

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Magistrsko delo

Celoštevilski grafi

(Integral graphs)

Ime in priimek: Valentina Petelin

Študijski program: Matematične znanosti, 2. stopnja

Mentor: prof. dr. Dragan Stevanović

Koper, december 2014

Ključna dokumentacijska informacija

Ime in PRIIMEK: Valentina PETELIN

Naslov magistrskega dela: Celoštevilski grafi

Kraj: Koper

Leto: 2014

Število listov: 41

Število slik: 13

Število tabel: 8

Število prilog: 2

Število strani prilog: 16

Število referenc: 33

Mentor: prof. dr. Dragan Stevanović

UDK: 519.177(042.2)

Ključne besede: celoštevilski grafi, matrika sosednosti, lastne vrednosti, spekter grafa, krožni grafi, Cayleyevi grafi, Laplaceov spekter, brezznačni Laplaceov spekter

Math. Subj. Class. (2010): 05C50, 15A18

Izvleček:

Glavni namen magistrskega dela je preučiti celoštevilске grafe in rezultate o njih.

Najprej so v drugem poglavju definirani osnovni pojmi v teoriji grafov, ki so nujno potrebni za navajanje glavne teme. Natančneje je opisana spektralna teorija grafov. Teoretične osnove so ponazorjene s primeri.

V literaturi smo poiskali in preučili podatke o celoštevilskih grafih. Slednje je zelo težko opredeliti v splošnem, zato so znanstveniki celoštevilске grafe razdelili v skupine glede na njihove lastnosti in potem raziskovali posamezne družine celoštevilskih grafov. V tretjem poglavju je zapisanih nekaj osnovnih rezultatov teh raziskav. Podrobneje pa so opisani Cayleyevi in krožni celoštevilski grafi.

Pozornost si zaslužijo posebno lepe matrike grafov, ki tako kot matrika sosednosti A ponazarjajo strukturne lastnosti grafa. V četrtem poglavju so obravnavani celoštevilski spektri Laplaceove matrike $L = D - A$ in breznačne Laplaceove matrike $Q = D + A$, kjer je D diagonalna matrika stopenj točk grafa.

V prvi prilogi so naštetni vsi regularni celoštevilski grafi s številom točk 6, 8, 9 in 10 in pripadajočim spektrom. V drugi prilogi pa najdemo vse Q -celoštevilске grafe na 6, 7, 8, 9 in 10-ih točkah in njihov spekter.

Key words documentation

Name and SURNAME: Valentina PETELIN

Title of master's thesis: Integral graphs

Place: Koper

Year: 2014

Number of pages: 41

Number of figures: 13

Number of tables: 8

Number of appendices: 2

Number of appendix pages: 16

Number of references: 33

Mentor: Prof. Dragan Stevanović, PhD

UDC: 519.177(042.2)

Keywords: integral graphs, adjacency matrix, eigenvalues, graph spectrum, circulant graphs, Cayley graphs, Laplacian spectrum, signless Laplacian spectrum

Math. Subj. Class. (2010): 05C50, 15A18

Abstract:

The main purpose of the Master's thesis is to study integral graphs and results related to them.

In the second chapter the basic concepts in graph theory are defined, which are necessary to study the main topic. Spectral graph theory is described more specifically. Theoretical introduction is exemplified with several concrete graphs and matrices.

In the literature we found and analyzed data on integral graphs. Defining integral graphs in general is very difficult, so the scientists split integral graphs into several groups according to their properties and then investigated the different families of integral graphs. In the third chapter there is some of the basic results of this research summarized. Further there is a detailed description of Cayley and circular integral graphs.

Special attention is devoted to particularly nice matrices of graphs, which, like the adjacency matrix A , are illustrating the structural properties of the graph. The fourth chapter deals with integral spectrum of Laplace matrix $L = D - A$ and signless Laplace matrix $Q = D + A$, where D is a diagonal matrix of vertex degree of the graph.

In the first appendix there is a list of all regular integral graphs with 6, 8, 9 and 10 vertices and the corresponding spectra. In second appendix all Q -integral graphs on 6, 7, 8, 9, and 10 vertices and their spectra can be found.

Zahvala

Zahvaljujem se mentorju prof. dr. Draganu Stevanoviću za podporo, strokovno pomoč, svetovanje in vodenje skozi pripravo magistrske naloge, prav tako pa tudi ostalemu osebju fakultete in profesorjem.

Zahvala gre tudi mojemu delodajalcu - Izobraževalnemu centru Memory za razumevanje in izjemno prilagajanje službenih obveznosti študiju.

Nenazadnje pa posebno zahvalo namenjam moji družini, ki je verjela v moj uspeh in me podpirala ter Matjažu, ki je bil moj neusahljiv vir motivacije za dokončanje študija.

Kazalo vsebine

1	Uvod	1
2	Osnovni pojmi v teoriji grafov	2
3	Celoštevilski grafi	13
3.1	Celoštevilski Cayleyevi grafi	16
3.2	Celoštevilski krožni grafi	20
3.3	Primer celoštevilkega grafa - graf igre Sudoku	24
4	Laplaceovi celoštevilski grafi	28
5	Zaključek	37
	Literatura	39

Kazalo tabel

2.1	Spekter prvih štirih osnovnih ciklov	10
2.2	Spekter poti na točkah od 1 do 5	10
3.1	Število povezanih celoštevilskih grafov na n točkah	14
3.2	Število povezanih regularnih celoštevilskih grafov na n točkah	15
3.3	Povezani Cayleyevi grafi na n točkah	16
3.4	Lastne vrednosti in pripadajoče večkratnosti Sudoku grafa	27
4.1	Število Q -celoštevilskih grafov	30
4.2	Število kospektralnih grafov	34

Kazalo slik

2.1	Primer matrike sosednosti.	4
2.2	Primer incidenčne matrike.	5
2.3	Graf na 4-ih točkah.	7
2.4	Kospektralna grafa na 4-ih točkah.	9
2.5	Polni graf K_5	12
2.6	Povezavni grafa K_5	12
2.7	Petersenov graf - dve možnosti prikaza grafa.	12
3.1	Povezani celoštevilski grafi na točkah od 1 do 6.	14
3.2	Primer igre Sudoku.	24
3.3	Izpeljava grafa $Sud(2)$ iz 2-Sudoku sestavljanke.	25
3.4	Izbira celic glede na baze množice S_1, S_2, S_3 in \mathcal{B}	27
4.1	Povezana neregularna grafa.	31
4.2	Minimalni kospektralni grafi za vsako matriko.	35

Kazalo prilog

Povezani, regularni, celoštevilski grafi s številom točk 6, 8, 9 in 10	43
Q -celoštevski grafi na 6, 7, 8, 9 in 10-ih točkah	46

1 Uvod

Teorija grafov je področje diskretne matematike, ki preučuje grafe - incidenčnost točk in povezav. Eden izmed načinov ponazoritve grafov je s pomočjo matrik. Iz samega zapisa matrike lahko vidimo veliko lastnosti grafa, npr. ničelna diagonala matrike pomeni, da graf nima zank. Z operacijami na matriki pa lahko pridemo do dodatnih uporabnih podatkov. S pomočjo determinate matrike izračunamo lastne vrednosti. Naboru vseh lastnih vrednosti, ki ustrezajo matrični reprezentaciji grafa, pravimo spekter grafa. S spektri se ukvarja spektralna teorija grafov, ki želi povezati spekter grafa s strukturnimi lastnostmi grafov.

Lastne vrednosti grafa so vedno realna števila. Bolj omejena skupina grafov, kjer so vse lastne vrednosti cela števila, so celoštevski grafi. Določanje grafov s to lastnostjo se je začelo že v zgodnjih sedemdesetih letih [1], vendar je bilo iskanje vseh celoštevskih grafov označeno za zelo težko rešljiv problem [15]. Situacija postane lažje rešljiva, če se grafe razdeli v skupine, glede na njihove lastnosti. Tako so nastali številni rezultati raziskav posameznih družin celoštevskih grafov. Nekaj izmed teh je predstavljenih v nalogi.

Rekreacijsko igro Sudoku lahko prevedemo v teorijo grafov in izkaže se, da so lastne vrednosti grafa Sudoku igre cela števila, zato grafi Soduku igre sodijo v pomemben razred celoštevskih grafov.

Torej, spektralna teorija grafov preučuje odnose med strukturo grafa in lastnimi vrednostmi matrike. Pogosto najprej pomislimo na standardno $(0, 1)$ -matriko sosednosti, vendar se zadnje čase posveča veliko pozornosti tudi drugim matrikam, ki prav tako ponazarjajo strukturo grafa. V nalogi sta opisani dve taki matriki. Prva je Laplaceova matrika L , opredeljena kot $L = D - A$, druga pa breznačna Laplaceova matrika Q , ki jo definiramo kot $Q = D + A$. Matrika D pa je diagonalna matrika stopenj točk grafa - elementi na diagonali ponazarjajo stopnje točk grafa, elementi izven diagonale pa so enaki 0. Kot matrika A sta tudi te dve matriki simetrični in tako imamo spet zagotovljene realne lastne vrednosti. Stvar postane bolj zanimiva, če poskušamo opredeliti celoštevskost spektrov matrik L in Q . S to temo smo se ukvarjali v zadnjem poglavju.

2 Osnovni pojmi v teoriji grafov

Za začetek najprej razložimo nekaj osnovnih pojmov, na katere se bomo kasneje sklicevali.

Temeljni pojem v teoriji grafov je pojem grafa. Sestavljen je iz točk in povezav. Terminologija v teoriji grafov ni povsem standardna. V slovenščini imamo za točko grafa ustrezen alternativni izraz, tj. vozlišče, povezave pa včasih poimenujemo robovi. Za natančno definicijo grafa je potrebno navesti celoten seznam točk in povezav, zato je graf definiran na naslednji način [29].

Graf G sestavlja neprazna množica elementov, ki jih poimenujemo **točke** grafa in seznam parov teh elementov, ki jih imenujemo **povezave** grafa. Množico točk grafa označimo z $V(G)$, seznam povezav pa z $E(G)$. V seznamu povezav se oznaka točke pojavi večkrat, medtem ko je v množici točk, vsaka oznaka navedena samo enkrat. Če sta v in w točki grafa G , potem za povezavi vw ali wv rečemo, da povezujeta točki v in w . Naj ima graf n točk, potem pravimo, da je graf reda n .

Dve povezavi ali več povezav, ki povezujejo isti par točk, poimenujemo **vzporedne povezave**. Povezava, ki povezuje neko točko s samo seboj, je **povratna povezava** ali **zanka**. V kolikor je graf brez zank in večkratnih povezav, mu pravimo **enostavni graf**. Graf, ki je v enem delu - iz ene točke lahko pridemo po povezavah do vseh drugih, je **povezan**, graf, ki ima več delov, pa je **nepovezan**.

Graf G je **dvodelen** (tudi **bipartiten graf** ali **bigraf**), če lahko množico točk razdelimo na dve disjunktni podmnožici A in B , tako da vsaka povezava grafa G povezuje po eno vozlišče iz množice A z enim vozliščem iz množice B . Iz tega sledi, da dvodelen graf ne vsebuje povezave, ki bi povezovala dve vozlišči iste množice. Dvodelen graf nima ciklov lihe dolžine.

Sprehod dolžine k v grafu G je zaporedje k povezav grafa G oblike: uv, vw, wx, \dots, yz . Tak sprehod označimo z $uvw \dots yz$ in ga poimenujemo sprehod med točkama u in z .

V kolikor so vse povezave sprehoda različne, sprehod imenujemo **enostavni sprehod** ali **sled**. Če pa so v enostavnem sprehodu vse točke različne imamo **pot**.

Razdalja $d(u, v)$ med dvema točkama u in v v grafu G je število povezav v najkrajši poti, ki ju povezuje. **Premer grafa** G je definiran kot največja dolžina najkrajše poti med dvema točkama grafa, torej $\max_{u, v \in V(G)} d(u, v)$. Označimo ga z $\text{diam}(G)$ ali krajše kar $d(G)$. Povratne poti ali zanke so izključene iz obravnave. Da lahko ugotovimo premer grafa, moramo najprej poiskati najkrajšo pot med vsakim parom točk. Največja dolžina izmed teh poti je premer grafa.

Koristno je imeti posebna poimenovanja za tiste sprehode in poti, ki se začnejo in končajo v isti točki. **Sklenjeni sprehod** ali **obhod** v grafu G je zaporedje povezav grafa G oblike: $uv, vw, wx, \dots, yz, zu$. V primeru, da so vse povezave obhoda različne, ga poimenujemo **enostavni obhod** ali **sklenjena sled**. V kolikor pa so v obhodu vse povezave in vse točke različne, potem ga pa imenujemo **cikel**.

Teorija grafov se ukvarja s preučevanjem lastnosti grafov, zato potrebujemo izraze, s katerimi povemo, da so točke in povezave v grafu druga poleg druge.

Naj bosta u in v točki grafa. Če sta u in v povezani s povezavo, potem pravimo, da sta **sosebnji** in označimo z $u \sim v$. Povezava $e = uv$ gre skozi točki u in v , je **incidentna** s točkama u in v .

Za grafa $G_1(V_1, E_1)$ in $G_2(V_2, E_2)$ z $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ definiramo njuno **unijo** kot

$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2).$$

Unijo n disjunktne kopij grafa G krajše zapišemo kot nG , kjer je $n \in \mathbb{N}$.

Spoj grafov pa je definiran kot

$$G_1 \nabla G_2 = \overline{G_1 \cup G_2}.$$

To je graf, dobljen z dodajanjem vseh možnih povezav oblike (u, v) , za $u \in V(G_1)$ in $v \in V(G_2)$.

Z oznako $G_1 \square G_2$ označimo **kartezični produkt** grafov. To je graf, ki ima za množico točk kartezični produkt $V(G_1) \times V(G_2)$ in dve poljubni točki (v, w) in (v', w') sta sosebnji, če $v = v'$ in w' je sosebnja z w' v G_2 ali $w = w'$ in v je sosebnja z v' v G_1 .

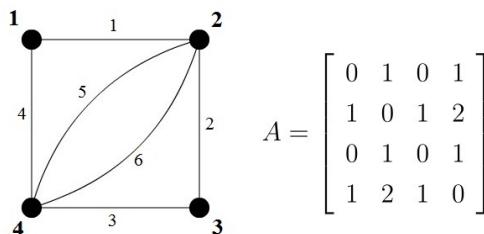
Grafična ponazoritev je koristna v mnogih primerih, posebno če želimo opazovati strukturo celotnega grafa. Njena vrednost pa se zmanjša, ko moramo opazovati velike in zapletene grafe. Uporabiti moramo druge metode.

Ena možnost je, da zapišemo množico točk in seznam povezav; ta način se uporablja, kadar je graf „redak“, tj. kadar ima graf veliko točk in malo povezav.

Drugi način je, da k vsaki točki zapišemo seznam sosednjih točk. Na podlagi tega seznama lahko graf enostavno narišemo tako, da povežemo vsako točko z njenimi sosedi. Naslednja načina uporabljata tabele. Pri prvem zapišemo tabelo, v kateri označimo, kateri pari točk so povezani, pri drugem pa tabelo, v kateri označimo katere točke so incidentne s katerimi povezavami.

Vsak izmed zgoraj omenjenih načinov ima svoje prednosti in slabosti. Zadnji pa je še posebej uporaben v mnogih primerih. Pri tem načinu predstavimo graf v obliki tabele števil, ki jo imenujemo **matrika**. Matriki s k vrsticami in l stolpci rečemo matrika razsežnosti $k \times l$. Matrike so zelo primerne za računanje v mnogih problemih, saj lahko z njimi na najenostavnejši način formuliramo problem. Obstajajo različne vrste matrik, s katerimi lahko predstavimo graf. V nadaljevanju bomo opisali dve najpomembnejši vrsti: *matriko sosednosti* in *incidenčno matriko*.

Oglejmo si naslednji primer:



Slika 2.1: Primer matrike sosednosti.

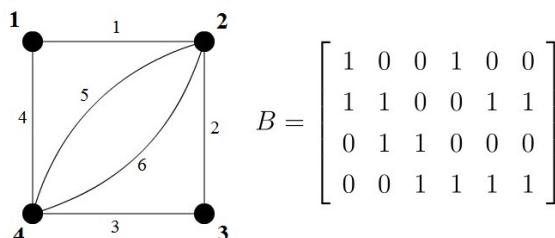
Imamo graf s štirimi točkami, sledi matrika A velikosti 4×4 . Števila v matriki pomenijo število povezav, ki povezujejo ustrezni točki grafa. Točki 1 in 2 sta povezani z eno povezavo, zato se pojavi v drugem stolpcu prve vrstice in prvem stolpcu druge vrstice število 1. Točki 2 in 4 sta povezani z dvema povezavama, zato je v matriki v četrtem stolpcu druge vrstice in v drugem stolpcu četrte vrstice število 2. Točki 1 in 3 nista povezani, zato je v tretjem stolpcu prve vrstice in v prvem stolpcu tretje vrstice število 0. Vsta števila na glavni diagonali so enaka 0. To pomeni, da graf nima nobene zanke. Matrika je tudi simetrična glede na diagonalo. S pomočjo primera lahko sedaj opredelimo matriko sosednosti.

Naj bo G graf brez zank in večkratnih povezav z n točkami, označenimi z $1, 2, 3, \dots, n$. **Matrika sosednosti** $A(G)$ je matrika razsežnosti $n \times n$, v kateri element v j -tem stolpcu i -te vrstice pove številu povezav, ki povezujejo točki i in j . Krajše lahko matriko sosednosti označimo kar z A . V simbolnem zapisu, je definirana kot $A = [a_{ij}]$, kjer je

$$a_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{če je } i \text{ sosednja z } j \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

V matriko sosednosti torej zapišemo podatke o sosednosti točk. V incidenčno matriko pa zapišemo informacije, katere točke in povezave so incidentne.

Poglejmo si naslednji primer.



Slika 2.2: Primer incidenčne matrike.

Na levi imamo graf s štirimi točkami in šestimi povezavami, na desni pa 4×6 matriko. Elementi matrike so 1 ali 0, odvisno od tega, ali sta ustrezna točka in povezava incidentni ali ne. Tako na primer točka 1 leži na povezavi 4, zato imamo v četrtem stolpcu prve vrstice število 1; točka 2 ne leži na povezavi 4, zato imamo v četrtem stolpcu druge vrstice število 0.

Naj bo G graf brez zank z n točkami, označenimi z $1, 2, 3, \dots, n$ in z m povezavami, označenimi z $e_1, e_2, e_3, \dots, e_m$. **Incidenčna matrika** $B(G)$ je matrika razsežnosti $n \times m$, katere element v i -ti vrstici in j -tem stolpcu je enak 1, če točka i leži na povezavi e_j in 0 sicer. V simbolnem zapisu je definirana kot $B = [b_{ij}]$, kjer je

$$b_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{če je točka } i \text{ incidentna s povezavo } e_j \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

Naj bo A matrika velikosti $k \times k$. Če obstaja vektor $x \in \mathbb{R}^k$, $x \neq 0$, tako da velja zveza $Ax = \lambda x$ za nek skalar λ , potem pravimo elementu λ **lastna vrednost** matrike A .

Imamo torej matriko:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix},$$

ki z lastno vrednostjo λ in pripadajočim **lastnim vektorjem** x izpolnjuje naslednjo zvezo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}.$$

Zgornja zveza je ekvivalentna homogenemu sistemu: $(\lambda I - A)x = 0$, kjer je I identična matrika.

V kontekstu matrik pa izgleda takole:

$$\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1k} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{k1} & -a_{k2} & \cdots & \lambda - a_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitve tega sistema dobimo z reševanjem enačbe: $\det(\lambda I - A) = 0$ [8].

Uniji ničelnega vektorja 0 in množice vseh vektorjev, ki ustrezajo dani lastni vrednosti λ pravimo **lastni podprostor**, ki je podprostor v \mathbb{R}^k . Označimo ga kot $Eig(\lambda, G)$ in je definiran kot: $Eig(\lambda, G) = \ker(\lambda I - A(G))$, kjer je $\ker(M)$ jedro matrike M .

Osnovne lastnosti lastnih vrednosti so:

- Lastne vrednosti λ so natanko tista števila, ki naredijo matriko $\lambda I - A$ singularno, tj. rešitve sistema enačb $\det(\lambda I - A) = 0$.
- Vsi lastni vektorji, ki ustrezajo lastni vrednosti λ , tvorijo podprostor $Eig(\lambda, G)$. Dimenzija tega podprostora je ravno večkratnost lastne vrednosti λ .
- V splošnem so lastne vrednosti lahko kompleksna števila. Vendar, ker je A simetrična matrika ($a_{ij} = a_{ji}$), so vse lastne vrednosti realna števila. Še več, obstaja ortogonalna baza, sestavljena iz samih lastnih vektorjev.

- Vsota vseh lastnih vrednosti je:

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Imenujemo jo **sled** matrike sosednosti. Zaradi enostavnosti grafa G ima matrika A ničelno diagonalo in posledično tudi sled enako 0.

- Produkt vseh lastnih vrednosti

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A),$$

je ravno determinanta matrike sosednosti.

- Število vseh neničelnih lastnih vrednosti je rang matrike A .
- S pomočjo lastnih vrednosti lahko izračunamo tudi število povezav v grafu G [13]:

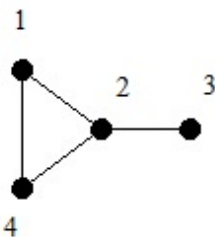
$$m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

Za izračun lastnih vrednosti si lahko pomagamo s **karakterističnim polinomom**. To je polinom (mногоčlenik), ki določa mnoge pomembne značilnosti matrik (npr. lastne vrednosti, determinante in sled matrike). Velja, da je karakteristični polinom grafa karakteristični polinom matrike sosednosti. Za spremenljivko λ ga definiramo kot:

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

Element λ je lastna vrednost matrike A natanko tedaj, ko je λ ničla polinoma P_A , tj. $P_A(\lambda) = 0$. Velja, da je stopnja polinoma enaka redu, tj. številu točk grafa G .

Zgled: S pomočjo determinante bomo izračunali karakteristični polinom grafa na spodnji sliki.



Slika 2.3: Graf na 4-ih točkah.

Uporabimo zvezo $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ in izračunati moramo determinanto matrike:

$$P_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

Rešitev enačbe: $\lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ na da lastne vrednosti $\lambda_{1,2} = 1$ in $\lambda_{3,4} = -1$.

Karakteristični polinom lahko izračunamo tudi brez uporabe determinante [13]. Za koeficiente polinoma dejansko štejemo elementarne podgrafe grafa G . Elementaren graf je graf, ki ga lahko zapišemo kot disjunktno unijo povezav in ciklov. Število povezanih komponent grafa G označimo s $comp(G)$, število ciklov pa s $cyc(G)$.

Imejmo graf G reda n . V splošnem vedno velja, da je koeficient a_n pred členom λ^n enak 1 in koeficient a_{n-1} pred členom λ^{n-1} enak 0. Njegov karakteristični polinom lahko definiramo kot:

$$P_A(\lambda) = \sum_{r=0}^n a_r \lambda^{n-r}.$$

Če je $r > 0$, koeficiente a_r izračunamo kot:

$$a_r = \sum_H (-1)^{comp(H)} 2^{cyc(H)},$$

kjer gre H po vseh elementarnih podgrafih grafa G reda r .

S pomočjo zadnje zveze lahko izračunamo tudi determinanto matrike sosednosti, in sicer (glej [13]):

$$\det(A(G)) = (-1)^n \sum_H (-1)^{comp(H)} 2^{cyc(H)},$$

kjer gre H po vseh elementarnih podgrafih grafa G reda n .

Naboru vseh lastnih vrednosti, skupaj z njihovimi večkratnostmi, matrike sosednosti A nekega grafa G pravimo **spekter**. Označimo ga s $Sp(G)$ in s simbolnim zapisom definiramo kot:

$$Sp(G) = \{\lambda_1^{m_1}, \lambda_2^{m_2}, \dots, \lambda_s^{m_s}\},$$

kjer je m_i večkratnost lastne vrednosti λ_i za $i = 1, \dots, s$ in $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s$. Velja tudi, da je seštevek vseh večkratnosti lastnih vrednosti enak številu točk grafa G : $m_1 + m_2 + \dots + m_s = n$. Lastne vrednosti grafa G so po definiciji enake lastnim vrednostim matrike sosednosti. To pomeni, da je spekter grafa G kar spekter matrike sosednosti $A(G)$ [3].

Unija grafov ima za spekter unijo lastnih vrednosti prvotnih grafov. Poglejmo si še spekter spoja grafov. Naj bosta n_1 in n_2 ustrezni števili točk grafa G_1 in G_2 . Potem je spekter spoja enak $\{0, n_1 + n_2, n_2 + \lambda_i(G_1), n_1 + \lambda_j(G_2)\}$, kjer je $1 \leq i < n_1$ in $1 \leq j < n_2$ [15].

Za spekter grafa G veljajo naslednje lastnosti [13]:

- S pomočjo spektra lahko določimo karakteristični polinom:

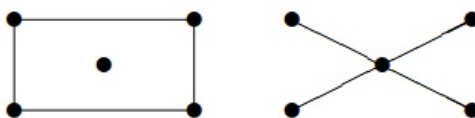
$$P_G(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}.$$

- Upoštevajoč večkratnost lastnih vrednosti veljata naslednji zvezi:

- $m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \dots + m_s \lambda_s = \text{Tr}(A(G)) = 0$ in
- $m_1 \lambda_1^2 + m_2 \lambda_2^2 + \dots + m_s \lambda_s^2 = 2 |E(G)|$.

Definiranje grafov na podlagi spektra je v splošnem precej problematično, dva različna grafa imata lahko namreč enak spekter in posledično tudi enak karakteristični polinom. Takima grafoma pravimo **kospektralna grafa**.

Zgled: Grafa na spodnji sliki imata različni matriki sosednosti, ampak enak spekter, ki je $\{2, 0^3, -2\}$. Graf na levi je graf $K_1 \cup C_4$, graf na desni pa $K_{1,4}$.



Slika 2.4: Kospektralna grafa na 4-ih točkah.

$$\text{Velja: } \det(A(K_1 \cup C_4)) = \det(A(K_{1,4})) = \lambda^5 - 4\lambda^3 = \lambda^3(\lambda + 2)(\lambda - 2).$$

Dvema osnovnima matrikama je lastne vrednosti zelo enostavno določiti. Prva je identiteta ali identična matrika. To je matrika, ki ima na diagonali enice, povsod drugod pa ničle:

$$I = [a_{ij}] = \begin{cases} 1 & \text{če je } i = j \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Lastna vrednost identitete je število 1 z večkratnostjo n , če je matrika velikosti $n \times n$.

Druga matrika pa je matrika J . Je $n \times n$ matrika samih enic, z lastnimi vrednostmi n^1 in 0^{n-1} .

Poglejmo si sedaj spektre nekaj najosnovnejših grafov - vsi so končni, neusmerjeni in enostavni. Zgledi prvih štirih skupin so povzeti po [3], preostali pa po [13]:

1. Polni graf K_n na n točkah je graf, v katerem sta poljubni dve točki povezani. Ima matriko sosednosti $A = J - I$ in spekter $Sp(K_n) = \{(n - 1), (-1)^{n-1}\}$.
2. Polni, dvodelni graf $K_{m,n}$ je graf, kjer je množica točk grafa razdeljena na dve disjunktni podmnožici V_1 in V_2 , kjer je $|V_1| = m$, $|V_2| = n$. Vsaka točka iz prve množice je povezana z vsako točko iz druge množice. Tak graf ima spekter $Sp(K_{m,n}) = \{\sqrt{mn}, -\sqrt{mn}, 0^{m+n-2}\}$.
3. Za cikel C_n na n točkah je spekter naslednja množica $Sp(C_n) = \{2 \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \mid j = 0, \dots, n - 1\}$.

Tabela 2.1: Spekter prvih štirih osnovnih ciklov

cikel	spekter
C_3	$2, (-1)^2$
C_4	$2, 0^2, -2$
C_5	$2, \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$
C_6	$2, 1^2, (-1)^2, -2$

4. Pot na n točkah označimo z P_n in njen spekter je $Sp(P_n) = \{2 \cos\left(\frac{\pi j}{n-1}\right) \mid j = 0, \dots, n - 1\}$.

Tabela 2.2: Spekter poti na točkah od 1 do 5

pot	spekter
P_1	0
P_2	$1, -1$
P_3	$\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}$
P_4	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
P_5	$\sqrt{3}, 1, 0, -1, -\sqrt{3}$

5. Imejmo k -regularen graf G , to je graf katerega vsaka točka ima natanko k sosedov, tj. vse točke so stopnje k . Vsaka vrstica matrike sosednosti A ima natanko k enic.

Za vsako lastno vrednost λ velja, da je $|\lambda| \leq k$. Lastne vrednosti grafa G so: $k = \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s$. Za lastno vrednost k velja, da je njena večkratnost enaka številu povezanih komponent grafa G .

6. Krepko regularni grafi so definirani s parametri (v, k, λ, μ) . To so k -regularni grafi na v točkah, kjer imata vsaki dve povezani točki natanko λ skupnih sosedov in vsaki dve nepovezani točki natanko μ skupnih sosedov. Spekter krepko regularnega grafa G je

$$Sp(G) = \{k, r, s\},$$

kjer je $r \geq 0 \geq s$ in r in s sta rešitvi enačbe $x^2 + (\mu - \lambda)x + \mu - k = 0$, tj.

$$r, s = \frac{1}{2} \left(\lambda - \mu \pm \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)} \right).$$

Za povezan graf je pripadajoča večkratnost za lastno vrednost k enaka 1, za r in s pa vrednosti f in g . Slednji izračunamo iz zvez: $1 + f + g = v$ in $k + fr + gs = Tr(A) = 0$, torej

$$f, g = \frac{1}{2} \left(v - 1 \pm \frac{(v - 1)(\mu - \lambda) - 2k}{\sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)}} \right).$$

7. Komplement grafa G označimo z \overline{G} . Je graf, ki ima enako množico točk kot graf G in komplementarno množico povezav, tj. dve različni točki v \overline{G} sta povezani natanko tedaj, ko nista povezani v G . Naj bo A matrika sosednosti grafa G . Potem je $J - I - A$ matrika sosednosti grafa \overline{G} . Če je graf G k -regularen, je graf \overline{G} $(n - k - 1)$ -regularen in njegov spekter je

$$Sp(\overline{G}) = \{|V(G)| - k - 1, (-k - 1)^{m_1 - 1}, (-\lambda_2 - 1)^{m_2}, \dots, (-\lambda_s - 1)^{m_s}\},$$

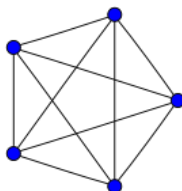
kjer so $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s$ lastne vrednosti grafa G in vemo, da je $\lambda_1 = k$.

8. Naj bo G k -regularen graf na n točkah, z m povezavami in spektrom $Sp(G) = \{\lambda_1^{m_1}, \dots, \lambda_s^{m_s}\}$. Povezavni graf grafa G je $L(G) = (V, E)$, kjer je $V = E(G)$ in $E = \{\{e, f\}; e \text{ in } f \text{ sta različni povezavi s skupno točko}\}$. Spekter povezavnega grafa lahko enostavno določimo na naslednji način:

- če je $m \geq n$ je $Sp(L(G)) = \{(\lambda_1 + k - 2)^{m_1}, \dots, (\lambda_s + k - 2)^{m_s}\} \cup \{-2^{m-n}\}$,
- če je $n > m$ je $Sp(L(G)) = \{(\lambda_1 + k - 2)^{m_1}, \dots, (\lambda_s + k - 2)^{m_s}\} \setminus \{-2^{n-m}\}$.

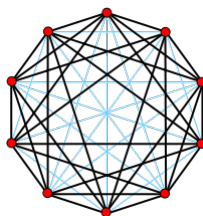
Upoštevajoč do sedaj omenjeno, si za zgled ogledimo **spekter Petersenovega grafa**. Uporabili bomo dejstvo, da je Petersenov graf enak grafu $\overline{L(K_5)}$.

Za polni graf K_5 lahko zapišemo spekter: $Sp(K_5) = \{4, -1^4\}$.



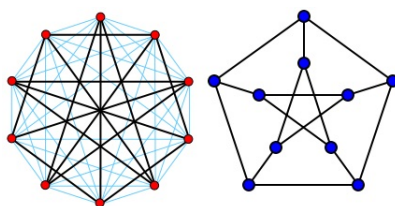
Slika 2.5: Polni graf K_5 .

S pomočjo formule za izračun spektra povezavnega grafa dobimo $Sp(L(K_5)) = \{6, 1^4, -2^5\}$.



Slika 2.6: Povezavni grafa K_5 .

Na koncu uporabimo še zvezo za izračun spektra komplementarnega grafa, saj vemo, da je graf $L(K_5)$ 6-regularen na 10-ih točkah in dobimo $Sp(\overline{L(K_5)}) = \{3, -2^4, 1^5\}$.



Slika 2.7: Petersenov graf - dve možnosti prikaza grafa.

Levi graf na zgornji sliki ponazarja komplement grafa na sliki 2.6, medtem ko je na desni sliki najpogosteje uporabljenega načina prikaza Petersenovega grafa.

Lahko bi uporabili tudi lastnost, da je Petersenov graf krepko regularen s parametri $(10, 3, 0, 1)$ in s pomočjo formul za izračun lastnih vrednosti in njihovih večkratnosti krepko regularnih grafov, pridemo do enakih vrednosti.

3 Celoštevski grafi

Do sedaj je bilo navedenih kar nekaj primerov spektrov različnih grafov. Elementi spektra niso bili vedno cela števila. Grafom, ki pa *imajo za lastne vrednosti cela števila* pravimo **celoštevski grafi**. Omenjen pojem sta prvič uvedla Harary in Schwenk, leta 1974. Na splošno pa je problem opredeljevanja celoštevskih grafov precej zahteven, zato se posamično obravnava različne družine celoštevskih grafov. Do sedaj je znanih kar precej rezultatov raziskav naslednjih skupin celoštevskih grafov:

- Celoštevski 3-regularni grafi
- Celoštevski 4-regularni grafi
- Celoštevski polni grafi
- Neregularni nedvodelni celoštevski grafi z maksimalno stopnjo 4
- Celoštevski drevesa s premerom 4, 5, 6 in 8
- Povezani celoštevski grafi s številom točk do 12
- Neregularni dvodelni celoštevski grafi
- Celoštevski dvodelni biregularni grafi

Več o posamezni skupini si lahko poiščete v [18]. V nalogi so v naslednjih poglavjih podrobneje predstavljeni celoštevski Cayleyevi in krožni grafi. Pred tem pa je navedenih še nekaj bolj splošnih povzetkov raznoraznih raziskav.

Ahmadi idr. [22] so preučevali možnosti matrik gosti celštevskih grafov. Naj bo A_n množica vseh matrik sosednosti grafov na n točkah. Torej, A_n je nabor simetričnih 0,1-matrik $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, dimenzije $n \times n$, z ničelno diagonalo, kjer je $a_{ij} = a_{ji} \in \{0, 1\}$, $a_{ii} = 0$, $i, j = 1, \dots, n$. Z izrazom $I(n)$ označimo število matrik sosednosti celoštevskih grafov na n točkah. Za dovolj velik n velja naslednja zveza:

$$I(n) \leq 2^{\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n}{400}},$$

kjer je število $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ število grafov na n točkah .

Znano je, da je velikost povezanih k -regularnih grafov s premerom $d(G)$ omejena navzgor s $\frac{k(k-1)^{d-2}}{k-2}$. V kolikor vemo, da je graf celoštevilski, potem je $d \leq 2k$, ker obstaja največ $2k + 1$ različnih lastnih vrednosti. Potem za zgornjo mejo povezanih, k -regularnih, celoštevilskih grafov velja:

$$n \leq \frac{k(k-1)^{2k} - 2}{k-2}.$$

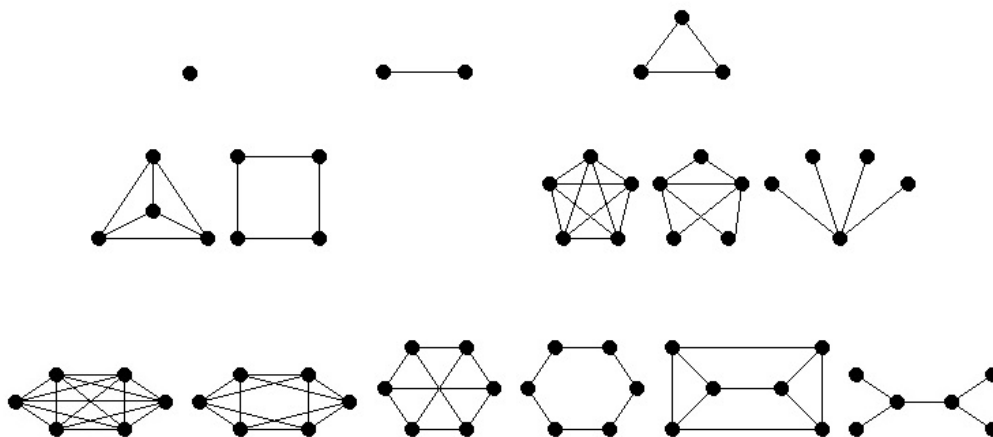
Balinska idr. [14] so leta 1999 dokazali, da obstaja natanko 150 povezanih celoštevilskih grafov na 10-ih točkah. Rezultate vseh povezanih, celoštevilskih grafov na 11-ih in 12-ih točkah je mogoče najti v [16] in [17].

Tabela 3.1: Število povezanih celoštevilskih grafov na n točkah

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
število grafov	1	1	1	2	3	6	7	22	24	83	113	325

Viri: [14], [16] in [17]

Grafično je prikazano prvih 14 grafov, to so: $K_1, K_2, K_3, K_4, K_{2,2}, K_5, \overline{2K_1 \cup K_3}, K_{1,4}, K_6, \overline{3K_2}, K_{3,3}, C_6, C_3 \square K_2$ in drevo z zaporedjem stopenj točk $(3,3,1,1,1,1)$.



Slika 3.1: Povezani celoštevilski grafi na točkah od 1 do 6.

Poglejmo si še spekter zgoraj omenjenih 14-ih grafov (v alineje so razporejeni glede na število točk):

- $Sp(K_1) = \{0\}$
- $Sp(K_2) = \{1, -1\}$

- $Sp(K_3) = \{2, -1^2\}$
- $Sp(K_4) = \{3, -1^3\}$ in $Sp(K_{2,2}) = \{2, 0^2, -2\}$
- $Sp(K_5) = \{4, -1^4\}$, $Sp(\overline{2K_1 \cup K_3}) = \{3, 0^2, -1, -2\}$ in $Sp(K_{1,4}) = \{2, 0^3, -2\}$
- $Sp(K_6) = \{5, -1^5\}$, $Sp(\overline{3K_2}) = \{4, 0^3, -2^2\}$, $Sp(K_{3,3}) = \{3, 0^4, -3\}$, $Sp(C_6) = \{2, 1^2, -1^2, -2\}$, $Sp(C_3 \square K_2) = \{3, 1, 0^2, -1^2\}$, $Sp(drevo) = \{2, 1, 0^2, -1, -2\}$

Obstaja natanko 40 povezanih regularnih celoštevilskih grafov s številom točk do 10 [2]. Število grafov glede na število točk grafa je prikazano v naslednji tabeli.

Tabela 3.2: Število povezanih regularnih celoštevilskih grafov na n točkah

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
število grafov	1	1	1	2	1	5	1	6	7	15

Vir: [2]

Za zapis vseh 40 grafov bomo uporabili oznako Γ_i , kjer je $i = 1, \dots, 40$. Grafe s številom točk od 1 do 5 je enostavno zapisati. To so grafi: $\Gamma_1 = K_1$, $\Gamma_2 = K_2$, $\Gamma_3 = K_3$, $\Gamma_4 = K_4$, $\Gamma_5 = K_{2,2}$ in $\Gamma_6 = K_5$. Graf na sedmih točkah je samo eden, tj. $\Gamma_7 = K_7$. Medtem, ko so grafi s številom točk 6, 8, 9 in 10, prikazani v tabelah A.1, A.3, A.5 in A.7 (glej priloge). V tabelah A.2, A.4, A.6 in A.8 (glej priloge) pa so ponazorjeni spektri pripadajočih grafov.

Leta 1976 sta Bussemaker in Cvetković [11] dokazala, da obstaja natanko 13 povezanih kubičnih celoštevilskih grafov. Neodvisno od niju je do enakega zaključka prišel tudi Schwenk [4], ki se je za razliko od Bussemakerja in Cvetkovića izogibal uporabi računalniških programov za iskanje vseh možnosti. Stevanović [9] je našel vse povezane 4-regularne celoštevilске grafe, izogibajoč ± 3 v spektru grafa. Cvetković [5] je dokazal, da je množica povezanih regularnih celoštevilskih grafov katerekoli fiksne stopnje končna. Simić in Radosavljević [24] sta določila vseh 13 neregularnih nedvodelnih povezanih celoštevilskih grafov z maksimalno stopnjo 4. Wang in Hoede [19] sta sestavila 15 neskončnih razredov neregularnih dvodelnih celoštevilskih grafov. Celoštevilska drevesa tvorijo skupino celoštevilskih grafov, ki je precej obsežno raziskana. Omidji [12] je identificiral celoštevilске grafe z največ dvema cikloma, z nobenimi lastnimi vrednostimi 0. Sander [25] je dokazal, da so grafi igre Sudoku celoštevilski.

3.1 Celoštevski Cayleyevi grafi

Oglejmo si rezultate raziskav o Cayleyevih grafih. Za začetek najprej povejmo definicijo in nekaj osnovnih lastnosti teh grafov.

Naj bo \mathcal{G} končna netrivialna grupa z identiteto 1 in imejmo množico generatorjev $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{G} \setminus \{1\}$, za katero velja

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1} := \{s^{-1} \mid s \in \mathcal{S}\}.$$

Cayleyev graf grupe \mathcal{G} označimo kot $\Gamma(\mathcal{G} : \mathcal{S})$ (v nekateri literaturi se pojavi tudi oznaka $\text{Cay}(\mathcal{G}, \mathcal{S})$). Je graf z množico točk \mathcal{G} in velja, da sta dve točki a in b sosednji, če je $ab^{-1} \in \mathcal{S}$. Če \mathcal{S} generira grupo \mathcal{G} , potem je $\Gamma(\mathcal{G} : \mathcal{S})$ povezan graf. Velja tudi, da je Cayleyev graf enostaven, točkovno tranzitiven in regularen graf stopnje $|\mathcal{S}|$ [27].

V kolikor je $\mathcal{S} = \mathcal{G} \setminus \{1\}$, je $\Gamma(\mathcal{G} : \mathcal{S})$ polni graf z $|\mathcal{G}|$ točkami in tudi celoštevski. Klotz in Sander [27] sta dokazala, da so vse neničelne lastne vrednosti grafa $\Gamma(\mathbb{Z}_n : U_n)$ cela števila, ki delijo $\varphi(n)$, kjer je

$$\varphi(m) = \#\{s : \gcd(m, s) = 1, 1 \leq s < m\}$$

Eulerjeva φ funkcija. \mathbb{Z}_n je ciklična grupa reda n in U_n je podmnožica vseh elementov iz \mathbb{Z}_n reda n .

Abdollahi in Vatandoost [1] sta določila, kateri od poznanih regularnih celoštevskih grafov do $n = 11$ so Cayleyevi celoštevski grafi. Rezultati so prikazani v naslednji tabeli.

Tabela 3.3: Povezani Cayleyevi grafi na n točkah

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
število grafov	1	1	1	2	1	5	1	6	3	5	1

Vir: [1]

Dokaz o obstoju vseh 27-ih Cayleyevih celoštevskih grafov najdemo v [2]. Te grafe smo v nalogi sicer že omenili. V poglavju 3 smo našli 40 povezanih regularnih celoštevskih grafov, s številom točk do 10. Označili smo jih Γ_i , kjer je $i = 1, \dots, 40$. Izmed vseh teh so Cayleyevi za $1 \leq i \leq 19$ in $i \in \{21, 24, 26, 27, 35, 36, 37\}$.

Najprej bodo v nadaljevanju bodo predstavljene nekatere neskončne skupine povezanih celoštevilskih Cayleyevih grafov, potem pa je v izreku 3.11 opredeljena klasifikacija povezanih kubičnih celoštevilskih Cayleyevih grafov. Leme 3.1 - 3.10 in izrek 3.11 najdemo v [1].

Preden navedemo leme, ki opredeljujejo celoštevilске grafe, je potrebno navesti naslednji dve lemi [1], na kateri se bomo kasneje sklicevali.

Lema 3.1. *Naj bo \mathcal{G} končna grupa reda n , katere nerazcepni karakterji (nad \mathbb{C}) so ρ_1, \dots, ρ_h z ustreznimi stopnjami n_1, \dots, n_h . Potem spekter Cayleyevega grafa $\Gamma(\mathcal{S} : \mathcal{G})$ lahko uređimo kot $\Lambda = \{\lambda_{ijk} \mid i = 1, \dots, h; j, k = 1, \dots, n_i\}$, tako da $\lambda_{ij1} = \dots = \lambda_{ijn_i}$ in*

$$\lambda_{i1}^t + \dots + \lambda_{in_i}^t = \sum_{s_1, \dots, s_t \in \mathcal{S}} \rho_i \left(\prod_{l=1}^t s_l \right),$$

za vsano naravno število t .

Lema 3.2. *Naj bo $C_n = \langle a \rangle$. Potem so nerazcepni karakterji od C_n $\rho_j : a^k \rightarrow w^{jk}$, kjer je $j, k = 0, 1, \dots, n-1$ in $w = e^{\frac{\pi i}{n}}$, $i^2 = -1$.*

Lema 3.3. *Naj bo \mathcal{G} grupa in $\mathcal{G} = \langle \mathcal{S} \rangle$, kjer je $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1}$ in $1 \notin \mathcal{S}$. Če je $a \in \mathcal{S}$ in $\text{ord}(a) = m > 2$, potem je cikel z m točkami podgraf grafa $\Gamma(\mathcal{G} : \mathcal{S})$.*

Dokaz. Vidimo, da je $1 - a - a^2 - \dots - a^{m-1} = 1$ cikel z m točkami. □

Lema 3.4. *Naj bo $\mathcal{G} = \langle \mathcal{S} \rangle$ grupa, $|\mathcal{G}| = n$, $|\mathcal{S}| = 2$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1} \not\cong 1$. Potem je graf $\Gamma(\mathcal{S} : \mathcal{G})$ celoštevilski natanko tedaj, ko je $n \in \{3, 4, 6\}$.*

Dokaz. Vemo, da je $\Gamma(\mathcal{S} : \mathcal{G})$ povezan 2-regularen graf. Torej je $\Gamma(\mathcal{S} : \mathcal{G})$ cikel na n točkah. S preverjanjem lastnih vrednosti na ciklu, opazimo, da so edini celoštevilski cikli, cikli na treh, štirih ali šestih točkah. □

Lema 3.5. *Naj bo \mathcal{G} ciklična grupa $\langle a \rangle$, $|\mathcal{G}| = n > 3$ in naj bo \mathcal{S} generatorska množica grupe \mathcal{G} , tako da $|\mathcal{S}| = 3$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1} \not\cong 1$. Naj bo še $a^{\frac{n}{2}} \in \mathcal{S}$. Tudi, če je $a^r \in \mathcal{S}$ in $\text{ord}(a^r) = m > 2$, je potem $\text{gcd}(n, r) = 1$ ali pa je $\text{gcd}(\frac{n}{2}, r) = 1$.*

Dokaz. Naj bo $\text{gcd}(n, r) \neq 1$ in $\text{gcd}(\frac{n}{2}, r) \neq 1$. Potem $\langle a^r \rangle \neq \mathcal{G}$. Predpostavimo, da je $\text{gcd}(\frac{n}{2}, r) = d$, kjer je $d \neq 1$. Potem je $\langle a^r, a^{\frac{n}{2}} \rangle = \langle a^d \rangle$. Ker $d | n$, sledi $\mathcal{G} \neq \langle a^d \rangle$. Torej, $\langle a^r, a^{\frac{n}{2}} \rangle \neq \mathcal{G}$. To pa je v nasprotju z dejstvom, da \mathcal{S} generira \mathcal{G} . □

Lema 3.6. *Naj bo \mathcal{G} ciklična grupa $\langle a \rangle$, $|\mathcal{G}| = n > 3$ in naj bo \mathcal{S} taka generatorska množica grupe \mathcal{G} , da velja $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1} \not\cong 1$. Potem je graf $\Gamma(\mathcal{G} : \mathcal{S})$ celoštevilski natanko tedaj, ko je $n \in \{4, 6\}$.*

Dokaz. Naj bo $\Gamma(\mathcal{G} : \mathcal{S})$ celoštevilski. Potem je $\mathcal{S} = \{a^{\frac{n}{2}}, a^r, a^{-r}\}$, kjer je $\gcd(n, r) = 1$ ali $\gcd(\frac{n}{2}, r) = 1$. Naj bo λ lastna vrednost grafa $\Gamma(\mathcal{G} : \mathcal{S})$, ustrezajoč nerazcepnemu karakterju ρ_1 . Potem po lemah 3.1 in 3.2 je $\lambda = \rho_1(a^r) + \rho_1(a^{-r}) + \rho_1(a^{\frac{n}{2}}) = 2 \cos(\frac{2\pi r}{n}) - 1$. Ker je λ celo število, je $\cos(\frac{2\pi r}{n}) \in \{\pm\frac{1}{2}, \pm 1, 0\}$. Poglejmo si naslednja dva primera:

Primer 1: Naj bo $\gcd(n, r) = 1$. Potem, če je $\cos(\frac{2\pi r}{n}) \in \{-\frac{1}{2}, -1, 1\}$, je $n \in \{1, 2, 3\}$, kar pa je narobe. Če je $\cos(\frac{2\pi r}{n}) = 0$, potem je $n = 4$ in $r = 1$ ali 3 . Torej, $\mathcal{S} = \{a, a^2, a^3\}$. Če je $\cos(\frac{2\pi r}{n}) = \frac{1}{2}$, potem je $n = 6$ in $r = 1$ ali 5 in je $\mathcal{S} = \{a, a^3, a^5\}$.

Primer 2: Naj bo $\gcd(n, r) \neq 1$ in $\gcd(\frac{n}{2}, r) = 1$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $r < \frac{n}{2}$. Podobno kot prej, če je $\cos(\frac{2\pi r}{n}) \in \{-1, 0, \frac{1}{2}, 1\}$, potem je $r = 1$, kar pa ni pravilno. Če je $\cos(\frac{2\pi r}{n}) = -\frac{1}{2}$, je $n = 6$ in $r = 2$ ali 4 . Torej je $\mathcal{S} = \{a^2, a^3, a^4\}$.

Nasprotno, če je $n = 4$, potem je $\Gamma(\mathcal{G} : \mathcal{S})$ polni graf K_4 in tudi celoštevilski. Če je $n = 6$, $\mathcal{S}_1 = \{a, a^3, a^5\}$ in $\mathcal{S}_2 = \{a^2, a^3, a^4\}$, potem sta po lemah 3.1 in 3.2 grafa $\Gamma(\mathcal{G} : \mathcal{S}_1)$ in $\Gamma(\mathcal{G} : \mathcal{S}_2)$ celoštevilski s spektroma $[-3, 0^4, 3]$ in $[-2^2, 0^2, 1, 3]$. \square

Lema 3.7. *Naj bosta \mathcal{G}_1 in \mathcal{G}_2 grupi in \mathcal{G} definirana kot $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$, tako da je $\Gamma(\mathcal{G} : \mathcal{S})$ celoštevilski in je $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1} \not\cong 1$ množica s tremi elementi. Naj bo $\mathcal{S}_1 = \{s_1 \mid (s_1, g_2) \in \mathcal{S}, g_2 \in \mathcal{G}_2\} \setminus \{1\}$, potem je $\Gamma(\mathcal{G}_1 : \mathcal{S}_1)$ celoštevilski.*

Dokaz. Naj bosta χ_0 in ρ_0 trivialna, nerazcepna karakterja iz \mathcal{G}_1 in \mathcal{G}_2 . Naj bosta λ_{i0} in λ_i lastni vrednosti grafa $\Gamma(\mathcal{G} : \mathcal{S})$ in $\Gamma(\mathcal{G}_1 : \mathcal{S}_1)$, ki ustrezata nerazcepnicima karakterjema $\chi_i \times \rho_0$ in χ_i . Ker \mathcal{S} generira \mathcal{G} in $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1} \not\cong 1$ s tremi elementi, $|\mathcal{S}_1| = 2$ ali 3 . Če je $|\mathcal{S}_1| = 2$, potem je po lemi 3.1

$$\lambda_{i0} = \sum_{(g_1, g_2) \in \mathcal{S}} (\chi_i \times \rho_0)(g_1, g_2) = \sum_{s_1 \in \mathcal{S}_1} \chi_i(s_1) + 1$$

in tako je $\lambda_{i0} = \lambda_i + 1$. Če je $|\mathcal{S}_1| = 3$, je potem po lemi 3.1

$$\lambda_{i0} = \sum_{(g_1, g_2) \in \mathcal{S}} (\chi_i \times \rho_0)(g_1, g_2) = \sum_{s_1 \in \mathcal{S}_1} \chi_i(s_1) = \lambda_i$$

in tako je $Sp(\Gamma(\mathcal{S}_1 : \mathcal{G}_1)) \subseteq Sp(\Gamma(\mathcal{S} : \mathcal{G}))$. Torej je $\Gamma(\mathcal{S}_1 : \mathcal{G}_1)$ celoštevilski, še več, če je $|\mathcal{S}| = 2$, potem je $-1 \leq \lambda_{i0}$. \square

Lema 3.8. *Naj bo \mathcal{G} končna abelova grupa, ki ni ciklična. Naj velja še $\mathcal{G} = \langle \mathcal{S} \rangle$, kjer je $|\mathcal{S}| = 3$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1} \not\cong 1$. Sledi, da je $\Gamma(\mathcal{G} : \mathcal{S})$ celoštevilski natanko tedaj, ko je $|\mathcal{G}| \in \{4, 8, 12\}$.*

Dokaz. Naj bo $\Gamma(\mathcal{G} : \mathcal{S})$ celoštevilski. Vsi elementi v \mathcal{S} so reda 2, potem je $\mathcal{G} = C_2^2$ ali $\mathcal{G} = C_2^3$. Torej $|\mathcal{G}| = 4$ ali 8. Sicer je $\mathcal{G} = C_m \times C_2$, kjer je m sodo število. Po lemah 3.4, 3.6 in 3.7 lahko sklepamo, da je $m \in \{3, 4, 6\}$. Ker je m sod, se množica skrči na $m \in \{4, 6\}$, torej $|\mathcal{G}| \in \{4, 8, 12\}$.

Če je $|\mathcal{G}| = 4$, je $\Gamma(\mathcal{G} : \mathcal{S}) = K_4$ in tako je celoštevilski.

Naj bo $|\mathcal{G}| = 8$, potem je $\mathcal{G} = C_2^3$ ali $C_4 \times C_2$. Če je $\mathcal{G} = C_2^3$ in $\mathcal{S} = \{(b, 1, 1), (1, b, 1), (1, 1, b)\}$, potem je po lemi 3.3 graf $\Gamma(C_2^3 : \mathcal{S})$ celoštevilski s spektrom $[-3, -1^3, 1^3, 3]$. Če je $\mathcal{G} = C_4 \times C_2$ in $\mathcal{S} = \{(a, 1), (a^3, 1), (1, b)\}$, potem po lemi 3.1 je $\Gamma(C_4 C_2 : \mathcal{S})$ celoštevilski s spektrom $[-3, -1^3, 1^3, 3]$.

Naj bo $|\mathcal{G}| = 12$, potem je $\mathcal{G} = C_6 \times C_2$. Če je $\mathcal{S} = \{(a, 1), (a^5, 1), (1, b)\}$, potem je po lemi 3.1 graf $\Gamma(C_6 \times C_2 : \mathcal{S})$ celoštevilski s spektrom $[-3, -2^2, -1, 0^4, 1, 2^2, 3]$. \square

Lema 3.9. *Naj bo $D_{2n} = \langle a, b \mid a^n = b^2 = 1, (ab)^2 = 1 \rangle$, $n = 2m + 1$ in $\Gamma(D_{2n} : \mathcal{S})$ je celoštevilski, kjer je $D_{2n} = \langle \mathcal{S} \rangle$, $|\mathcal{S}| = 3$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1}$ in $1 \notin \mathcal{S}$. Potem:*

(i) *-3 je enostavna lastna vrednost grafa $\Gamma(D_{2n} : \mathcal{S})$ natanko tedaj, ko so vsi elementi množice \mathcal{S} reda dva.*

(ii) *Če je $[-3, -2^{l_1}, -1^{l_2}, 0^{l_3}, 1^{l_4}, 2^{l_5}, 3]$ spekter grafa $\Gamma(D_{2n} : \mathcal{S})$, potem je $l_1 = l_4$, $l_2 = l_5$ in $4 \mid l_3$. Še več, l_1 in l_2 sta sodi števili.*

(iii) *Če je $n \neq 3$, potem je $\Gamma(D_{2n} : \mathcal{S})$ dvodelen graf.*

Dokaz. (i) Naj bo -3 enostavna lastna vrednost grafa $\Gamma(D_{2n} : \mathcal{S})$. Po lemi 3.1 in tabeli karakterjev diedrske grupe D_{2n} [1], je -3 lastna vrednost grupe $\Gamma(D_{2n} : \mathcal{S})$, ustrežajoč nerazcepnemu karakterju χ_{m+1} . Torej so vsi elementi množice \mathcal{S} v konjugiranem razredu elementa b . Nasprotno pa, če so vsi elementi iz \mathcal{S} reda 2, potem je $\mathcal{S} \subseteq \bar{b}$ (črtica ponazarja konjugiran razred elementa b). Po lemi 3.1 in upoštevajoč tabelo karakterjev diedrske grupe, lastna vrednost grafa $\Gamma(D_{2n} : \mathcal{S})$ ustrežajoč nerazcepnemu karakterju χ_{m+1} je enaka -3 .

(ii) Torej, -3 je enostavna lastna vrednost grafa $\Gamma(D_{2n} : \mathcal{S})$, $\mathcal{S} \subseteq \bar{b}$. Po lemi 3.1 in tabeli karakterjev diedrske grupe D_{2n} , so lastne vrednosti grafa $\Gamma(D_{2n} : \mathcal{S})$ ustrežajoč nerazcepemu karakterju χ_j ($1 \leq j \leq m$), negativne. Sledi, da je $l_1 = l_4$ in $l_2 = l_5$. Še več, ker je večkratnost določene lastne vrednosti, ki ustreza nerazcepnemu karakterju reda dva, so elementi 2, l_1 in l_2 soda števila in $4 \mid l_3$.

(iii) Naj bo $a^r \in \mathcal{S}$, kjer je $1 \leq j \leq m$. Vemo, da je $\gcd(n, r) = 1$. Ker je $n \neq 3$ in $\gcd(n, r) = 1$, $2 \cos\left(\frac{2\pi r}{n}\right)$ ni celo število. Naj bosta λ_{11} in λ_{12} lastni vrednosti grafa $\Gamma(D_{2n} : \mathcal{S})$, ustrežajoč nerazcepnemu elementu χ_1 . Po lemi 3.1 in tabeli karakterjev diedrske grupe D_{2n} velja zveza $\lambda_{11} + \lambda_{12} = 2 \cos\left(\frac{2\pi r}{n}\right)$. To pa je v nasprotju z dejstvom, da je $\Gamma(D_{2n} : \mathcal{S})$ celoštevilski. Torej je $\mathcal{S} \subseteq \bar{b}$ in tako je -3 lastna vrednost grafa $\Gamma(D_{2n} : \mathcal{S})$. Sledi, da je $\Gamma(D_{2n} : \mathcal{S})$ dvodelen graf. \square

Lema 3.10. *Naj bo $\mathcal{S} = \{(12), (13), \dots, (1n)\}$ in $n \in \{3, 4, 5, 6\}$, potem je graf $\Gamma(S_n : \mathcal{S})$ celoštevilski.*

Dokaz. Vemo, da je $\Gamma(S_3 : \mathcal{S})$ cikel na šestih točkah, torej tudi celoštevilski s spektrom $\{-2, -1^2, 1^2, 2\}$. Z uporabo računalniškega programa GAP [1] je enostavno opaziti, da so grafi $\Gamma(S_4 : \mathcal{S})$, $\Gamma(S_5 : \mathcal{S})$ in $\Gamma(S_6 : \mathcal{S})$ celoštevilski, z naslednjimi spektri: $\{-3, -2^6, -1^3, 0^4, 1^3, 2^6, 3\}$, $\{-4, -3^{12}, -2^{28}, -1^4, 0^{30}, 1^4, 2^{28}, 3^{12}, 4\}$ in $\{-5, -4^{20}, -3^{105}, -2^{120}, -1^{30}, 0^{168}, 1^{30}, 2^{120}, 3^{105}, 4^{20}, 5\}$. \square

Na podlagi lem 3.1, 3.3, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9 in 3.10 dobimo naslednji pomemben izrek.

Izrek 3.11. *Obstaja natanko 7 povezanih kubičnih celoštevilskih Cayleyevih grafov. Natančneje, za končno grupo \mathcal{G} in podmnožico $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1} \not\ni 1$ s tremi elementi, je $\Gamma(\mathcal{G} : \mathcal{S})$ celoštevilski graf natanko tedaj, ko je \mathcal{G} izomorfna eni izmed naštetih grup:*

$C_2^2, C_4, C_6, S_3, C_2^3, C_2 \times C_4, D_8, C_2 \times C_6, D_{12}, A_4, S_4, D_8 \times C_3, D_6 \times C_4$ ali $A_4 \times C_2$.

3.2 Celoštevski krožni grafi

W. So [28] je opredelil celoštevilске grafe med krožnimi grafi. Preden navedemo rezultate njegovih raziskav, pa si pogledjmo definicijo krožnih grafov in lastnosti le-teh.

Krožni graf ima **krožno matriko sosednosti**, ki jo dobimo tako, da vzamemo prvo vrstico matrike in jo ciklično premikamo za eno mesto v desno. Tako dobimo še ostale vrstice.

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

Krožni graf z n vozlišči, je graf, v katerem je i -ta točka sosedna z $(i \pm j)$ -to točko. Vozlišča grafa pa lahko označimo od 0 do $n - 1$ na tak način, da, če sta dve točki x in y sosednji, potem sta sosednji tudi točki z in $(z - x + y) \bmod n$. Cayleyevi grafi na cikličnih grupah so krožni grafi.

Torej, za $n \in \mathbb{N}$ in $S \subset \{1, 2, \dots, n - 1\}$ je $G(n, S)$ krožni graf na $0, 1, \dots, n - 1$ vozliščih in z matriko sosednosti $A(G) = [a_{ij}]$. Množico S imenujemo **simbol** grafa $G(n, S)$ in ga definiramo kot

$$S(G) = \{s : a_{0s} = 1\}.$$

To pomeni, da je S množica vseh sosedov vozlišča 0. V krožnem grafu sta torej sosednji točki i in $i + s \bmod n$, za vsak $s \in S$.

Za zgled, če imamo $G(n, \emptyset)$, potem je $A(G)$ ničelna matrika in $S(G) = \emptyset$. V kolikor imamo polni graf $G = K_n$, potem je $A(G) = J - I$, kjer je J matrika samih enic, I pa identična matrika in $S(G) = \{1, 2, \dots, n - 1\}$.

Simbol krožnega grafa nam lahko pove veliko lastnosti o grafu. Velja, da je krožni graf G regularen s stopnjo $|S(G)| =$ število elementov v $S(G)$ [21]. Še več, naj bo $S(G) = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ nabor celih števil tako, da velja: $1 \leq s_1, s_2, \dots, s_m < n$. Upoštevamo samo neusmerjene grafe in vemo, da je $A(G)$ simetrična matrika, potem velja, da je $s \in S$ natanko tedaj, ko je $n - s \in S$.

Graf G je povezan natanko tedaj, ko je $\gcd(n, s_1, s_2, \dots, s_m) = 1$ [28]. Dejansko ima graf G $\gcd(n, s_1, s_2, \dots, s_m)$ izomorfnih povezanih komponent. Po drugi strani pa je spekter grafa G podan na naslednji način $Sp(G) = (\lambda_0(G), \lambda_1(G), \dots, \lambda_{n-1}(G))$, kjer je lastna vrednost krožnega grafa $G(n, S)$ na n točkah definirana kot:

$$\lambda_j = \sum_{s \in S} w_n^{js}, \quad (3.1)$$

kjer je $w_n = e^{2\pi i/n}$, $i = \sqrt{-1}$ in $0 \leq j \leq n - 1$.

V vednost, w^j so vse (kompleksne) rešitve enačbe $x^n = 1$ in jih imenujemo n -ti koreni enote.

Lastne vrednosti so torej vsota vseh nerazcepnih karakterjev multiplikativne grupe \mathbb{Z}_n . Lastni vektorji, ki ustrezajo lastni vrednosti λ_j , pa so oblike $v_j = [1, w^j, \dots, w^{j(n-1)}]^T$.

Sedaj bomo dokazali, da enačba (3.1) pod določenimi pogoji implicira celoštevilskost grafa [21]. V ta namen naj za vsak četverec $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_r, \lambda_s \in Sp(G)$, kjer je $\lambda_r \neq \lambda_s$, velja:

$$\frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_r - \lambda_s} \in \mathbb{Q} \quad (3.2)$$

Izrek 3.12. *Naj bo $G(n, S)$ krožni graf na $n \geq 4$ točkah s simbolom S . Če ima G najmanj štiri različne lastne vrednosti in vse zadostijo pogoju (3.2), potem je G celoštevilski.*

Dokaz. Naj bo $k = |S|$ stopnja grafa G . Po zvezi (3.1) je $\lambda_0 = k$. Sledi, da so $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ vse različne od λ_0 , saj imamo povezan graf. V kolikor $Sp(G)$ zadostuje

pogoju (3.2), potem za vsak $i \in \{1, \dots, n-1\}$ imamo

$$\frac{\lambda_i - k}{\lambda_1 - k} \in \mathbb{Q}.$$

Torej, $\lambda_i = a_i \lambda_1 + b_i$, za nek $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$.

Sedaj bomo pokazali, da je $\lambda_i \in \mathbb{Q}$. V ta namen preučimo tri primere.

Primer 1: Naj bo $n = p$, kjer je p praštevilo. Potem je minimalni polinom w_n nad \mathbb{Q} enak $1 + X + \dots + X^{n-1}$. Ker ima G najmanj štiri različne lastne vrednosti, lahko najdemo $2 \leq j < h \leq (n-1)$, tako da so si $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_j, \lambda_h$ paroma različni.

Predpostavimo, da je $\lambda_1 \notin \mathbb{Q}$. Iz zveze (3.1) sledi, da je $\lambda_j = a_j \lambda_1 b_j$ za nek $a_j, b_j \in \mathbb{Q}$.

Upoštevajoč (3.1) dobimo

$$\sum_{s \in S} w_n^{js} = a_j \sum_{s \in S} a_n^s + b_j.$$

V tej enakosti lahko zamenjamo vsak eksponent js z najmanjšim pozitivnim ostankom $r_{j,s} \bmod n$, od koder sledi naslednja deljivost polinomov

$$1 + X + \dots + X^{n-1} \mid \sum_{s \in S} X^{r_{j,s}} - a_j \sum_{s \in S} X^s - b_j.$$

Ker je neničeln polinom na desni strani stopnje največ $n-1$ in ker je $\lambda_1 \neq \lambda_j$, dobimo

$$1 + X + \dots + X^{n-1} = \sum_{s \in S} X^{r_{j,s}} - a_j \sum_{s \in S} X^s - b_j,$$

od koder sledi, da je $-a_j = -b_j = 1$. Torej, $\lambda_j = -\lambda_1 - 1$. Enako naredimo na λ_h in dobimo $\lambda_h = -\lambda_1 - 1$, sledi, da je $\lambda_h = \lambda_j$. To protislovje pa pokaže, da je $\lambda_1 \in \mathbb{Q}$.

Primer 2: Naj bo $n = p^r$, kjer je r stopnja praštevila p in $r \geq 2$. Osredotočimo se sedaj na nabor lastnih vrednosti

$$\{\lambda_{p^{r-1}}, \lambda_{2p^{r-1}}, \dots, \lambda_{(p-1)p^{r-1}}\}.$$

Predpostavimo, da $\lambda_1 \notin \mathbb{Q}$. Sledi, da $\lambda_{p^{r-1}}$ ni racionalno število, sicer bi $\lambda_1 \in \mathbb{Q}$. Zgornji nabor lastnih vrednosti lahko zapišemo kot:

$$\lambda_{ip^{r-1}} = \sum_{s \in S} w^{ip^{r-1}s} s_n = \sum_{s \in S} w_p^{is}.$$

Izkaže se, da je λ_1 racionalno število.

Primer 3: Predpostavimo, da ima n vsa dva različna praštevilska faktorja p in q . Za vsak $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $\lambda_i = a_i \lambda_1 + b_i$, za neka $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. Torej,

$$\mathbb{Q}(\lambda_1) = \dots = \mathbb{Q}(\lambda_{n-1}). \quad (3.3)$$

Opazimo, da je $\lambda_{n/p} \in \mathbb{Q}(w_p)$ in $\lambda_{n/q} \in \mathbb{Q}(w_q)$. Ampak, enačba (3.3) implicira, da je $\lambda_{n/p} \in \mathbb{Q}(n/q)$. Torej, $\lambda_{n/p} \in \mathbb{Q}(w_p) \cap \mathbb{Q}(w_q)$. Ker sta p in q praštevili, velja

$\mathbb{Q}(w_p) \cap \mathbb{Q}(w_q) = \mathbb{Q}$. Torej je $\lambda_{n/p} \in \mathbb{Q}$ in iz zveze (3.3) sledi, da je $\lambda_1 \in \mathbb{Q}$.

Torej, v vseh treh primerih smo prišli do zaključka, da je $\lambda_1 \in \mathbb{Q}$ in s tem so vse n lastne vrednosti racionalna števila in posledično tudi cela števila. To pa implicira naš željeni rezultat. \square

Celoštevilski krožni grafi so opredeljeni s pomočjo simbola na naslednji način [28].

Izrek 3.13. *Naj bo G krožni graf s simbolom $S(G)$. Potem je G celoštevilski natanko tedaj, ko je $\sum_{s \in S(G)} x^s \in \mathbb{Z}$ za nek $x^n = 1$.*

V kolikor želimo prešteti vse celoštevilске krožne grafe, je potrebno najti vse podmnožice S množice $\{1, 2, \dots, n-1\}$, tako da velja $\sum_{s \in S(G)} x^s \in \mathbb{Z}$ za nek $x^n = 1$.

S pomočjo najmanjšega skupnega delitelja so strokovnjaki [10] pred kratkim označili celoštevilске krožne grafe na naslednji način. Naj bo

$$G_n(d) = \{k : \gcd(n, k) = d, 1 \leq k < n\}$$

nabor celih števil, manjših od n , ki imajo enak največji skupni delitelj d z n . Še več, za Eulerjevo φ -funkcijo velja:

$$\#G_n(d) = \varphi\left(\frac{n}{d}\right).$$

Naj bo D_n nabor pozitivnih deliteljev d števila n , kjer je $d \leq \frac{n}{2}$. Potem lahko navedemo naslednji pomemben izrek [28].

Izrek 3.14. *Naj bo G krožni graf na n točkah s simbolom $S(G)$. Potem je G celoštevilski natanko tedaj, ko je $S(G)$ unija vseh $G_n(d)$:*

$$S = \bigcup_{d \in D} G_n(d),$$

za nek nabor deliteljev $D \in D_n$.

Dokaz. Vemo, da če je $S(G)$ je unija nekaj $G_n(d)$ kjer $d|n$ in $d < n$, je potem G celoštevilski krožni graf. Za potrebe dokaze vzamemo vektor v razsežnosti $n-1$, z enko na j -tem mestu, kjer je $j \in S(G)$, in ničlami povsod drugod in F $(n-1) \times (n-1)$ matriko, ki je definirana kot $F_{st} = w^{st}$. Ker je G celoštevilski krožni graf, je $Fv = [\lambda_1(G)\lambda_2(G)\dots\lambda_{n-1}(G)]^T \in \mathbb{Z}^{n-1}$ in $v \in \mathcal{A}$, kjer je $\mathcal{A} = \{v \in \mathbb{Q}^{n-1} : Fv \in \mathbb{Q}^{n-1}\}$. Sledi, da je $v = \sum_{d|n, d < n} c_d v_d$, za neke racionalne koeficiente c_d . Ker sta v in v_d $(0,1)$ -vektorja, je c_d ali 0 ali 1. Posledično je $S(G)$ unija vseh $G_n(d)$ za $c_d = 1$. \square

Posledica 3.15. Naj bo $\tau(n)$ število deliteljev števila n . Obstaja največ $2^{\tau(n)-1}$ celoštevskih krožnih grafov na n točkah.

Dokaz. Obstaja $\tau(n) - 1$ deliteljev števila n in nabori števil $G_n(d)$. Obstaja $2^{\tau(n)-1}$ različnih simbolov za celoštevilske krožne grafe. Ker lahko različni simboli pripadajo izomorfnim krožnim grafom, sledi, da je celoštevskih krožnih grafov kvečjemu $2^{\tau(n)-1}$. \square

V članku [20] sta avtorja raziskovala racionalne krožne grafe in prišla do ugotovitve, da število $2^{\tau(n)-1}$ v zgornji posledici predstavlja tudi število neizomorfnih racionalnih krožnih grafov (brez zank) reda n .

3.3 Primer celoštevilskega grafa - graf igre Sudoku

Rekreacijska igra Sudoku je dosegla kar precej popularnosti v zadnjih letih. Tradicionalne Sudoku sestavljanke so sestavljene iz 3×3 kvadratnih blokov in vsak blok je sestavljen iz 3×3 celic. Na začetku je vsaka celica lahko prazna ali pa vsebuje število med 1 in 9 - glej spodnjo sliko.

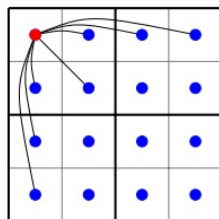
	4		5				1	
	6		8	4				
		1					9	
5						4		1
		2			5			
1					3			7
			7	9		1		5
					2		4	
			1	3		9		6

Slika 3.2: Primer igre Sudoku.

Cilj sestavljanke je zapolniti prazne celice s številkami od 1 do 9 tako, da vsaka vrstica, stolpec in blok sestavljanke vsebuje vse številke od 1 do 9. Pravilno zapolniti sestavljanke Sudoku je mogoče le na en način (imamo v mislih 3×3 bločno sestavljanke).

Zaradi splošne priljubljenosti Sudoku igre se prav tako povečuje količina matematičnih raziskav o njej. Še posebej so sestavljanke tesno povezane s teorijo grafov.

Igro lahko posplošimo na n^4 (namesto $3^4 = 81$) celic, tako da je potrebno vstavljati številke od 1 do n^2 . Poimenujmo te sestavljanke n -Sudoku, kjer je $n \geq 2$. Točke (celice) grafa so sosedne, če so v istem bloku, vrstici ali stolpcu. Ta postopek je prikazan na sliki 3.3.



Slika 3.3: Izpeljava grafa $Sud(2)$ iz 2-Sudoku sestavljanke.

Ključ za določanje lastnih vrednosti Sudoku grafov je opazovanje, da so Sudoku grafi dejansko NEPS [25] (ang. *non-complete extended p-sum*), kar pomeni nepopolna razširjena p -vsota. Preden si ogledamo klasifikacijsko lemo, definirajmo operacijo NEPS.

Imejmo množico $\mathcal{B} \subseteq \{0, 1\}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ in grafe G_1, \dots, G_n . NEPS teh grafov, glede na bazo \mathcal{B} je graf G z množico točk $V(G) = V(G_1) \times \dots \times V(G_n)$ in množico povezav $E(G)$, kjer sta točki $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in V(G)$ sosedni natanko tedaj, ko obstaja n -terica $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathcal{B}$, tako da:

- $x_i = y_i$, ko je $\beta_i = 0$
- x_i in y_i sta sosedni v G_i , ko je $\beta_i = 1$

Graf, ki je nepopolna razširjena p -vsota grafov označimo kot: $G = NEPS(G_1, \dots, G_n; \mathcal{B})$. Velja, da če so lastne vrednosti grafov G_1 in G_2 cela števila, potem so tudi lastne vrednosti vsakega grafa oblike $NEPS(G_1, G_2; \mathcal{B})$ cela števila [25].

Spekter grafa $NEPS(G_1, \dots, G_n; \mathcal{B})$ je sestavljen iz vseh možnih vrednosti Λ , definiranih kot

$$\Lambda = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \lambda_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{\beta_n},$$

kjer je λ_i poljubna lastna vrednost od G_i , za $i = 1, \dots, n$.

Lema 3.16. *Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $G_1, \dots, G_4 = K_n$. Če je graf G NEPS od G_i , za bazo $\mathcal{B} = \{(0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$, potem je $G \simeq Sud(n)$.*

Dokaz. Lahko predpostavimo, da je $V(G_i) = \{1, \dots, n\}$. Naredimo bijektivno preslikavo med 4-tericami v $V(G) = \{1, \dots, n\}^4$ in celicami v Sudoku mreži na naslednji način. Za vsako točko $v = (a, b, c, d) \in V(G)$, povežimo v s celico Γ_v , ki leži v vrstici št. $(a-1)n + b$ in v stolpcu št. $(c-1)n + d$ Sudoku mreže. Torej, a in c označujeta vertikalno in horizontalno številko bloka, b in d pa položaj znotraj bloka.

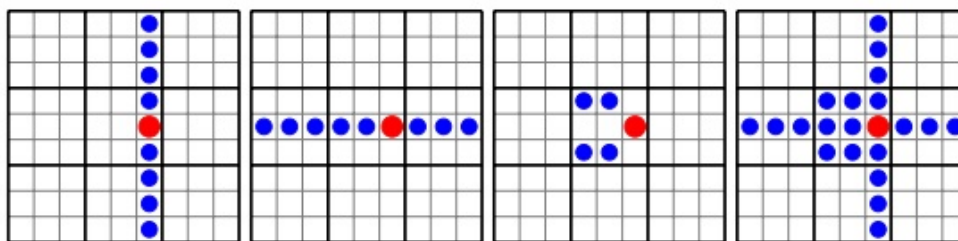
Sedaj fiksirajmo točko $v \in V(G)$ in nek $\beta \in \mathcal{B}$ in pogledjmo kako β izbere določene točke (celice) iz G za sosedne z v :

- Za izbor celic, ki ležijo v istem bloku kot Γ_v sta a in c enaka, imamo 8 možnosti:
 - Celici, ki ležita v istem stolpcu imata enak d , torej $d = 0$ in za b imamo potem 2 možnosti. Dobimo: $(0, 1, 0, 0)$ in $(0, 0, 0, 0)$, vendar druga odpade, ker po definiciji NEPS-a ničelna 4-terica ni v bazi \mathcal{B} .
 - Celici, ki ležita v isti vrstici imata enak b , torej $b = 0$ in za d imamo potem 2 možnosti. Dobimo: $(0, 0, 0, 1)$ in $(0, 0, 0, 0)$, spet druga odpade po definiciji NEPS-a.
 - Na voljo imamo še 4 polja, ki znotraj bloka ne ležijo v istem stolpcu ali vrstici kot izbrana točka. To pomeni, da morata imeti b in d različna ($b = 1$ in $d = 1$). Dobimo 4-terico $(0, 1, 0, 1)$.
- Za izbor celic, ki ležijo v istem stolpcu kot Γ_v sta c in d enaka. Ne želimo se nahajati v istem bloku, kot je izbrana celica, in to dosežemo, ko je $a = 1$, za izbor vrednosti b sta potem 2 možnosti: $(1, 1, 0, 0)$ in $(1, 0, 0, 0)$.
- Za izbor celic, ki ležijo v isti vrstici kot Γ_v , sta a in b enaka. Podobno kot prej, želimo izločiti izbiro celic, ki se nahajajo v istem bloku kot izbrana celica, zato je $c = 0$ in dobimo naslednji možnosti: $(0, 0, 1, 1)$ in $(0, 0, 1, 0)$.

Z združitvijo določenih 4-teric, dobimo naslednje množice:

- $S_1 = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ izbere vse celice v istem stolpcu kot Γ_v , razen Γ_v samega.
- $S_2 = \{(0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ izbere vse celice v isti vrstici kot Γ_v , razen Γ_v samega.
- $S_3 = \{(0, 1, 0, 1)\}$ izbere vse celice, ki so v istem bloku kot Γ_v , razen Γ_v in ki niso izbrane z nobeno od prejšnjih dveh množic.

Vse tri množice skupaj pa določajo ravno sosesčino točke Γ_v v Sudoku grafu. Postopek je prikazan na sliki 3.4, na naslednji strani. \square



Slika 3.4: Izbira celic glede na baze množice S_1, S_2, S_3 in \mathcal{B} .

T. Sander [25] je prišel do ugotovitev, da so **vse lastne vrednosti grafa $Sud(n)$ cela števila**. Poleg tega je preučeval spekter n -Sudoku grafov za $n \geq 2$ in izračunal natančne lastne vrednosti grafa, skupaj z njihovimi večkratnostimi. Graf $Sud(2)$ ima natanko 5 različnih lastnih vrednosti, za $n > 2$ pa jih ima $Sud(n)$ natanko 6. Slednje so v naslednji tabeli navedene v naraščajočem zaporedju.

Tabela 3.4: Lastne vrednosti in pripadajoče večkratnosti Sudoku grafa

lastna vrednost	pripadajoča večkratnost
$-1 - n$	$2n(n - 1)^2$
-1	$n^2(n - 1)^2$
$n^2 - 2n - 1$	$(n - 1)^2$
$n^2 - n - 1$	$2n(n - 1)$
$2n^2 - 2n - 1$	$2(n - 1)$
$3n^2 - 2n - 1$	1

Vir: [25]

Skupaj s Klotz-om pa je Sander [26] preučeval celoštevilске Cayleyeve grafe nad abelskimi grupami. Ugotovila sta, da je vsak Sudoku graf celoštevilski Cayleyev graf: $Sud(n) = Cay(\mathcal{G} : \mathcal{S})$ za abelsko grupo \mathcal{G} in simbolom $\mathcal{S} \in \mathfrak{B}(\mathcal{G})$, kjer je $\mathfrak{B}(\mathcal{G})$ Boolova algebra, generirana s podgrupo grupe \mathcal{G} .

4 Laplaceovi celoštevilski grafi

Naj bo G enostavni graf na n točkah, z matriko sosednosti A . Lastne vrednosti in spekter matrike A so tudi lastne vrednosti in spekter grafa G . Vemo že, da se graf, katerega spekter je v celoti sestavljen iz celih števil, imenuje celoštevilski graf.

Definirajmo matriko $L = D - A$, imenujemo jo **Laplaceova matrika**. D pa je diagonalna matrika stopenj točk grafa. V slednji matriki element na d_{ii} mestu ponazarja stopnjo točke i in tako lahko v simbolnem jeziku matriko L definiramo kot:

$$L = [l_{ij}]_{n \times n} = \begin{cases} \deg(v_i) ; & \text{če je } i = j \\ -1 ; & \text{če je } i \text{ sosedna z } j \\ 0 ; & \text{sicer} \end{cases}$$

kjer $\deg(v_i)$ označuje stopnjo točke i . Tako dobimo Laplaceove lastne vrednosti in Laplaceov spekter (krajše L -lastne vrednosti in L -spekter). Poglejmo si nekaj osnovnih lastnosti matrike L :

- Je realna, simetrična, singularna in pozitivno semidefinitna, torej lahko označimo lastne vrednosti z μ_1, \dots, μ_n , kjer je $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$.
- $\mu_1 = 0$, ker za vektor $v_0 = [1, 1, \dots, 1]$ velja zveza $L \cdot v_0 = 0$.
- Večkratnost lastne vrednosti 0 matrike L je enako številu povezanih komponent grafa G .
- Vsota vsake vrstice in vsakega stolpca je enaka 0.

Glede regularnih grafov lahko iz definicije L -matrike izpeljemo naslednjo zvezo: $L + A = kI$, graf G je k -regularen. Element λ je lastna vrednost matrike L natanko tedaj, ko je $k - \lambda$ lastna vrednost matrike A . Torej, če je $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ je $Sp(L) = \{k - \lambda_1, k - \lambda_2, \dots, k - \lambda_n\}$. To pomeni, da je regularen graf L -celoštevilski, natanko tedaj, ko je A -celoštevilski.

Situacija glede L -spektra dreves se izkaže, da so drevesa L -celoštevilska natanko tedaj, ko so zvezde, tj. polni dvodelni grafi oblike $K_{1,n}$.

Če pa imamo matriko $Q = D + A$, imenujemo jo **brezznačna Laplaceova matrika**, lahko podobno kot smo opredelili L sedaj definiramo še Q matriko:

$$Q = [q_{ij}]_{n \times n} = \begin{cases} \deg(v_i); & \text{če je } i = j \\ 1; & \text{če je } i \text{ sosedna z } j \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

kjer $\deg(v_i)$ označuje stopnjo točke i in dobimo brezznačne Laplaceove lastne vrednosti in brezznačni Laplaceov spekter. Krajše bomo brezznačne Laplaceove lastne vrednosti in brezznačni Laplaceov spekter označili kot Q -lastne vrednosti in Q -spekter. Tudi Q ima realen spekter in nenegativne lastne vrednosti, ni pa nujno singularna.

Vemo že, da je vsota lastnih vrednosti sled matrike sosednosti. V zvezi z matrikami L in Q velja naslednja zveza: $Tr(Q) = Tr(L)$.

Graf, katerega Laplaceov spekter je v celoti sestavljen iz celih števil, poimenujemo **L -celoštevilski** oz. za celoštevilski brezznačni Laplaceov spekter imamo **Q -celoštevilski graf** [33]. Velja še, da je graf **ALQ -celoštevilski**, če ima vse tri do sedaj omenjene spektre celoštevilске.

V poglavju 2 smo si ogledali spektre nekaj najosnovnejših skupin grafov. Poglejmo si sedaj njihove L -spektre [3]:

1. Za polni graf K_n je Laplaceova matrika $L = nI - J$, ki ima spekter $\{0, n^{n-1}\}$.
2. Polni, dvodelni graf $K_{m,n}$ ima L -spekter $\{0, m^{n-1}, n^{m-1}, m+n\}$.
3. Cikli C_n so 2-regularni, zato je L -spekter sestavljen iz števil $\{2 - 2 \cos(\frac{2\pi j}{n}) \mid j = 0, \dots, n-1\}$.
4. Za pot P_n je L -spekter $\{2 - 2 \cos(\frac{\pi j}{n}) \mid j = 0, \dots, n-1\}$.
5. Za k -regularen graf je $L = kI - A$. V kolikor ima k -regularen graf G lastne vrednosti $k = \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ in L -lastne vrednosti $0 = \mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$, potem je $\lambda_i = k - \mu_i$ za $i = 1, \dots, n$.
Lastne vrednosti matrike $Q = kI + A$ pa so: $2k, k + \lambda_2, \dots, k + \lambda_n$.
6. Laplaceova matrika sosednosti komplementarnega grafa je $\bar{L} = nI - J - L$ in lastne vrednosti so $0, n - \mu_n, \dots, n - \mu_2$.

Če sta G_1 in G_2 L -celoštevilska, potem unija in spoj ohranjata L -celoštevilskost [31] in [23].

Poglejmo si sedaj podrobnejše podatke o Q -celoštevilskih grafih. Vemo, da je matrika Q pozitivno semidefinitna - spekter matrike Q vsebuje samo pozitivne vrednosti. Večkratnost lastne vrednosti 0 matrike Q pa povejo število dvodelnih povezanih komponent grafa G .

Število povezanih Q -celoštevilskih grafov na n vozliščih je prikazano v naslednji tabeli, kjer je $n = 1, 2, \dots, 10$:

Tabela 4.1: Število Q -celoštevilskih grafov

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
število	1	1	2	3	3	13	14	18	26	91

Vir: [33]

S seštevkom vrednosti v drugi vrstici dobimo skupaj 172 povezanih Q -celoštevilskih grafov. Grafe do 5 vozlišč je enostavno poiskati, saj jih je skupaj 10. Slednji so: K_1 , K_2 , $K_{1,2}$, K_3 , $K_{1,3}$, $K_{2,2}$, K_4 , $K_{1,4}$, $K_{2,3}$ in K_5 . V prilogi B pa so navedeni podrobnejši podatki o Q -celoštevilskih grafih na 6, 7, 8, 9 in 10-ih točkah.

Na podlagi do sedaj navedenega in priloženih podatkov v prilogah lahko opazimo določene zveze [33] in [32].

Lema 4.1. *Naj bo G dvodelen graf. Potem njegova L in Q spektra sovpadata.*

Dokaz. Predpostavimo, da je G dvodelen graf z deloma U in V . Vemo, da imata L in Q matriki dvodelnega grafa enake diagonalne elemente, ostali elementi pa se razlikujejo samo v predznaku (matrika L ima izven diagonale 0 in -1 , Q ji je skoraj enaka, le da ima namesto -1 števila 1). Pomnožimo z -1 vse vrstice in stolpce, ki ustrezajo točkam iz U v matriki Q . Preoblikovana matrika je sedaj enaka L matriki. Sledi, da imata matriki enak spekter. Vemo, večkratnost lastne vrednosti 0 v L -spektru pove število povezanih komponent grafa, medtem ko v Q -spektru pa pove število dvodelnih komponent grafa. Torej graf je dvodelen. \square

Posledica te leme je, da sta za vsak dvodelen graf matriki L in Q karakteristična polinoma enaka in graf je L -celoštevilski natanko tedaj ko je Q -celoštevilski.

Lema 4.2. *Vsak polni dvodelen graf je Q -celoštevski.*

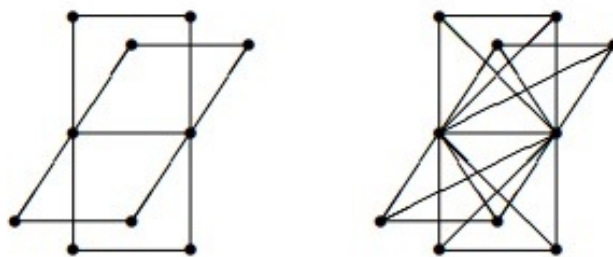
Dokaz. Spomnimo se, da je poljuben graf Q -celoštevski natanko tedaj, ko je A -celoštevski. Torej, če je $K_{m,n}$ polni dvodelen graf, potem je njegov povezavni graf $K_m \square K_n$, kjer \square označuje kartezični produkt grafov. Po drugi strani pa je spekter grafa $K_m \square K_n$ sestavljen iz vseh možnih vsot lastnih vrednosti λ_i iz K_m in λ_j iz K_n . Dejstvo, da je vsaka lastna vrednost polnega grafa celoštevilski, pa zaključuje dokaz. \square

Lema 4.3. *Polni dvodelen graf $K_{m,n}$ je hkrati celoštevilski, L -celoštevski in Q -celoštevski, če in samo če je mn popolni kvadrat.*

Dokaz. Velja, da L -spekter in Q -spekter pri polnih dvodelnih grafih sovpadata in po lemi 4.2 so ti grafi celoštevilski. Nadalje, spekter polnih dvodelnih grafov $K_{m,n}$ vsebuje števila \sqrt{mn} , $-\sqrt{mn}$ in $m+n-2$ lastnih vrednosti 0, kar zaključuje dokaz. \square

Naj bo graf G regularen in ima enega izmed do sedaj naštetih spektrov celoštevilskega, potem velja, da sta tudi druga dva spektra celištevilski. Natančneje, polni grafi K_n in dvodelni polni grafi $K_{n,n}$ predstavljajo neskončen nabor grafov, ki imajo vse tri spektre celoštevilske.

Opredelitev grafov, ki imajo vse tri spektre (A, L, Q) celoštevilske, si tudi zasluži pozornost. Leta 2007 je Stevanović postavil naslednji odprt problem: iskanje povezanih neregularnih grafov, ki imajo vse 3 spektre celoštevilske. Znanstveniki so ugotovili, da obstaja natanko 42 povezanih grafov do 10 vozlišč, ki imajo vse tri spektre celoštevilske, 40 izmed teh je regularnih ali polnih dvodelnih ali oboje. Preostala dva grafa sta $K_2 \square K_{1,4}$ in $K_2 \nabla 4K_2$ - prikazana sta na sliki spodaj. Sta najmanjša povezana grafa, ki nista niti regularna, niti polna dvodelna grafa, ampak imata vse tri spektre celoštevilske. V nadaljevanju bo predstavljena posplošitev te lastnosti.



Slika 4.1: Povezana neregularna grafa.

Graf na levi strani je dvodelen, torej je L -celoštevski in istočasno Q -celoštevski s LQ -spektrom $\{7, 5, 3^3, 2, 1^3, 0\}$ in A -spektrom $\{3, 1^4, -1^4, -3\}$.

Graf na desni pa ima L -spekter $\{5, 1^3, -1^5, -3\}$, Q -spekter $\{10^2, 4^4, 2^3, 0\}$ in A -spekter $\{12, 8, 4^3, 2^5\}$.

Izrek 4.4. *Če je $G_1 \square G_2$ dvodelen graf, kjer sta G_1 in G_2 celoštevski in L -celoštevski, potem je graf $G_1 \square G_2$ ALQ -celoštevski.*

Dokaz. Naj bodo $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_1}$ in $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_2}$ lastne vrednosti (oz. L -lastne vrednosti) grafov G_1 in G_2 . Sledi, da so lastne vrednosti (oz. L -lastne vrednosti) grafa $G_1 \square G_2$ $\lambda_i \pm \lambda_j$, kjer je $1 \leq i \leq n_1$ in $1 \leq j \leq n_2$. Vemo, da za dvodelne grafe L in Q -spekter sovpadata, torej ima kartezični produkt grafov vse tri spektre celoštevskie. \square

Posledica 4.5. *Graf $K_{m_1, n_1} \square K_{m_2, n_2}$ je ALQ -celoštevski, če sta $m_1 n_1$ in $m_2 n_2$ popolna kvadrata. Posledično je graf $K_2 \square K_{1, n}$ ALQ -celoštevski, ko je n popoln kvadrat.*

Dokaz. Dokaz sledi iz prejšnjega izreka in leme 4.3, da je poln dvodelen graf $K_{m, n}$ ALQ -celoštevski natanko tedaj, ko je mn popolni kvadrat. \square

V nadaljevanju bo opredeljena neskončna družina ALQ -grafov [32].

Lema 4.6. *Graf $K_2 \nabla n K_2$ je celoštevski če in samo če, je n popolni kvadrat. Isti graf je L -celoštevski za vsak n .*

Dokaz. Očitno je, da lema drži za $n = 0$. Vzemimo zato $n \geq 1$. Z izračunom lastnih vrednosti pridemo do spektra $\{-1^{n+1}, 1^n - 1, \pm 2\sqrt{n} + 1\}$ in do L -spektra: $\{0, 2^{n-1}, 4^n, (2n + 2)^2\}$. Števila v obeh spektrih so cela in lema je dokazana \square

Preden si pogledamo Q -spekter, si oglejmo splošno zvezo, ki jo bomo uporabili kasneje v dokazu. Spomnimo se, da če je G poljuben (enostaven) graf in u njegova točka, potem sta odprta in zaprta soseščina od u definirani kot $\{v | v \sim u\}$ in $\{v | v \sim u\} \cup \{u\}$. Oznaka \sim ponazarja povezanost točk. Pravimo, da sta dve točki podvojeni (duplicirani) oz. ko-duplicirani, če sta njuni odprti oz. zaprti soseščini enaki.

Vsak nabor k med seboj dupliciranih oz. ko-dupliciranih točk u in v stopnje d v enostavnem grafu G , nam da $k - 1$ Q -lastnih vrednosti grafa G , kjer so vse enake d oz. $d - 1$.

Dokaz. Vsak par med seboj dupliciranih oz. ko-dupliciranih točk u in v privede do breznačnega lastnega vektorja grafa G za lastno vrednost d oz. $d-1$, ki je definiran na naslednji način: vsi vnosi so enaki nič, razen tistih, ki ustrezajo u in v , ki sta lahko 1 in -1 ali obratno. Tako nam vsak nabor k med seboj dupliciranih oz. ko-dupliciranih točk poda $k-1$ linearno neodvisnih Q -lastnih vektorjev za lastno vrednost d oz. $d-1$. \square

Lema 4.7. Q -spekter grafa $K_2 \nabla n K_2$, kjer je $n \geq 1$ je sestavljen iz naslednjih lastnih vrednosti: $2^n + 1, 4^n - 1, 2n$ in $2n + 4$.

Dokaz. Za začetek vemo, da sta dve k-duplicirani točki stopnje $2n+1$ in obstaja n parov med seboj ko-dupliciranih točk stopnje 3. Po prejšnji lemi lahko sklepamo, da Q -spekter našega grafa vsebuje lastno vrednost $2n$, kot tudi lastno vrednost 2 z večkratnostjo najmanj n . Ostalih n lastnih vrednosti dobimo s konstrukcijo ustreznih lastnih vektorjev. Matrika Q je oblike:

$$Q = \begin{bmatrix} 2n+1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2n+1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sedaj je potrebno preveriti ali lastni vektor $x_1 = [n, n, 1, 1, \dots, 1]^T$ ustreza lastni vrednosti $2n+4$, medtem ko ostalih $n-1$ linearno neodvisnih vektorjev $x_2 = [0, 0, -1, -1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0]^T$, $x_3 = [0, 0, -1, -1, -1, -1, 2, 2, 0, 0, \dots, 0]^T, \dots$ in $x_n = [0, 0, -1, -1, \dots, -1, -1, n-1, n-1]^T$ ustreza lastni vrednosti 4.

Do sedaj imamo $2n-1$ lastnih vrednosti od Q . S seštevkom dobimo $10n$. Na drugi strani je sled matrike Q enaka $10n+2$ in torej zadnja lastna vrednost je enaka 2. \square

Izrek 4.8. Graf $K_2 \nabla n K_2$ je ALQ -celoštevilski, če in samo če je n popolni kvadrat.

Dokaz. Upoštevajoč zgornje leme, kjer smo posamično dokazali, da ima omenjeni graf A, L in Q celoštevilski spekter, sledi, da je ALQ -celoštevilski. \square

Za zgled si pogledajmo še Petersenov graf, ki je ALQ -celoštevilski. V poglavju 2 smo si pogledali njegov A -spekter, ki je $\{3, -2^4, 1^5\}$. Vemo, da Petersenov graf 3-regularen ($k = \lambda_1 = 3$). Za L -spekter uporabimo zvezo: $\lambda_i = k - \mu_i$ za $i = 1, \dots, n$,

kjer so λ_i lastne vrednosti matrike A , μ_i pa lastne vrednosti matrike L . Dobimo torej $Sp(L) = \{5^4, 2^5, 0^1\}$. Za Q -spekter pa vemo, da je enak $\{2k, k + \lambda_2, \dots, k + \lambda_n\}$, torej je $Sp(Q) = \{6^1, 4^5, 1^4\}$.

V poglavju 2 smo omenili tudi pojem kospektralnih grafov. Rekli smo, da sta dva neizomorfna grafa kospektralna, če imata enake lastne vrednosti, glede na matriko A . Obstaja več različnih matrik, ki se uporabljajo v spektralni teoriji grafov. Različne matrike lahko podajo različne informacije o grafu. Pari grafov so lahko kospektralni glede na eno matriko, pa niso kospektralni glede na drugo matriko. Obstajajo tudi pari grafov, ki so kospektralni z ozirom na vse matrike. V tem poglavju smo spoznali matriki L in Q , zato bomo od sedaj naprej uporabljali oznake:

- A -kospektralni grafi - glede na matriko A
- L -kospektralni grafi - glede na matriko L
- Q -kospektralni grafi - glede na matriko Q

Znanstveniki [30] so prešteli pare kospektralnih grafov na manjšem številu točk (od 2 do 11). Za matriko sosednosti A grafa G označimo z \bar{A} matriko sosednosti grafa \bar{G} .

Tabela 4.2: Število kospektralnih grafov

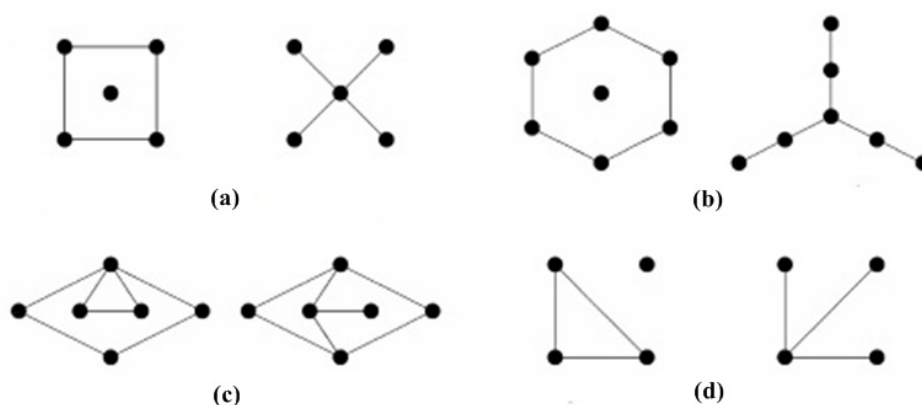
št. točk grafa	št. grafov	A	A in \bar{A}	L	Q
2	2	0	0	0	0
3	4	0	0	0	0
4	11	0	0	0	2
5	34	2	0	0	4
6	156	10	0	4	16
7	1.044	110	40	130	102
8	12.346	1.722	1.166	1.767	1.201
9	274.668	51.038	43.811	42.595	19.001
10	12.005.168	2.560.516	2.418.152	1.412.438	636.607
11	1.018.997.864	215.331.677	212.264.372	91.274.836	38.966.935

Vir: [30]

V tabeli 4.2 so prikazana štetja kospektralnih grafov, glede na matrike A , A in \bar{A} , L ter Q . Prva dva stolpca prikazujeta število grafov na določenem številu točk (všteti so tudi nepovezani grafi). Ostali štirje stolpci pa ponazarjajo število paroma kospektralnih grafov.

Za določitev kospektralnosti grafov so najprej s pomočjo računalniških programov generirali vse grafe, določili njihove karakteristične polinome in jih primerjali. Za zmanjšanje količine podatkov so uporabili dejstvo, da morajo kospektralni grafi imeti enako število povezav. Vendar, v primeru grafov na 11-ih točkah so bili potrebni še dodatni pogoji, saj je bilo število teh grafov preveč obsežno. Ne samo da morajo imeti enako število povezav, ampak tudi enako število trikotnikov. V primeru L in Q spektrov pa obstajajo kospektralni grafi tudi, ko število trikotnikov ni enako (glej sliko 4.2). V ta namen je bil uporabljen kriterij, da imajo kospektralni grafi enaki vsoti $\sum d_i$ in $\sum d_i^2$.

Za zgled so v nadaljevanju podani najmanjši pari (glede na število točk in povezav) kospektralnih grafov, za vsak spekter posebej.



Slika 4.2: Minimalni kospektralni grafi za vsako matriko.

S parom pod točko (a) smo se že srečali v poglavju 2 - sta A -kospektralna. Grafa pod točko (b) imata enak A in \bar{A} spekter. Pod (c) sta L -kospektralna, pod (d) pa Q -kospektralna.

Opazimo, da je štetje kospektralnih grafov prineslo ogromne številke. Vsebovani so tudi spektri, ki nimajo celih lastnih vrednosti, zato se vprašamo: kako je pa s kospektralnimi celoštevilskimi grafi? Število grafov se v tem primeru drastično zmanjša. V tem poglavju smo navedli 172 povezanih Q -celoštevskih grafov - ponazorjeni so v prilogah. Na grafih z manj kot sedmimi točkami ni nobenega neizomorfnega povezanega celoštevilskega para Q -kospektralnih grafov. Prvi in edini par na 7-ih točkah sta grafa: $K_{3,3} \nabla K_1$ in $(K_1 \cup K_3) \nabla 3K_1$. Prikazana sta na sliki/tabeli B.2 pod zaporedno št. 9 in 10. Tudi na 8-ih točkah je samo en par grafov, na sliki/tabeli B.3 sta to grafa pod št. 11 in 12. Obenem sta ta dva grafa tudi L -kospektralna. Na 9-ih točkah sta dva para. Na sliki/tabeli B.4 par pod št. 6 in 7 ter par pod št. 24 in 25. V tabeli B.5 so prikazani grafi na 10-ih točkah. V tej skupini pa imamo celo eno trojico Q -kospektralnih grafov, to

so grafi pod zaporedno št. 86, 87 in 88. Obenem obstajajo štirje pari Q -kospektralnih grafov, to so dvojice: 41-42, 43-44, 48-49 in 65-66 in dva para L -kospektralnih grafov: 41-42 in 43-44. Na grafih do 10 točk pa ne obstajajo grafi, ki bi bili istočasno A in Q -kospektralni [32].

5 Zaključek

V magistrski nalogi smo najprej obrazložili osnovne pojme v teoriji grafov. Načine kako lahko ponazorimo grafe, npr. matrike sosednosti. Z izračuni determinant na posebnih matrikah dobimo posebno lepe lastnosti grafa. S pomočjo matrike sosednosti lahko izračunamo lastne vrednosti grafa. Vsota vseh lastnih vrednosti je enaka sledi matrike, produkt pa determinanti. Za lastno vrednost se lahko večkrat pojavi isti rezultat, kolikokrat, nam pove njena večkratnost. Seštevek vseh večkratnosti pa je ravno število vseh točk grafa. Naboru vseh lastnih vrednosti pravimo spekter. Slednje so vedno realna števila. Posebno lepim grafom se spekter lahko določi zelo enostavno, to so na primer polni grafi K_n , polni dvodelni grafi $K_{m,n}$, cikli, poti, regularni grafi, krepko regularni grafi, povezavni grafi in še kakšen bi se našel.

Zgodi se lahko, da so lastne vrednosti lepa, cela števila. Takrat pravimo, da je graf celoštevilski. Ti grafi pa so bili osrednja tema magistrske naloge. Na splošno je te grafe zelo težko klasificirati, zato so rezultati podani glede na različne družine grafov. Obstaja 588 povezanih, celoštevilskih grafov s kvečjemu 12 točkami, če dodamo še pogoj regularnosti, potem na številu točk od 1 do 10 najdemo 40 takih grafov. Bussemaker, Cvetković in Schwenk so dokazali, da obstaja 13 povezanih kubičnih celoštevilskih grafov. Stevanović je preučeval 4-regularne grafe in izogibal se je vrednostim ± 3 v spektru grafa. Cvetković je dokazal tudi, da je množica povezanih regularnih celoštevilskih grafov, katerekoli fiksne stopnje, končna. Simič in Radosavljevič sta opredelila vseh 13 neregularnih nedvodelnih povezanih celoštevilskih grafov z maksimalno stopnjo 4. Wang in Hoede sta sestavila 15 neskončnih družin neregularnih dvodelnih celoštevilskih grafov. Drevesa so zelo obsežno preučevana na področju celoštevilskosti. Omidji je identificiral celoštevilске grafe z največ dvema cikli in z nobenimi lastnimi vrednostimi 0. V nalogi smo se podrobneje ukvarjali s Cayleyevimi in krožnimi celoštevilskimi grafi. Povezanih Cayleyevih celoštevilskih grafov na številu točk od 1 do 11 je natanko 27. Dokazali smo tudi, da obstaja le 7 povezanih kubičnih celoštevilskih Cayleyevih grafov. Krožne grafe je v izreku 3.14 lepo klasificiral So. Sander pa je dokazal, da so grafi igre Sudoku celoštevilski.

Za zadnje poglavje pa smo pustili obravnavo posebno lepih matrik, ki tako kot matrika sosednosti ponazarjajo strukturne lastnosti grafov. Ti dve matriki sta Laplaceova matrika L in breznačna Laplaceova matrika Q . Seveda so nas zanimala situacije, ko je njen spekter celoštevilski. Za matriko L smo navedli precej splošnih zvez, ki so v pomoč pri izračunavanju njenih lastnih vrednosti. Za matriko Q pa smo navedli vseh 172 povezanih Q -celoštevskih grafov. Prikazani so v prilogah, kjer je v tabelah navedeno ali je graf obenem tudi A in/ali L -celoštevski. V primeru vseh treh celoštevilskosti, pravimo, da je graf ALQ -celoštevski. Navedli smo klasifikacijski izrek, ki opredeljuje to lastnost. Za konec smo se dotaknili še kospektralnosti grafov. Zgodi se lahko, da imata dva različna grafa enak spekter in sta kospektralna za določeno matriko, za drugo pa ne.

Literatura

- [1] A. Abdollahi, E. Vatandoost, *Which Cayley graphs are integral?*, Electron. J. Combin., 16 (2009), #R122.
- [2] A. Abdollahi, E. Vatandoost, *Integral quartic Cayley graphs on abelian groups*, Electron. J. Combin., 18 (2011), #P89.
- [3] A. E. Brouwer, W. H. Haemers, *Spectra of graphs*, Springer, New York, 2012.
- [4] A. J. Schwenk, *Exactly thirteen connected cubic graphs have integral spectra*, Theory and applications of graphs (Proc. International Conference, Western Michigan University, Kalamazoo, Michigan, 1976), pp. 516–533, Lecture Notes in Mathematics, 642, Springer, Berlin, 1978.
- [5] D. Cvetković, *Cubic integral graphs*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., 498–541 (1975), 107–113.
- [6] D. M. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs: Theory and Applications*, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg/Leipzig, 1995.
- [7] D. Cvetković, P. Rowlinson, S. Simić, *An Introduction to the Theory of Graph Spectra (London Mathematical Society Student Texts)*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [8] D. Cvetković, P. Rowlinson, S. Simić, *Eigenspaces of graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [9] D. Stevanović, *4-regular integral graphs avoiding ± 3 in the spectrum*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., 14 (2003), 99–110.
- [10] D. Stevanović, M. Petković, M. Bašić, *On the Diameter of Integral Circulant Graphs*, Ars Combin., 106 (2012), 495–500.
- [11] F. C. Bussemaker, D. Cvetković, *There are exactly 13 connected, cubic, integral graphs*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., 544–576 (1976), 43–48.

- [12] G. R. Omid, *On integral graphs with few cycles*, Graphs and Combinatorics, 25 (2009), 841–849.
- [13] I. Kovács, *Izbrana poglavja iz diskretne matematike (interno gradivo in zapiski s predavanj)*. Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije, Koper, 2013.
- [14] K. Balińska, D. Cvetković, M. Lepović, S. Simić, *There are exactly 150 connected integral graphs up to 10 vertices*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., 10 (1999) 95-105.
- [15] K. Balińska, D. Cvetković, Z. Radosavljević, S. Simić, D. Stevanović, *A survey on integral graphs*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., 13 (2002) 42–65.
- [16] K. T. Balińska, M. Kupczyk, S. K. Simić, K. T. Zwierzyński, *On generating all integral graphs on 11 vertices*, The Technical University of Poznań, Computer Science Center Report, 469 (1999/2000).
- [17] K. T. Balińska, M. Kupczyk, S. K. Simić, K. T. Zwierzyński, *On generating all integral graphs on 12 vertices*, The Technical University of Poznań, Computer Science Center Report, 482 (2001) 1–36.
- [18] L. Wang, *A survey of results on integral trees and integral graphs*, Department of Applied Mathematics, Faculty of EEMCS, University of Twente, The Netherlands, Enschede, 2005.
- [19] L. Wang, C. Hoede, *Constructing fifteen infinite classes of nonregular bipartite integral graphs*, Electron. J. Combin., 15 (2008) #R8.
- [20] M. Klin, I. Kovács, *Automorphism groups of rational circulant graphs*, Electron. J. Combin., 19 (2012), #P35.
- [21] N. Saxena, S. Severini, I. Shparlinski, *Parameters of Integral Circulant Graphs and Periodic Quantum Dynamics*, Int. J. Quantum Inf., 5 (2007), 417–430.
- [22] O. Ahmadi, N. Alon, I. F. Blake, I. E. Shparlinski, *Graphs with integral spectrum*, Linear Algebra Appl., 430 (2009), 547–552.
- [23] R. Merris, *Laplacian Matrices of Graphs: A Survey*, Linear Algebra Appl., 197-198 (1994), 143-176.
- [24] S. Simić, Z. Radosavljević, *The nonregular, nonbipartite, integral graphs with maximum degree four*, J. Comb. Inf. Syst. Sci., 20 (1995) 9–26.

- [25] T. Sander, *Sudoku Graphs are Integral*, Electron. J. Combin., 16 (2009), #N25.
- [26] W. Klotz, T. Sander, *Integral Cayley graphs over abelian groups*, Electron. J. Combin., 17 (2010), #R81.
- [27] W. Klotz, T. Sander, *Some properties of unitary Cayley graphs*, Electron. J. Combin., 14 (2007), #R45.
- [28] W. So, *Integral circulant graphs*, Discrete Mathematics, 306 (2006), 153–158.
- [29] R. J. Wilson, J. J. Watkins, *Uvod v teorijo grafov*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1997.
- [30] W. H. Haemersa, E. Spenceb, *Enumeration of cospectral graphs*, European J. Combin., 25 (2004), 199–211.
- [31] Y. Teranishi, *The number of spanning forests of a graph*, Discrete Mathematics, 290 (2005), 259–267.
- [32] Z. Stanić, *Some results on Q -integral graphs*, Ars Combin., 90 (2009), 321–335.
- [33] Z. Stanić, *There are exactly 172 connected q -integral graphs up to 10 vertices*, Novi Sad J. Math., 37 (2007), 193–205.

Priloge

Priloga A: Povezani, regularni, celoštevilski grafi s številom točk 6, 8, 9 in 10

Grafi so ponazorjeni s pomočjo matrike sosednosti. Podani so v obliki:

$$\Gamma_i \quad a_{21} \quad a_{31}a_{32} \quad a_{41}a_{42}a_{43} \cdots a_{n1}a_{n2} \cdots a_{n(n-1)},$$

kjer $a_{21} \quad a_{31}a_{32} \quad a_{41}a_{42}a_{43} \cdots a_{n1}a_{n2} \cdots a_{n(n-1)}$ prikazuje podatke spodnje-trikotnega dela pod diagonalo, v matriki sosednosti $[a_{ij}]_{n \times n}$ ustreznega grafa Γ_i . Zgornje trikotni del matrike dobimo z uporabo dejstva, da je matrika sosednosti simetrična.

Tabela A.1: Povezani regularni celoštevilski grafi na 6-ih točkah

Γ_8	1	11	111	1111	11111
Γ_9	1	01	001	0001	10001
Γ_{10}	1	01	101	0101	10101
Γ_{11}	1	11	001	0101	10011
Γ_{12}	1	11	011	1011	11011

Vir: [2]

Tabela A.2: Spekter povezanih regularnih celoštevilskih grafov na 6-ih točkah

Γ_8		5	-1^5
Γ_9	2	1^2	-1^2
Γ_{10}		3	0^4
Γ_{11}	3	1	0^2
Γ_{12}		4	0^3

Vir: [2]

Tabela A.3: Povezani regularni celoštevilski grafi na 8-ih točkah

Γ_{13}	1	11	111	1111	11111	111111	1111111
Γ_{14}	1	10	011	1111	11110	111111	1111110
Γ_{15}	1	10	110	1010	01111	111110	0111110
Γ_{16}	1	10	010	1010	01110	101110	0101110
Γ_{17}	1	10	100	1000	01111	011110	0111100
Γ_{18}	1	10	010	0010	00011	100110	0110010

Vir: [2]

Tabela A.4: Spekter povezanih regularnih celoštevilskih grafov na 8-ih točkah

Γ_{13}		7	-1^7
Γ_{14}	6	0^4	-2^3
Γ_{15}	5	1^2	-1^4
Γ_{16}	4	2	0^3
Γ_{17}	4	0^6	-4
Γ_{18}	3	1^3	-1^3

Vir: [2]

Tabela A.5: Povezani regularni celoštevilski grafi na 9-ih točkah

Γ_{19}	1	11	111	1111	11111	111111	1111111	11111111
Γ_{20}	1	10	101	0110	01011	111111	1111110	11111100
Γ_{21}	1	11	110	1100	10111	101110	0111111	01111110
Γ_{22}	1	00	001	1100	00110	100111	0110110	11110000
Γ_{23}	1	00	001	0011	11001	110010	0011011	11110000
Γ_{24}	1	11	100	1001	01010	010011	0011010	00101011
Γ_{25}	1	11	100	0010	01000	010111	0011110	10011100

Vir: [2]

Tabela A.6: Spekter povezanih regularnih celoštevilskih grafov na 9-ih točkah

Γ_{19}				8	-1^8
Γ_{20}		6	1	0^4	-2^2
Γ_{21}				6	0^6
Γ_{22}		4	2	1^2	-1^2
Γ_{23}	4	2	1	0^2	-1^2
Γ_{24}				4	1^4
Γ_{25}	4		1^3	0^2	-2^3

Vir: [2]

Tabela A.7: Povezani regularni celoštevilski grafi na 10-ih točkah

Γ_{26}	1	11	111	1111	11111	111111	1111111	11111111	111111111
Γ_{27}	1	11	111	1111	11110	111011	1101111	10111111	011111111
Γ_{28}	1	00	001	1111	11111	111110	1111101	11110110	111101011
Γ_{29}	1	00	001	1111	11110	111111	1111110	11110011	111111001
Γ_{30}	1	11	111	1100	11001	001101	0011101	00111111	110011110
Γ_{31}	1	11	000	0001	00011	111111	1111110	11111100	111111000
Γ_{32}	1	11	110	1101	10110	101011	0111010	01101011	000111111
Γ_{33}	1	00	110	1011	01110	111011	1110001	10111101	011111010
Γ_{34}	1	10	010	0010	00011	111111	1111110	11111100	111111000
Γ_{35}	1	10	101	1011	10111	011000	0101001	01001011	010001111
Γ_{36}	1	10	100	1000	10000	011111	0111110	01111100	011111000
Γ_{37}	1	10	100	1000	01110	011010	0101100	00111000	000001111
Γ_{38}	1	10	010	1010	01010	001100	0000110	00000011	110000001
Γ_{39}	0	00	000	1100	00111	001100	0011000	11000010	110000010
Γ_{40}	1	10	100	0100	01000	001010	0010010	00011001	000101100

Vir: [2]

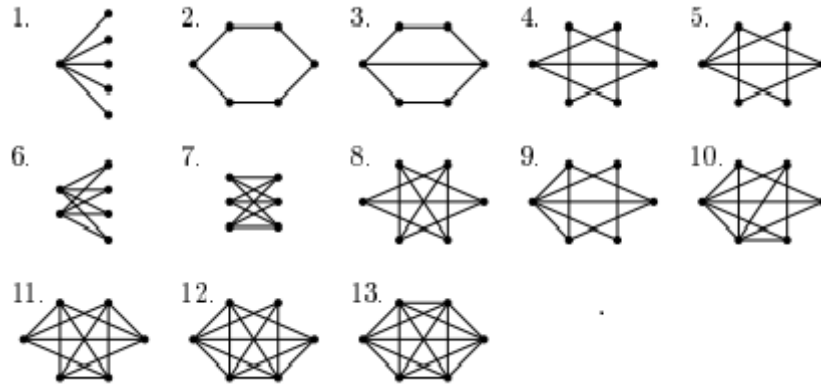
Tabela A.8: Spekter povezanih regularnih celoštevilskih grafov na 10-ih točkah

Γ_{26}						9	-1^9
Γ_{27}						8	0^5
Γ_{28}		7	1^2	0^2	-1^2	-2^2	-3
Γ_{29}			7	1	0^4	-1^2	-3^2
Γ_{30}	6	2	1	0^2	-1^2	-2^2	-3
Γ_{31}			6	2	0^3	-1^4	-4
Γ_{32}					6	1^4	-2^5
Γ_{33}			6	1^3	0^2	-2^3	-3
Γ_{34}	6	1^2	0^3	-1^2	-2	-4	
Γ_{35}				5	3	0^4	-2^4
Γ_{36}					5	0^8	-5
Γ_{37}				4	1^4	-1^4	-4
Γ_{38}			3	2	1^3	-1^2	-2^3
Γ_{39}	3	2	1^2	0^2	-1^2	-2	-3
Γ_{40}					3	1^5	-2^4

Vir: [2]

Priloga B: Q -celoštevilski grafi na 6, 7, 8, 9 in 10-ih točkah

Razlaga k branju tabel: Prvi stolpec predstavlja identifikacijsko število grafa na sliki, v drugem stolpcu je število povezav v grafu. V naslednjih 5-ih stolpcih so zapisane vrednosti Q -spektra, kjer eksponent predstavlja večkratnost lastne vrednosti. Sledi kratek ime oz. opis grafa. V zadnjem stolpcu pa zapisane lastnosti grafa: A , L in/ali C . Pomenijo pa, ali je ustrezni graf celoštevilski, L -celoštevilski in/ali če je komplement Q -celoštevilskega grafa.



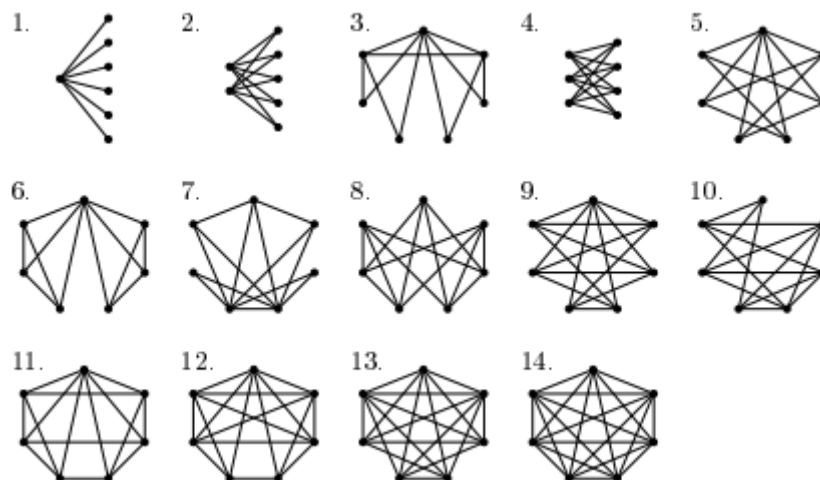
Slika B.1: Q -celoštevilski grafi na 6-ih točkah

Vir: [33]

Tabela B.1: Podrobnejši podatki o Q -celoštevilskih grafih na 6-ih točkah

Zap. št.	Št. povezav	Q -spekter					Opis	Lastnosti
1.	5			6	1^4	0	$K_{1,5}$	L, C
2.	6		4	3^2	1^2	0	C_6	A, L, C
3.	7	5	3^2	2	1	0		L
4.	7		5	4	2	1^3		
5.	8		6	4	2^2	1^2		
6.	8		6	4	2^3	0	$K_{2,4}$	L, C
7.	9			6	3^4	0	$K_{3,3}$	A, L, C
8.	9		6	4	3^2	1^2	3-regularen	A, L, C
9.	9		7	4	2^3	1	$(K_2 \cup K_3) \nabla K_1$	L, C
10.	11			8	4^2	2^3	$K_2 \nabla 2K_2$	L, C
11.	12			8	4^3	2^2	4-regularen	A, L, C
12.	13		9	4^3	3	2	$(K_1 \cup K_2) \nabla K_3$	L, C
13.	15				10	4^5	K_6	A, L, C

Vir: [33]



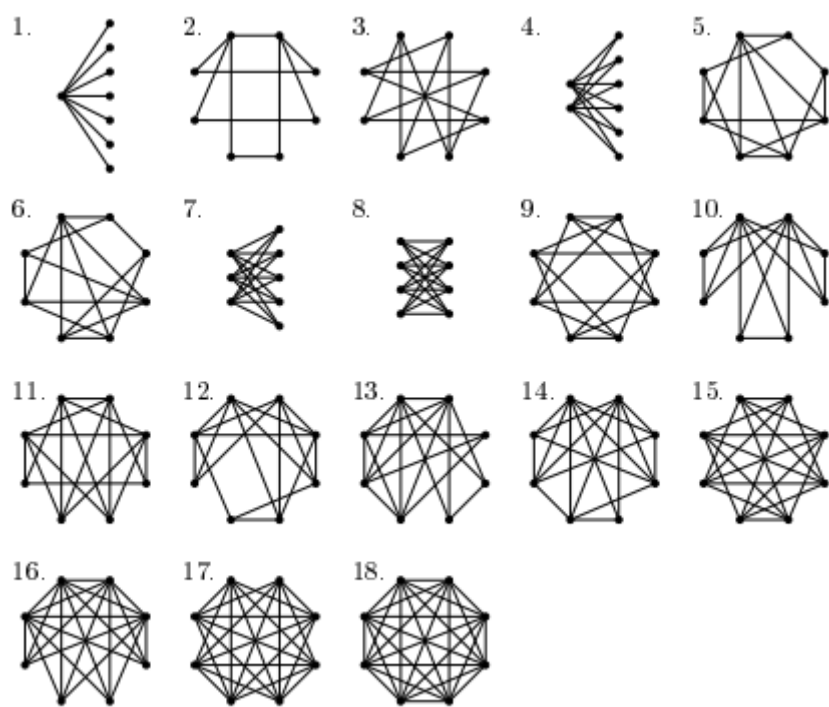
Slika B.2: Q -celoštevilski grafi na 7-ih točkah

Vir: [33]

Tabela B.2: Podrobnejši podatki o Q -celoštevilskih grafi na 7-ih točkah

Zap. št.	Št. povezav	Q -spekter						Opis	Lastnosti	
1.	6				7	1^5	0	$K_{1,6}$	L, C	
2.	10				7	5	2^4	0	$K_{2,5}$	L, C
3.	11				8	4^2	2^2	1^2		L
4.	12				7	4^2	3^3	0	$K_{3,4}$	L, C
5.	12		8		4^2	3	2^2	1	$C_6 \nabla K_1$	L, C
6.	12				8	5	2	2^4	$2K_3 \nabla K_1$	L, C
7.	13	9	5		4	3	2^2	1		L
8.	14		8		5	4^2	3^2	1	4-regularen	A, L, C
9.	15					9	4^5	1	$K_{3,3} \nabla K_1$	L, C
10.	15					9	4^5	1	$(K_1 \cup K_3) \nabla 3K_1$	L, C
11.	15				9	5	4^3	2^2	3-regularen	L, C
12.	17				10	5^2	4^3	2		L, C
13.	19				11	5^4	4	3	$C_4 \nabla K_3$	L, C
14.	21						12	5^6	K_7	A, L, C

Vir: [33]



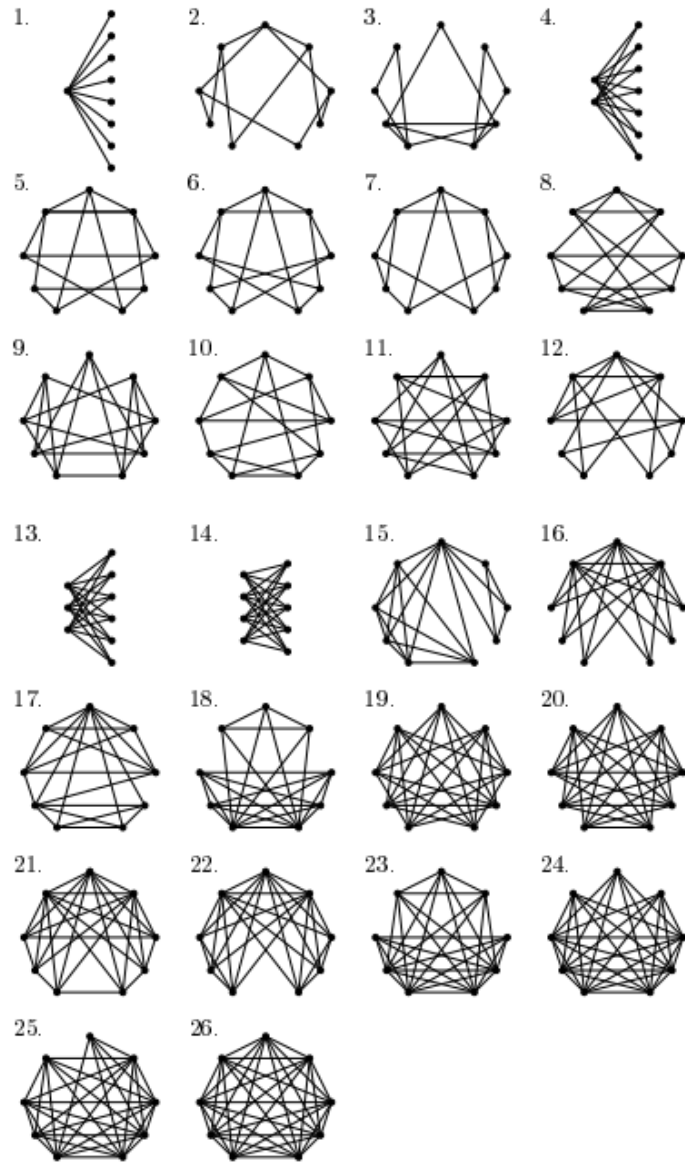
Slika B.3: Q -celoštevilski grafi na 8-ih točkah

Vir: [33]

Tabela B.3: Podrobnejši podatki o Q -celoštevilkah na 8-ih točkah

Zap. št.	Št. povezav	Q -spekter						Opis	Lastnosti
1.	7				8	1^6	0	$K_{1,7}$	L, C
2.	10	6	4	3^2	2	1^2	0		L
3.	12			6	4^3	2^3	0	3-regularen	A, L, C
4.	12			8	6	2^5	0	$K_{2,6}$	L, C
5.	15				8	4^5	1^2		
6.	15		8	5	4^3	2^2	1		
7.	15			8	5^2	3^4	0	$K_{3,5}$	L, C
8.	16				8	4^5	0	$K_{4,4}$	A, L, C
9.	16			8	6	4^3	2^3	4-regularen	A, L, C
10.	16			10	6	4^2	2^4	$3K_2 \nabla K_2$	L, C
11.	17		9	5^2	4^3	2	1		
12.	17		9	5^2	4^3	2	1		
13.	18	10	6	5	4^2	3	2^2		
14.	19		10	6	5^2	4^2	2^2		C
15.	20			10	6^2	4^4	2	5-regularen	A, L, C
16.	22			12	6^3	4^3	2	$4K_1 \nabla K_4$	L, C
17.	24				12	6^4	4^3	6-regularen	A, L, C
18.	28					14	6^7	K_8	A, L, C

Vir: [33]



Slika B.4: Q -celoštevilski grafi na 9-ih točkah

Vir: [33]

Tabela B.4: Podrobnejši podatki o Q -celoštevilkah na 9-ih točkah

Zap. št.	Št. povezav	Q -spekter							Opis	Lastnosti
1.	8					9	1^7	0	$K_{1,8}$	L, C
2.	12		6	4^2	3^2	2	1^2	0		L
3.	13		7	5	4	3	2^2	1^3		L
4.	14				9	7	2^6	0	$K_{2,7}$	L, C
5.	15					7	4^5	1^3		L
6.	15			7	5	4^3	2^2	1^2		L
7.	15			7	5	4^3	2^2	1^2		
8.	18			8	5^3	4^2	2^2	1	4-regularen	L, C
9.	18					8	5^4	2^4	4-regularen	L, C
10.	18	8	6	5	4^2	3^2	2	1	4-regularen	L, C
11.	18			8	6	5^2	3^2	2^3	4-regularen	L, C
12.	18			9	6	4^4	2^2	1		
13.	18				9	6^2	3^4	0	$K_{3,6}$	L, C
14.	20				9	5^3	4^4	0	$K_{4,5}$	L, C
15.	21				11	7	4^5	2^2	$(K_3 \cup K_5) \nabla K_1$	L, C
16.	21				12	7^2	3^5	1	$6K_1 \nabla K_3$	L, C
17.	22			11	7	6	4^2	3^4		
18.	24				12	7^2	4^4	3^2	$(K_3 \cup K_4) \nabla K_2$	L, C
19.	27			12	7	6^4	4^2	3	6-regularen	A, L, C
20.	27					12	6^6	3^2	6-regularen	A, L, C
21.	27			13	7^2	6^2	4^3	3	$C_6 \nabla K_3$	L, C
22.	27					13	7^3	4^5	$(K_3 \cup K_4) \nabla K_3$	L, C
23.	30				14	7^4	5^2	4^2	$(K_2 \cup K_3) \nabla K_4$	L, C
24.	33				15	7^5	6^2	4	$3K_1 \nabla K_6$	L, C
25.	33				15	7^5	6^2	4	$(K_1 \cup K_3) \nabla K_5$	L, C
26.	36						16	7^8	K_9	A, L, C

Vir: [33]

V nadaljevanju je prikazan seznam Q -celoštevilskih grafov na 10-ih vozličih. Podatki so zapisani v naslednji obliki:

$$N_o \quad a_{1,2} \cdots a_{1,10} \quad a_{2,3} \cdots a_{2,10} \quad \cdots \quad a_{8,9} \quad a_{8,10} \quad a_{9,10},$$

kjer je N_o indentifikacijsko število ustreznega grafa, medtem ko ostali podatki tvorijo zgornji trikotnik v matriki sosednosti. Grafi so urejeni po številu povezav in Q -spektru.

Seznam Q -celoštevilskih grafov na 10-ih točkah:

1.	000000001	00000001	0000001	000001	00001	0001	001	01	1
2.	000001100	00001010	0001001	000110	00101	0011	000	00	0
3.	000100010	00010010	0001010	000110	00001	0001	001	01	1
4.	001001001	00101010	0011100	000110	00101	0011	000	00	0
5.	000011100	00011100	0010011	001011	00111	0000	000	00	0
6.	001001100	00101001	0010101	001010	00110	0011	000	00	0
7.	000100100	00010010	0001001	000111	00100	0010	001	11	1
8.	000011101	00010010	0001111	001011	00111	0000	000	00	0
9.	000011110	00011101	0001111	000011	00011	0000	000	00	0
10.	000010110	00010110	0001010	001001	00101	1001	001	10	0
11.	000001100	00001100	0001100	000011	00011	0011	011	11	0
12.	000001100	00001010	0001010	000101	00101	0011	011	11	0
13.	000000011	00000011	0000011	000011	00011	0011	011	11	0
14.	001001001	00101001	0011001	000110	00110	0110	010	01	0
15.	001001001	00101010	0011010	000110	00101	0101	010	01	0
16.	000100011	00010010	0001101	001101	00011	0010	001	01	1
17.	000010011	00010011	0001111	001111	01111	0000	000	00	0
18.	000001101	00001101	0001011	001011	00111	0111	000	00	0
19.	000100011	00011110	0010101	001101	00011	0001	001	10	0
20.	001001110	00100101	0010011	001001	00101	0011	001	10	0
21.	000011011	00000111	0000111	000011	00011	1000	000	11	1
22.	000011001	00010111	0010111	001111	01111	0000	000	00	0
23.	000011110	00011101	0011011	010111	01111	0000	000	00	0
24.	000110110	00001111	0001001	001001	10110	0110	001	01	1
25.	000011111	00011111	0011111	000111	00111	0000	000	00	0
26.	000011110	00011110	0000011	000011	00011	1101	101	01	1
27.	000000111	00000111	0000111	000111	00111	0111	111	00	0
28.	000110001	00001111	0001111	001111	10001	0001	001	01	1
29.	001010001	00101101	0001111	010001	00111	0001	011	01	1

30. 000100011 00010011 0001011 000111 00011 0011 011 11 1
31. 000011111 00011111 0011011 010111 01111 0000 000 00 0
32. 010101011 01010111 0101010 010101 01010 0101 010 01 0
33. 000011110 00011110 0000111 000111 00111 1001 001 01 1
34. 000101100 00010011 0001111 001111 01100 0011 011 11 0
35. 001100001 00011111 0011111 100001 00001 0111 111 00 0
36. 001001111 00100111 0010111 001111 00111 0111 000 00 0
37. 010101011 01010101 0101011 010101 01011 0101 010 01 0
38. 000111100 00011111 0001111 001111 01111 0011 001 00 0
39. 000001111 00001111 0001111 001111 01111 1111 000 00 0
40. 001110011 00111010 0011111 001101 00111 0010 011 01 0
41. 001001111 00111010 0110101 001111 10011 0011 010 01 0
42. 001001111 00111001 0110110 001111 10111 0001 001 10 0
43. 010101011 01010111 0101011 010111 01010 0101 010 01 0
44. 010101111 01010111 0101001 010111 01001 0110 001 10 0
45. 000011111 00011111 0011111 011111 11111 0000 000 00 0
46. 010111010 01011101 0101110 010111 01011 0101 010 01 0
47. 000100111 00011111 0011111 011111 00111 0011 000 00 1
48. 000010111 00001111 0001111 001111 00111 0111 111 00 0
49. 000101111 00010111 0000111 000111 01111 0111 111 00 0
50. 010101011 01010111 0101011 010101 01011 0101 011 01 0
51. 001101010 01011001 0111111 001111 00110 0101 011 11 0
52. 010101111 01011111 0101010 010101 01010 0101 011 11 0
53. 010101011 01010111 0101011 010111 01011 0111 010 01 0
54. 010111100 01011011 0101111 010111 01111 0011 100 00 1
55. 001101011 00111101 0011111 011101 00111 0011 001 01 1
56. 001100111 01011011 0111101 001101 01011 0111 001 01 1
57. 001001111 00110111 0110111 001111 11001 1001 001 01 1
58. 001101101 01011011 0110111 001101 01011 0111 001 01 1
59. 000111111 00000111 0000111 000111 11111 1111 111 00 0
60. 000010011 00010011 0001111 001111 01111 1111 011 11 1
61. 000111011 00110111 0101111 011111 00011 0011 011 11 0
62. 010101011 01010111 0101011 010111 01011 0111 011 11 0
63. 010111010 01110111 0101110 011111 01011 0101 011 01 1
64. 001001111 00101111 0011111 001111 01111 1111 010 01 0
65. 001111011 00111110 0111101 011111 00111 0010 001 11 1
66. 001111010 01011111 0111110 101011 00111 0101 001 11 1
67. 000111111 00111111 0111111 111111 00110 0101 011 00 0

68. 001111110 01011111 0111111 101011 00111 1110 001 01 0
69. 011011011 01111110 0110111 011101 01111 0110 011 01 0
70. 000111111 00111111 0111111 111111 01010 0101 010 01 0
71. 010111101 01011111 0110111 011111 01111 1010 010 01 0
72. 000011111 00011111 0011111 000111 00111 0111 111 11 1
73. 001111111 01011110 0111110 110111 01111 0001 001 11 1
74. 010111111 01101110 0111111 011110 10001 0001 111 11 1
75. 010111011 01110111 0101110 011111 01011 0111 011 01 1
76. 001100111 00011111 0011111 100111 00111 0111 111 11 1
77. 000011111 00011111 0001111 001111 01111 1111 011 11 1
78. 010111111 01000111 0111111 000111 11111 1111 000 11 1
79. 000111111 00111111 0111111 111111 00011 0011 011 11 1
80. 010111011 01110111 0101111 011111 01011 0111 011 11 1
81. 001101111 01011111 0111111 001111 01111 1111 011 11 0
82. 010111111 01111111 0101011 010111 01111 1111 011 11 0
83. 010101111 01011111 0101111 011111 01111 1111 011 11 0
84. 001111111 01111111 1111111 001111 01111 1111 010 01 0
85. 010111111 01111111 0111111 111111 01110 0111 011 01 0
86. 001111111 01111111 1111111 001111 01111 1111 111 11 1
87. 001111111 01111111 1111111 011111 00111 1111 111 11 1
88. 011111111 11110011 0111111 001111 11111 1111 111 11 1
89. 011101111 01111111 0111111 011111 01111 1111 111 11 1
90. 011111111 11111111 0111111 111111 01111 1111 011 11 0
91. 111111111 11111111 1111111 111111 11111 1111 111 11 1

Tabela B.5: Podrobnejši podatki o Q -celoštevilskih grafih na 10-ih točkah

Zap. št.	Št. povezav	Q -spekter							Opis	Lastnosti
1.	9					10	1^8	0	$K_{1,9}$	A, L, C
2.	12			5	4^3	2^2	1^3	0		L
3.	13		7	5	3^3	2	1^3	0		A, L
4.	15					6	4^5	1^3	3-regularen	A, L, C
5.	15	6	5	4^2	3^2	2^2	1	0	3-regularen	A, L, C
6.	15			6	5	4^3	2^2	1^3	3-regularen	A, L, C
7.	15			8	5^2	3	2^3	1^3		
8.	16	7	5	4^3	3	2^2	1	0		L
9.	16	7	5^2	4	3^2	2^2	1	0		L
10.	16		7	6	4^2	3^2	2	1^3		
11.	16			8	5^3	2^4	1	0		
12.	16		8	6	5	4	2^3	1^3		
13.	16			10	8	2^7	0		$K_{2,8}$	A, L, C
14.	17		7	5^2	4^2	3	2^3	0		L
15.	17		7	6	4^3	3	2^2	1^2		
16.	17		9	6	4	3^3	2^2	1^2		
17.	18		8	5^2	4^2	3^3	1	0		
18.	18			8	5^3	3^3	2^2	0		L
19.	18		8	6	5	4^2	2^4	1		L
20.	18				8	6	5^2	2^6		
21.	18	10	6	5	4	3	2^3	1^2		
22.	19			8	5^2	4^4	2^2	0		L
23.	20				8	5^4	3^4	0	4-regularen	A, L, C
24.	20	9	7	5	4^2	3^2	2^2	1		C
25.	20			9	5^5	3^2	2	0		L
26.	21		10	7	6	4^3	2^3	1		
27.	21				10	7^2	3^6	0	$K_{3,7}$	L, C
28.	21			11	6	4^5	2^2	1		L
29.	21			11	6	5	4^3	2^4		L
30.	21				12	8	4^3	2^5	$4K_2 \nabla K_2$	A, L, C
31.	22			9	5^5	4	3^2	0		L
32.	22			9	8	5	4	3^6		
33.	22		10	6^3	4	3^3	2	1		
34.	22				10	6^3	4^3	2^4		
35.	22		10	7	5^2	4^2	3	2^3		C
36.	23	10	6^3	5	4	3^2	2	1		C

37.	23			10	8	5	4 ²	3 ⁵		
38.	24		10	6 ²	5 ³	4 ²	2	1		
39.	24				10	6 ³	4 ⁵	0	$K_{4,6}$	L, C
40.	24	10	7	6	5 ²	4 ²	3	2 ²		
41.	24			10	7 ²	4 ⁴	3 ²	2		
42.	24			10	7 ²	4 ⁴	3 ²	2		
43.	24			10	8	6	4 ³	3 ⁴		
44.	24			10	8	6	4 ³	3 ⁴		
45.	25					10	5 ⁸	0	$K_{5,5}$	A, L, C
46.	25				10	8	5 ⁴	3 ⁴	5-regularen	A, L, C
47.	25		11	6 ³	5 ²	4	3 ²	1		C
48.	25		11	7 ²	6	4 ³	3 ²	1		L
49.	25		11	7 ²	6	4 ³	3 ²	1		L
50.	25			11	8	6	4 ⁴	3 ³		
51.	26		11	7 ²	6	4 ⁴	3	2		
52.	26			11	8	6 ²	4 ³	3 ³		
53.	26			11	8	7	4 ⁵	3 ²		
54.	27			11	8	6	5 ⁴	3 ³		
55.	27			12	6 ⁴	5 ²	3 ²	2	4-regularen	L, C
56.	27					12	6 ⁵	3 ⁴	4-regularen	L, C
57.	27	12	7	6 ²	5 ²	4 ²	3	2	4-regularen	L, C
58.	27			12	7	6 ³	4 ²	3 ³	4-regularen	L, C
59.	27		12	7 ²	6	5 ³	3 ²	1		L
60.	27		13	8	6 ³	4 ²	3	2 ²		C
61.	28			12	8	6 ³	4 ⁴	2		L, C
62.	28					12	8 ²	4 ⁷	$(K_4 \cup K_4) \nabla 2K_1$	L, C
63.	29		12	8	6 ³	5 ²	4	3 ²		
64.	29			12	8	6 ⁴	4 ³	2	$2L_2 \nabla 3K_2$	L, C
65.	29		12	7 ²	6 ²	5 ²	4 ²	2		
66.	29		12	7 ²	6 ²	5 ²	4 ²	2		
67.	30		12	7 ²	6 ³	5 ²	4	2	6-regularen	A, L, C
68.	30			12	7 ³	6 ²	4 ³	3	6-regularen	A, L, C
69.	30					12	7 ⁴	4 ⁵	6-regularen	A, L, C
70.	30			12	8	6 ³	5 ⁴	2	6-regularen	A, L, C
71.	30	12	8	7	6 ²	5 ²	4 ²	3	6-regularen	A, L, C
72.	30		14	8 ²	6 ²	5 ²	3 ²	2		L
73.	31		13	7 ²	6 ⁴	5	4	2		
74.	31			13	8	6 ⁵	5	3 ²		

75.	31	13	8	7	6^3	5	4^2	3		
76.	31		14	8^2	7	5^2	4^3	3	$(C_4 \cup K_3) \nabla K_3$	L, C
77.	31	14	8^2	7	6	5	4^3	2		L, C
78.	32		14	8	7^2	6^3	4	3^2		
79.	33				14	8	6^7	2	$4K_1 \nabla 4K_1 \nabla K_2$	L, C
80.	33				14	8^2	6^4	4^3		L, C
81.	34		14	8^2	7^2	6	5^2	4^2	$C_4 \nabla C_6$	L, C
82.	34		14	8^2	7^2	6	5^2	4^2		L, C
83.	34			14	8^3	6	5^4	4	$C_4 \nabla 2K_3$	L, C
84.	35			14	8	7^4	6^2	4^2	7-regularen	A, L, C
85.	35		14	8^2	7^2	6^2	5^2	4	7-regularen	A, L, C
86.	39			16	8^3	7^4	6	4	$3K_1 \nabla 3K_1 \nabla K_4$	L, C
87.	39			16	8^3	7^4	6	4		L, C
88.	39			16	8^3	7^4	6	4		L, C
89.	39			16	8^4	7^2	6	5^2	$\overline{C_6} \nabla K_4$	L, C
90.	40					16	8^5	6^4	8-regularen	A, L, C
91.	45						18	8^9	K_{10}	A, L, C

Vir: [33]