sestavljajo poseben razred neskončne družine fulerenov, ki so poznani pod imenom nanocevi. S pomočjo tega rezultata smo nato rešili problem obstoja hamiltonskih ciklov za fulerene z netrivialnim cikličnim-5-prerezom in posledično določili spodnjo mejo za število popolnih prirejanj v teh fulerenih. Tej rezultati so bili uporabljeni v [82] za določevanje spodnje meje števila popolnih prirejanj v leapfrog-fulerenih. Domnevamo, da je mogoče s podobno metodo klasificirati tudi fulerene z netrivialnim cikličnim-6-prerezom.



Slika 5.11: Vse možne poti lic v fulerenu z netrivialnim cikličnim-5-prerezom in $r = 2$ šestkotnima obročema, katerih rob je hamiltonski cikel v F , za izbrano petkotno lice povezano s centralnim petkotnim licem.

Poglavje 6

Sklep

Disertacija reši številne probleme o kubičnih simetričnih grafih, točkovno tranzitivnih grafih in fulerenih. Narejena je popolna klasifikacija kubičnih simetričnih grafov ožine 6. Dokazan je obstoj hamiltonskih ciklov v točkovno tranzitivnih grafih reda $4p$, kjer je p praštevilo, (seveda z izjemo Coxeterjevega grafa) kot tudi v kubičnih Cayleyjevih grafih grup z $(2, s, 3)$ -prezentacijo, kjer je število s deljivo s 4. Zadnja dva rezultata sta pomemben prispevek k rešitvi Lovászovega problema hamiltonskosti iz leta 1969. Prispevek k uporabi teorije grafov v teoretični kemiji pa je klasifikacija strukturnih lastnosti fulerenov, sferičnih ogljikovih molekul, ki premorejo netrivialni ciklični-5-prerez. V tej posebni družini fulerenov je dokazan tudi obstoj hamiltonskih ciklov, kar delno reši že vrsto let odprt problem obstoja hamiltonskih ciklov v fulerenih.

Osnovna orodja pri raziskovanju zajemajo kombinatorične in algebraične metode teorije grafov ter čisto teoretične premisleke iz teorije grup. Uporabljen je tudi računalniški program MAGMA [15]. Natančneje, pomemben del strategije pri klasifikaciji kubičnih simetričnih grafov ožine 6 je koncept konsistentnih ciklov skupaj s Conwayevim rezultatom [14, 28] o številu konsistentnih ciklov v simetričnih grafih. Nadalje, obstoj hamiltonskih ciklov v kubičnih Cayleyjevih grafih grup z $(2, s, 3)$ -prezentacijo je dokazan s posplošitvijo metode, ki sta jo nedavno razvila Glover in Marušič [55], pri kateri se uporablja vložitev Cayleyjevih grafov na zaprte orientabilne ploskve; pomembno vlogo pri tej metodi imata ciklična povezavna povezanost in ciklična stabilnost kubičnih grafov. Dokaz obstoja hamiltonskih ciklov v povezanih točkovno tranzitivnih grafih reda $4p$ sloni na analizi (ne)primitivnosti delovanja grup avtomorfizmov in analizi strukture kvocientnih grafov glede na delovanje $(4, p)$ -semiregularnih elementov. Nazadnje, klasifikacija fulerenov, ki premorejo netrivialni ciklični-5-prerez, sloni na analizi vseh možnih lokalnih struktur v okolici cikličnega-5-prereza. Obstoj hamiltonskih ciklov v tej posebni družini fulerenov pa je dokazan s pomočjo indukcije.

Navedeno dokazuje, da rezultati disertacije predstavljajo pomemben prispevek k številnim že dolgo let odprtim problemom v teoriji grafov. Poleg tega disertacija vsebuje smernice, ki bi lahko vodile k rešitvi obravnavanih problemov še za nekatere druge neskončne družine grafov.

Literatura

- [1] R. E. L. Aldred, S. Bau, D. A. Holton and B. D. McKay, Nonhamiltonian 3-connected cubic planar graphs, *SIAM J. Discrete Math.* **13** (2000), 25–32.
- [2] B. Alspach, Hamiltonian cycles in vertex-transitive graphs of order $2p$, Proceedings of the Tenth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla., 1979), pp. 131–139, *Congress. Numer.*, XXIII–XX, Utilitas Math., Winnipeg, Man., 1979.
- [3] B. Alspach, The classification of hamiltonian generalized Petersen graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **34** (1983), 293–312.
- [4] B. Alspach, Hamilton cycles in metacirculant graphs with prime power cardinal blocks, Graph theory in memory of G. A. Dirac (Sandbjerg, 1985), 7–16, *Ann. Discrete Math.* **41**, North-Holland, Amsterdam, 1989.
- [5] B. Alspach, Lifting Hamilton cycles of quotient graphs, *Discrete Math.* **78** (1989), 25–36.
- [6] B. Alspach, C. C. Chen and K. McAvaney, On a class of Hamiltonian laceable 3-regular graphs, *Discrete Math.* **151** (1996), 19–38.
- [7] B. Alspach, E. Durnberger and T. D. Parsons, Hamilton cycles in metacirculant graphs with prime cardinality blocks, Cycles in graphs (Burnaby, B.C., 1982), 27–34, *Ann. Discrete Math.* **27**, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [8] B. Alspach, S. Locke and D. Witte, The Hamilton spaces of Cayley graphs on abelian groups, *Discrete Math.* **82** (1990), 113–126.
- [9] B. Alspach and T. D. Parsons, On Hamiltonian cycles in metacirculant graphs, Algebraic and geometric combinatorics, 1–7, *Ann. Discrete Math.* **15** (1982), North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [10] B. Alspach and Y. S. Qin, Hamilton-connected Cayley graphs on Hamiltonian groups, *European J. Combin.* **22** (2001), 777–787.
- [11] B. Alspach and C. Q. Zhang, Hamilton cycles in cubic Cayley graphs on dihedral groups, *Ars Combin.* **28** (1989), 101–108.
- [12] D. Barnette, *Conjecture 5, Recent Progress in Combinatorics*, (Ed. W. T. Tutte), Academic Press, New York, 1969.
- [13] N. Biggs, Three remarkable graphs, *Can. J. Math.* **25** (1973), 397–411.
- [14] N. Biggs, Aspects of symmetry in graphs, Algebraic methods in graph theory Vol. I, II (Szeged, 1978), pp. 27–35, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai* **25** North-Holland, Amsterdam-New York, 1981.
- [15] W. Bosma, C. Cannon, C. Playoust and A. Steel, Solving Problems with MAGMA, School of Mathematics and Statistics, University of Sydney, Australia, 1999.

- [16] I. Z. Bouwer (ed.): The Foster Census, Winnipeg, 1988.
- [17] G. Brinkmann and B. D. McKay, Construction of planar triangulations with minimum degree 5, *Discrete Math.* **301** (2005), 147–163.
- [18] P. J. Cameron, Finite permutation groups and finite simple groups, *Bull. London Math. Soc.* **13** (1981), 1–22.
- [19] Y. Q. Chen, On Hamiltonicity of vertex-transitive graphs and digraphs of order p^4 , *J. Combin. Theory Ser. B* **72** (1998), 110–121.
- [20] C. C. Chen and N. F. Quimpo, “On strongly hamiltonian abelian group graphs”, in Combinatorial Mathematics VIII, ed. K. L. McAvaney, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 884, Springer-Verlag, Berlin (1981), 23–34.
- [21] M. Cherkassof and D. Sjerve, On groups generated by three involutions, two of which commute, The Hilton Symposium (Montreal, 1993) pp. 169–185. *CRM Proc. Lecture Notes* **6**, Amer. Math. Soc., Providence, 1994.
- [22] M. D. E. Conder, Trivalent symmetric graphs on up to 2048 vertices, <http://www.math.auckland.ac.nz/conder/symmcubic2048list.txt>.
- [23] M. D. E. Conder and P. Dobcsanyi, Trivalent symmetric graphs on up to 768 vertices, *J. Combin. Math. Combin. Comp.* **40** (2002), 41–63.
- [24] M. D. E. Conder and P. J. Lorimer, Automorphism groups of symmetric graphs of valency 3, *J. Combin. Theory Ser. B* **47** (1989), 60–72.
- [25] M. D. E. Conder and M. Morton, Classification of trivalent symmetric graphs of small order, *Australas. J. Combin.* **11** (1995), 139–149.
- [26] M. D. E. Conder and R. Nedela, Symmetric cubic graphs of small girth, *J. Combin. Theory Ser. B* **97** (2007), 757–768.
- [27] M. D. E. Conder and R. Nedela, A more detailed classification of symmetric cubic graphs, preprint.
- [28] J. H. Conway, Talk given at the Second British Combinatorial Conference at Royal Holloway College, 1971.
- [29] H. S. M. Coxeter and W. O. J. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups*, Fourth Edition, Springer-Verlag, 1980.
- [30] S. Curran and J. A. Gallian, Hamiltonian cycles and paths in Cayley graphs and digraphs—a survey, *Discrete Math.* **156** (1996), 1–18.
- [31] D. Cvetković, P. Rowlinson, P. Fowler and D. Stevanović, Constructing fullerene graphs from their eigenvalues and angles, *Linear Algebra Appl.* **356** (2002), 37–56.
- [32] D. Cvetković and D. Stevanović, Spectral moments of fullerene graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **50** (2004), 62–72.
- [33] A. Deza, M. Deza and V. Grishukhin, Fullerenes and coordination polyhedra versus half-cube embeddings, *Discrete Math.* **192** (1998), 41–80.
- [34] M. V. Diudea, P. E. John, A. Graovac, M. Primorac and T. Pisanski, Leapfrog and Related Operations on Toroidal Fullerenes, *Croat. Chem. Acta*, **76** (2003), 153–159.
- [35] J. D. Dixon and B. Mortimer, “Permutation Groups”, GTM 163, Springer-Verlag, New York, 1996.

-
- [36] D. Ž. Djoković and G. L. Miller, Regular groups of automorphisms of cubic graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **29** (1980), 195–230.
- [37] E. Dobson, H. Gavlas, J. Morris and D. Witte, Automorphism groups with cyclic commutator subgroup and Hamilton cycles, *Discrete Math.* **189** (1998), 69–78.
- [38] E. Dobson, A. Malnič, D. Marušič and L. A. Nowitz, Semiregular automorphisms of vertex-transitive graphs of certain valencies, *J. Combin. Theory Ser. B* **97** (2007), 371–380.
- [39] T. Došlić, On lower bounds of number of perfect matchings in fullerene graphs, *J. Math. Chem.* **24** (1998), 359–364.
- [40] T. Došlić, On some structural properties of fullerene graphs, *J. Math. Chem.* **31** (2002), 187–195.
- [41] T. Došlić, Cyclical edge-connectivity of fullerene graphs and $(k, 6)$ -cages, *J. Math. Chem.* **33** (2003), 103–112.
- [42] T. Došlić, Fullerene graphs with exponentially many perfect matchings, *J. Math. Chem.* **41** (2007), 183–192.
- [43] E. Durnberger, Connected Cayley graphs of semi-direct products of cyclic groups of prime order by abelian groups are hamiltonian, *Discrete Math.* **46** (1983), 55–68.
- [44] Y. Q. Feng, K. Kutnar, A. Malnič and D. Marušič, On 2-fold covers of graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **89** (2008), 324–341.
- [45] Y. Q. Feng and J. H. Kwak, An infinite family of cubic one-regular graphs with unsolvable automorphism groups, *Discrete Math.* **269** (2003), 281–286.
- [46] Y. Q. Feng and J. H. Kwak, Cubic symmetric graphs of order twice an odd prime power, *J. Aust. Math. Soc.* **81** (2006), 153–164.
- [47] Y. Q. Feng and J. H. Kwak, Cubic symmetric graphs of order a small number times a prime or a prime square, *J. Combin. Theory Ser. B* **97** (2007), 627–646.
- [48] Y. Q. Feng and R. Nedela, Symmetric cubic graphs of girth at most 7, *Acta Univ. M. Belii Math.* **13** (2006), 33–55.
- [49] Y. Q. Feng and K. Wang, s -Regular cyclic coverings of the three-dimensional hypercube Q_3 , *European J. Combin.* **24** (2003), 719–731.
- [50] P. W. Fowler and D. E. Manolopoulos, *An Atlas of Fullerenes*, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [51] R. Frucht, How to describe a graph, *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **175** (1970), 159–167.
- [52] R. Frucht, A canonical representation of trivalent Hamiltonian graphs, *J. Graph Theory* **1** (1977), 45–60.
- [53] R. Frucht, J. E. Graver and M. E. Watkins, The groups of the generalized Petersen graphs, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **70** (1971), 211–218.
- [54] H. H. Glover, K. Kutnar and D. Marušič, Hamiltonian cycles in cubic Cayley graphs: the $\langle 2, 4k, 3 \rangle$ case, preprint.
- [55] H. H. Glover and D. Marušič, Hamiltonicity of cubic Cayley graph, *J. Eur. Math. Soc.* **9** (2007), 775–787.
- [56] H. H. Glover and T. Y. Yang, A Hamilton cycle in the Cayley graph of the $(2, p, 3)$ -presentation of $PSL_2(p)$, *Discrete Math.* **160** (1996), 149–163.

- [57] C. D. Godsil, On the full automorphism groups of a graph, *Combinatorica* **1** (1981), 243–256.
- [58] R. J. Gould and R. L. Roth, A recursive algorithm for Hamiltonian cycles in the $(1, j, n)$ -Cayley graph of the alternating group, *Graph theory with applications to algorithms and computer science* (Kalamazoo, Mich., 1984), 351–369, Wiley-Intersci. Publ., Wiley, New York, 1985.
- [59] J. E. Graver, Encoding fullerenes and geodesic domes, *SIAM. J. Discrete Math.* **17** (2004), 596–614.
- [60] J. E. Graver, The structure of fullerene signatures, in: DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, vol. 69, AMS, 2005, pp. 137–166.
- [61] J. E. Graver, The independence numbers of fullerenes and benzenoids, *European J. Combin.* **27** (2006), 850–863.
- [62] J. E. Graver, Kekulé structures and the face independence number of a fullerene, *European J. Combin.* **28** (2007), 1115–1130.
- [63] J. L. Gross and T. W. Tucker, Generating all graph coverings by permutation voltage assignment, *Discrete Math.* **18** (1977), 273–283.
- [64] J. L. Gross and T. W. Tucker, *Topological Graph Theory*, Wiley, New York, 1987.
- [65] B. Grünbaum and T. S. Motzkin, The number of hexagons and the simplicity of geodesics on certain polyhedra, *Can. J. Math.* **15** (1963), 744–751.
- [66] I. Gutman and O. Polansky, *Mathematical Concepts in Organic Chemistry*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [67] P. J. F. Harris, *Carbon nanotubes and related structures: new materials for the twenty-first century*, Cambridge University Press, 1999.
- [68] P. J. Heawood, Map-colour theorem, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **24** (1890), 332–338.
- [69] S. Hong, J. H. Kwak and J. Lee, Regular graph coverings whose covering transformation groups have the isomorphism extension property, *Discrete Math.* **168** (1996), 85–105.
- [70] J. D. Horton and I. Z. Bouwer, Symmetric Y -graphs and H -graphs, *J. Combin Theory Ser. B* **53** (1991), 114–129
- [71] M. A. Iranmanesh, C. E. Praeger and S. Zhou, Finite symmetric graphs with two-arc transitive quotients, *J. Combin. Theory Ser. B* **94** (2005), 79–99.
- [72] B. Jackson, Hamiltonian cycles in regular graphs, *J. Graph Theory* **2** (1978), 363–365.
- [73] F. Jaeger, On vertex-induced forests in cubic graphs, *Proceedings of the Fifth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph theory and Computing*, (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla., 1974), pp. 501–512, *Congressus Numerantium*, No. X, Utilitas Math., Winnipeg, Man., 1974.
- [74] G. A. Jones and D. B. Surowski, Regular cyclic coverings of the Platonic maps, *European J. Combin.* **21** (2000), 333–345.
- [75] I. N. Kagno, Desargues' and Pappus' Graphs and Their Groups, *Amer. J. Math.* **69** (1947), 859–862.
- [76] K. Keating and D. Witte, On Hamilton cycles in Cayley graphs in groups with cyclic commutator subgroup. *Cycles in graphs* (Burnaby, B.C., 1982), 89–102, *Ann. Discrete Math.* **27**, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [77] D. J. Klein and X. Liu, Theorems for carbon cages, *J. Math. Chem.* **11** (1992), 199–205.

- [78] H. W. Kroto, J. R. Heath, S. C. O'Brien, R. F. Curl and R. E. Smalley, C60: Buckminsterfullerene, *Nature* **318** (1985), 162–163.
- [79] K. Kutnar and D. Marušič, Hamiltonicity of vertex-transitive graphs of order $4p$, *European J. Combin.*, **29** (2008), 423–438.
- [80] K. Kutnar and D. Marušič, On cyclic edge-connectivity of fullerenes, *Discrete Applied Math.*, doi:10.1016/j.dam.2007.08.046, v tisku.
- [81] K. Kutnar and D. Marušič, A complete classification of cubic symmetric graphs of girth 6, *J. Combin. Theory Ser. B*, poslano v objavo.
- [82] K. Kutnar, D. Marušič and D. Vukičević, On the Kekulé number of Leapfrog fullerenes, *J. Math. Chem.*, v tisku.
- [83] K. Kutnar, J. Sedlar and D. Vukičević, On the Anti-Kekulé number of leap-frog fullerenes, *J. Math. Chem.*, poslano v objavo.
- [84] K. Kutnar and P. Šparl, Hamilton cycles and paths in vertex-transitive graphs of order $6p$, *Discrete Math.*, poslano v objavo.
- [85] J. H. Kwak and M. Y. Xu, *Finite group theory for combinatorists*, Combinatorial and Computational Mathematics Center, Pohang University of Science and Tehnology, Korea, 2005.
- [86] H. L. Li, J. Wang, L. Y. Wang and M. Y. Xu, Vertex primitive graphs of order containing a large prime factor, *Comm. Algebra*, **22** (1994), 3449–3477.
- [87] C. H. Li, Finite s -arc transitive graphs of prime-power order, *Bull. London Math. Soc.* **33** (2001), 129–137.
- [88] M.W.Liebeck and J.Saxl, Primitive permutation groups containing an element of large prime order, *J. London Math. Soc.* (2) **31** (1985), 237–249.
- [89] P. Lorimer, Vertex-transitive graphs of valency three, *European J. Combin.* **4** (1983), 37–44.
- [90] P. Lorimer, Vertex-transitive graphs: symmetric graphs of prime valency, *J. Graph Theory* **8** (1984), 55–68.
- [91] L. Lovász, “Combinatorial structures and their applications”, (Proc. Calgary Internat. Conf., Calgary, Alberta, 1969), pp. 243–246, Problem 11, Gordon and Breach, New York, 1970.
- [92] A. Malnič, Group actions, coverings and lifts of automorphisms, *Discrete Math.* **182** (1998), 203–218.
- [93] A. Malnič, D. Marušič, P. Potočnik and C. Q. Wang, An infinite family of cubic edge but not vertex-transitive graphs, *Discrete Math.* **280** (2004), 133–148.
- [94] A. Malnič, R. Nedela and M. Škovič, Lifting graph automorphisms by voltage assignments, *European J. Combin.* **21** (2000), 927–947.
- [95] D. Marušič, On vertex symmetric digraphs, *Discrete Math.* **36** (1981), 69–81.
- [96] D. Marušič, Hamiltonian circuits in Cayley graphs, *Discrete Math.* **46** (1983), 49–54.
- [97] D. Marušič, Vertex transitive graphs and digraphs of order p^k , Cycles in graphs (Burnaby, B.C., 1982), 115–128, *Ann. Discrete Math.* **27**, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [98] D. Marušič, Hamiltonian cycles in vertex symmetric graphs of order $2p^2$, *Discrete Math.* **66** (1987), 169–174.

- [99] D. Marušič, On vertex-transitive graphs of order qp , *J. Combin. Math. Combin. Comput.* **4** (1988), 97–114.
- [100] D. Marušič, Hamilton cycles and paths in fullerenes, *J. Chem. Inf. Model* **47** (2007), 732–736.
- [101] D. Marušič and T. D. Parsons, Hamiltonian paths in vertex-symmetric graphs of order $5p$, *Discrete Math.* **42** (1982), 227–242.
- [102] D. Marušič and T. D. Parsons, Hamiltonian paths in vertex-symmetric graphs of order $4p$, *Discrete Math.* **43** (1983), 91–96.
- [103] D. Marušič and T. Pisanski, Symmetries of hexagonal molecular graphs on the torus, *Croat. Chem. Acta* **73** (2000), 969–981.
- [104] D. Marušič and T. Pisanski, The remarkable generalized Petersen graph $G(8, 3)$, *Math. Slovaca* **50** (2000), 117–121.
- [105] D. Marušič and R. Scapellato, Permutation groups, vertex-transitive digraphs and semiregular automorphisms, *European J. Combin.* **19** (1998), 707–712.
- [106] D. Marušič, R. Scapellato and B. Zgrablić, On quasiprimitive pqr -graphs, *Algebra Colloq.* **4** (1995), 295–314.
- [107] B. D. McKay, The transitive graphs with fewer than twenty vertices, *Math. Comp.* **33** (1979), 1101–1121 & microfiche supplement.
- [108] B. D. McKay and G.F. Royle, The transitive graphs with at most 26 vertices, *Ars. Combin.* **30** (1990), 161–176.
- [109] Š. Miklavič, P. Potočnik and S. Willson, Consistent cycles in graphs and digraphs, *Graphs and Combin.* **23** (2007), 205–216.
- [110] G. A. Miller, The commutator subgroup of a group generated by two operators, *Proc. N. A. S.* **18** (1932), 665–668.
- [111] R. C. Miller, The trivalent symmetric graphs of girth at most six, *J. Combin. Theory Ser. B* **10** (1971), 163–182.
- [112] W. J. Myrvold, Investigating Conjectures about Fullerenes, in *Applications of Graph Theory to Chemistry* minisymposium, 2006 *SIAM Discrete Mathematics*, June 25–28, 2006, University of Victoria, Canada.
- [113] R. Nedela and M. Škoviera, Atoms of cyclic connectivity in cubic graphs, *Math. Slovaca* **45** (1995), 481–499.
- [114] R. Nedela and M. Škoviera, Which generalized Petersen Graphs are Cayley Graphs? *J. Graph Theory* **19** (1995), 1–11.
- [115] S. Negami, *Uniqueness and faithfulness of embeddings of graphs into surfaces*, Ph. Thesis, Tokyo Inst. of Technology, 1985.
- [116] A. Pasini, Four-dimensional football, fullerenes and diagram geometry, *Discrete Math.* **238** (2001), 115–130.
- [117] D. Passman, “Permutation groups”, W. A. Benjamin Inc., New York, 1968.
- [118] C. Payan and M. Sakarovitch, Ensembles cycliquement stables et graphes cubiques, *Cahiers du Centre D’études de Recherche Operationelle* **17** (1975), 319–343.

- [119] J. M. Planeix, N. Coustel, B. Coq, V. Brotons, P. S. Kumbhar, R. Dutartre, P. Geneste, P. Bernier and P. M. Ajayan, Application of Carbon Nanotubes as Supports in Heterogenous Catalysis, *J. Am. Chem. Soc.* **116** (1994), 7935–7936.
- [120] C. E. Praeger, On automorphism groups of imprimitive symmetric graphs, *Ars Combin.* **23** (1987), 207–224.
- [121] C. E. Praeger, Finite normal edge-transitive Cayley graphs, *Bull. Austral. Math. Soc.* **60** (1999), 207–220.
- [122] Z. Qi and H. Zhang, A note on the cyclical edge-connectivity of fullerene graphs, *J. Math. Chem.*, DOI 10.1007/s10910-006-9185-7, v tisku.
- [123] R. B. Richter, J. Širáň, R. Jajcay, T. W. Tucker and M. E. Watkins, Cayley maps, *J. Combin. Theory Ser. B* **95** (2005), 189–245.
- [124] T. Da Ross and M. Prato, Medicinal Chemistry with Fullerenes and Fullerene Derivatives, *Chem. Commun.* **8** (1999), 663–669.
- [125] J. J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, Fourth Edition, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [126] G. Sabidussi, On a class of fixed-point-free graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.* **9** (1958), 800–804.
- [127] W. R. Scott, *Group theory*, Dover Publications, New York, 1987.
- [128] W. T. Tutte, A family of cubical graphs, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **43** (1947), 459–474.
- [129] W. T. Tutte, *Connectivity in graphs*, University of Toronto Press, Toronto, 1966.
- [130] A. E. Vizitiu, M. V. Diudea, S. Nikolić and D. Janežič, Retro-Leapfrog and Related Retro Map Operations, *J. Chem. Inf. Model.* **46** (2006), 2574–2578.
- [131] H. Zhang and F. Zhang, New Lower Bound on the Number of Perfect Matchings in Fullerene Graphs, *J. Math. Chem.* **30** (2001), 343–347.
- [132] S. Zhou, A local analysis of imprimitive symmetric graphs, *J. Algebraic Combin.* **22** (2005), 435–449.
- [133] J. Turner, Point-symmetric graphs with a prime number of points, *J. Combin. Theory* **3** (1967), 136–145.
- [134] R. Weiss, *s*-transitive graphs, *Colloquia mathematica societatis János Bolyai*, Szeged (Hungary), 1978, 827–847.
- [135] H. Wielandt, *Finite Permutation Groups*, Academic Press, New York, 1964.
- [136] D. Witte, On Hamiltonian circuits in Cayley diagrams, *Discrete Math.* **38** (1982), 99–108.
- [137] D. Witte, On Hamilton cycles in Cayley graphs in groups with cyclic commutator subgroup, *Discrete Math.* **27** (1985), 89–102.
- [138] D. Witte, Cayley digraphs of prime-power order are Hamiltonian. *J. Combin. Theory Ser. B* **40** (1986), 107–112.
- [139] M. Y. Xu, Automorphism groups and isomorphisms of Cayley digraphs, *Discrete Math.* **182** (1998), 309–320.

Stvarno kazalo

- k -lok, 6
- avtomorfizem
 - drsni, 10
 - grafa, 6
 - semiregularen, 11
- Bettijevo število, 12
- blok, 4
- Cayleyjev zemljevid, 8
- cikel, 5
 - hamiltonski, 5
 - konsistenten, 10
- ciklični prerez, 12
- ciklični- k -prerez, 12
- ciklično stabilno število, 12
- delovanje, 3
 - 2-tranzitivno, 77
 - desno, 3
 - enostavno primitivno, 77
 - levo, 3
 - nep primitivno, 4
 - polregularno, 4
 - primitivno, 4
 - regularno, 4
 - tranzitivno, 4
 - zvesto, 3
- digraf, 5
- dodekaeder, 87
- dvig avtomorfizma, 13
- Eulerjeva formula, 9
- Eulerjeva karakteristika, 9
- fuleren, 87
- gozd, 12
- graf, 5
 - $(2, s, t)$ -Cayleyjev, 7
 - $CI(m, k, r)$, 40
 - $CP(k, r)$, 38
 - $CQ(k, r)$, 37
 - $I_k^n(t)$ -pot, 11
 - s -regularen, 6
 - bazni, 13
 - bipartiten, 6
 - Cayleyjev, 7
 - ciklično- k -povezan, 12
 - ciklično- k -povezavno povezan, 12
 - Desarguesov, 24
 - dvodelen, 6
 - hamiltonski, 5
 - hamiltonsko povezan, 83
 - Heawoodov, 23
 - krovni, 13
 - kubični, 5
 - kvocientni, 11
 - ločno tranzitiven, 6
 - Moebius-Kantorjev, 23
 - nepovezan, 5
 - normalen Cayleyjev, 7
 - orbitalni, 6
 - Pappusov, 23
 - planarni, 6
 - posplošeni Petersenov, 9
 - povezan, 5
 - povezavno tranzitiven, 6
 - ravninski, 6
 - regularen, 5
 - simetričen, 6
 - točkovno tranzitiven, 6
 - usmerjeni, 5
- grupa
 - diedrska, 5
 - krovnih transformacij, 13
 - leva simetrična, 3

- polregularna, 4
- posplošena diedrska, 5
- regularna, 4
- hamiltonska pot, 5
- inducirani podgraf, 6
- krovnna projekcija, 13
- Lastnost orbita - stabilizator, 4
- LCF koda, 72
- lok, 6
 - inverzni, 6
- množica
 - povezav grafa, 5
 - točk grafa, 5
- navoj, 84
- notacija
 - Fosterjeva, 11
 - Fruchtova, 11
- ožina, 5
- orbita, 3
- orbitala, 4
 - sebi zrcalna, 4
 - trivialna, 4
 - zrcalna, 4
- pentakapica, 89
- permutacijska reprezentacija, 3
- ploskev, 7
- podgrupa
 - komutatorska, 35
- podmnožica
 - ciklično stabilna, 12
- podorbita, 4
 - trivialna, 4
- polpremi produkt, 5
- pot, 5
- produkt
 - leksikografski, 80
 - spletni, 80
- puščica, 6
- razporeditev inverzov, 8
- red grafa, 5
- regularni krov, 13
- rod, 9
- sistem blokov, 4
- sprehod, 5
- stabilizator, 4
 - množice, 77
- valenca, 5
- vlakno, 13
- voltaža, 13
- voltažno prirejanje, 13
 - reducirano, 13
- zaporedje generatorjev, 8
- zemljevid, 8
 - Cayleyjev, 9

Izjava

Izjavljam, da je doktorska disertacija rezultat mojega raziskovalnega dela.

Klavdija Kutnar