Univerza na Primorskem

Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

Tina Kravos

Ločno tranzitivni grafi

Zaključna projektna naloga

Koper, september 2010

Mentor: doc. dr. Klavdija Kutnar

Kazalo

Slike

Tabele

Zahvala

Hvala mentorici doc. dr. Klavdiji Kutnar, za vso strokovno pomoč in koristne nasvete pri pisanju zaključne projektne naloge.

Hvala staršem, za finančno in moralno podporo v času študija.

Povzetek

V zaključni projektni nalogi obravnavamo predvsem ločno tranzitivne grafe. Na začetku opredelimo nekaj osnovnih pojmov in definicij s teorije grafov in grupnega delovanja na grafih. V osrednjem delu se osredotočimo na vozliščno tranzitivne grafe in ločno tranzitivne grafe s posebnim poudarkom na kubičnih ločno tranzitivnih grafih. Predstavimo tudi razdelitev kubičnih ločno tranzitivnih grafov na 17 poddružin glede na regularna delovanja podgrup grupe avtomorfizmov, ki sta jo leta 2009 naredila M.D.E Conder in R. Nedela.

Ključne besede:

tranzitivnost in regularnost grafa, grupa avtomorfizmov, vozliščno tranzitivni graf, ločno tranzitivni graf, kubični graf.

Poglavje 1

Uvod

Začetki teorije grafov segajo v leto 1735, ko se je reševanju problema Königsbergških mostov pridružil švicarski matematik Leonhard Euler. Mesto Königsberg je reka Pregel razdelila na štiri dele, povezovalo pa jih je sedem mostov. Vprašanje je bilo ali se lahko nedeljski sprehajalec sprehodi po vseh sedmih mostovih natanko enkrat tako, da se na koncu vrne v izhodišče. Euler je problem rešil v članku Sedem mostov Königsberga, ki je bil objavljen leta 1736. Z njim je postavil temelje sodobne teorije grafov.

Z leti se je teorija razvijala v več smereh. V zaključni projektni nalogi se osredotočimo na ločno tranzitivne grafe. Naš cilj je predstaviti osnovne lastnosti teh grafov. Da pa sploh pridemo do pojma ločne tranzitivnosti grafa, moramo najprej spoznati osnovne pojme o grafih in se srečati z vozliščno tranzitivnostjo grafov.

Zaključna projektna naloga je razdeljena na štiri poglavja. V prvem poglavju so predstavljeni osnovni pojmi, definicije in trditve za nadaljne lažje razumevanje naloge. V drugem poglavju obravnavamo grafe, katerih grupa avtomorfizmov deluje tranzitivno na množici vozlišč grafa. V tretjem poglavju obravnavamo ločno tranzitivne grafe. Četrto poglavje pa je namenjeno kubičnim ločno tranzitivnim grafom. V tem razdelku posebno pozornost namenimo tudi članku M.D.E. Conder in R. Nedela iz leta 2009, v katerem sta avtorja pokazala, katere kombinacije ločno tranzitivnih delovanj lahko nastopijo.

Poglavje 2

Osnovni pojmi, definicije in trditve

2.1 Grupna delovanja

Osnovne pojme s teorije grup, ki jih tu ne navajamo, si lahko bralec prebere v [4].

Naj bo G grupa z nevtralnim elementom $1 \in G$ in X poljubna množica. Pravimo, da grupa G *deluje na množici* X *z leve*, če obstaja preslikava

$$\begin{aligned} \cdot \quad : \quad & G \times X \to X \\ & (g, x) \mapsto g \cdot x, \end{aligned}$$

za katero velja

(i) $1 \cdot x = x$ za vsak $x \in X$;

(ii) $(hg) \cdot x = h \cdot (g \cdot x)$ za vse $g, h \in G$ in vse $x \in X$.

Podobno definiramo desno delovanje: Grupa G *deluje na množici* X *z desne*, če obstaja preslikava

$$\begin{aligned} \cdot \quad : \quad & X \times G \to X \\ & (x, g) \mapsto x \cdot g, \end{aligned}$$

za katero velja

(i) $x \cdot 1 = x$ za vsak $x \in X$;

(ii) $x \cdot (hg) = (x \cdot h) \cdot g$ za vse $g, h \in G$ in vse $x \in X$.

V nadaljevanju bomo $g \cdot x$ in $x \cdot g$ označevali krajše z gx oziroma z xg. Obravnavali bomo le končne grupe G na končnih množicah X. Naslednja definicija je ekvivalentna zgoraj omenjeni definiciji levega delovanja.

Definicija 2.1 *Naj bo G končna grupa in X končna množica. Levo delovanje grupe G na množici X je homomorfizem grup $\Phi : G \to Sym(X)$, kjer je $Sym(X)$ leva simetrična grupa na množici X. Moč množice X imenujemo stopnja delovanja.*

Definicija 2.1 se ujema z definicijo iz začetka razdelka. Denimo, da je Φ levo delovanje grupe G na množici X, v smislu definicije 2.1. Za $g \in G$ in $x \in X$ definirajmo

$$gx := (\Phi(g))(x)$$

Ker je Φ homomorfizem, je $\Phi(1) = id_x$ in zato res $1 \cdot x = x$. Podobno:

$$(hg)x = (\Phi(hg))(x) = (\Phi(h) \circ \Phi(g))(x) = \Phi(h)((\Phi(g))(x) = h(gx).$$

Pri predzadnjem enačaju smo uporabili osnovno lastnost kompozituma permutacij. Na podoben način lahko definiramo desno delovanje in sicer s pomočjo homomorfizma v desno simetrično grupo na množici X.

Imejmo levo delovanje grupe G na množici X. Tedaj lahko preslikavo $\Phi : G \longrightarrow Sym(X)$ določimo s predpisom:

$$\Phi(g) := (x \mapsto gx)$$

Pri izbranem $g \in G$ je preslikava $x \mapsto gx$ res bijekcija na množici X (torej element simetrične grupe Sym(X)), saj:

$$gx = gy \Leftrightarrow g^{-1}(gx) = g^{-1}(gy) \Leftrightarrow x = y$$

Pri zadnji enakosti smo upoštevali lastnosti delovanja grupe G na množico X, ki smo jo navedli na začetku tega poglavja, da je za poljuben $x \in X : x = g(g^{-1}x)$.

V nadaljevanju bomo obravnavali le leva grupna delovanja in jih bomo na kratko poimenovali kar grupna delovanja.

Načeloma dopuščamo možnost, da dva različna elementa grupe G predstavljata isto permutacijo na X. Pri nekaterih delovanjih pa takšen primer ne nastopi. Takrat pravimo, da je delovanje zvesto.

Definicija 2.2 *Če je delovanje $\Phi : G \to Sym(X)$ injektivno, pravimo, da grupa G deluje na množici X zvesto.*

Če je grupno delovanje zvesto, si lahko grupo G predstavljamo kar kot podgrupo grupe $Sym(X)$ vseh permutacij na množici X, saj je z monomorfizmom Φ izomorfna podgrupi $\Phi(G)$ grupe $Sym(X)$.

Če grupa G na množici X ne deluje zvesto, lahko tvorimo faktorsko grupo $H := G/Ker\Phi$, kjer je $Ker\Phi$ jedro homomorfizma Φ. Delovanje grupe G na X naravno inducira delovanje grupe H na X. To inducirano delovanje je vedno zvesto.

Definicija 2.3 *Naj grupa G deluje na množici X. Množico $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ imenujemo stabilizator elementa $x \in X$ pri delovanju grupe G na množici X.*

Trditev 2.4 *Naj grupa G deluje na množici X. Potem je stabilizator G_x poljubnega elementa $x \in X$ podgrupa grupe G.*

Dokaz: Po točki (i) v definiciji levega delovanja grupe G na množici X nevtralni element 1 grupe G na množici X deluje tako, da je $1 \cdot x = x$ za vsak $x \in X$ in zato $1 \in G_x$ za vsak $x \in X$ oziroma množica G_x ni prazna.

Za dokončanje dokaza po trditvi o podgrupah zadostuje pokazati, da je za poljubna elementa $g, h \in G_x$ tudi $gh \in G_x$ in $g^{-1} \in G_x$. V ta namen vzemimo poljubna elementa $g, h \in G_x$ ter poljuben element $x \in X$. Ker $g, h \in G_x$, z uporabo točk (i) in (ii) iz definicije delovanja dobimo, da je $(gh)x = g(hx) = gx = x$ in da je $g^{-1}x = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = 1 \cdot x = x$. Torej lahko sklepamo, da $gh, g^{-1} \in G_x$ oziroma, da je G_x podgrupa grupe G.

□

V literaturi srečujemo tudi točkovni stabilizator množice (v angleščini *pointwise*), ki je definiran takole.

Definicija 2.5 *Naj grupa G deluje na množici X in naj bo $A \subset X$. Množico $G_{[A]} = \{g \in G \mid ga = a$, za vsak $a \in A\}$, imenujemo točkovni stabilizator množice A.*

Trditev 2.6 *Naj grupa G deluje na množici X. Točkovni stabilizator $G_{[A]}$ poljubne podmnožice $A \subset X$ je podgrupa grupe G.*

Dokaz: Točkovni stabilizator množice je očitno kar presek stabilizatorjev točk te množice. Presek podgrup pa je podgrupa.

□

Definicija 2.7 *Naj grupa G deluje na množici X. Stabilizator množice X je množica:*

$$G_X = \{g \in G \mid gX = X\}$$

Naj grupa G deluje na množici X in naj bo $B \subset X$. Kadar bomo govorili o delovanju stabilizatorja G_B na množici B, bomo imeli v mislih delovanje na množici B, ki ga inducira delovanje grupe G na množici X.

Definicija 2.8 *Naj grupa G deluje na množici X. Množico $Orb_G(x) := \{gx \mid g \in G\}$ imenujemo orbita elementa $x \in X$ pri delovanju grupe G na množici X.*

Včasih orbito $Orb_G(x)$ elementa $x \in X$ pri delovanju grupe G na množici X označimo z Gx.

Lema 2.9 *Naj grupa G deluje na množici X. Za poljubna $x,a \in X$ velja: $Orb_G(a) = Orb_G(x)$ ali pa $Orb_G(a) \cap Orb_G(x) = \emptyset$.*

Dokaz: Naj bo $a \in X$ in naj $a \in Orb_G(x)$. Potem obstaja tak $g \in G$, da je $a = gx$. Sedaj vzemimo poljuben element $y \in Orb_G(a)$. Tedaj obstaja tak $h \in G$, da je $y = ha = h(gx) = (hg)x$ in zato $y \in Orb_G(x)$ oziroma $Orb_G(a) \subseteq Orb_G(x)$. Ker pa iz $a = gx$ sledi, da je $x = g^{-1}a \in Orb_G(a)$ in ker za poljuben $z \in Orb_G(x)$ velja, da je $z = fx = f(g^{-1}a) = (fg^{-1})a$ za nek $f \in G$, dobimo, tudi obratno vsebovanost, t.j.

$Orb_G(x) \subseteq Orb_G(a)$.

$\square$

Lema 2.9 nam pove, da sta orbiti dveh elementov bodisi disjunktni, bodisi enaki. Ker orbite očitno pokrijejo vso množico X, predstavlja kolekcija orbit $\{Orb_G(x) \mid x \in X\}$ dekompozicijo množice X.

Naj grupa G deluje na množici X. Vzemimo poljuben $x \in X$ in tvorimo stabilizator G_x, ki je podgrupa v G. Potem grupa G razpade na množico levih odsekov $G/G_x := \{hG_x \mid h \in G\}$ po podgrupi G_x. Kot vemo, se število levih odsekov po podgrupi G_x v grupi G imenuje indeks podgrupe in se označi s simbolom [G : G_x].

Izrek 2.10 *Naj grupa G deluje na množici X. Indeks stabilizatorja $[G : G_x]$ poljubne točke $x \in X$ je enak*

$$[G : G_x] = |Orb_G(x)|.$$

Dokaz: Za poljubne $h, g \in G$ in $x \in X$ velja

$$gx = hx \Leftrightarrow h^{-1}g \in G_x \Leftrightarrow hG_x = gG_x$$

Zato je preslikava $\psi : G/G_x \to Orb_G(x)$ dobro definirana s predpisom $hG_x \to hx$ in je bijektivna.

$\square$

Izrek 2.10 nam pove, da moč poljubne orbite deli moč grupe.

Trditev 2.11 *Stabilizatorji točk v isti orbiti so konjugirani, t.j. za poljubna $x \in X$ in $g \in G$ velja $G_{gx} = gG_xg^{-1}$.*

Dokaz: Za poljuben $h \in G$ velja

$$h \in G_{gx} \Leftrightarrow hgx = gx \Leftrightarrow g^{-1}hgx = x \Leftrightarrow g^{-1}hg \in G_x \Leftrightarrow h \in gG_xg^{-1}.$$

Pri zgornjih ekvivalencah smo se sklicevali na lastnosti delovnja grupe G na množici X, ki smo jih navedli na začetku tega poglavja.

$\square$

Ob koncu razdelka si razjasnimo še delovanje na kartezičnem produktu. Če grupa G deluje na množicah X in Y, potem to delovanje inducira delovanje grupe G na $X \times Y$ po komponentah:

$$g(x, y) := (gx, gy).$$

2.2 Tranzitivna in regulara grupna delovanja

Definicija 2.12 *Naj grupa G deluje na množici X. Če so vsi stabilizatorji enake moči pravimo, da grupa G deluje poltranzitivno na množici X.*

Definicija 2.13 *Če množica, pri delovanju grupe, razpade le na eno orbito, pravimo, da je delovanje tranzitivno.*

Iz definicije orbite neposredno sledi, da je delovanje grupe G na množici X tranzitivno natanko tedaj, ko za poljubni dve točki $a, b \in X$ obstaja tak $g \in G$, da velja $b = ga$. Naslednja posledica je posledica trditve 2.11.

Posledica 2.14 *Pri tranzitivnem delovanju so vsi stabilizatorji točk med seboj konjugirani.*

Posledica 2.15 *Vsako tranzitivno delovanje je tudi poltranzitivno.*

Kot poseben primer poltranzitivnega delovanja velja omeniti delovanja, pri katerih so vsi stabilizatorji točk trivialni (vsebujejo le nevtralni element grupe, ki deluje).

Definicija 2.16 *Delovanju, katerega vsi stabilizatorji točk so trivialni, pravimo polregularno delovanje. Če je delovanje hkrati še tranzitivno, pravimo, da je regularno.*

Izrek 2.17 *Delovanje grupe G na množici X je regularno natanko tedaj, ko je tranzitivno in $|G| = |X|$.*

Dokaz: Izrek 2.10 nam pove, da velja $|G_x| \cdot |Orb_G(x)| = |G|$ za poljuben $x \in X$. Dokaz našega izreka je trivialna posledica tega dejstva.

□

Izrek 2.18 *Naj Abelova grupa G deluje na množici X zvesto in tranzitivno. Tedaj G deluje regularno na X.*

Dokaz: Ker je grupa tranzitivna, so si po izreku 2.14 vsi stabilizatorji točk med seboj konjugirani. Ker pa je grupa Abelova, so tudi vsi enaki. Element stabilizatorja torej deluje kot identiteta na vsakem elementu množice X. Zaradi zvestosti delovanja mora biti ta element kar enak nevtralnemu elementu grupe G. Torej so vsi stabilizatorji elementov iz množice X trivialni. Grupa je torej polregularna. Ker pa je tranzitivna, je tudi regularna.

□

Izrek 2.19 *Naj grupa G praštevilske moči p deluje na množici X zvesto. Če je $|X| = p$, je delovanje tranzitivno.*

Dokaz: Ker je delovanje zvesto, obstaja takšen $x \in X$, da za njegovo orbito $Orb_G(x)$ velja $Orb_G(x) \neq \{x\}$. Moč orbite pa po izreku 2.10 deli moč grupe, ki deluje. Zato je $|Orb_G(x)| = p$. To pa pomeni, da je $Orb_G(x) = X$.

□

2.3 Osnovne lastnosti grafov in njihove grupe avtomorfizmov

Bralec si lahko kaj več o grafih prebere v [5] in v [6]. S pojmom grafa bomo poimenovali tisto, kar se v splošni analizi imenuje enostaven končen graf [5].

Graf $\Gamma = (V, E)$ je urejen par končnih množic V in E, kjer je $E \subseteq V \times V$. Elemente množice V imenujemo *vozlišča* ali *točke* grafa Γ, elemente množice E pa *povezave* grafa Γ. Množico vozlišč grafa Γ označimo tudi z $V(\Gamma)$, množico povezav pa z $E(\Gamma)$. Pogost je tudi izraz, da je Γ graf na V. Moč množice V je *velikost* ali *red* grafa. Če je množica E prazna množica, pravimo, da je graf Γ *prazen* oziroma popolnoma nepovezan.

Povezava $e = \{x, y\} \in E$, ki jo lahko zapišemo tudi kot xy ali $x \sim y$, je neurejen par elementov x, y iz množice vozlišč V. Vozlišči x in y sta krajišči povezave e, ali x je incidenčna s povezavo e, če $x \in e$. Podobno velja tudi za povezavo: povezava e je incidenčna z vozliščem x, če je le-to element povezave e. Vsaka povezava je torej incidenčna z natanko dvema vozliščema, tj. krajiščema te povezave. Vozlišči x in y sta *sosednji* oziroma povezani, če v množici E obstaja element $\{x, y\}$.

Stopnja oziroma valenca $d(x)$ vozlišča x je število sosedov vozlišča x. Vozlišča stopnje 0 imenujemo *izolirana* vozlišča. Minimalna stopnja grafa je definirana kot $\delta(G) = min\{d(v) \mid v \in V\}$, maksimalna stopnja pa je $\Delta(G) = max\{d(v) \mid v \in V\}$. Grafu, v katerem imajo vsa vozlišča enako stopnjo k, pravimo $k-valenten\ graf$ ali $k-regularen\ graf$. Za 3-valentni graf obstaja poseben izraz, tj. *kubičen* $graf$.

Definicija 2.20 *Graf (U, F) je podgraf grafa (V, E), če velja $U \subset V$ in $F \subset E$.*

Če je U podmnožica množice vozlišč nekega grafa (V, E), pravimo grafu na vozliščih iz množice U in s povezavami $\{uv \mid u, v \in U, uv \in E\}$ podgraf grafa (V, E) induciran na množici U.

Definicija 2.21 *Sprehod dolžine k v grafu (V, E) od vozlišča a do vozlišča b je zaporedje vozlišč grafa $a_0, \ldots, a_k$, kjer $a_0 = a$, $a_k = b$ ter $a_{i-1} \sim a_i$ za $i = 1, \ldots, k$. Če za poljubni dve vozlišči v grafu, obstaja sprehod od enega do drugega, pravimo, da je graf povezan. Maksimalnemu podgrafu danega grafa, ki je še povezan, pravimo komponenta povezanosti.*

Oglejmo si $Sym(V)$, grupo permutacij množice vozlišč grafa $\Gamma = (V, E)$. Med njenimi elementi izberemo tiste, ki ohranjajo strukturo grafa.

Definicija 2.22 *Permutaciji $\alpha \in Sym(V)$ pravimo avtomorfizem grafa $\Gamma = (V, E)$, če velja: $a \sim b \Leftrightarrow \alpha(a) \sim \alpha(b)$ za poljubni vozlišči $a, b \in V$. Množico vseh avtomorfizmov grafa Γ označimo z $Aut(\Gamma)$. (Izkaže se, da $Aut(\Gamma)$ skupaj z običajnim komponiranjem preslikav tvori grupo).*

Če imamo dva grafa (V, E) in (U, F) in bijekcijo α med množicama vozlišč V in U, za katero velja $uv \in E \Leftrightarrow \alpha(u)\alpha(v) \in F$, pravimo, da je α $izomorfizem$ grafov in da sta grafa (V, E) in (U, F) $izomorfna$. Oznaka: $(V, E) \cong (U, F)$.

Poglavje 3

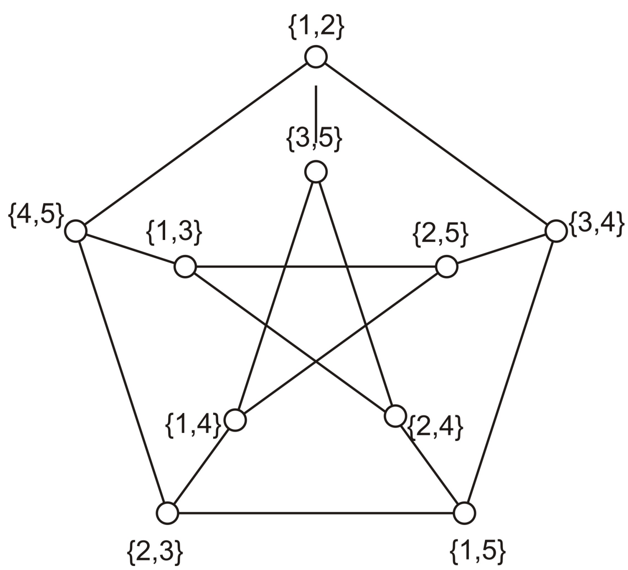
Vozliščno tranzitivni grafi

To poglavje je povzeto iz [1]. Obravnavali bomo grafe Γ, katerih grupa avtomorfizmov deluje tranzitivno na množici vozlišč grafa. Take grafe imenujemo *vozliščno tranzitivni* grafi.

Definicija 3.1 *Graf Γ je vozliščno tranzitiven, če $Aut(\Gamma)$ deluje tranzitivno na množici vozlišč grafa.*

Nam bolj znani vozliščno tranzitivni grafi so recimo cikli C_n, Petersenov graf in drugi. Potreben pogoj, da je graf vozliščno tranzitiven je, da so vse točke iste stopnje (t.j. da je graf regularen). Obstajajo pa regularni grafi, ki niso vozliščno tranzitivni.

Zgled 3.2 Dokažimo, da je Petersenov graf GP(5,2) vozliščno tranzitiven (glej sliko 3.1): Vozlišča Petersenovega grafa lahko označimo z 2-podmnožicami množice $I_5 = \{1, \ldots, 5\}$.



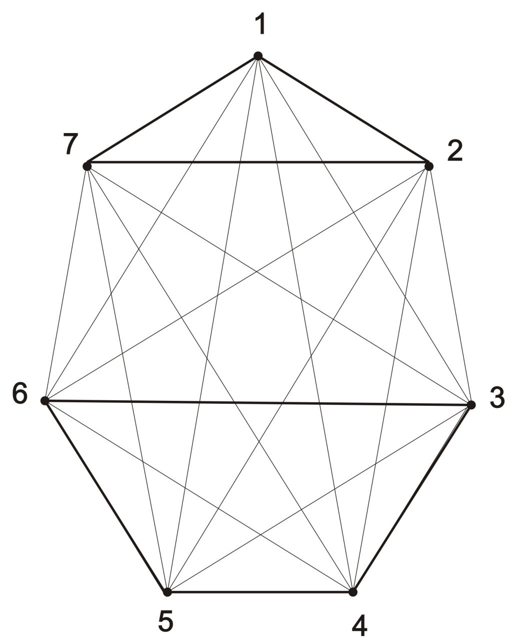
Slika 3.1: Petersenov graf.

Dve vozlišči sta povezani, če sta pripadajoči 2-podmnožici disjunktni. Za poljubni različni vozlišči $\{i, j\}$ in $\{k, l\}$ obstaja permutacija $\alpha \in S_5$, ki prvo preslika v drugo in sicer:

- *če $i, j \notin \{k, l\}$, je $\alpha = (i\,k)(j\,l)$;*
- *če pa $\{i, j\} \cap \{k, l\} \neq \emptyset$, potem lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da je $i = k$ in $j \notin \{k, l\}$ (saj sta vozlišči različni) in zato $\alpha = (j\,l)$.*

Ker vsaka permutacija iz S_5 disjunktne 2-podmnožiče slika v disjunktne 2-podmnožiče je vsaka permutacija iz S_5 tudi avtomorfizem grafa $GP(5,2)$ in zato je GP(5,2) vozliščno tranzitiven graf.

Zgled 3.3 Obstajajo grafi, ki so regularni, niso pa vozliščno tranzitivni. Na sliki 3.2 je predstavljen tak graf. V prvotnem grafu se sosednji vozlišči slikata v sosednji, v komplementu (na sliki je označen z debelejšo črto) pa se nesosednji vozlišči slikata v nesosednji. Komplement in graf imata isto grupo avtomorfizmov. Ker pa komplement grafa sestavljata 3-cikel in 4-cikel in se vozlišče iz 3-cikla ne more preslikati v vozlišče 4-cikla, grupa avtomorfizmov komplementa ni vozliščno tranzitivna,. Torej tudi prvoten graf ni vozliščno tranzitiven.



Slika 3.2: Regularen graf, ki ni vozliščno tranzitiven.

Poglejmo si Cayleyjevo konstrukcijo vozliščno tranzitivnih grafov. Ta konstrukcija nam omogoča, da konstruiramo veliko, vendar ne vseh vozliščno tranzitivnih grafov.

Definicija 3.4 *Naj bo G grupa in $\Omega \subseteq G$ podmnožica grupe G, za katero velja $\Omega = \Omega^{-1} = \{s^{-1} | s \in \Omega\}$ in $1 \notin \Omega$. Potem je Cayleyjev graf Γ = Cay(G,Ω) grupe G glede na množico Ω enostaven graf, katerega množica vozlišč in množica povezav sta definirani kot:*

$$V(\Gamma) = G \qquad in \qquad E(\Gamma) = \{\{g, h\} | g^{-1}h \in \Omega\}.$$

Naslednja trditev pove, da je vsak Cayleyjev graf vozliščno tranzitiven. Obstajajo pa vozliščno tranzitivni grafi, ki niso Cayleyjevi (Petersenov graf, dodekaeder, Coxeterjev graf, ...) [9].

Trditev 3.5 *Naj bo G grupa in $\Omega \subseteq G$, za katero velja $\Omega = \Omega^{-1}$ in 1 $\notin \Omega$. Potem velja:*

(i) Cayleyjev graf $\Gamma = Cay(G, \Omega)$ je vozliščno tranzitiven.

(ii) Predpostavimo, da je π tak avtomorfizem grupe G, da velja: $\pi(\Omega) = \Omega$. Potem je π avtomorfizem Cayleyjevega grafa $Cay(G, \Omega)$, ki pripada stabilizatorju vozlišča 1 $\in V(Cay(G, \Omega))$.

Dokaz:
(i) Za vsak $g \in G$ lahko definiramo permutacijo $\bar{g}$ na $V(\Gamma) = G$, za katero velja $\bar{g}(h) = gh(h \in G)$. Ta permutacija je avtomorfizem grafa Γ, saj velja

$$\begin{aligned} \{h,k\} \in E(\Gamma) &\Leftrightarrow h^{-1}k \in \Omega \Leftrightarrow h^{-1}g^{-1}gk \in \Omega \\ &\Leftrightarrow (gh)^{-1}gk \in \Omega \\ &\Leftrightarrow \{\bar{g}(h), \bar{g}(k)\} \in E(\Gamma). \end{aligned}$$

Množica vseh $\bar{g}$ $(g \in G)$ tvori grupo $\bar{G}$, ki je izomorfna grupi G in je podgrupa grupe avtomorfizmov grafa $\Gamma = Cay(G, \Omega)$, ki deluje tranzitivno na množici vozlišč grafa Γ. (ii) Naj bo π tak avtomorfizem grupe G, da je $\pi(\Omega) = \Omega$. Potem je π avtomorfizem grafa $\Gamma = Cay(G, \Omega)$, saj velja:

$$\begin{aligned} \{h,k\} \in E(\Gamma) &\Leftrightarrow h^{-1}k \in \Omega \\ &\Leftrightarrow \pi(h^{-1}k) \in \Omega \\ &\Leftrightarrow \pi(h)^{-1}\pi(k) \in \Omega \\ &\Leftrightarrow \{\pi(h), \pi(k)\} \in E(\Gamma). \end{aligned}$$

Še več, π je očitno tak avtomorfizem, ki fiksira 1.

□

Izrek 3.6 *(Sabiddusi) Graf Γ je Cayleyjev graf natanko tedaj, ko Aut(Γ) vsebuje podgrupo, ki deluje regularno na množici vozlišč $V(\Gamma)$ grafa Γ.*

Dokaz: Naj bo $\Gamma = Cay(G, \Omega)$ Cayleyjev graf grupe G glede na množico Ω. Vemo, da grupa G deluje tranzitivno na množici $V(\Gamma)$ (in sicer z levim množenjem). Po trditvi 3.5 je Γ vozliščno tranzitiven. Po lastnosti orbita-stabilizator (glej izrek 2.10) dobimo:

$$|V(\Gamma)| = |G| = |Orb_G(\gamma)| = \frac{|G|}{|G_\gamma|}, \quad \gamma \in V(\Gamma).$$

Ker je $|G| = |V(\Gamma)|$, nam ta enačba pove, da je $|G_\gamma| = 1$ za vsak $\gamma \in V(\Gamma)$. Iz tega sledi, da G_L deluje regularno na $V(\Gamma)$. (G_L je leva regularna reprezentacija grupe G).

Za dokaz obratne smeri predpostavimo, da je Γ graf in naj $Aut(\Gamma)$ vsebuje regularno podgrupo $G \leq Aut(\Gamma)$. Naj bo $V(\Gamma) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Ker je grupa G regularna, za vsak $i \in \{1, \ldots, n\}$ obstaja enolično določen avtomorfizem $g_i \in G$, tako, da je $g_i(v_1) = v_i$. (Avtomorfizem je enolično določen, saj če obstajata g, $h \in G$, potem je $g(v_1) = h(v_1)$ oziroma $(h^{-1}g)(v_1) = (h^{-1}h)(v_1) = v_1$ in zato $h^{-1}g \in G_{v_1} = \langle 1 \rangle$ oziroma $h^{-1}g = 1$, torej $h = g$.

Naj bo $\Omega = \{g_i \in G \mid (v_1, v_1^{g_i}) \in E(\Gamma)\}$. Poglejmo si Cayleyjev graf $Cay = (G, \Omega)$. Potem je preslikava

$$\begin{aligned}\varphi : V(Cay(G,\Omega)) &\to V(\Gamma)\\ g_i &\mapsto v_i\end{aligned}$$

izomorfizem iz Cayleyjevega grafa $Cay(G, \Omega)$ na graf Γ, saj velja:

$$\begin{aligned}(g_i, g_j) \in E(Cay(G,\Omega)) &\iff g_j = g_i s, \quad s \in S\\ &\iff g_i^{-1} g_j = s \in S\\ &\iff (v_1, v_1^{g_i^{-1}g_j}) \in E(\Gamma)\\ &\iff (v_1^{g_i}, v_1^{g_j}) \in E(\Gamma)\\ &\iff (v_i, v_j) \in E(\Gamma).\end{aligned}$$

□

Cayleyjev graf $Cay(G, \Omega)$ grupe G glede na množico Ω je povezan graf, le v primeru, ko Ω generira grupo G. Kot primer si poglejmo simetrično grupo $G = S_3$ in njeno podmnožico $\Omega = \{(12), (23), (13)\}$. Potem je Cayleyjev graf $Cay(G, \Omega)$ izomorfen grafu $K_{3,3}$.

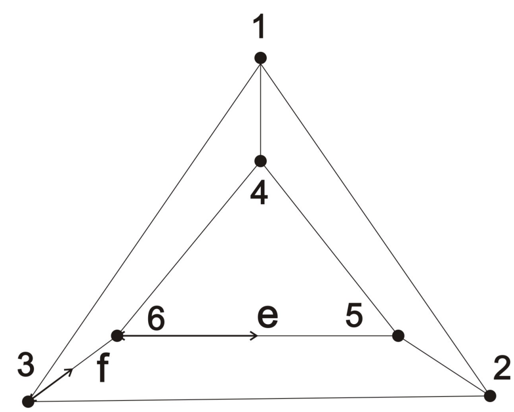
Za konec tega poglavja navedimo trditev, ki se dokaže podobno kot Sabiddusijev izrek (glej izrek 3.6).

Trditev 3.7 *Naj bo Γ končen povezan graf. Potem podgrupa H grupe avtomorfizmov grafa Γ deluje regularno na vozliščih grafa Γ natanko tedaj, ko je Γ izomorfen Cayleyjevemu grafu $Cay(H, \Omega)$, za neko množico Ω, ki generira podgrupo H.*

Poglavje 4

Ločno tranzitivni grafi

To poglavje je povzeto iz [1]. Naj bo Γ graf in $G \leq Aut(\Gamma)$. Vozliščno tranzitivni graf je *ločno tranzitiven* ali *simetričen*, če stabilizator vozlišča $v \in V(\Gamma)$ deluje tranzitivno na množici vozlišč, ki so sosednja vozlišču v. Kot primer, navedimo dva različna kubična grafa na šestih vozliščih. Prvi tak graf je polni dvodelni graf $K_{3,3}$, drugi pa je lestev L_3 (glej sliko 4.1). Oba grafa sta vozliščno tranzitivna, vendar je $K_{3,3}$ ločno tranzitiven graf, L_3 pa ne, ker lok e leži na 3-ciklu, lok f pa ne pripada nobenemu 3-ciklu (glej sliko 4.1).



Slika 4.1: Graf L_3.

V grafu Γ je $t-lok$ $[\alpha]$ zaporedje $(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_t)$ $t+1$ vozlišč grafa Γ, z lastnostmi, da je $\{\alpha_{i-1},\ \alpha_i\} \in E(\Gamma)$ za vsak i, $1 \leq i \leq t$ in $\alpha_{i-1} \neq \alpha_{i+1}$ za $1 \leq i \leq t-1$. Koncept t-lokov ni isto kot zaporedje vozlišč osnovnih poti dolžine t, ker je pri t-lokih dovoljeno, da se vozlišča ponovijo. Vsako vozlišče v v grafu Γ si lahko predstavljamo kot 0-lok $[v]$. Če je $\beta =(\beta_0,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_s)$ nek s-lok v grafu Γ, z $[\alpha.\beta]$ označimo zaporedje $(\alpha_0,\ \ldots\ \alpha_t,\ \beta_0,\ \ldots,\ \beta_s)$, pod pogojem, da je to zaporedje $(t+s+1)$-lok; to je, pod pogojem, da je vozlišče α_t sosednje z β_0 in $\alpha_{t-1} \neq \beta_0$, $\alpha_t \neq \beta_1$. Za $t=1$, 1-lok imenujemo tudi lok.

Defnicija iz začetka poglavja je ekvivalentna naslednji definiciji.

Definicija 4.1 *Graf Γ je ločno tranzitiven (ali simetričen), če njegova grupa avtomorfizmov deluje tranzitivno na množici lokov grafa.*

Definicija 4.2 *Graf Γ je t-tranzitiven ($t \geq 1$), če njegova grupa avtomorfizmov deluje tranzitivno na množici t-lokov grafa Γ.*

Očitno je grupa avtomorfizmov grafa Γ tranzitivna na množici 1-lokov, le če je Γ simetričen. Posledično lahko sklepamo, da je vsak simetričen graf t-tranzitiven za nek $t \geq 1$.

Edini povezan regularen graf stopnje ena je polni graf K_2 na dveh točkah, ta graf je 1-tranzitiven. Edini povezani regularni grafi stopnje 2 so cikli C_n ($n \geq 3$). Ti grafi so tranzitivni na t-lokih za vsak $t \geq 1$.

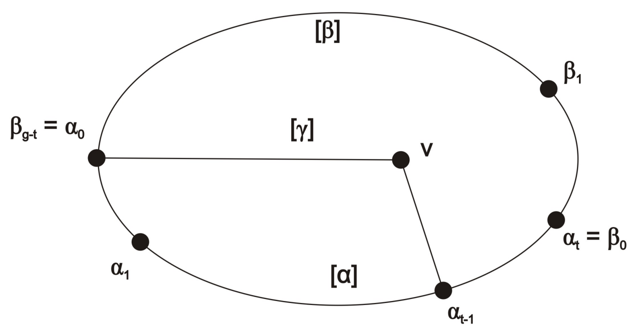
Od sedaj naprej bomo obravnavali grafe, ki so povezani, regularni stopnje več ali enako 3.

Definicija 4.3 *Ožina grafa G je število vozlišč najkrajšega cikla v grafu. Če graf nima cikla, pravimo, da je njegova ožina neskončna.*

Trditev 4.4 *Naj bo Γ t-tranzitiven graf, stopnje najmanj 3 in ožine g. Potem velja:*

$$t \leq \frac{1}{2}(g+2).$$

Dokaz:
Graf Γ ima cikel dolžine g, ki je v splošnem g-lok. Ker je stopnja najmanj 3, lahko zamenjamo eno povezavo tega g-loka, za pridobitev g-loka, katerih krajišči ne sovpadata. Očitno ni avtomorfizma grafa Γ, ki bi preslikal g-lok prve vrste v g-lok druge vrste. Iz tega sledi, da je $t < g$ (glej sliko 4.2). Posledično, če izberemo cikel dolžine g v grafu Γ, potem imamo



Slika 4.2: Ilustracija dokaza trditve 4.4

t-lok $[\alpha] = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ brez ponavljajočih vozlišč. Naj bo $[\beta]$ $(g-t)$-lok, začenši z α_t in konča naj se z α_0, tako, da dobimo cikel dolžine g. Naj bo v vozlišče sosednje vozlišču α_{t-1}, ki ni α_{t-2} oziroma α_t. Ta primer je predstavljen na sliki 4.2. Ker je Γ t-tranzitiven imamo avtomorfizem, ki preslika t-lok $[\alpha]$ v t-lok $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{t-1}, v)$. Ta avtomorfizem mora preslikati $(g-t+1)$- lok $[\alpha_{t-1}, \beta]$ v $(g-t+1)$- lok $[\alpha_{t-1}, \gamma]$, pri čemer $\gamma_0 = v$ in $\gamma_{g-t} = \alpha_0$. Dva loka $[\alpha_{t-1}, \beta]$ in $[\alpha_{t-1}, \gamma]$ se lahko prekrivata, ampak določata cikel dolžine največ $2(g-t+1)$. Torej $g \leq 2(g-t+1)$, in zato $g \geq 2t-2$.

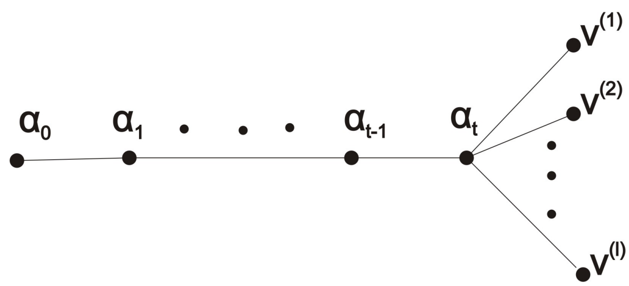
□

Definicija 4.5 *Naj bosta $[\alpha]$ in $[\beta]$ dva t-loka grafa Γ. Pravimo, da je $[\beta]$ naslednik t-loka $[\alpha]$, če je $\beta_i = \alpha_{i+1}$ $(0 \leq i \leq t-1)$.*

Lema 4.6 *Naj bo Γ povezan t-tranzitiven graf, v katerem je vsako vozlišče stopnje najmanj 3. Če je $t \geq 1$ in sta $[\alpha]$ in $[\beta]$ dva t-loka v Γ, obstaja končno zaporedje t-lokov, tako da je $[\alpha^{(1)}] = [\alpha]$, $[\alpha^{(l)}] = [\beta]$ in $[\alpha^{(i+1)}]$ je naslednik $[\alpha^{(i)}]$ za $1 \leq i \leq l-1$.*

Dokaz: Ker je Γ t-tranzitiven graf, za vsak t-lok $[\alpha]$ in poljuben njegov naslednik obstaja avtomorfizem, ki izbrani t-lok preslika v izbrani naslednik. V kolikor graf premore vozlišče stopnje 1, z zaporednim preslikavanjem t-lokov v naslednike ne moremo dobiti poljubnega t-loka v grafu, saj t-lok, katerega končno vozlišče je valence 1, ne premore naslednika. V kolikor so vsa vozlišča v Γ stopnje 2, z zaporednim preslikavanjem v naslednike t-lok $[\alpha]$ ne moremo preslikati v njemu inverzni t-lok. Če pa imamo graf, katerega vozlišča so vsa stopnje najmanj 3, pa s postopkom zaporednega preslikavanja t-lokov v naslednike, zaradi povezanosti grafa Γ, očitno dobimo poljuben t-lok v grafu Γ.

□



Slika 4.3: t-lok.

Naj bo Γ povezan graf, katerega vozlišča so stopnje najmanj 3, in naj bo $[\alpha]$ t-lok v Γ. Predpostavimo (kot prikazuje slika 4.3), da so α_{t-1} in $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, ..., $v^{(l)}$ vozlišča sosednja vozlišču α_t in naj bo $[\beta^{(i)}]$ t-lok $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t, v^{(i)})$ za $1 \leq i \leq l$, to je: vsak t-lok $[\beta^{(i)}]$ je naslednik t-loka $[\alpha]$.

Izrek 4.7 *Naj bo Γ povezan k-regularen graf, $l = k-1 \geq 2$, in naj bo $[\alpha]$ t-lok grafa Γ. Potem $Aut(\Gamma)$ deluje tranzitivno na množici t-lokov natanko tedaj, ko vsebuje take avtomorfizme g_1, g_2, ..., g_l, da je $g_i[\alpha] = [\beta^{(i)}]$ za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$.*

Dokaz: Če $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ deluje tranzitivno na množici t-lokov grafa Γ, potem očitno za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ obstaja tak avtomorfizem $g_i \in Aut(\Gamma)$, da je $g_i[\alpha] = [\beta^{(i)}]$.

Za dokaz obrata predpostavimo, da $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ vsebuje take avtomorfizme g_1, g_2, ..., g_l, da je $g_i[\alpha] = [\beta^{(i)}]$ za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Potem avtomorfizmi g_1, g_2, ..., g_l generirajo podgrupo $H = \langle g_1, g_2, \ldots, g_l \rangle$ grupe $\mathrm{Aut}(\Gamma)$. Pokazali bomo, da H deluje tranzitivno na množici t-lokov grafa Γ. V ta namen vzemimo poljuben t-lok $[\theta]$ grafa Γ, ki pri delovanju grupe H na množici t-lokov pripata isti orbiti kot t-lok $[\alpha]$. Torej obstaja tak $h \in H$, da je $[\theta] = h[\alpha]$. Če je $[\phi]$ naslednik t-loka $[\theta]$, je $h^{-1}[\phi]$ naslednik t-loka $[\alpha]$ in zato je $[\phi] = hg_i[\alpha]$ za nek $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Torej tudi $[\phi]$ pripada enaki orbiti kot $[\alpha]$. Lema 4.5 sedaj implicira, da lahko vse t-loke grafa Γ dobimo iz t-loka $[\alpha]$ s pomočjo zaporednega preslikavanja v naslednike. Posledično lahko sklepamo, da pri delovanju grupe H vsi t-loki grafa Γ pripadajo enaki orbiti kot t-lok $[\alpha]$. Ker $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ vsebuje H lahko sklepamo, da tudi $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ deluje tranzitivno na množici t-lokov grafa Γ.

□

Kot primer si poglejmo Petersenov graf $GP(5, 2)$, ki sodi med t.j. *lihe grafe*. Vozlišča Petersenovega grafa so neurejeni pari iz množice $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, z disjunktnimi sosednjimi pari (glej zgled 3.2 in sliko 3.1). Grupa avtomorfizmov je grupa vseh permutacij množice $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ker je najmanjši cikel grafa $GP(5, 2)$ dolžine 5, nam trditev 4.4 pove, da je graf največ 3-tranzitiven. Poglejmo si 3-lok $[\alpha] = (\{12\}, \{34\}, \{15\}, \{23\})$, ki ima dva naslednika: $[\beta^{(1)}] = (\{34\}, \{15\}, \{23\}, \{14\})$ in $[\beta^{(2)}] = (\{34\}, \{15\}, \{23\}, \{45\})$. Avtomorfizem (13)(245) preslika $[\alpha]$ v $[\beta^{(1)}]$ in avtomorfizem (13524) preslika $[\alpha]$ v $[\beta^{(1)}]$. Torej je po izreku 4.7 graf $GP(5, 2)$ natanko 3-tranzitiven.

Odslej naj bo Γ povezan t-tranzitiven graf ($t \geq 1$) reda n, ki je regularen stopnje $k \geq 3$, naj bo $[\alpha]$ poljuben t-lok grafa Γ in $G = Aut(\Gamma)$.

Definicija 4.8 *Zaporedje stabilizatorjev t-loka* $[\alpha]$ *je zaporedje*

$$Aut(\Gamma) = G > F_t > F_{t-1} > \cdots > F_1 > F_0$$

podgrup grupe $Aut(\Gamma)$, *kjer je* F_i *(*$0 \leq i \leq t$*) točkovni stabilizator množice* $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{t-i}\}$.

Če se spet vrnemo na Petersenov graf $GP(5, 2)$ s 3-lokom $(\{12\}, \{34\}, \{15\}, \{23\})$, je F_0 trivialna, F_1 je grupa reda 2 generirana z (34), F_2 je grupa reda 4, generirana z (34) in (12), in F_3 je grupa reda 12, generirana z (34), (12) in (345).

Če je G podgrupa grupe avtomorfizmov $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ grafa Γ, ki deluje tranzitivno na množici s-lokov ($1 \leq s \leq t$), so si po posledici 2.14 stabilizatorji s-lokov medseboj konjugirani. Zato bomo pogosto izpuščali sklicevanje na t-lok $[\alpha]$ in bomo govorili le o stabilizatorju t-loka.

Red vsake grupe, ki nastopa v zaporedju stabilizatorjev, je določen z redom grupe F_0 na sledeči način. Ker je F_t stabilizator vozlišča α_0 v vozliščno tranzitivni grupi G, po lastnosti orbita-stabilizator (glej izrek 2.10) velja:

$$|G : F_t| = n = V(\Gamma).$$

Ker je grupa G tranzitivna na množici 1-lokov, grupa F_t deluje tranzitivno na množici k vozlišč, ki so sosednja z vozliščem α_0. Pri tem delovanju je F_{t-1} stabilizator vozlišča α_1. Posledično, po izreku 2.10, velja:

$$|F_t : F_{t-1}| = k.$$

Ker je grupa G tranzitivna na množici s-lokov grafa Γ ($2 \leq s \leq t$), grupa F_{t-s+1} deluje tranzitivno na $k - 1$ vozliščih sosednjih z vozliščem α_{s-1}, ki so različni od α_{s-2}. Pri tem delovanju je F_{t-s} stabilizator vozlišča α_s in zato po izreku 2.10 velja:

$$\begin{array}{rcll} \mid F_{t-s+1} : F_{t-s} \mid &=& k-1 \ \text{ za } \ 2 \leq s \leq t. & \\ \mid F_s \mid &=& (k-1)^s \mid F_0 \mid & (0 \leq s \leq t-1), \\ \mid F_t \mid &=& k(k-1)^{t-1} \mid F_0 \mid, & \\ \mid G \mid &=& nk(k-1)^{t-1} \mid F_0 \mid . & \end{array}$$

Sedaj bomo pojasnili, kako lahko obravnavamo lastnosti stabilizatorjev s pomočjo množice $\{g_1, g_2, \ldots, g_l\}$ avtomorfizmov iz izreka 4.7. V ta namen definirajmo naraščujoče zaporedje podmnožic

$$\{1\} = Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq Y_1 \subseteq \cdots$$

množice $G = Aut(\Gamma)$ na sledeči način:

$$Y_i = \{g_a^{-j} g_b^j \mid a, b \in \{1, 2, \ldots, l\} \text{ in } 1 \leq j \leq i\}.$$

Trditev 4.9

(i) Če je $1 \leq i \leq t$, potem je Y_i podmnožica množice F_i, vendar ni podmnožica množice F_{i-1}.

(ii) Če je $0 \leq i \leq t$, potem je F_i podgrupa grupe G, generirana z Y_i in F_0.

Dokaz:
(i) Za $1 \leq$ a $\leq l$ imamo $g_a^r(\alpha_j) = \alpha_{j+r}$, če j in $j+r$ ležita med 0 in t. Velja tudi: g_a^{t-j+1} $(\alpha_j) = v^{(a)}$. Iz tega sledi, da g_a^{-j} g_b^j fiksira α_0, α_1,... α_{t-i}, za vse $j \leq i$, in $Y_i \subseteq F_i$. Če bi veljalo, da je $Y_i \subseteq F_{i-1}$, potem g_a^{-i} g_b^i fiksira α_{t-i+1}, vendar to pomeni, da $g_a^i(\alpha_{t-i+1}) = g_b^i(\alpha_{t-i+1})$, torej, da je $v^{(a)} = v^{(b)}$. Ker to ne velja za $a \neq b$, dobimo da $Y_i \nsubseteq F_{i-1}$.
(ii) Predpostavimo, da $f \in F_i$ in da je $f[\alpha] = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{t-i}, \gamma_1, \ldots, \gamma_i)$. Izberemo poljuben g_b. Ker je vozlišče γ_1 sosednje z α_{t-i}, je vozlišče $g_b^i\gamma_1$ sosednje z $g_b^i\alpha_{t-i} = \alpha_t$. Zato je $g_b^i\gamma_1$ $= v^{(a)}$ za nek $a \in$ {1, 2, ..., l}. Od tod sledi, da je

$$g_a^{-i} g_b^i f[\alpha] = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{t-i+1}, \delta_2, \ldots, \delta_i).$$

Z uporabo enake metode, kjer namesto i vzamemo $i-1$ lahko najdemo avtomorfizem $g_c^{-(i-1)}$ g_d^{i-1}, ki pripada obema, Y_{i-1} in Y_i, preslika δ_2 v α_{t-i+2} in fiksira α_0, α_1, ...,α_{t-i+1}. Z nadaljevanjem tega postopka konstruiramo tak $g \in Y_i$, da je $gf[\alpha] = [\alpha]$, kjer je $gf \in F_0$. Posledično lahko sklepamo, da je f avtomorfizem vsebovan v grupi generirani z Y_i in F_0. Ker sta Y_i in F_0 očitno vsebovani v F_i, je dokaz končen.

□

Vsi elementi množic Y_0, Y_1, ..., Y_t fiksirajo vozlišče α_0 in tako pripadajo F_t, stabilizatorju vozlišča α_0. Lahko tudi pokažemo, da F_t generirata Y_t in F_0. V primeru Y_{t+1} pravimo, da ta množica vsebuje nek avtomorfizem, ki ne fiksira α_0, in zanima nas, ali lahko Y_{t+1} in F_0 generirata celo grupo avtomorfizmov G. Naslednja trditev nam pove, da je odgovor na to vprašanje pritrdilen, z izjemo dvodelnih grafov. Razlog, zakaj je dvodelen graf izjema je naslednji. Če imamo nek ločno tranzitiven dvodelen graf Γ, kjer je $V(\Gamma)$ razdeljena v dva barvna razreda V_1 in V_2, potem je podgrupa grupe avtomorfizmov, ki fiksira množici V_1 in V_2, podgrupa reda dva v $Aut(\Gamma)$. (Lastnosti dvodelnih grafov si lahko bralec ogleda v [5].)

Trditev 4.10 *Naj bo Γ t-tranzitiven graf z $t \geq 2$ in ožino > 3. Naj G^* označuje podgrupo grupe $G = Aut(\Gamma)$ generirano z Y_{t+1} in F_0. Potem je*

(i) $G^* = G$, ali pa je

(ii) Γ dvodelen, $|G : G^*| = 2$, in G^* je podgrupa grupe G, ki ohranja dvodelnost.

Dokaz: Naj bo u tako vozlišče grafa Γ, da je u na oddaljenosti 2 od vozlišča α_0, t.j. $\partial(u, \alpha_0) = 2$. Najprej bomo pokazali, da obstaja tak $g^* \in G^*$, ki preslika α_0 v u. Ker je ožina večja od 3, za vozlišči $v^{(a)} = g_a^{t+1}(\alpha_0)$ in $v^{(b)} = g_b^{t+1}(\alpha_0)$ velja $\partial(v^{(a)}, v^{(b)}) = 2$. Posledično je razdalja med α_0 in $g_a^{-(t+1)}\ g_b^{t+1}(\alpha_0)$ tudi 2. Grupa G^* vsebuje F_t (ker je slednji generiran z Y_t, ki je podmnožica množice Y_{t+1} in F_0) in F_t je tranzitivna na 2-lokih, ki se začnejo pri α_0 (ker je $t \geq 2$). Torej G^* vsebuje avtomorfizem f, ki fiksira α_0 in preslika $g_a^{-(t+1)}\ g_b^{t+1}(\alpha_0)$ v u ter $g^* = f g_a^{-(t+1)}\ g_b^{t+1}$ preslika α_0 v u.

Naj U označuje orbito vozlišča α_0 pri delovanju grupe G^*. Potem U vsebuje vsa vozlišča, ki so na razdalji 2 od vozlišča α_0, in posledično vsa vozlišča, ki so na sodi razdalji od vozlišča α_0. Če je $U = \mathrm{V}(\Gamma)$, potem je G^* tranzitivna na $\mathrm{V}(\Gamma)$ in ker vsebuje F_t, je stabilizator vozlišča α_0 (v G^*) enak F_t. Tako je $\mid G^* \mid = \mid V(\Gamma) \mid\mid F_t \mid = \mid G \mid$ in $G^* = G$. Če $U \neq V$, potem U sestoji natanko iz tistih vozlišč, katerih razdalja do α_0 je soda in Γ je dvodelen, z barvnimi razredi U in $V(\Gamma) \setminus U$. Ker G^* fiksira U in $V(\Gamma) \setminus U$, je G^* podgrupa grupe G, ki ohranja dvodelnost.

□

Definicija 4.11 *Če je Γ t-ločno tranzitiven graf in $Aut(\Gamma)$ deluje regularno na množici t-lokov grafa Γ, pravimo, da je Γ t-regularen.*

V naslednjem poglavju bomo obravnavali kubične ločno tranzitivne grafe. Pokazali bomo, da je vsak kubični ločno tranzitiven graf t-regularen, za nek $t \leq 5$.

Poglavje 5

Kubični ločno tranzitivni grafi

V tem poglavju bomo obravnavali kubične enostavne povezane grafe, s posebnim poudarkom na kubičnih ločno tranzitivnih grafih. Naš namen je predstaviti Tutteov izrek iz leta 1947, ki pravi, da je vsak kubični ločno tranzitiven graf t-regularen, za nek t $\leq$ 5 (glej trditev 5.2 in izrek 5.9).

Zgled 5.1 Prvi primer kubičnega 1-regularnega grafa je našel Frucht leta 1952. Ta graf ima 432 vozlišč in ožino 12. Kasneje je bilo dokazano, da je najmanjši kubični 1-regularen graf reda 26. Ta graf imenujemo $Fozga$.

Trditev 5.2 *Naj bo $[\alpha]$ t-lok v kubičnem t-tranzitivnem grafu Γ, ki ni (t + 1)-tranzitiven. Potem je edini avtomorfizem grafa Γ, ki fiksira $[\alpha]$, identiteta, t.j. Aut(Γ) deluje regularno na množici t-lokov grafa Γ.*

Dokaz: Predpostavimo, da je f avtomorfizem, ki fiksira vsako vozlišče α_0, α_1, …, α_t t-loka $[\alpha]$. Če f ni identiteta, potem ne fiksira vseh t-lokov v grafu Γ. Iz leme 4.6 sledi, da je nek t-lok $[\beta]$ tak, da f fiksira $[\beta]$, ampak ne fiksira obeh naslednikov t-loka $[\beta]$. Torej, če so vozlišča β_{t-1}, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ sosednja z β_t, potem mora f zamenjati $u^{(1)}$ in $u^{(2)}$. Naj bo $w \neq \beta_1$ vozlišče, sosednje z β_0. Ker je Γ t-tranzitiven obstaja nek avtomorfizem $h \in Aut(\Gamma)$, ki preslika t-lok (w, β_0, …, β_{t-1}) v $[\beta]$, in iz tega sledi: $h(\beta_t) = u^{(1)}$. Potem sta h in fh avtomorfizma grafa Γ, ki preslikata $(t+1)$-lok $[w.\beta]$ v njegova naslednika in zato je po izreku 4.7 $Aut(\Gamma)$ tranzitivna na $(t+1)$-lokih. To pa je v protislovju s predpostavko, da Γ ni $(t{+}1)$-tranzitiven. Torej $f = 1$ in $Aut(\Gamma)$ deluje regularno na množici t-lokov grafa Γ.
$\square$

Od sedaj bomo v tem poglavju z Γ označevali kubični t-tranzitiven graf, ki ni $(t+1)$-tranzitiven. Z $[\alpha]$ bomo označili t-lok grafa Γ. Ker je zaporedje stabilizatorjev enako

$$Aut(\Gamma) = G > F_t > F_{t-1} > \cdots > F_0,$$

po trditvi 5.2 sledi, da je $|F_0| = 1$. Posledično poznamo rede vseh stabilizatorjev v zgornjem zaporedju:

$$
\begin{aligned}
|F_t| &= 2^i \qquad (0 \leq i \leq t-1),\\
|F_t| &= 3 \cdot 2^{t-1},\\
|G| &= n \cdot 3 \cdot 2^{t-1} \qquad (n = |V(\Gamma)|).
\end{aligned}
$$

Strukturo teh grup lahko pojasnimo s preiskovanjem njihovih generatorskih množic. Ti generatorji izhajajo iz množic Y_i definiranih za splošni primer v poglavju 3. Naj bodo α_{t-1}, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ vozlišča sosednja vozlišču α_t in naj g_r ($r \in \{1, 2\}$) označuje avtomorfizem grafa Γ, ki t-lok $[\alpha]$ preslika v njegovega naslednika $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t, v^{(r)})$. Uporabimo naslednje oznake:

$$
g = g_1, \qquad x_0 = g_1^{-1} g_2, \qquad x_i = g^{-i} x_0 g^i \qquad (i \in \{1, 2, \ldots, t\}).
$$

Trditev 5.3 *Zaporedje stabilizatorjev kubičnega t-tranzitivnega grafa Γ, $t \geq 2$, ima naslednje lastnosti:*

(i) $F_i = \langle x_0, x_1, \ldots, x_{i-1} \rangle$ *za* $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$*;*

(ii) če je $G^* = \langle x_0, x_1, \ldots, x_t \rangle$*, potem je* $|G : G^*| \leq 2$*;*

(iii) $G = \langle x_0, g \rangle$.

Dokaz: Uporabili bomo trditvi 4.9 in 4.10. Ker je Γ kubični graf, je $F_0 = \langle 1 \rangle$ in množica Y_i je sestavljena iz elementov $g_1^{-j} g_2^j$ in njihovih inverzov $g_2^{-j} g_1^j$, za $1 \leq j \leq i$.
(i) Iz dela (ii) trditve 4.9 sledi, da je $F_i = \langle Y_i \rangle$. Torej:

$$
g_1^{-j} g_2^j = x_{j-1} g_1^{-(j-1)} g_2^{j-1} = x_{j-1} x_{j-2} \ldots x_0,
$$

in zato $F_i = \langle x_0, x_1, \ldots, x_{i-1} \rangle$. (ii) Iz trditve 4.10 sledi, da je grupa $G^* = \langle Y_{t+1} \rangle = \langle x_0, x_1, \ldots, x_{i-1} \rangle$ podgrupa indeksa 1 ali 2 v G, pod pogojem, da je ožina grafa Γ večja od 3. Če je ožina enaka 3, potem je lahko videti, da je edina možnost $t = 2$, in Γ je polni graf K_4 na 4 vozliščih in velja (ii).
(iii) Če je $G = G^*$, potem $\langle x_0, g \rangle$ vsebuje $\langle x_0, x_1, \ldots, x_t \rangle = G^* = G$. Če je $|G : G^*| = 2$, potem je Γ dvodelen in vsak element $g^* \in G^*$ premika vozlišča grafa Γ vzdolž sodih razdalj v grafu Γ. Ampak element $g = g_1$ preslika nekaj vozlišč v sosednja vozlišča in zato $g \notin G^*$. Torej, če grupi G dodamo g dobimo večjo grupo. Ker je G^* maksimalna podgrupa (saj je indeksa 2), je $\langle G^*, g \rangle = \langle x_0, g \rangle = G$.

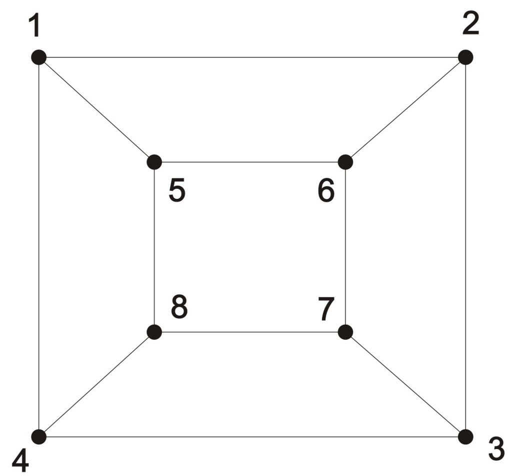
□

Zgled 5.4 V prejšnjem poglavju smo obravnavali Petersenov graf. Za 3-lok $[\alpha] = (\{12\}, \{34\}, \{15\}, \{23\})$ sta $g_1 = (13)(245)$ in $g_2 = (13524)$ taka avtomorfizma, ki $[\alpha]$ preslikata v naslednike. Zato

$$
x_0 = (34), \qquad x_1 = (12), \qquad x_2 = (35), \qquad x_3 = (14).
$$

Vemo, da ta graf ni dvodelen, saj vsebuje cikel lihe dolžine, torej v tem primeru $G^* = \langle x_0,$ $x_1, x_2, x_3\rangle = G \simeq S_5$.

Naslednji preprost primer je 2-tranzitiven graf, ki ga prikazuje slika 5.1. Če v kocki Q_3 vzamemo $[\alpha] = (1, 2, 3)$ imamo naslednje avtomorfizme:



Slika 5.1: Kubični graf Q_3

$$g_1 = (1234)(5678), \qquad g_2 = (123785)(46),$$
$$x_0 = (36)(45), \qquad x_1 = (16)(47), \qquad x_2 = (18)(27).$$

V tem primeru je graf dvodelen in $G^* = \langle x_0, x_1, x_2\rangle$ ohranja dvodelnost

$$V(Q_3) = \{1, 3, 5, 7\} \cup \{2, 4, 6, 8\}.$$

Iz tega sledi, da je $|G : G^*| = 2$.

Glavni rezultat o t-tranzitivnih kubičnih grafih je ta, da ni končnega primera za $t > 5$. Dokaz tega zelo pomembnega rezultata je posledica Tuttovega izreka iz leta 1947, s poznejšimi dokazovanji Sims-a (1967) in Djoković-a (1972). Bolj poenostavljen dokaz, z uporabo geometrijskih argumentov, namesto algebraičnih izračunov, je kasneje podal Weiss (1974).

Predpostavimo, da je $t \geq 4$. Ta predpostavka prispeva k preprečitvi praznih izjav. Opazimo, da je vsak generator x_i $(i \geq 0)$ involucija, in da vsak element iz F_i $(1 \leq i \leq t-1)$ premore enoličen zapis oblike

$$x_\rho x_\sigma \ldots x_\tau, \quad \text{kjer je} \quad 0 \leq \rho < \sigma < \ldots < \tau \leq i-1,$$

in dopuščamo, da prazna množica indeksov predstavlja identiteto. Enoličnost zapisa je posledica dejstva, da obstaja 2^i takih izrazov in da je $|F_i| = 2^i$ za $1 \leq i \leq t-1$.

Ključnega pomena je določiti, kateri stabilizatorji so Abelove grupe in kateri ne. Očitno sta F_1 in F_2 Abelovi grupi, saj $|F_1| = 2$ in $|F_2| = 4$. Naj odslej λ označuje največje tako naravno število, da je F_λ Abelova.

Trditev 5.5 *Če je $t \geq 4$, je $2 \leq \lambda < \frac{1}{2}(t+2)$.*

Dokaz: Vemo, da je $\lambda \geq 2$. Predpostavimo, da je $F_\lambda = \langle x_0, \ldots, x_{\lambda-1}\rangle$ Abelova. Potem je njena konjugiranka $g^{-t+\lambda-1} F_\lambda g^{t-\lambda+1} = \langle x_{t-\lambda+1}, \ldots, x_t\rangle$ tudi Abelova. Če je

$$\lambda - 1 \geq t - \lambda + 1,$$

ti dve grupi vsebujeta $x_{\lambda-1}$ in skupaj generirata G^*. Torej $x_{\lambda-1}$ komutira z vsakim elementom iz G^*. Naj bo $g^2 \in G^*$ (ker je $|G : G^*| \leq 2$, je za vsak $g \in G$ element $g^2 \in G$) in zato

$$x_{\lambda-1} = g^{-2} x_{\lambda-1} g^2 = x_{\lambda+1},$$

od tod pa dobimo $x_0 = x_2$. To pa je v protislovju s predpostavko, da je $t \geq 4$, saj $|F_3| > |F_2|$. Torej moramo imeti

$$\lambda - 1 < t - \lambda + 1 \quad \text{oziroma} \quad \lambda < (t+2)/2.$$

□

Trditev 5.5 nam poda zgornjo mejo za λ glede na t. Spodnjo mejo bomo našli s pomočjo argumentov, ki vključujejo komutatorje $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ kanoničnih generatorjev x_i. Ker so ti generatorji involucije je $[x_i, x_j] = (x_i x_j)^2$.

Definicija 5.6 *Center $Z(G)$ grupe G je množica elementov grupe G, ki komutirajo z vsemi elementi grupe G.*

$$Z(G) = \{x \in G \mid xa = ax \quad \text{za vsak} \quad a \in G\}$$

.

Bralec si lahko več o komutatorjih in centru grupe prebere v [8].

Lema 5.7 *Generatorji x_i zadoščajo naslednjim pogojem:*

(i) $[x_i, x_j] = 1$, *če je* $|j - i| < \lambda$, *in* $[x_i, x_j] \neq 1$, *če je* $|j - i| = \lambda$.

(ii) Center grupe $F_j = \langle x_0, \ldots, x_{j-1}\rangle$ *je grupa* $\langle x_{j-\lambda}, \ldots, x_{\lambda-1}\rangle$ $(\lambda \leq j < 2\lambda)$.

(iii) Komutatorska podgrupa grupe F_{i+1} *je podgrupa grupe* $\langle x_1, \ldots, x_{i-1}\rangle = g^{-1}F_{i-1}g$ $(1 \leq i \leq t-2)$.

Dokaz: (i) Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $j > i$. Potem je $[x_i, x_j] = g^{-i}[x_0, x_{j-i}]g^i$ in zato je $[x_i, x_j] = 1$, če in samo če x_0 in x_{j-i} komutirata. Rezultat sedaj

sledi iz dejstva, da je $F_\lambda = \langle x_0, \ldots, x_{\lambda-1}\rangle$ največjii stabilizator, ki je Abelova grupa.
(ii) Če je neničelni element $x \in F_j$ zapisan kot

$$x_\rho x_\sigma \cdots x_\tau \qquad (0 \leq \rho < \sigma < \ldots < \tau \leq j-1),$$

potem x ne komutira z $x_{\rho+\lambda}$. Če je $\rho + \lambda < j$, potem $x_{\rho+\lambda}$ pripada F_j. Podobno, x ne komutira z $x_{\tau-\lambda}$ in če je $\tau - \lambda > -1$, potem $x_{\tau-\lambda}$ pripada F_j. Torej, če je x v centru grupe F_j, potem je $\rho \geq j - \lambda$ in $\tau \geq \lambda - 1$. Torej je x v $\langle x_{j-\lambda}, \ldots, x_{\lambda-1}\rangle$. Obratno iz (i) sledi, da je vsak element te grupe v centru grupe F_j.
(iii) Če je $1 \leq i \leq t-2$, sta grupi $F_i = \langle x_0, \ldots, x_{i-1}\rangle$ in $g^{-1}F_i g = \langle x_1, \ldots, x_i\rangle$ različni in sta obe indeksa 2 v F_{i+1}. Torej je njuno presečišče $\langle x_1, \ldots, x_{i-1}\rangle = g^{-1}F_{i-1}g$ edinka v F_{i+1} in kvocientna grupa $F_{i+1}/(g^{-1}F_{i-1}g)$ je Abelova, ker je reda 4. Zato je komutatorska podgrupa grupe F_{i+1} vsebovana v $g^{-1}F_{i-1}g$. (Bralec si lahko o komutatorskih grupah prebere v [8].)

□

Ker $[x_0, x_\lambda]$ pripada komutatorski podgrupi grupe $F_{\lambda-1}$, sledi (iz dela (iii) leme 5.7 za $i = \lambda$), da $[x_0, x_\lambda]$ pripada grupi $\langle x_1, \ldots, x_{\lambda-1}\rangle$. Z drugimi besedami

$$[x_0, x_\lambda] = x_\mu \cdots x_\nu \qquad (1 \leq \mu \leq \nu \leq \lambda - 1).$$

Lema 5.8 *Z uporabo zgornjih oznak velja:*

(i) $\quad \mu + \lambda \geq t - 1;$

(ii) $\quad 2\lambda - \nu \geq t - 1.$

Dokaz: (i) Predpostavimo, da je $\mu + \lambda \leq t - 2$. Potem sledi (iz dela (iii) leme 5.7), da je element $[x_0, x_{\mu+\lambda}]$ komutatorske podgrupe grupe $F_{\mu+\lambda+1}$ vsebovan v $\langle x_1, \ldots, x_{\mu+\lambda-1}\rangle$. Center grupe $\langle x_1, \ldots, x_{\mu+\lambda-1}\rangle$ je grupa $\langle x_\mu, \ldots, x_\lambda\rangle$ in ker le-ta vsebuje tako element x_λ, kot element $[x_0, x_\lambda]$, sledi, da $[x_0, x_{\mu+\lambda}]$ komutira z x_λ in z $[x_0, x_\lambda]$. Ravno tako x_λ komutira z $x_{\mu+\lambda}$, ker je $\mu \leq \lambda$ - 1. Zato velja naslednje:

$$\begin{aligned}
x_{\mu+\lambda}^{-1}[x_0, x_\lambda]x_{\mu+\lambda} &= [x_{\mu+\lambda}^{-1}x_0 x_{\mu+\lambda}, x_\lambda] \\
&= [x_0[x_0, x_{\mu+\lambda}], x_\lambda] \\
&= [x_0, x_{\mu+\lambda}]^{-1}[x_0, x_\lambda][x_0, x_{\mu+\lambda}][[x_0, x_{\mu+\lambda}], x_\lambda] \\
&= [x_0, x_\lambda].
\end{aligned}$$

To pomeni, da $x_{\mu+\lambda}$ komutira z $[x_0, x_\lambda] = x_\mu \cdots x_\nu$. Ampak to ne drži, saj $x_{\mu+\lambda}$ ne komutira z x_μ, ampak komutira z vsakim drugim izrazom v izrazu $[x_0, x_\lambda]$. Tako je bila naša predpostavka napačna in $\mu + \lambda \geq t - 1$.
(ii) Če je $2\lambda - \nu \geq t - 2$, potem z uporabo podobnih argumentov kot v (i), lahko dokažemo, da $[x_{2\lambda-\nu}, x_0]$ komutira z $x_{\lambda-\nu}$ in z $[x_{\lambda-\nu}, x_{2\lambda-\nu}]$. Ravno tako $x_{\lambda-\nu}$ komutira z x_0, ker je $\nu \geq 1$. Po istem razmisleku kot v (i), dobimo, da x_0 komutira z

$$[x_{\lambda-\nu}, x_{2\lambda-\nu}] = x_{\mu+\lambda-\nu} \ldots x_\lambda,$$

kar pa seveda ne drži. Zato sledi, da je 2λ - $\nu \geq t$ - 1.

□

Izrek 5.9 *(Tutte 1947) Ne obstaja končen t-tranzitiven kubični ločno tranzitiven graf za t > 5.*

Dokaz: Če je t vsaj štiri, potem trditev 5.5 pove, da je $\lambda < \frac{1}{2}(t+2)$. Rezultati leme 5.8 nam povedo, da je $t-1-\lambda \leq \mu \leq \nu \leq 2\lambda - t + 1$, torej $\lambda \geq \frac{2}{3}(t-1)$. Če je $t \geq 4$, obstaja tako celo število λ, da je

$$\frac{2}{3}(t-1) \leq \lambda < \frac{1}{2}(t+2)$$

samo, kadar je $t \in \{4, 5, 7\}$. Pokazati moramo še, da $t = 7$ ne nastopi. Če je Γ 7-tranzitiven kubičen graf, potem neenakosti za λ, μ in ν implicirajo, da je $\lambda = 4$, $\mu = \nu = 2$ in zato $[x_0, x_4] = x_2$. Po delu (iii) leme 5.7, $[x_0, x_5]$ pripada grupi $\langle x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\rangle$. Če standardni izraz za $[x_0, x_5]$ vsebuje x_4, lahko zapišemo $[x_0, x_5] = hx_4$, kjer je $h \in \langle x_1,\ x_2,\ x_3\rangle$ tak element, da komutira z x_0 in x_4. Zato je

$$\begin{aligned} x_2 &= [x_0, x_4] = (x_0x_4)^2 = (x_0hx_4)^2 = (x_0(x_0x_5)^2)^2 \\ &= (x_5x_0x_5)^2 = x_5x_0^2x_5 = 1. \end{aligned}$$

Ker to seveda ne drži, mora $[x_0,\ x_5] = (x_0x_5)^2$ pripadati $\langle x_1,\ x_2,\ x_3\rangle$.

Definicija nam pove, da x_1, x_2 in x_3 fiksirajo vozlišče α_3 na 7-loku $[\alpha]$, in zato je $x_0x_5(\alpha_3)$ $= x_5x_0(\alpha_3) = x_5(\alpha_3)$. Torej x_0 fiksira $x_5(\alpha_3)$. Ker x_5 fiksira α_1 ampak ne fiksira α_2 je $[\theta]$ $= (x_5(\alpha_3),\ x_5(\alpha_2),\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6)$ 7-lok v grafu Γ. Tri vozlišča, ki so sosednja z α_1, so vozlišča α_0, α_2 in $x_5(\alpha_2)$. In ker x_0 fiksira α_0, α_1 in α_2 mora fiksirati tudi $x_5(\alpha_2)$. Posledično x_0 fiksira celoten 7-lok $[\theta]$ in to je v protislovju s trditvijo 5.2. Zato $t = 7$ ne more nastopiti.

□

5.1 Obstoj regularnih podgrup v grupi avtomorfizmov

Končen kubični ločno tranzitiven graf lahko premore več kot en tip ločno tranzitivnih grupnih delovanj. Conder in Nedela sta v [2] dokazala, katere kombinacije ločno tranzitivnih delovanj lahko nastopijo.

V poglavju 5 smo spoznali Tuttov rezultat, da je vsak kubični ločno tranzitiven graf t-regularen za nek $t \leq 5$ (glej trditev 5.2 in izrek 5.9). Stabilizator vozlišča v poljubni grupi, ki deluje regularno na množici t-lokov povezanega kubičnega grafa, je izomorfen eni izmed naslednjih grup: ciklični grupi $\mathbb{Z}_3$, simetrični grupi S_3, direktnem produktu $S_3 \times \mathbb{Z}_2$, simetrični grupi S_4 ali direktnemu produktu $S_4 \times \mathbb{Z}_2$, odvisno od tega ali je $t = 1, 2, 3, 4$ ali 5. Ko je $t = 2$ ali $t = 4$ obstajata dve različni možnosti za stabilizator povezave, medtem ko za $t \in \{1, 3, 5\}$ le po ena možnost. Torej, obstaja sedem različnih tipov parov *stabilizator vozlišča - stabilizator povezave* in posledično do izomorfnosti natančno obstaja sedem različnih razredov ločno tranzitivnih delovanj grupe avtomorfizmov končnega kubičnega grafa.

Naj bo Γ kubični ločno tranzitiven graf, $v \in V(\Gamma)$ in naj bo G ločno tranzitivna podgrupa grupe avtomorfizmov grafa Γ:

- Če je $G_v \cong \mathbb{Z}_3$, pravimo, da je grupa G tipa 1.
- Če je $G_v \cong S_3$ in G premore involucijo, ki zamenja krajišči neke povezave grafa Γ, pravimo, da je grupa G tipa 2^1.
- Če je $G_v \cong S_3$ in G ne premore involucije, ki zamenja krajišči neke povezave grafa Γ, pravimo, da je grupa G tipa 2^2.
- Če je $G_v \cong S_3 \times \mathbb{Z}_2$, pravimo, da je grupa G tipa 3.
- Če je $G_v \cong S_4$ in G premore involucijo, ki zamenja krajišči neke povezave grafa Γ, pravimo, da je grupa G tipa 4^1.
- Če je $G_v \cong S_4$ in G ne premore involucije, ki zamenja krajišči neke povezave grafa Γ, pravimo, da je grupa G tipa 4^2.
- Če je $G_v \cong S_4 \times \mathbb{Z}_2$, pravimo, da je grupa G tipa 5.

Na primer, Petersenov graf je 3-regularen. Grupa avtomorfizmov Petersenovega grafa je izomorfna simetrični grupi S_5 in je tipa 3. Tudi alternirajoča grupa A_5 deluje ločno tranzitivno na Petersenovem grafu in sicer je regularna na množici 2-lokov in je tipa 2^1 (ker A_5 vsebuje involucijo, ki zamenja krajišči povezave).

V [2] sta Conder in Nedela naredila natančno klasifikacijo končnih kubičnih ločno tranzitivnih grafov s pomočjo analize vseh možnih kombinacij tipov ločno tranzitivnih podgrup v grupi avtomorfizmov. Dokazala sta naslednji izrek.

Izrek 5.10 [2] *Končne ločno tranzitivne kubične grafe lahko razporedimo v 17 različnih družin, glede na obstoj ločno tranzitivnih podgrup. Ti razredi so podani v tabeli 5.1.*

s	Tipi	Dvodelnost?	Primer
1	1	Včasih	F026
2	1, 2^1	Včasih	F004 (K_4)
2	2^1	Včasih	F084
2	2^2	Včasih	F448C
3	1, 2^1, 2^2, 3	Vedno	F006 ($K_{3,3}$)
3	2^1, 2^2, 3	Vedno	F020B (GP(10,3))
3	2^1, 3	Nikoli	F010 (Petersen)
3	2^2, 3	Nikoli	F028 (Coxeter)
3	3	Včasih	F110
4	1, 4^1	Vedno	F014 (Heawood)
4	4^1	Včasih	F102 (S(17))
4	4^2	Včasih	3^{10}-krati krov grafa F468?
5	1, 4^1, 4^2, 5	Vedno	Biggs-Conway graf
5	4^1, 4^2, 5	Vedno	F030 (Tuttova 8-kletka)
5	4^1, 5	Nikoli	S_{10} graf
5	4^2, 5	Nikoli	F234B (Wong-ov graf)
5	5	Včasih	$M_{24} \wr C_2$ graf

Tabela 5.1: 17 različnih tipov kubičnih ločno tranzitivnih grafov.

V tabeli 5.1 so grafi navedeni v Fruchtovi notaciji Fn oziroma $FnA, FnB, \ldots$ Črka F pove, da gre za Fruchtovo notacijo, n pove število vozlišč grafa, zadnja, velika pisana črka pa je dodana v tistih primerih, pri katerih obstaja več neizomorfnih kubičnih ločno tranzitivnih grafov istega reda n.

Zgled 5.11 Kubični ločno tranzitiven graf X je tipa $2^1, 3$, v kolikor $Aut(X)$ deluje regularno na množici 3-lokov grafa X in $Aut(X)$ vsebuje podgrupo, ki deluje regularno na množici 2-lokov in sicer tako, da je avtomorfizem, ki obrne preslikavo, involucija. Še več, to je edina podgrupa cele grupe avtomorfizmov, ki deluje regularno na množici t-lokov, $t < 3$.

Poglavje 6

Zaključek

V zaključni projektni nalogi smo se dodobra seznanili s tranzitivnostjo grafov, s posebnim poudrakom na kubičnih ločno tranzitivnih grafih. Posebno pozornost smo namenili dokazovanju Tuttovega izreka, ki pravi, da ne obstaja končen t-tranzitiven kubični ločno tranzitiven graf, za $t > 5$. Da lahko kubične ločno tranzitivne grafe razdelimo v 17 družin oziroma razredov, smo se seznanili v zadnjem poglavju in tako sklenili zaključno projektno nalogo.

Literatura

[1] N. Biggs, *Algebraic graph theory*, Cambridge University Press (1996), 122–148.

[2] M. Conder in R. Nedela, A refined classification of symetric cubic graphs, *Journal of Algebra*, **322** (2009), 722–740.

[3] N. L. Biggs, *Discrete mathematics*, Oxford University Press (2002), 210–268.

[4] I. Vidav, *Algebra*, DMFA-založništvo (2003), 29–56.

[5] V. Batagelj, *Diskretne strukture grafi*, Samozaložba-Zenel Batagelj (1996), 5–13.

[6] R. J. Wilson in J. J. Watkins, *Uvod v teorijo grafov*, John Wiley & Sons, Inc. (1997), 14–26.

[7] P. Potočnik, Delovanja grup in simetrije grafov (2000), *dok. disertacija.*

[8] K. Kutnar, A. Malnič, D. Marušič in P. Šparl, Uvod v teorijo grup, Teorijo kolobarjev in Teorijo polj (2009), 5–31, študijsko gradivo.

[9] C. Godsil in G. Royle, *Algebraic graph theory*, Springer-Verlang (2001).