

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Zaključna naloga
Baricentrične koordinate nad večkotniki
(Barycentric coordinates on polygons)

Ime in priimek: Kaja Ferjančič
Študijski program: Matematika
Mentor: doc. dr. Vito Vitrih

Koper, december 2014

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Kaja FERJANČIČ

Naslov zaključne naloge: Baricentrične koordinate nad večkotniki

Kraj: Koper

Leto: 2014

Število listov: 35

Število slik: 17

Število referenc: 8

Mentor: doc. dr. Vito Vitrih

Ključne besede: baricentrične koordinate, Wachspresove koordinate, koordinate povprečne vrednosti.

Math. Subj. Class. (2010): 26C15, 65D05

Izvleček:

V zaključni nalogi sem predstavila nekatere družine baricentričnih koordinat in njihove glavne značilnosti. Najprej sem se osredotočila na baricentrične koordinate nad trikotniki in simpleksi, nato pa vse skupaj posplošila na večkotnike. Podrobneje sem opisala predvsem baricentrične koordinate nad konveksnimi večkotniki, na kar se navezuje tudi ena izmed družin baricentričnih koordinat, in sicer Wachspresove koordinate. Te so dobro definirane le nad notranjostjo konveksnih večkotnikov, ne pa tudi nad nekonveksnimi večkotniki. Wachspresove koordinate imajo tudi druge lepe lastnosti, kot sta afina invariantnost in neskončnokrat zvezna odvedljivost. Druga družina baricentričnih koordinat, ki so podrobno opisane v zaključni nalogi, so koordinate povprečne vrednosti, ki so dobro definirane tudi za nekonveksne večkotnike. Prav tako kot Wachspresove koordinate imajo tudi koordinate povprečne vrednosti lepe lastnosti. So ravno tako neskončnokrat zvezno odvedljive ter invariantne za translacije, rotacije in enakomerne raztege. V zadnjem delu sem se posvetila splošnim tri-točkovnim baricentričnim koordinatam, ki so odvisne le od treh sosednjih oglišč. V tem poglavju sem raziskala, ali obstajajo še katere druge družine tri-točkovnih baricentričnih koordinat poleg Wachspresovih koordinat in koordinat povprečne vrednosti. Ugotovila sem, da so edine afino invariantne tri-točkovne baricentrične koordinate ravno Wachspresove koordinate, in da so edine tri-točkovne koordinate, ki so dobro definirane tudi za nekonveksne večkotnike, ravno koordinate povprečne vrednosti. Večina snovi je povzeta po [M. S. Floater, K. Hormann in G. Kos, A general construction of barycentric coordinates over convex polygons. *Advances in Comp. Math.* 24 (2006) 311-331].

Key words documentation

Name and SURNAME: Kaja FERJANČIČ

Title of final project paper: Barycentric coordinates on polygons

Place: Koper

Year: 2014

Number of pages: 35

Number of figures: 17

Number of references:

8

Mentor: Assist. Prof. Vito Vitrih, PhD

Keywords: barycentric coordinates, Wachspress coordinates, Mean Value coordinates.

Math. Subj. Class. (2010): 26C15, 65D05

Abstract: In the final project paper I presented some families of barycentric coordinates and their main properties. First, I described barycentric coordinates on triangles and simplices and then I generalized them to convex polygons. Wachspress coordinates are one family of such coordinates, they are well defined only for interior of convex polygons, but not for nonconvex ones. Wachspress coordinates have many other nice properties like affine invariance and smoothness. The other important family of barycentric coordinates are Mean Value coordinates, which are well defined also for nonconvex polygons. As Wachspress coordinates also Mean Value coordinates have many nice properties. They are smooth and invariant for translations, rotations and scalings. In the last part I was focused on general three-point barycentric coordinates, which depend only on the three neighbouring vertices. I considered the question whether there exists any other family of three-point barycentric coordinates beside Wachspress and Mean Value coordinates. I observed that Wachspress coordinates are the only three-point coordinates that are affinely invariant and the Mean Value coordinates are the only three-point coordinates that are well defined also for nonconvex polygons. Most of the material is taken from [M. S. Floater, K. Hormann in G. Kos, A general construction of barycentric coordinates over convex polygons. *Advances in Comp. Math.* 24 (2006) 311-331].

Zahvala

Najprej se iskreno zahvaljujem mentorju, doc. dr. Vitu Vitrihu za vso potrpežljivost, trud in pomoč pri nastajanju te zaključne naloge.

Posebna zahvala gre tudi mojim domačim, ki so me skozi vsa študijska leta moralno in finančno podpirali, mi svetovali in me usmerjali po pravi poti. Zahvalila bi se tudi mojemu fantu, ki mi je s spodbudnimi besedami vedno stal ob strani in me podpiral.

Kazalo vsebine

1	Uvod	1
2	Baricentrične koordinate nad simpleksi	3
2.1	Baricentrične koordinate nad trikotniki v \mathbb{R}^2	3
2.2	Posplošitev na \mathbb{R}^d	6
3	Baricentrične koordinate nad konveksnimi večkotniki	9
3.1	Wachspressove koordinate	11
3.2	Koordinate povprečne vrednosti	15
3.3	Poljubne druge tri-točkovne baricentrične koordinate	21
4	Zaključek	27
5	Literatura	28

Kazalo slik

1	Trikotnik z oglišči v_1, v_2, v_3 ter točko v	4
2	Predznaki baricentričnih koordinat.	5
3	Baricentrične koordinate kot funkcije.	6
4	Pravokotna projekcija.	7
5	Razdelitev večkotnika $S = [v_1, v_2, \dots, v_7]$ na trikotnike s pomočjo točke v	9
6	Funkcije L_i (levo) in ℓ_i (desno).	10
7	Wachspresove koordinate.	12
8	Oblika zvezde pred transformacijo oglišč petkotnika.	16
9	Oblika zvezde po transformaciji oglišč petkotnika.	16
10	Oznake, potrebne za definicijo in izpeljavo lastnosti koordinat povprečne vrednosti.	17
11	Funkcija λ_1 nad konveksnim večkotnikom za Wachspresove koordinate (levo) in za koordinate povprečne vrednosti (desno).	18
12	Funkcija λ_2 nad konveksnim večkotnikom za Wachspresove koordinate (levo) in za koordinate povprečne vrednosti (desno).	19
13	Funkcija λ_3 nad konveksnim večkotnikom za Wachspresove koordinate (levo) in za koordinate povprečne vrednosti (desno).	19
14	Funkcija λ_4 nad konveksnim večkotnikom za Wachspresove koordinate (levo) in za koordinate povprečne vrednosti (desno).	20
15	Na sliki je nad nekonveksnim štirikotnikom prikazana funkcija $\lambda_4(v)$ za Wachspresove koordinate (levo) in za koordinate povprečne vrednosti (desno).	20
16	Na sliki je prikazan interpolant, ki interpolira funkcijske vrednosti v ogliščih za Wachspresove koordinate (levo) in koordinate povprečne vrednosti (desno).	21
17	Funkciji $B_i(v)$ in C_i	23

Seznam kratic

t.i. tako imenovan

1 Uvod

Zaključna naloga govori o baricentričnih koordinatah nad večkotniki. V začetnem poglavju se snov navezuje le na trikotnike v \mathbb{R}^2 (glej [1] in [2]). Trikotnik $S = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ sestavljajo poljubne tri nekolinearne točke. Pojubno točko v v trikotniku lahko zapišemo kot baricentrično kombinacijo točk v_1, v_2, v_3 :

$$v = \lambda_1(v)v_1 + \lambda_2(v)v_2 + \lambda_3(v)v_3, \quad \lambda_1(v) + \lambda_2(v) + \lambda_3(v) = 1,$$

pri čemer so $\lambda_1(v)$, $\lambda_2(v)$ in $\lambda_3(v)$ baricentrične koordinate točke v . Natančnejša definicija baricentričnih koordinat je sestavljena iz dveh pogojev, in sicer:

- (i) Koordinate $\lambda_i(v)$ tvorijo particijo enote za poljubno točko v .
- (ii) Utežena vsota oglišč trikotnika, kjer so uteži baricentrične koordinate neke točke v , je ravno točka v .

Baricentrične koordinate nad trikotniki so enolično določene s pomočjo predznačenih plosčnin trikotnikov. Koordinate $\lambda_i(v)$ so nenegativne le znotraj trikotnika S , zunaj trikotnika pa je vsaj ena koordinata negativna. Za baricentrične koordinate znotraj trikotnika velja Lagrangeeva lastnost $\lambda_i(v_j) = \delta_{ij}$, kjer je

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1; & i = j, \\ 0; & i \neq j. \end{cases} \quad (1.1)$$

Imajo pa te koordinate tudi druge lepe lastnosti, kot so afina invariantnost in neskončnokrat zvezna odvedljivost.

Te baricentrične koordinate lahko preprosto posplošimo na \mathbb{R}^d . Torej imamo namesto trikotnika sedaj simpleks $S = \langle v_1, v_2, \dots, v_{d+1} \rangle$. Baricentrične koordinate nad simpleksi morajo ravno tako zadoščati pogojema (i) in (ii). Določene so enolično s predznačenimi volumni simpleksov.

V tretjem poglavju se zopet omejimo na \mathbb{R}^2 in na baricentrične koordinate nad konveksnimi večkotniki $S := [v_1, v_2, \dots, v_n]$ (glej [1]). Baricentrične koordinate glede na oglišča konveksnega večkotnika so definirane kot funkcije $(\lambda_i)_{i=1, \dots, n} : S \rightarrow \mathbb{R}$, ki zadoščajo pogojema (i), (ii) in pogoju, da so koordinate nenegativne znotraj večkotnika S . Baricentrične koordinate glede na oglišča konveksnih večkotnikov niso enolično določene, zato poznamo več različnih konstrukcij teh koordinat. V tem poglavju sta

opisani dve najbolj znani družini baricentričnih koordinat nad konveksnimi večkotniki. Prva družina so Wachspresove koordinate, ki so dobro definirane le nad notranjostjo konveksnih večkotnikov (povzeto po [1], [2], [3] in [8]). Druga družina baricentričnih koordinat, ki so dobro definirane tudi nad nekonveksnimi večkotniki, pa so koordinate povprečne vrednosti (povzeto po [2], [3] in [4]). Za Wachspresove koordinate velja, da so afino invariantne in neskončnokrat zvezno odvedljive znotraj konveksnih večkotnikov. Koordinate povprečne vrednosti so prav tako neskončnokrat zvezno odvedljive, niso pa afino invariantne. Invariantne so le za translacije, rotacije in enakomerne raztege.

V zadnjem poglavju je raziskano, ali obstajajo še katere druge družine tri-točkovnih baricentričnih koordinat (povzeto po [1]). Ugotovimo da so Wachspresove koordinate edine tri-točkovne baricentrične koordinate, ki so afino invariantne za konveksne večkotnike, koordinate povprečne vrednosti pa so edine tri-točkovne baricentrične koordinate, ki so dobro definirane tudi za nekonveksne večkotnike.

2 Baricentrične koordinate nad simpleksi

2.1 Baricentrične koordinate nad trikotniki v \mathbb{R}^2

Poljubne tri nekolinearne točke v_1, v_2, v_3 definirajo baricentrični koordinatni sistem v ravnini, kot je prikazano na sliki 1. Poljubno točko v v tej ravnini lahko zapišemo kot baricentrično kombinacijo točk v_1, v_2, v_3 kot:

$$v = \lambda_1(v)v_1 + \lambda_2(v)v_2 + \lambda_3(v)v_3, \quad \lambda_1(v) + \lambda_2(v) + \lambda_3(v) = 1, \quad (2.1)$$

pri čemer so $\lambda_1(v), \lambda_2(v), \lambda_3(v)$ baricentrične koordinate točke v glede na v_1, v_2, v_3 .

Vpeljemo še natančnejšo definicijo.

Definicija 2.1. Baricentrične koordinate točke v glede na v_1, v_2, v_3 so definirane kot funkcije $\lambda_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ki zadoščajo naslednjim pogojem:

- (i) Koordinate $\lambda_i(v)$ tvorijo particijo enote za poljubno točko $v \in \mathbb{R}^2$:

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i(v) = 1. \quad (2.2)$$

- (ii) Utežena vsota oglišč trikotnika, kjer so uteži baricentrične koordinate neke točke v , je ravno točka v :

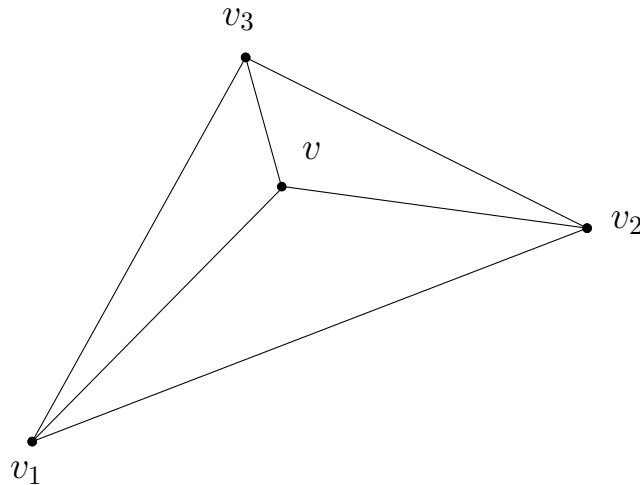
$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i(v)v_i = v. \quad (2.3)$$

Definicija 2.2. Naj bodo $v_i = (x_i, y_i)$ za $i = 1, 2, 3$. Potem definiramo *predznačeno ploščino* trikotnika $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ kot

$$A(v_1, v_2, v_3) := \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

Izrek 2.3. Baricentrične koordinate $\lambda_i, i = 1, 2, 3$, nad trikotnikom $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ so enolično določene kot:

$$\lambda_1(v) = \frac{A(v, v_2, v_3)}{A(v_1, v_2, v_3)}, \quad \lambda_2(v) = \frac{A(v_1, v, v_3)}{A(v_1, v_2, v_3)}, \quad \lambda_3(v) = \frac{A(v_1, v_2, v)}{A(v_1, v_2, v_3)}. \quad (2.5)$$



Slika 1: Trikotnik z oglišči v_1, v_2, v_3 ter točko v .

Dokaz. Iz definicije 2.1 vemo, da velja: $\sum_{i=1}^3 \lambda_i(v) = 1$ in $\sum_{i=1}^3 \lambda_i(v)v_i = v$. Če definiramo $v_i := (x_i, y_i)$ in $v := (x, y)$, lahko enačbo (2.3) razpišemo po komponentah: $\lambda_1(v)x_1 + \lambda_2(v)x_2 + \lambda_3(v)x_3 = x$, $\lambda_1(v)y_1 + \lambda_2(v)y_2 + \lambda_3(v)y_3 = y$.

Sedaj imamo tri linearne enačbe za tri neznanke $\lambda_1(v), \lambda_2(v), \lambda_3(v)$. To lahko zapišemo v matrično obliko:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} \lambda_1(v) \\ \lambda_2(v) \\ \lambda_3(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Ker je $\det M \neq 0$, ima sistem samo eno rešitev in lahko za izračun uporabimo Cramerjevo pravilo:

$$\lambda_1 = \frac{2A(v, v_2, v_3)}{2A(v_1, v_2, v_3)} = \frac{A(v, v_2, v_3)}{A(v_1, v_2, v_3)}, \quad \lambda_2 = \frac{A(v_1, v, v_3)}{A(v_1, v_2, v_3)}, \quad \lambda_3 = \frac{A(v_1, v_2, v)}{A(v_1, v_2, v_3)}. \quad \square$$

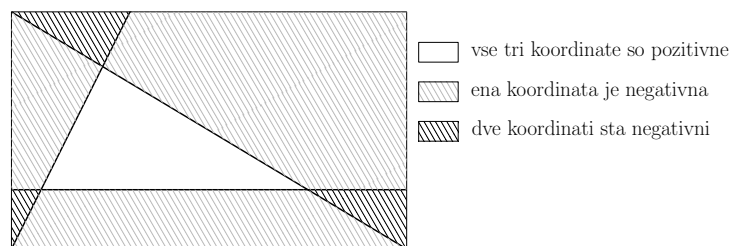
Definirajmo trikotnik $S := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

Izrek 2.4. Koordinate $\lambda_i(v)$ so nenegativne znotraj trikotnika S (glej sliko 2):

$$\lambda_i(v) \geq 0 \quad \text{za} \quad i = 1, 2, 3 \quad \Leftrightarrow \quad v \in S. \tag{2.7}$$

Dokaz. Če $v \in S$, potem so po izreku 2.3 $\lambda_i(v) \geq 0$ za $\forall i$, saj so vse količine v izreku 2.3 nenegativne. Če $v \notin S$, potem zopet po izreku 2.3 obstaja $i \ni \lambda_i(v) < 0$. \square

Opomba 2.5. Zunaj trikotnika S velja, da je vsaj ena koordinata negativna. Zaradi latsnosti (ii) iz definicije 2.1 ne morejo biti vse tri koordinate negativne.



Slika 2: Predznaki baricentričnih koordinat.

Izrek 2.6. Baricentrične koordinate znotraj trikotnika S so linearni polinomi, za katere velja Lagrangeeva lastnost $\lambda_i(v_j) = \delta_{ij}$, kjer je δ_{ij} definiran v (1.1).

Dokaz. Dokaz linearnosti sledi iz tega, da je števec v zapisu λ_i , za vse $i = 1, 2, 3$, linearen polinom v dveh spremenljivkah (x in y).

$$A(v, v_2, v_3) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2) + x_2y_3 - x_3y_2),$$

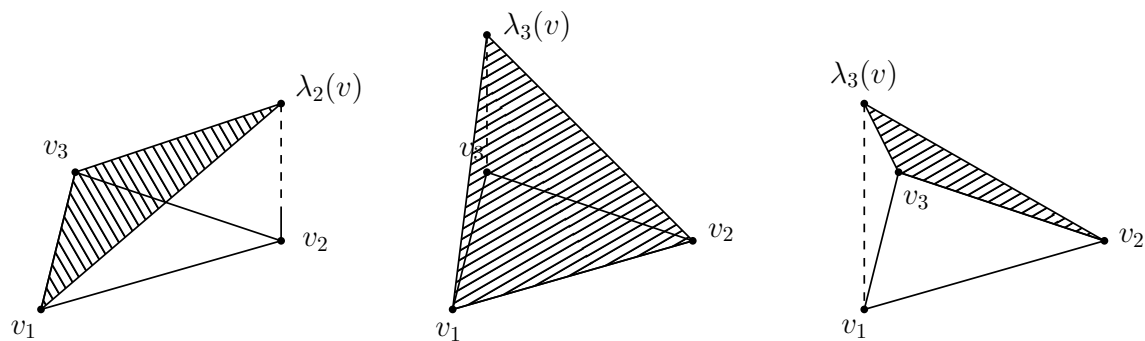
$$A(v_1, v, v_3) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3) + x_3y_1 - x_1y_3),$$

$$A(v_1, v_2, v) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1y_2 - x_2y_1),$$

medtem ko je imenovalec $A(v_1, v_2, v_3)$ vedno ista konstanta, ker je predznačena ploščina trikotnika S vedno enaka in točno določena. Dokaz Lagrangeeve lastnosti je trivialen, saj se v zapisu $\lambda_i(v_j)$ bodisi števec in imenovalec pokrajšata ali pa pride števec enak 0, saj je ploščina izrojenega trikotnika enaka 0. □

Izrek 2.7. Baricentrične koordinate $\lambda_i, i = 1, 2, 3$, so:

- (i) afino invariantne,
- (ii) C^∞ .



Slika 3: Baricentrične koordinate kot funkcije.

Dokaz. Afine preslikave so dobljene iz rotacij, premikov, raztegov in strigov. Zanje velja, da se razmerja plosčin ohranjajo, na primer:

$$\lambda_1(v) = \frac{A(v, v_2, v_3)}{A(v_1, v_2, v_3)} = \frac{A(\Phi(v), \Phi(v_2), \Phi(v_3))}{A(\Phi(v_1), \Phi(v_2), \Phi(v_3))} = \lambda_1(\Phi(v)),$$

kjer je Φ poljubna afina preslikava. Po izreku 2.6 je λ_1 linearen polinom $\Rightarrow \lambda_1$ je \mathcal{C}^∞ . Podobno dokažemo še za λ_2 in λ_3 . \square

Baricentrične koordinate lahko uporabimo, da definiramo linearno interpolacijo treh točk $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$. Namreč vsaka točka oblike $v(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \lambda_3 v_3)$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, leži na ravnini določeni z v_1, v_2, v_3 . Če zahtevamo še $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, 3$, dobimo natanko trikotnik $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$.

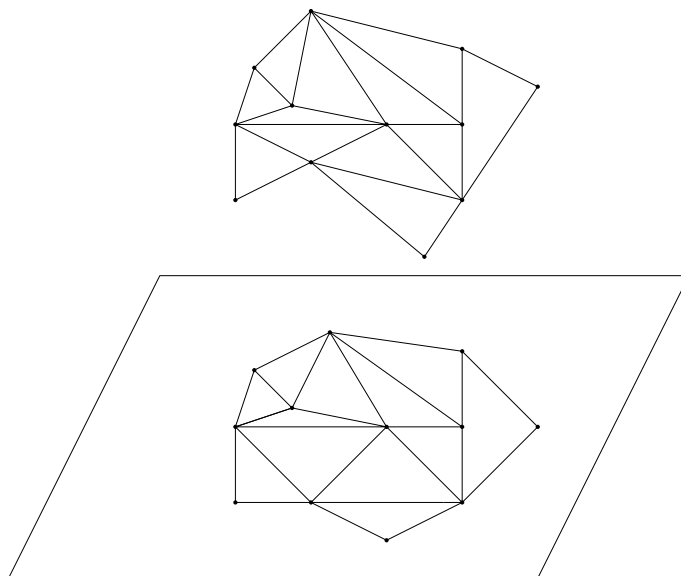
Primer 2.8. Vizualizacija podatkov v \mathbb{R}^3 .

Na začetku imamo podane določene točke v prostoru. Da bi si lažje predstavljali, kaj točke prikazujejo, naredimo projekcijo na ravnino. Nato na njih naredimo neko triangulacijo, jo prenesemo v prostor in izvedemo odsekoma linearno interpolacijo. Tako dobimo boljšo predstavo o sliki, ki so jo na začetku sestavljale le točke (glej sliko 4).

2.2 Posplošitev na \mathbb{R}^d

Baricentrične koordinate lahko posplošimo na več dimenzij. Naj bo $S = \langle v_1, v_2, \dots, v_{d+1} \rangle$ simpleks v \mathbb{R}^d .

Definicija 2.9. Baricentrične koordinate v \mathbb{R}^d so definirane kot funkcije $\lambda_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, ki zadoščajo naslednjim pogojem:



Slika 4: Pravokotna projekcija.

(i) Koordinate $\lambda_i(v)$ tvorijo particijo enote:

$$\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i(v) = 1. \quad (2.8)$$

(ii) Utežena vsota oglišč simpleksa, kjer so uteži baricentrične koordinate neke točke v , je ravno točka v :

$$\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i(v)v_i = v. \quad (2.9)$$

Izrek 2.10. Baricentrične koordinate $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, d + 1$, so enolično določene kot:

$$\lambda_i(v) = \frac{A(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_{d+1})}{A(v_1, v_2, \dots, v_{d+1})}, \quad (2.10)$$

kjer A označuje predznačen volumen simpleksa.

Dokaz. Iz definicije 2.9 vemo, da velja: $\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i(v) = 1$ in $\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i(v)v_i = v$. Če definiramo $v_i = (v_{1_i}, v_{2_i}, \dots, v_{d_i})$ in $v = (t_1, t_2, \dots, t_d)$ lahko enačbo (2.9) razpišemo po komponentah:

$$\begin{aligned} \lambda_1(v)v_{1_1} + \lambda_2(v)v_{1_2} + \dots + \lambda_{d+1}(v)v_{1_{d+1}} &= t_1, \\ &\vdots \\ \lambda_1(v)v_{d_1} + \lambda_2(v)v_{d_2} + \dots + \lambda_{d+1}(v)v_{d_{d+1}} &= t_d. \end{aligned}$$

Sedaj imamo $d + 1$ enačb za $d + 1$ neznank $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d+1}$. To lahko zapišemo v matrično obliko:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ v_{1_1} & v_{1_2} & \dots & v_{1_{d+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{d_1} & v_{d_2} & \dots & v_{d_{d+1}} \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} \lambda_1(v) \\ \lambda_2(v) \\ \vdots \\ \lambda_{d+1}(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_d \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Ker je $\det M \neq 0$, ima sistem samo eno rešitev in Cramerjevo pravilo nam da

$$\lambda_i(v) = \frac{A(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_{d+1})}{A(v_1, v_2, \dots, v_{d+1})}. \quad \square$$

3 Baricentrične koordinate nad konveksnimi večkotniki

Vrnimo se znova v \mathbb{R}^2 . Baricentrične koordinate lahko definiramo tudi glede na oglišča konveksnega večkotnika $S := [v_1, v_2, \dots, v_n]$. Vzemimo poljubno točko $v \in S$. S pomočjo te točke lahko razdelimo večkotnik na n trikotnikov $\langle v, v_i, v_{i+1} \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$, $v_{n+1} := v_1$ (glej sliko 5).

Definicija 3.1. Baricentrične koordinate glede na oglišča v_1, v_2, \dots, v_n konveksnega večkotnika, $n \geq 3$, so definirane kot funkcije $(\lambda_i)_{i=1,2,\dots,n} : S \rightarrow \mathbb{R}$, ki zadoščajo naslednjim pogojem:

- (i) Koordinate so nenegativne znotraj večkotnika S :

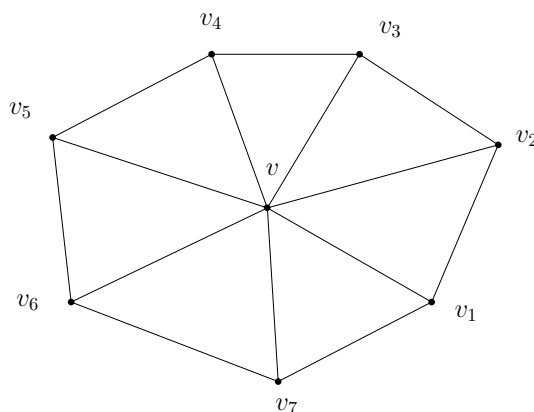
$$v \in S \Rightarrow \lambda_i(v) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

- (ii) Koordinate $\lambda_i(v)$ tvorijo particijo enote:

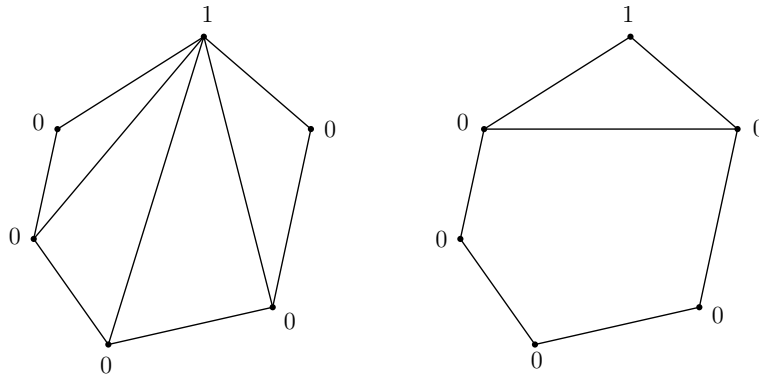
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(v) = 1. \quad (3.2)$$

- (iii) Utežena vsota oglišč večkotnika, kjer so uteži baricentrične koordinate neke točke, je ravno ta točka:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(v) v_i = v. \quad (3.3)$$



Slika 5: Razdelitev večkotnika $S = [v_1, v_2, \dots, v_7]$ na trikotnike s pomočjo točke v .



Slika 6: Funkcije L_i (levo) in ℓ_i (desno).

Baricentrične koordinate v ravnini so glede na oglišča trikotnika enolično določene, glede na oglišča konveksnega večkotnika pa ne, zato poznamo veliko različnih konstrukcij teh koordinat. Za vsak $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ označimo z $L_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno funkcijo, ki je linearna na vsakem trikotniku oblike $\langle v_j, v_{j+1}, v_i \rangle$, $j \neq i - 1, i$, in ima v ogliščih vrednosti $L_i(v_j) = \delta_{ij}$. Definirajmo še funkcije $\ell_i : S \rightarrow \mathbb{R}$, ki so linearne na trikotnikih $\langle v_{i-1}, v_i, v_{i+1} \rangle$ in ničelne v ogliščih $S \setminus \langle v_{i-1}, v_i, v_{i+1} \rangle$ ter zanje velja $\ell_i(v_j) = \delta_{ij}$ (glej sliko 6).

Definicija 3.2. Definirajmo funkciji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in $g(v) := \sum_{j=1}^n \lambda_j(v) f(v_j)$. Funkcijo g imenujemo *baricentrični interpolant funkcije f* .

Izrek 3.3. Naj bo $D \subseteq S$ in naj bodo $(\lambda_i)_{i=1,2,\dots,n} : D \rightarrow \mathbb{R}$ baricentrične koordinate. Potem velja:

$$(a) \quad 0 \leq \ell_i(v) \leq \lambda_i(v) \leq L_i(v) \leq 1,$$

$$(b) \quad \lambda_i(v_j) = \delta_{ij},$$

$$(c) \quad g(v_i) = f(v_i).$$

Dokaz. Katerakoli točka $v \in D$ je hkrati tudi v S , zato pripada vsaj enemu trikotniku $\langle v_i, v_j, v_{j+1} \rangle$, $j \neq i - 1, i$. Iz definicije 2.2 sledi, da je $A(v, v_j, v_{j+1})$ linearna funkcija v -ja in s pomočjo definicije 3.1 vidimo:

$$A(v, v_j, v_{j+1}) \stackrel{(ii),(iii)}{=} \sum_{k=1}^n \lambda_k(v) A(v_k, v_j, v_{j+1}) \stackrel{(i)}{\geq} \lambda_i(v) A(v_i, v_j, v_{j+1}).$$

Ta neenakost je posledica nenegativnosti koordinat znotraj večkotnika. Od tod sledi, da je

$$\lambda_i(v) \leq A(v, v_j, v_{j+1}) / A(v_i, v_j, v_{j+1}) = L_i(v).$$

Nasprotna neenakost, $\ell_i(v) \leq \lambda_i(v)$, je trivialna, če je v izven trikotnika $\langle v_{i-1}, v_i, v_{i+1} \rangle$, saj je tam $\ell_i(v) = 0$. Predpostavimo sedaj, da je $v \in \langle v_{i-1}, v_i, v_{i+1} \rangle$. Ker je $A(v, v_{i+1}, v_{i-1})$ linearna v v , je

$$\begin{aligned} A(v, v_{i+1}, v_{i-1}) &= \sum_{k=1}^n \lambda_k(v) A(v_k, v_{i+1}, v_{i-1}) \\ &= \lambda_i(v) A(v_i, v_{i+1}, v_{i-1}) - \sum_{k \neq i-1, i, i+1} \lambda_k(v) A(v_k, v_{i-1}, v_{i+1}) \\ &\leq \lambda_i(v) A(v_i, v_{i+1}, v_{i-1}), \end{aligned}$$

saj so $A(v_k, v_{i+1}, v_{i-1}) \geq 0$ za $k = 1, 2, \dots, i-2, i+2, \dots, n$. Iz tega sledi

$$\lambda_i(v) \geq A(v, v_{i+1}, v_{i-1}) / A(v_i, v_{i+1}, v_{i-1}) = \ell_i(v).$$

Naj bo sedaj $(\lambda_i)_{i=1,2,\dots,n} : S \rightarrow \mathbb{R}$ poljubna množica baricentričnih koordinat, potem velja:

$$\ell_i(v) \leq \lambda_i(v) \leq L_i(v), \quad v \in S$$

in

$$\ell_i(v) = \lambda_i(v) = L_i(v), \quad v \in \partial S$$

Torej je λ_i linearna na vsaki povezavi $\langle v_j, v_{j+1} \rangle$ in zadošča $\lambda_i(v) = \delta_{i,j}$.

Dokazati moramo le še točko (c). Velja

$$g(v_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j(v_i) f(v_j) = \lambda_i(v_i) f(v_i) = f(v_i). \quad \square$$

3.1 Wachspresove koordinate

Definicija 3.4. *Wachspresove koordinate* so koordinate nad konveksnimi večkotniki, ki so definirane kot:

$$\lambda_i(v) = \frac{w_i(v)}{\sum_{j=1}^n w_j(v)}, \quad (3.4)$$

kjer so

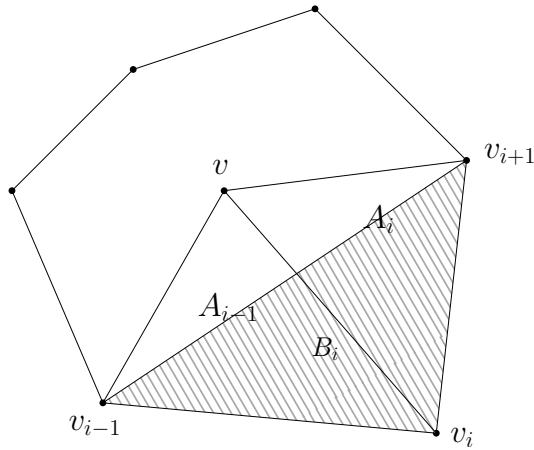
$$w_i(v) = A(v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) \prod_{j \neq i-1, i} A(v, v_j, v_{j+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$

Trditev 3.5. *Wachspresove koordinate lahko definiramo tudi kot*

$$\lambda_i(v) = \frac{\tilde{w}_i(v)}{\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j(v)}$$

kjer so

$$\tilde{w}_i(v) = \frac{A(v_{i-1}, v_i, v_{i+1})}{A(v, v_{i-1}, v_i) A(v, v_i, v_{i+1})}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$



Slika 7: Wachspressove koordinate.

Dokaz. Velja:

$$w_i(v) = \tilde{w}_i(v) \prod_{k=1}^n A(v, v_k, v_{k+1}).$$

Torej

$$\lambda_i(v) = \frac{w_i(v)}{\sum_{j=1}^n w_j(v)} = \frac{\tilde{w}_i(v) \prod_{k=1}^n A(v, v_k, v_{k+1})}{\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j(v) \prod_{k=1}^n A(v, v_k, v_{k+1})} = \frac{\tilde{w}_i(v)}{\sum_{j=1}^n \tilde{w}_j(v)}. \quad \square$$

Opomba 3.6. Za nekonveksne večkotnike Wachspressove koordinate niso dobro definirane, saj se lahko zgodi, da je imenovalec enak 0 (slika 15).

Iz trditve 3.5 torej sledi, da za izračun w_i potrebujemo tri sosednja oglišča večkotnika, zato Wachspressove koordinate uvrščamo med t.i. *tri-točkovne koordinate*. Za vsak i moramo s pomočjo treh sosednjih oglišč v_{i-1}, v_i, v_{i+1} izračunati predznačeni plosčini dveh trikotnikov $A_{i-1} := A(v, v_{i-1}, v_i)$ in $A_i := A(v, v_i, v_{i+1})$ ter predznačeno plosčino trikotnika na treh sosednjih ogliščih $B_i := A(v_{i-1}, v_i, v_{i+1})$, kot je označeno na sliki 7.

Trditev 3.7. *Wachspressove koordinate so baricentrične koordinate.*

Dokaz. Dokazati moramo, da za Wachspressove koordinate veljajo točke (i), (ii) in (iii) iz definicije 3.1.

(i) $\lambda_i(v)$ so nenegativne, ker so $\tilde{w}_i(v) \geq 0$ za vse $v \in S$, zato so tudi $\lambda_i(v) \geq 0$ za $v \in S$.

(ii)

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(v) = \sum_{i=1}^n \frac{w_i(v)}{\sum_{j=1}^n w_j(v)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n w_j(v)} \sum_{i=1}^n w_i(v) = 1.$$

(iii) Pokažimo najprej, da je dovolj dokazati

$$\sum_{i=1}^n w_i(v)(v_i - v) = 0.$$

Enačbo $\sum_{i=1}^n \lambda_i(v)v_i = v$ na desni strani pomnožimo z 1, ki je po točki (ii) iz definicije 3.1 enaka $\sum_{i=1}^n \lambda_i(v)$ in dobimo

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(v)v_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i(v)v,$$

iz česar sledi

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(v)(v_i - v) = 0.$$

Vstavimo nastavek (3.4) in dobimo

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i(v)}{\sum_{j=1}^n w_j(v)} (v_i - v) \right),$$

iz česar sledi

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^n w_j(v)} \left(\sum_{i=1}^n w_i(v)(v_i - v) \right) = 0.$$

Očitno to implicira

$$\sum_{i=1}^n w_i(v)(v_i - v) = 0, \tag{3.6}$$

kar smo želeli pokazati.

Sedaj nam ostane še dokazati, da (3.6) res drži. Naj bo

$$A_i = A(v, v_i, v_{i+1}) \quad \text{in} \quad B_i = A(v_{i-1}, v_i, v_{i+1}).$$

Izrazimo v kot

$$v = \frac{A_i}{B_i}v_{i-1} + \frac{(B_i - A_{i-1} - A_i)}{B_i}v_i + \frac{A_{i-1}}{B_i}v_{i+1}$$

in preuredimo:

$$\frac{B_i}{A_{i-1}A_i}(v_i - v) = \frac{1}{A_{i-1}}(v_i - v_{i-1}) - \frac{1}{A_i}(v_{i+1} - v_i).$$

S seštevanjem obeh strani po i dobimo

$$\sum_{i=1}^n \frac{B_i}{A_{i-1}A_i}(v_i - v) = 0$$

oziroma

$$\sum_{i=1}^n w_i(v)(v_i - v) = 0. \quad \square$$

Trditev 3.8. *Wachspressove koordinate so invariantne za translacije, rotacije in enakomerne raztege ter C^∞ znotraj konveksnih večkotnikov.*

Dokaz. Ploščino $A(v, v_i, v_{i+1})$ lahko zapišemo tudi kot $\|v - v_i\| \cdot \|v - v_{i+1}\| \cdot \frac{\sin(\alpha_i)}{2}$, kjer je α_i kot v $\langle v, v_i, v_{i+1} \rangle$ pri oglišču v . Podobno velja za $A(v_{i-1}, v_i, v_{i+1})$. Pri translacijah in rotacijah se koti in razdalje ohranjajo, torej je

$$w_i(\varphi(v); \varphi(v_1), \varphi(v_2), \dots, \varphi(v_n)) = w_i(v; v_1, v_2, \dots, v_n),$$

kjer je φ poljubna rotacija ali translacija. Pri enakomernih raztegih se koti ohranjajo, razdalje pa se skalirajo z istim faktorjem, ki se nato pri λ_i pokrajša in zato velja

$$\lambda_i(\varphi(v); \varphi(v_1), \varphi(v_2), \dots, \varphi(v_n)) = \lambda_i(v; v_1, v_2, \dots, v_n),$$

kjer je φ poljubni enakomerni razteg. Dokazati moramo še, da so \mathcal{C}^∞ . Wachspresove koordinate so racionalne funkcije, ki imajo v imenovalcu in števcu polinom. Racionalna funkcija je \mathcal{C}^∞ , če nima pola, kar pomeni, da imenovalec ne sme biti enak 0. Kot že vemo so Wachspresove koordinate dobro definirane znotraj konveksnih večkotnikov, zato imenovalec ne more biti enak 0. \square

Opomba 3.9. Wachspresove koordinate so invariantne tudi za splošne afine transformacije (glej [1]).

Primer 3.10. Pogledjmo si primer uporabe Wachspresovih koordinat na zvezdi z oglišči T_1, T_2, \dots, T_{12} , ki leži znotraj petkotnika z oglišči T_A, T_B, T_C, T_D, T_E , kot je prikazano na sliki 8. Zanima nas, kako se zvezda znotraj petkotnika spremeni, če uporabimo preslikavo φ , ki premakne dve točki petkotnika. Točke, ki definirajo petkotnik so: $T_A = (-4, -8)^T, T_B = (8, -2)^T, T_C = (10, 9)^T, T_D = (-8, 12)^T, T_E = (-10, 2)^T$. Točke zvezde pa so: $T_1 = (-5, 0)^T, T_2 = (-2, 0)^T, T_3 = (0, -3)^T, T_4 = (2, 0)^T, T_5 = (5, 0)^T, T_6 = (4, 3)^T, T_7 = (5, 6)^T, T_8 = (2, 6)^T, T_9 = (0, 9)^T, T_{10} = (-2, 6)^T, T_{11} = (-5, 6)^T, T_{12} = (-4, 3)^T$. Premaknili bomo dve točki petkotnika, in sicer točko T_B v $T_{B'} = (13, -7)^T$ in T_C v $T_{C'} = (5, 8)^T$. Izračunajmo najprej baricentrične koordinate $\lambda_{T_i}, i = A, B, C, D, E$, za vse točke zvezde. λ_{T_i} lahko izračunamo na dva načina, v tem primeru bomo uporabili način iz trditve 3.5. Zapisan je samo izračun za baricentrične koordinate točke T_1 , za točke T_2, T_3, \dots, T_{12} je izračun podoben.

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{T_A}(T_1) &= \frac{A(T_E, T_A, T_B)}{A(T_1, T_E, T_A)A(T_1, T_A, T_B)} = \frac{78}{19 \cdot 51} \doteq 0.0804953560371517, \\ \tilde{w}_{T_B}(T_1) &= \frac{A(T_A, T_B, T_C)}{A(T_1, T_A, T_B)A(T_1, T_B, T_C)} = \frac{60}{51 \cdot 73.5} \doteq 0.01600640256102441, \\ \tilde{w}_{T_C}(T_1) &= \frac{A(T_B, T_C, T_D)}{A(T_1, T_B, T_C)A(T_1, T_C, T_D)} = \frac{102}{73.5 \cdot 103.5} \doteq 0.013408261855466824, \\ \tilde{w}_{T_D}(T_1) &= \frac{A(T_C, T_D, T_E)}{A(T_1, T_C, T_D)A(T_1, T_D, T_E)} = \frac{93}{103.5 \cdot 27} \doteq 0.0332796564680662267, \\ \tilde{w}_{T_E}(T_1) &= \frac{A(T_D, T_E, T_A)}{A(T_1, T_D, T_E)A(T_1, T_E, T_A)} = \frac{40}{27 \cdot 19} \doteq 0.0804953560371517. \end{aligned}$$

Za nadaljne računanje potrebujemo še

$$\tilde{w}_{T_A}(T_1) + \tilde{w}_{T_B}(T_1) + \tilde{w}_{T_C}(T_1) + \tilde{w}_{T_D}(T_1) + \tilde{w}_{T_E}(T_1) = 0.22116238647336212.$$

Sedaj lahko izračunamo $\lambda_{T_i}(T_1)$ za $i \in A, B, C, D, E$:

$$\begin{aligned} \lambda_{T_A}(T_1) &= \frac{0.0804953560371517}{0.22116238647336212} = 0.36396494594186773, \\ \lambda_{T_B}(T_1) &= \frac{0.01600640256102441}{0.22116238647336212} = 0.072373981924599554, \\ \lambda_{T_C}(T_1) &= \frac{0.013408261855466824}{0.22116238647336212} = 0.06066321090461649, \\ \lambda_{T_D}(T_1) &= \frac{0.0332796564680662267}{0.22116238647336212} = 0.15047611394838439, \\ \lambda_{T_E}(T_1) &= \frac{0.0804953560371517}{0.22116238647336212} = 0.35255863709468666. \end{aligned}$$

Če premaknemo točki T_B in T_C v točki $T_{B'}$ in $T_{C'}$ dobimo novo obliko zvezde s točkami $T_{1'}, T_{2'}, \dots, T_{12'}$. Naredili bomo izračun za točko $T_{5'}$, za ostale točke je postopek enak.

$$\begin{aligned} T_{5'} &= \lambda_{T_A}(T_5)T_A + \lambda_{T_B}(T_5)T_{B'} + \lambda_{T_C}(T_5)T_{C'} + \lambda_{T_D}(T_5)T_D + \lambda_{T_E}(T_5)T_E \\ &= (6.579122819875689, -2.8603656532748269). \end{aligned}$$

Dobili smo točko $T_{5'}$. Oblika zvezde po transformaciji je prikazana na sliki 9. Če preslikava φ ni afina, potem $T_{5'}$ ni enaka točki $\varphi(T_5)$. Vseeno pa je to zelo uporaben način, kako v praksi spreminjati položaj določenega lika, telesa. Namreč baricentrične koordinate izračunamo samo enkrat (na začetku), potem pa vsakič računamo le konveksne kombinacije preslikanih točk petkotnika z istimi utežmi, kar je seveda zelo hitro.

3.2 Koordinate povprečne vrednosti

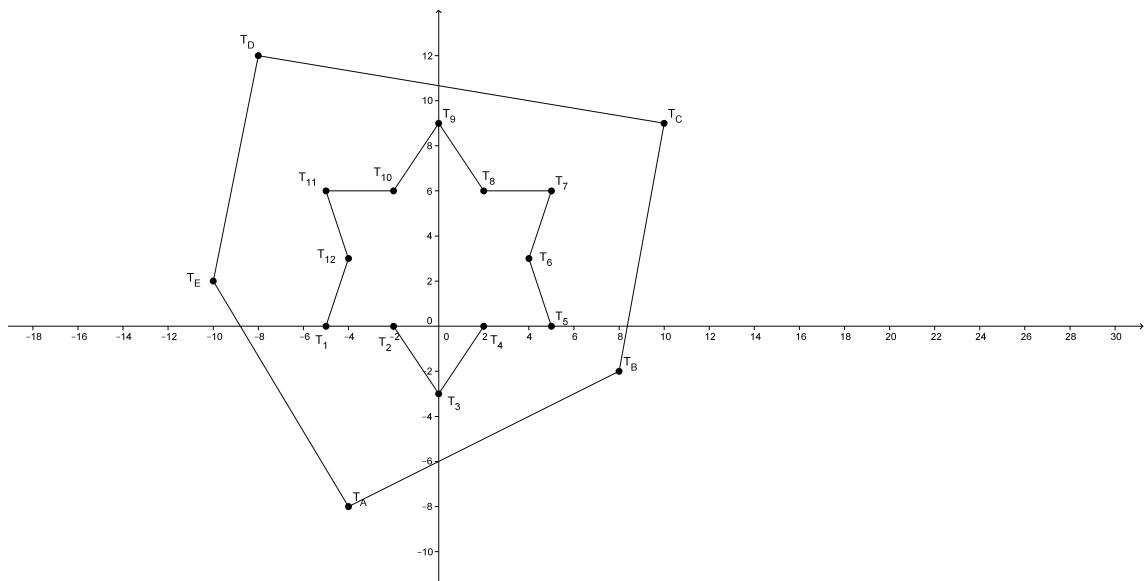
Definicija 3.11. *Koordinate povprečne vrednosti* so definirane s (3.4) in $w_i(v)$ oblike

$$w_i(v) = \frac{\tan(\alpha_{i-1}(v)/2) + \tan(\alpha_i(v)/2)}{\|v_i - v\|}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

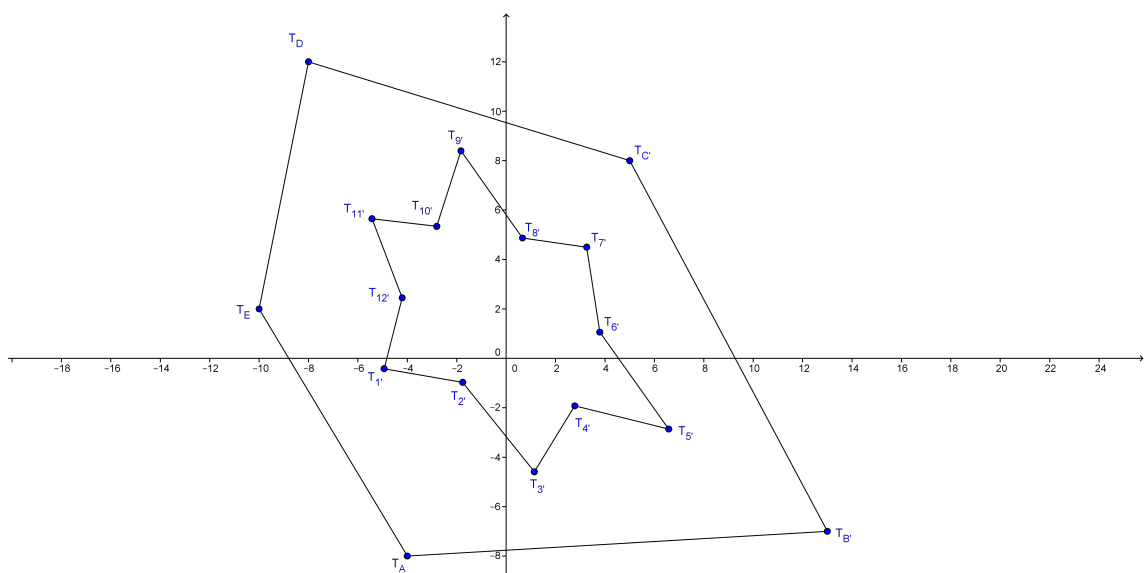
V tem primeru $\alpha_i(v)$, za katerega velja $0 < \alpha_i < \pi$, označuje kot v trikotniku $\langle v, v_i, v_{i+1} \rangle$ pri oglišču v (glej sliko 10).

Izrek 3.12. *Koordinate povprečne vrednosti so baricentrične koordinate.*

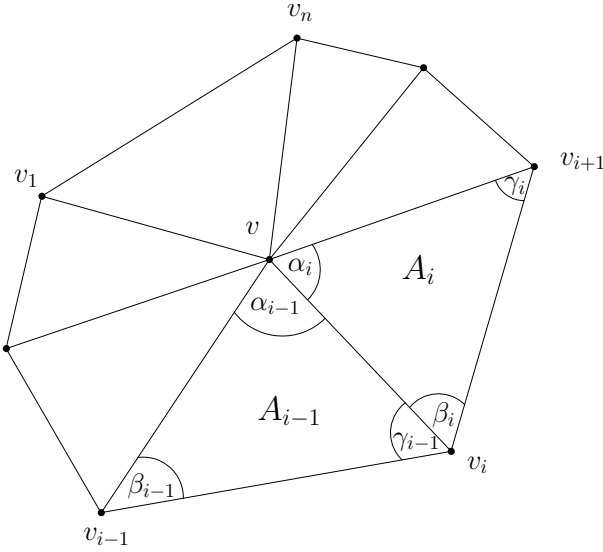
Dokaz. Ker je $0 < \alpha_i < \pi$, lahko vidimo, da je $\tan(\alpha_i/2)$ dobro definiran in pozitiven, torej so koordinate λ_i dobro definirane v notranjosti večkotnika in pozitivne za $i =$



Slika 8: Oblika zvezde pred transformacijo oglišč petkotnika.



Slika 9: Oblika zvezde po transformaciji oglišč petkotnika.



Slika 10: Oznake, potrebne za definicijo in izpeljavo lastnosti koordinat povprečne vrednosti.

$1, 2, \dots, n$ in po definiciji tvorijo particijo enote. Z vstavljanjem formule (3.7) v enačbo $\sum_{i=1}^n w_i(v)(v_i - v) = 0$ vidimo, da moramo pokazati

$$\sum_{i=1}^n (\tan(\alpha_{i-1}/2) + \tan(\alpha_i/2)) e_i = 0, \quad e_i := e_i(v) := \frac{(v_i - v)}{\|v_i - v\|},$$

oziroma

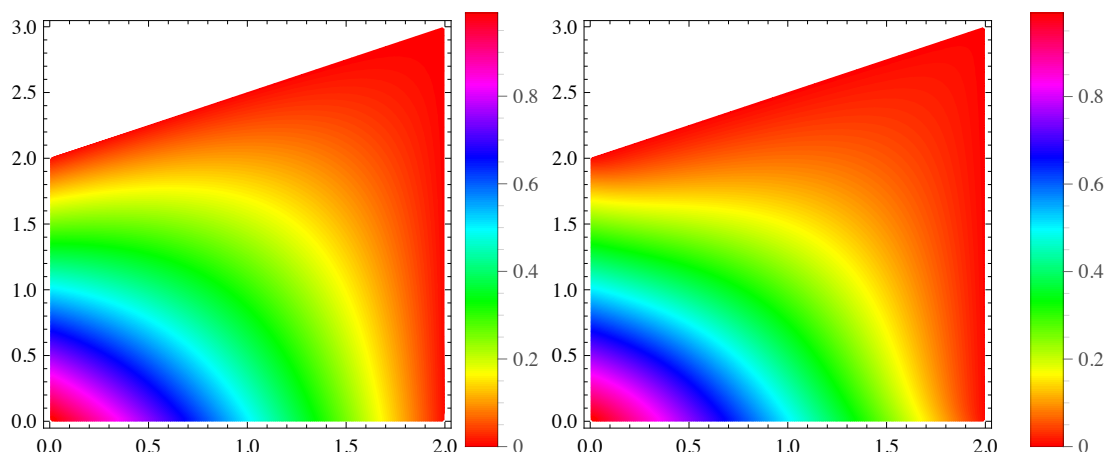
$$\sum_{i=1}^n \tan(\alpha_i/2)(e_i + e_{i+1}) = 0, \quad (3.8)$$

kjer je $v_{n+1} := v_1$. Da bi to dokazali, definirajmo $e_i = (\cos \theta, \sin \theta)$. To lahko naredimo, saj je $\|e_i\| = 1$. Potem je $\alpha_i = \theta_{i+1} - \theta_i$ in

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)(e_i + e_{i+1}) &= \tan\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)(\cos(\theta_i) + \cos(\theta_{i+1}), \sin(\theta_i) + \sin(\theta_{i+1})) \\ &= \tan\left(\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2}\right)(\cos(\theta_i) + \cos(\theta_{i+1}), \sin(\theta_i) + \sin(\theta_{i+1})) \\ &= \left(\frac{\sin((\theta_{i+1} - \theta_i)/2)}{\cos((\theta_{i+1} - \theta_i)/2)}(\cos(\theta_{i+1}) + \cos(\theta_i)), \frac{\sin((\theta_{i+1} - \theta_i)/2)}{\cos((\theta_{i+1} - \theta_i)/2)}(\sin(\theta_{i+1}) + \sin(\theta_i))\right) \\ &= \left(\frac{\sin\left(\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2}\right) \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\theta_{i+1} + \theta_i}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2}\right)}, \frac{\sin\left(\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2}\right) \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\theta_{i+1} + \theta_i}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2}\right)}\right) \\ &= \left(\sin\left(\frac{2\theta_{i+1}}{2}\right) + \sin\left(\frac{-2\theta_i}{2}\right), -\cos\left(\frac{2\theta_{i+1}}{2}\right) + \cos\left(\frac{-2\theta_i}{2}\right)\right) \\ &= (\sin(\theta_{i+1}) - \sin(\theta_i), \cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1})) \end{aligned}$$

S seštevanjem po $i = 1, 2, \dots, n$ dobimo (3.8). □

Trditev 3.13. *Koordinate povprečne vrednosti so invariantne za translacije, rotacije in enakomerne raztege.*



Slika 11: Funkcija λ_1 nad konveksnim večkotnikom za Wachspressove koordinate (levo) in za koordinate povprečne vrednosti (desno).

Dokaz. Naj bo φ poljubna translacija ali rotacija. Ker se pri translacijah in rotacijah koti in razdalje ohranjajo, po (3.7) velja

$$w_i(\varphi(v); \varphi(v_1), \varphi(v_2), \dots, \varphi(v_n)) = w_i(v; v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Naj bo sedaj φ enakomerni razteg. Pri enakomernih raztegih se koti ohranjajo, razdalje pa se skalirajo z istim faktorjem, ki se nato pri λ_i pokrajša in zato velja

$$\lambda_i(\varphi(v); \varphi(v_1), \varphi(v_2), \dots, \varphi(v_n)) = \lambda_i(v; v_1, v_2, \dots, v_n). \quad \square$$

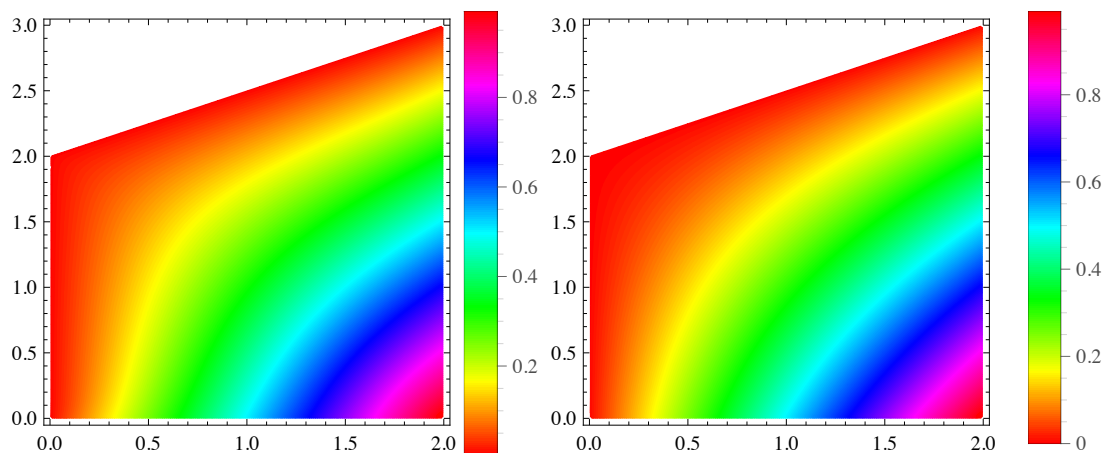
Opomba 3.14. Koordinate povprečnih vrednosti niso afino invariantne (glej [1]).

Trditev 3.15. V notranjosti območja S so koordinate povprečne vrednosti \mathcal{C}^∞ .

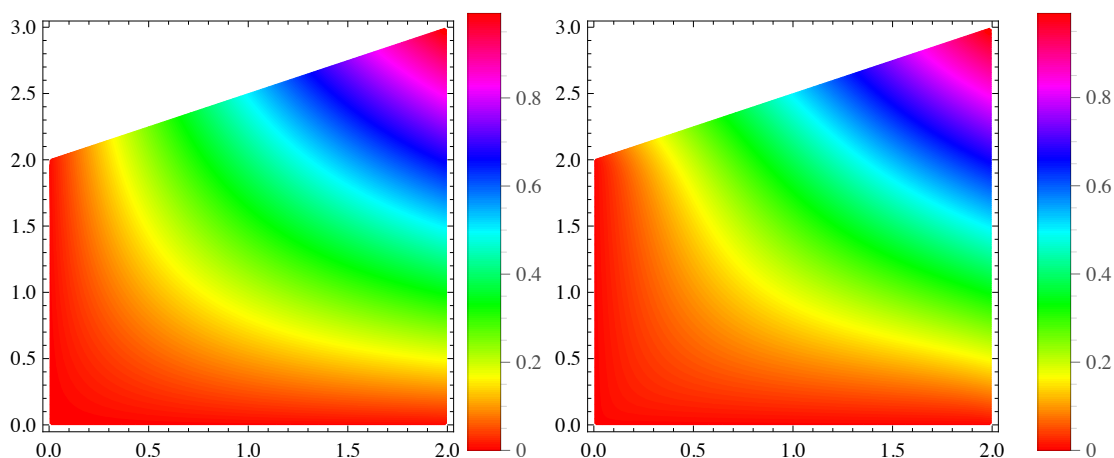
Dokaz. Iz definicije 3.11 je razvidno, da je w_i povsod dobro definirana, saj ima v imenovalcu normo, za katero velja, da je v notranjosti S vedno pozitivna. Prav tako je tudi v števcu povsod dobro definirana funkcija, in sicer vsota tangensov na intervalu $(0, \pi/2)$. Ker sta tako števec kot imenovalec \mathcal{C}^∞ funkciji, je takšen tudi w_i . Prav tako je λ_i povsod dobro definirana funkcija in zato tudi \mathcal{C}^∞ . \square

Opomba 3.16. Koordinate povprečne vrednosti so v resnici povsod \mathcal{C}^∞ , razen v ogliščih večkotnika S , kjer so le \mathcal{C}^0 (glej [5]).

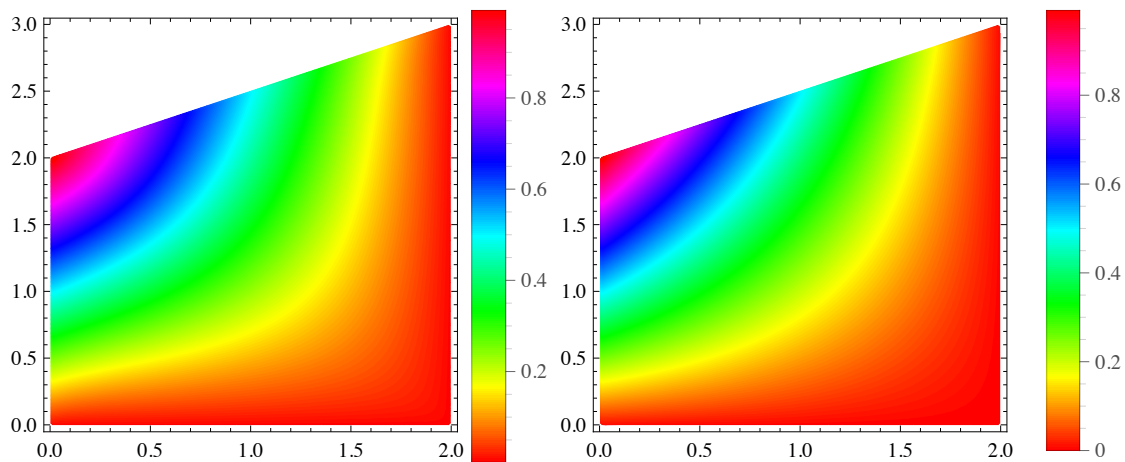
Primer 3.17. Na slikah 11, 12, 13 in 14 so nad konveksnim štirikotnikom z oglišči $v_1 = (0, 0)^T, v_2 = (2, 0)^T, v_3 = (2, 3)^T, v_4 = (0, 2)^T$ prikazane funkcije $\lambda_1(v), \lambda_2(v), \lambda_3(v)$ in $\lambda_4(v)$ za Wachspressove koordinate in koordinate povprečne vrednosti. Barva predstavlja višino funkcije $\lambda_i(v)$. Vidi se, da λ_i za Wachspressove koordinate ni enak λ_i za primer koordinat povprečne vrednosti za noben i .



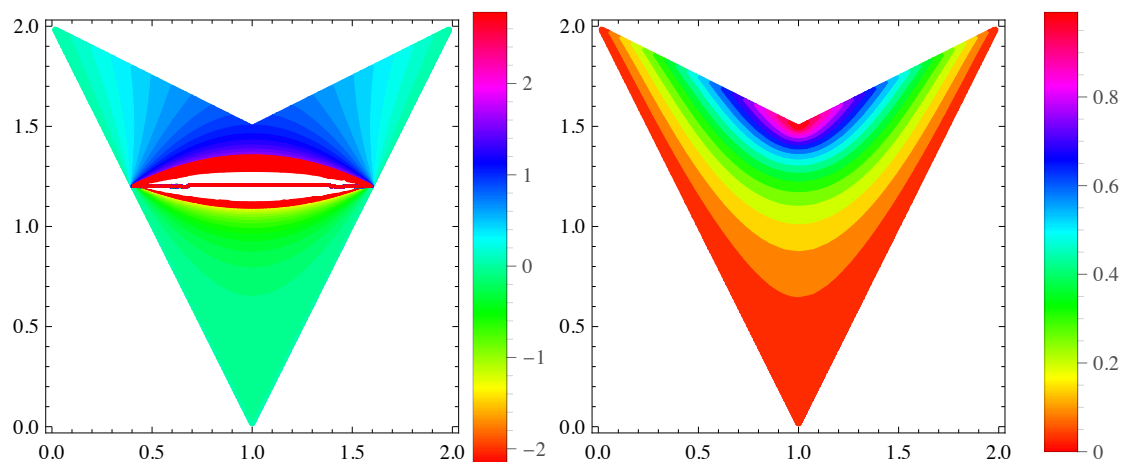
Slika 12: Funkcija λ_2 nad konveksnim večkotnikom za Wachspressove koordinate (levo) in za koordinate povprečne vrednosti (desno).



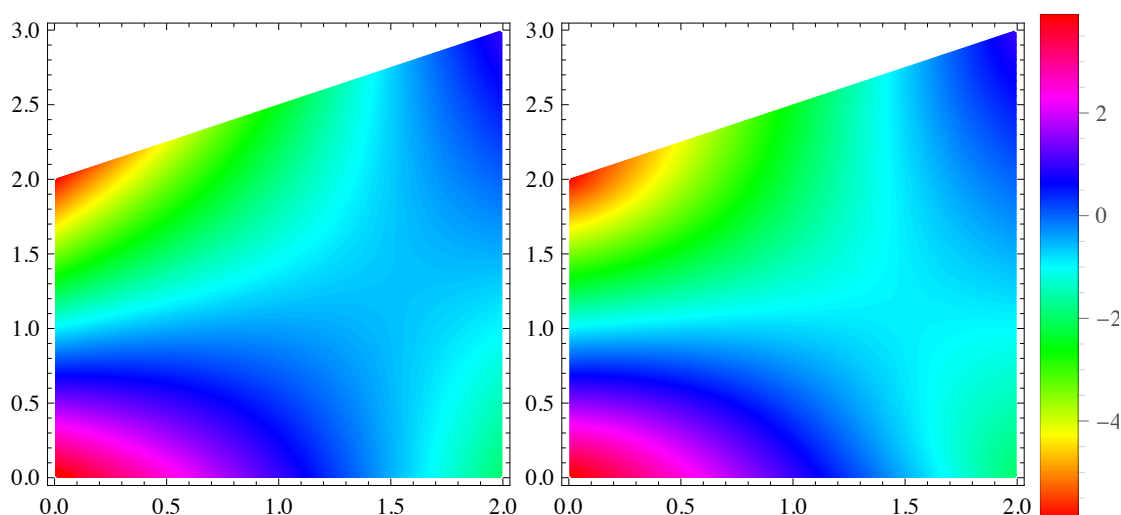
Slika 13: Funkcija λ_3 nad konveksnim večkotnikom za Wachspressove koordinate (levo) in za koordinate povprečne vrednosti (desno).



Slika 14: Funkcija λ_4 nad konveksnim večkotnikom za Wachspressove koordinate (levo) in za koordinate povprečne vrednosti (desno).



Slika 15: Na sliki je nad nekonveksnim štirikotnikom prikazana funkcija $\lambda_4(v)$ za Wachspressove koordinate (levo) in za koordinate povprečne vrednosti (desno).



Slika 16: Na sliki je prikazan interpolant, ki interpolira funkcijske vrednosti v ogliščih za Wachspressove koordinate (levo) in koordinate povprečne vrednosti (desno).

Primer 3.18. Na sliki 15 je nad nekonveksnim štirikotnikom z oglišči $v_1 = (0, 2)^T$, $v_2 = (1, 0)^T$, $v_3 = (2, 2)^T$, $v_4 = (1, 1.5)^T$ prikazana funkcija $\lambda_4(v)$ za Wachspressove koordinate in koordinate povprečne vrednosti. Pri funkcijah $\lambda_1(v)$, $\lambda_2(v)$ in $\lambda_3(v)$ pride do podobne situacije kot pri $\lambda_4(v)$. S slike je razvidno, da $\lambda_4(v)$ za primer Wachspressovih koordinat ni enaka kot $\lambda_4(v)$ za koordinate povprečne vrednosti. Pri Wachspressovih koordinatah lahko vidimo, da niso povsod dobro definirane, saj gredo vrednosti funkcije na določenem območju v neskončnost. Koordinate povprečne vrednosti pa so dobro definirane povsod, saj velja, da so dobro definirane tudi za nekonveksna območja.

Primer 3.19. Na sliki 16 je prikazan interpolant definiran v izreku 3.3 (c), oblike $g(v) = 4\lambda_1(v) - 2\lambda_2(v) + \lambda_3(v) - 6\lambda_4(v)$, ki interpolira funkcijske vrednosti 4, -2, 1, -6 v ogliščih v_1, v_2, v_3 in v_4 . Zopet lahko opazimo, da interpolant g za Wachspressove koordinate ni enak interpolantu g za koordinate povprečne vrednosti.

3.3 Poljubne druge tri-točkovne baricentrične koordinate

Naj bo v tem poglavju $S = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ znova konveksni večkotnik.

Definicija 3.20. Naj bodo $\lambda_i : S \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^n w_j}$. Če je vsaka koordinata $w_i : S \rightarrow \mathbb{R}$, odvisna le od v_{i-1}, v_i, v_{i+1} , pravimo, da so λ_i tri-točkovne koordinate.

Definirali smo že dve vrsti tri-točkovnih baricentričnih koordinat, to sta Wachspresove koordinate in koordinate povprečne vrednosti. Preverimo, če obstaja še katera druga družina takih koordinat. Pokažimo, da je dovolj poiskati baricentrične koordinate za notranjost večkotnika S , kar bomo označevali z $\text{Int}(S)$. Namreč, če je w poljubna točka v ∂S in w_1, w_2, \dots neko tako zaporedje točk v $\text{Int}(S)$, da je $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = w$, potem zaradi

$$\ell_i(w_k) \leq \lambda_i(w_k) \leq L_i(w_k),$$

in

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \ell_i(w_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} L_i(w_k) = \ell_i(w),$$

velja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i(w_k) = \ell_i(w) = L_i(w).$$

Če torej najdemo take funkcije $w_i : \text{Int}(S) \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$, da velja

$$w_i(v) \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^n w_i(v)(v_i - v) = 0, \quad (3.9)$$

potem so funkcije $\lambda_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^n w_j}$ baricentrične koordinate. Sprva poiščimo take w_i , ki zadoščajo (3.9), potem pa še, da bodo pozitivne. Definirajmo

$$A_i(v) := A(v, v_i, v_{i+1}), \quad B_i(v) := A(v, v_{i-1}, v_{i+1}), \quad C_i := A(v_{i-1}, v_i, v_{i+1}). \quad (3.10)$$

Očitno velja zveza $A_{i-1}(v) + A_i(v) = B_i(v) + C_i$.

Opomba 3.21. Za $v \in \text{Int}(S)$ velja $A_i(v) > 0, C_i > 0$, predznak $B_i(v)$ pa je odvisen od lege v glede na daljico $\overline{v_{i-1}, v_{i+1}}$ (glej sliko 17).

Trditev 3.22. *Naj bodo $c_1, c_2, \dots, c_n : \text{Int}(S) \rightarrow \mathbb{R}$ poljubne realne funkcije. Potem so funkcije*

$$w_i = \frac{c_{i+1}A_{i-1} - c_i B_i + c_{i-1}A_i}{A_{i-1}A_i} \quad (3.11)$$

koordinate, ki zadoščajo (3.9).

Dokaz. Izrazimo v kot baricentrično kombinacijo glede na oglišča trikotnika $\langle v_{i-1}, v_i, v_{i+1} \rangle$.

$$\frac{A_{i-1}(v)}{C_i} v_{i+1} + \frac{A_i(v)}{C_i} v_{i-1} - \frac{B_i(v)}{C_i} v_i = v, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad v_{n+1} := v_1, v_0 := v_n.$$

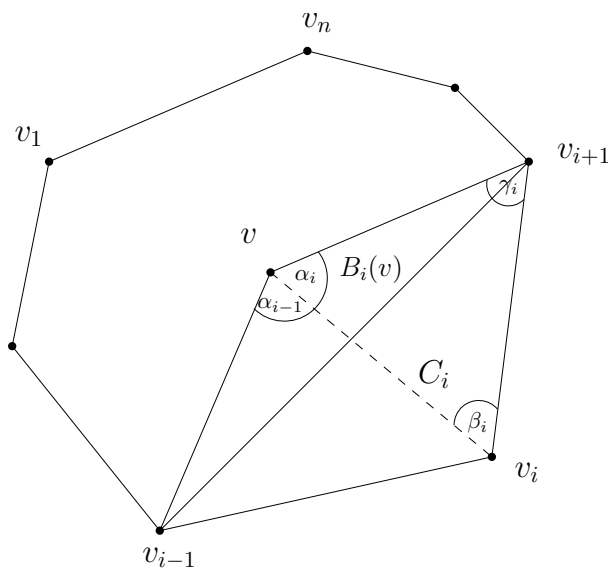
Pomnožimo s $C_i = A_{i-1}(v) + A_i(v) - B_i(v)$ in delimo z $A_{i-1}(v)A_i(v)$:

$$D_i(v) := \frac{v_{i-1} - v}{A_{i-1}(v)} + \frac{v_{i+1} - v}{A_i(v)} - \frac{B_i(v)}{A_{i-1}(v)A_i(v)}(v_i - v) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Iz tega sledi tudi

$$\sum_{i=1}^n c_i(v) D_i(v) = 0.$$

Preoblikujemo in dobimo (3.9) z w_i podanimi s (3.11). □



Slika 17: Funkciji $B_i(v)$ in C_i .

Trditev 3.23. Poljubne koordinate w_i , ki zadoščajo (3.9), lahko izrazimo v obliki (3.11).

Dokaz. Poljubno izberemo c_1 in c_2 , medtem ko c_3, c_4, \dots, c_n izberemo rekurzivno kot

$$c_{i+1} = \frac{A_{i-1}A_i w_i + c_i B_i - c_{i-1} A_i}{A_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1. \quad (3.12)$$

Definirajmo

$$\hat{w}_i := \frac{c_{i+1} A_{i-1} - c_i B_i + c_{i-1} A_i}{A_{i-1} A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

in dokažimo, da je $w_i = \hat{w}_i$.

$$\hat{w}_i = \frac{A_{i-1} A_i w_i A_{i-1}}{A_{i-1}^2 A_i} + \frac{c_i B_i A_{i-1}}{A_{i-1}^2 A_i} - \frac{c_{i-1} A_i A_{i-1}}{A_{i-1}^2 A_i} - \frac{c_i B_i}{A_{i-1} A_i} + \frac{c_{i-1} A_i}{A_{i-1} A_i} = w_i. \quad \square$$

Enakost (3.11) lahko izrazimo tudi na alternativen način.

Definirajmo $r_i := \|v - v_i\|$, od koder sledi, da je

$$A_i(v) = r_i(v) r_{i+1}(v) \frac{\sin(\alpha_i(v))}{2}$$

in

$$B_i(v) = r_{i-1}(v) r_{i+1}(v) \frac{\sin(\alpha_{i-1}(v) + \alpha_i(v))}{2}.$$

Vstavimo te nastavke v formulo (3.11). Definirajmo $a_i = \frac{c_i}{r_i}$. Velja:

$$\begin{aligned}
 w_i &= \frac{2 \cdot c_{i+1}}{r_i r_{i+1} \sin(\alpha_i)} - \frac{4 \cdot c_i r_{i-1} r_{i+1} \sin(\alpha_{i-1} + \alpha_i)}{2 r_{i-1} r_i^2 r_{i+1} \sin(\alpha_i) \sin(\alpha_{i-1})} + \frac{2 \cdot c_{i-1}}{r_{i-1} r_i \sin(\alpha_{i-1})} \\
 &= \frac{2}{r_i} \left(\frac{a_{i+1}}{\sin(\alpha_i)} - \frac{a_i \sin(\alpha_{i-1} + \alpha_i)}{\sin(\alpha_{i-1}) \sin(\alpha_i)} + \frac{a_{i-1}}{\sin(\alpha_{i-1})} \right) \\
 &= \frac{2}{r_i} \left(\frac{a_{i+1}}{\sin(\alpha_i)} - \frac{a_i (\sin(\alpha_{i-1}) \cos(\alpha_i) + \cos(\alpha_{i-1}) \sin(\alpha_i))}{\sin(\alpha_{i-1}) \sin(\alpha_i)} + \frac{a_{i-1}}{\sin(\alpha_{i-1})} \right) \\
 &= \frac{2}{r_i} \left(\frac{a_{i+1} - a_i \cos(\alpha_i)}{\sin(\alpha_i)} + \frac{a_{i-1} - a_i \cos(\alpha_{i-1})}{\sin(\alpha_{i-1})} \right). \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

Izberimo sedaj $c_i := r_i^p, p \in \mathbb{R}$ in vstavimo to v (3.11). Dobimo:

$$w_{i,p} := \frac{r_{i+1}^p A_{i-1} - r_i^p B_i + r_{i-1}^p A_i}{A_{i-1} A_i}, \quad \lambda_{i,p} = \frac{w_{i,p}}{\sum_{j=1}^n w_{j,p}}. \tag{3.14}$$

$w_{i,p}$ je odvisna samo od v_{i-1}, v_i, v_{i+1} , zato so $\lambda_{i,p}$ tri-točkovne koordinate. Če uporabimo (3.13) in nastavek $c_i = r_i^p$, dobimo direktno naslednjo lemo:

Lema 3.24. *S pomočjo enakosti (3.13) dobimo*

$$w_{i,p} = \frac{2}{r_i} \left(\frac{r_{i+1}^{p-1} - r_i^{p-1} \cos(\alpha_i)}{\sin(\alpha_i)} + \frac{r_{i-1}^{p-1} - r_i^{p-1} \cos(\alpha_{i-1})}{\sin(\alpha_{i-1})} \right). \tag{3.15}$$

Trditev 3.25. $\lambda_{i,0}$ so Wachspresove koordinate, $\lambda_{i,1}$ so koordinate povprečne vrednosti.

Dokaz. Če vstavimo $p = 0$ v (3.14), dobimo $w_{i,0} = \frac{C_i}{A_{i-1} A_i}$, kar implicira Wachspresove koordinate. Za $p = 1$ pa iz (3.15) dobimo

$$w_{i,1} = \frac{2}{r_i} \left(\frac{1 - \cos(\alpha_i)}{\sin(\alpha_i)} + \frac{1 - \cos(\alpha_{i-1})}{\sin(\alpha_{i-1})} \right) = \frac{2}{r_i} \left(\tan\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha_{i-1}}{2}\right) \right).$$

Ko izračunamo $\lambda_{i,1}$, se faktor 2 pokrajša, in res dobimo koordinate povprečne vrednosti. □

Torej za $p = 0$ in $p = 1$ dobimo baricentrične koordinate. Preveriti moramo, ali še za kakšen p dobimo baricentrične koordinate. Preverimo za $p = 2$. Dobimo:

$$w_{i,2} = 2(\cot(\gamma_i) + \cot(\beta_{i-1})) = 2 \frac{\sin(\gamma_i + \beta_{i-1})}{\sin(\gamma_i) \sin(\beta_{i-1})},$$

kjer je pomen kotov β_i in γ_i označen na sliki 17. Očitno velja:

$$w_{i,2} \geq 0 \Leftrightarrow \gamma_i + \beta_{i-1} \leq \Pi.$$

Te koordinate se imenujejo diskretne harmonične koordinate.

Trditev 3.26. Če oglišča v_1, v_2, \dots, v_n ležijo na enotski krožnici, potem je

$$w_{i,2}(v) = (1 - \|v\|^2)w_{i,0}(v), \quad v \in \text{Int}(S), \quad (3.16)$$

iz česar sledi

$$\lambda_{i,2} = \lambda_{i,0}.$$

Dokaz. Fiksiramo $v \in \text{Int}(S)$ in naj bo $r = \|v\|$. S pomočjo rotacijske invariantnosti lahko predpostavimo, da je $v = (r, 0)$ in z uporabo polarnih koordinat dobimo

$$v_i = (\cos(\varphi_i), \sin(\varphi_i)), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Potem je

$$r_i^2 = \|v_i - v\|^2 = (\cos(\varphi_i) - r)^2 + (\sin(\varphi_i))^2 = 1 + r^2 - 2r \cos(\varphi_i). \quad (3.17)$$

V tej konkretni predstavitvi lahko ploščine A_i in B_i v (3.10) zapišemo kot

$$A_i = ((\cos(\varphi_i) - r) \sin(\varphi_{i+1}) - \sin(\varphi_i)(\cos(\varphi_{i+1}) - r))/2$$

$$B_i = ((\cos(\varphi_{i-1}) - r) \sin(\varphi_{i+1}) - \sin(\varphi_{i-1})(\cos(\varphi_{i+1}) - r))/2.$$

Tako dobimo enakost

$$\cos(\varphi_{i+1})A_{i-1} - \cos(\varphi_i)B_i + \cos(\varphi_{i-1})A_i = r(A_{i-1} - B_i + A_i). \quad (3.18)$$

Enačbe (3.15), (3.17) in (3.18) implicirajo

$$\begin{aligned} w_{i,2}A_iA_{i-1} &= r_{i+1}^2A_{i-1} - r_i^2B_i + r_{i-1}^2A_i \\ &= (1 + r^2)(A_{i-1} - B_i + A_i) - 2r(\cos(\varphi_{i+1})A_{i-1} - \cos(\varphi_i)B_i + \cos(\varphi_{i-1})A_i) \\ &= (1 + r^2)(A_{i-1} - B_i + A_i) - 2r^2(A_{i-1} - B_i + A_i) \\ &= (1 - r^2)w_{i,0}A_iA_{i-1}, \end{aligned}$$

kar je ekvivalentno (3.16). □

Opomba 3.27. Če oglišča ne ležijo na krožnici, potem $\lambda_{i,2}$ niso pozitivne povsod znotraj S (glej [1]).

Definicija 3.28. Definirajmo sedaj funkcije

$$w_{i,f} := \frac{f(r_{i+1})A_{i-1} - f(r_i)B_i + f(r_{i-1})A_i}{A_{i-1}A_i}, \quad f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Trditev 3.29. Naj bo $f \in C^2(0, \infty)$. Funkcije $w_{i,f}$ so pozitivne v $\text{Int}(\Omega)$ natanko tedaj, ko velja

$$(i) f(r) > 0,$$

$$(ii) f'(r) \geq 0,$$

$$(iii) f(r) \geq rf'(r),$$

$$(iv) f''(r) \geq 0.$$

Dokaz trditve je na voljo v [1].

Posledica 3.30. *Edine baricentrične koordinate iz družine $\lambda_{i,p}$, $p \in \mathbb{R}$, so $\lambda_{i,0}$ in $\lambda_{i,1}$.*

Dokaz.

$$f(r) = r^p,$$

$$f'(r) \geq 0 \Rightarrow pr^{p-1} \geq 0 \Rightarrow p \geq 0,$$

$$f''(r) \geq 0 \Rightarrow p(p-1)r^{p-2} \geq 0 \Rightarrow p(p-1) \geq 0 \Rightarrow p \geq 1 \text{ ali } p \leq 0.$$

$$f(r) \geq rf'(r) \Rightarrow p \leq 1.$$

Edina parametra $p \in \mathbb{R}$, ki zadoščata vsem zahtevam, sta $p = 0$ in $p = 1$. □

Posledica 3.31. *Wachspresove koordinate so edine $\lambda_{i,p}$ baricentrične koordinate, ki so afino invariantne za konveksne večkotnike.*

Posledica 3.32. *Koordinate povprečne vrednosti so edine $\lambda_{i,p}$ baricentrične koordinate, ki so dobro definirane tudi za določena nekonveksna območja.*

Opomba 3.33. Vprašanje je, ali obstajajo še druge izbire funkcije $f(r)$, ki zadoščajo pogojem zadnje trditve. Če izberemo na primer $f(r) = 1 + r$, se izkaže, da pogoji iz trditve 3.29 držijo, ampak se da pokazati, da nimamo invariantnosti za enakomerne raztege. V [1] so postavili domnevo, da je edina možnost za dosego invariantnosti za enakomerne raztege, da je $f(r) = r^p$.

4 Zaključek

V zaključni nalogi smo na začetku spoznali baricetrične koordinate nad trikotniki, kasneje pa še nad konveksnimi večkotniki. V nalogi sem natančneje opisala dve družini baricentričnih koordinat, in sicer Wachspressove koordinate, ki so dobro definirane za konveksne večkotnike, in koordinate povprečne vrednosti, ki so dobro definirane tudi za nekonveksne večkotnike. Sledil je numeričen primer 3.10, kjer je bila prikazana uporaba in delovanje Wachspressovih koordinat. V primeru imamo petkotnik, znotraj njega pa šestkrako zvezdo. Pri tem primeru smo opazovali, kaj se zgodi z zvezdo, če premaknemo dve oglišči petkotnika. Ideja temelji na tem, da objekt, sestavljen iz velikega števila točk, v našem primeru je to zvezda, premikamo z veliko bolj enostavnim ogrodjem iz manjšega števila točk, to je v našem primeru petkotnik. Zaradi dobrih lastnosti baricentričnih koordinat, le-te uporabljajo tudi v računalniški grafiki. Eno izmed družin baricentričnih koordinat uporabljajo v podjetju Pixar za animacijo risanih likov. To so t.i. diskretne harmonične koordinate. O tem si lahko več preberete v [6] in [7]. V zadnjem poglavju so definirane poljubne tri-točkovne baricentrične koordinate. Tu se srečamo z že prej omenjenimi diskretnimi harmoničnimi koordinatami, pridemo pa tudi do ugotovitve, da so Wachspressove koordinate edine tri-točkovne baricentrične koordinate, ki so afino invariantne za konveksne večkotnike, ter da so koordinate povprečne vrednosti edine tri-točkovne baricentrične koordinate, ki so dobro definirane tudi za nekonveksna območja.

5 Literatura

- [1] M. S. FLOATER, K. HORMANN in G. KOS, A general construction of barycentric coordinates over convex polygons. *Advances in Comp. Math.* 24 (2006) 311–331. (Citirano na straneh 1, 2, 14, 18, 25 in 26.)
- [2] M.S. FLOATER, Generalized barycentric coordinates. *sprejeto v objavo v Acta Numerica*, v tisku. (Citirano na straneh 1 in 2.)
- [3] M. S. FLOATER, Wachspress and mean value coordinates. *Approximation Theory XIV: San Antonio 2013*, G. Fasshauer and L. L. Schumaker (eds.), Springer (2014) 81–102. (Citirano na strani 2.)
- [4] M. S. FLOATER, Mean Value coordinates. *Computer Aided Geometric Design* 20 (2013) 19–27. (Citirano na strani 2.)
- [5] K. HORMANN in M. S. FLOATER, Mean Value Coordinates for Arbitrary Planar Polygons. *ACM Transactions on Graphics* 25 (2006) 1424–1441. (Citirano na strani 18.)
- [6] P. JOSHI, M. MEYER in T. DEROSE, Harmonic Coordinates for Character Articulation. *ACM Transactions on Graphics - Proceedings of ACM SIGGRAPH 2007* 26 (2007) članek številka 71. (Citirano na strani 27.)
- [7] P. LIDBERG, *Barycentric and harmonic coordinates*, <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:544869/FULLTEXT01.pdf>. (Datum ogleda: 12. 11. 2014.) (Citirano na strani 27.)
- [8] P. LIDBERG, *Barycentric and Wachspress coordinates in two dimensions theory and implementation for shape transformations*, <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:400706/FULLTEXT01.pdf>. (Datum ogleda: 12. 11. 2014.) (Citirano na strani 2.)