

UNIVERZA NA PRIMORSKEM  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN  
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Doktorska disertacija

RAZLIČNI VIDIKI POVEZAVNE REGULARNOSTI V  
GRAFIH

Boštjan Frelih

Koper, 2014



UNIVERZA NA PRIMORSKEM  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO, NARAVOSLOVJE IN  
INFORMACIJSKE TEHNOLOGIJE

Doktorska disertacija

RAZLIČNI VIDIKI POVEZAVNE REGULARNOSTI V  
GRAFIH

Boštjan Frelj

Koper, 2014

Mentor:izr. prof. dr. Štefko Miklavič  
Somentorica:izr. prof. dr. Klavdija Kutnar



# Kazalo

Izveček	iii
Abstract	v
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Osnovna znanja</b>	<b>5</b>
2.1 Grupe . . . . .	5
2.1.1 Delovanje grup . . . . .	5
2.2 Grafi . . . . .	6
2.2.1 Produkti grafov . . . . .	8
2.2.2 Delovanje grup na grafih . . . . .	11
2.2.3 Polregularni avtomorfizmi ter kvocientni grafi in multigrafi . . . . .	11
2.2.4 Krovi grafov . . . . .	12
<b>3 Kubični simetrični tetracirkulanti in pentacirkulanti</b>	<b>15</b>
3.1 Kubični simetrični tetracirkulanti . . . . .	17
3.1.1 Kubični simetrični tetracirkulanti brez jedra . . . . .	17
3.1.2 Kubični simetrični tetracirkulanti z jedrom . . . . .	20
3.1.3 Dokaz izreka 3.0.5 . . . . .	40
3.2 Kubični simetrični pentacirkulanti . . . . .	40
3.2.1 Dokaz izreka 3.0.6 . . . . .	41
<b>4 Povezavno regularni produkti grafov</b>	<b>47</b>
4.1 Povezavno regularni kartezični produkti grafov $G$ in $H$ . . . . .	48
4.2 Povezavno regularni tenzorski produkti grafov $G$ in $H$ . . . . .	51
4.3 Povezavno regularni krepki produkti grafov $G$ in $H$ . . . . .	60
4.4 Povezavno regularni leksikografski produkti grafov $G$ in $H$ . . . . .	63
4.5 Povezavno regularni produkti $G[H] - nG$ . . . . .	67
4.5.1 Primer, ko je $ V(H)  = 2$ . . . . .	68
4.5.2 Primer, ko je $ V(H)  \geq 3$ . . . . .	70
4.6 Povezavno regularni konormalni produkti grafov $G$ in $H$ . . . . .	74
<b>5 2-razdaljno uravnoreženi grafi</b>	<b>81</b>
5.1 Povezani 2-razdaljno uravnoreženi grafi, ki niso 2-povezani . . . . .	81
5.2 2-razdaljno uravnoreženi kartezični produkti grafov $G$ in $H$ . . . . .	86

5.3	2-razdaljno uravnoveženi leksikografski produkti grafov $G$ in $H$ . . .	90
<b>6</b>	<b>Sklep</b>	<b>93</b>
	<b>Literatura</b>	<b>95</b>
	<b>Kazalo slik</b>	<b>97</b>
	<b>Kazalo tabel</b>	<b>99</b>
	<b>Stvarno kazalo</b>	<b>101</b>

# Izvleček

## RAZLIČNI VIDIKI POVEZAVNE REGULARNOSTI V GRAFIH

Disertacija vsebuje tri različne teme s področja teorije grafov, v katerih obravnavamo družine grafov, ki zadoščajo določenemu tipu povezavne regularnosti v grafu. V prvi temi obravnavamo poddružini  $m$ -Cayleyjevih grafov, in sicer kubične simetrične tetracirkulante in pentacirkulante. Graf je simetričen, če njegova grupa avtomorfizmov deluje tranzitivno na množici njegovih lokov. Graf  $\Gamma$  je  $m$ -Cayleyjev graf netrivialne grupe  $G$ , če njegova grupa avtomorfizmov vsebuje polregularno podgrupo, ki je izomorfna grupi  $G$  in ima  $m$  orbit na množici točk grafa  $\Gamma$ . Če je grupa  $G$  ciklična in je  $m = 4$  ali  $5$ , potem graf  $\Gamma$  v tem zaporedju imenujemo tetracirkulant ali pentacirkulant. Narejena je popolna klasifikacija povezanih kubičnih simetričnih tetracirkulantov in pentacirkulantov.

V drugi temi obravnavamo povezavno regularne in skoraj krepko regularne grafe v povezavi z določenimi produkti dveh grafov. Regularen neprazen graf  $\Gamma$  imenujemo povezavno regularen graf, če obstaja tako nenegativno celo število  $\lambda_\Gamma$ , da imata poljubni dve sosednji točki grafa  $\Gamma$  natanko  $\lambda_\Gamma$  skupnih sosednjih točk. Povezavno regularen graf  $\Gamma$ , ki ima vsaj dve točki na razdalji 2, imenujemo skoraj krepko regularen graf, če obstaja tako naravno število  $\mu_\Gamma$ , da imata poljubni točki, ki sta v grafu  $\Gamma$  na razdalji 2, natanko  $\mu_\Gamma$  skupnih sosednjih točk. Narejena je karakterizacija povezanih povezavno regularnih kartezičnih produktov, tenzorskih produktov, krepkih produktov, leksikografskih produktov, produktov z oznako  $G[H] - nG$ , ki so v angleški literaturi poznani kot “deleted lexicographic products”, in konormalnih produktov dveh grafov. Kot posledice so narejene tudi karakterizacije povezanih skoraj krepko regularnih omenjenih produktov grafov.

V tretji temi obravnavamo 2-razdaljno uravnotežene grafe. Graf  $\Gamma$  je 2-razdaljno uravnotežen, če v njem obstajata vsaj dve točki na razdalji 2, in če je število točk, ki so v grafu  $\Gamma$  bližje točki  $u$  kot točki  $v$ , enako številu točk, ki so v grafu  $\Gamma$  bližje točki  $v$  kot točki  $u$ , za poljubni dve točki  $u, v$  grafa  $\Gamma$ , ki sta v tem grafu na razdalji 2. Narejena je karakterizacija vseh povezanih 2-razdaljno uravnoteženih grafov, ki niso 2-povezani, ter karakterizacija povezanih 2-razdaljno uravnoteženih kartezičnih produktov in leksikografskih produktov dveh grafov.

**Math. Subj. Class (2010):** 05C05, 05C07, 05C12, 05C25, 05C40, 20B25.

**Ključne besede:** kubični graf, simetričen graf, točkovno tranzitiven graf, polregularen avtomorfizem,  $m$ -Cayleyjev graf, tetracirkulant, pentacirkulant, produkt grafov, povezavno regularen graf, skoraj krepko regularen graf,  $n$ -razdaljno uravnotežen graf.





# Abstract

## *DIFFERENT ASPECTS OF EDGE-REGULARITY IN GRAPHS*

Three different topics from graph theory each containing some aspect of edge-regularity in graphs are considered in this thesis. Two subfamilies of  $m$ -Cayley graphs, the so-called cubic symmetric tetracirculants and pentacirculants are considered in the first topic. A graph is said to be symmetric if its automorphism group acts transitively on the set of its arcs. A graph  $\Gamma$  is said to be an  $m$ -Cayley graph on a group  $G$  ( $|G| \neq 1$ ) if its automorphism group contains a semiregular subgroup isomorphic to  $G$  having  $m$  orbits on the vertex set of  $\Gamma$ . If  $G$  is cyclic and  $m = 4$  or  $5$  then  $\Gamma$  is said to be a tetracirculant or a pentacirculant. Complete classifications of connected cubic symmetric tetracirculants and pentacirculants are given.

Edge regular graphs and amply regular graphs in the context of graph products are considered in the second topic. A regular nonempty graph  $\Gamma$  is called edge regular if there exists a nonnegative integer  $\lambda_\Gamma$  such that any two adjacent vertices of  $\Gamma$  have precisely  $\lambda_\Gamma$  common neighbours. An edge regular graph  $\Gamma$  with at least one pair of vertices at distance 2 is called amply regular if there exists a positive integer  $\mu_\Gamma$  such that any two vertices at distance 2 have precisely  $\mu_\Gamma$  common neighbours. Connected edge regular graphs that can be obtained as a cartesian, or a tensor, or a strong, or a lexicographic, or a deleted lexicographic, or a co-normal product of two graphs are characterized. As corollaries, which of these products are amply regular is determined.

2-distance balanced graphs are considered in the last topic. A graph  $\Gamma$  with at least one pair of vertices at distance 2 is called 2-distance balanced if for every pair of vertices  $u, v$  at distance 2 in  $\Gamma$  the number of vertices closer to  $u$  than to  $v$  is equal to the number of vertices closer to  $v$  than to  $u$ . Connected 2-distance balanced graphs that are not 2-connected are characterized. Connected 2-distance balanced graphs that can be obtained as a cartesian or a lexicographic product of two graphs are also characterized.

**Math. Subj. Class (2010):** 05C05, 05C07, 05C12, 05C25, 05C40, 20B25.

**Key words:** cubic graph, symmetric graph, vertex-transitive graph, semiregular automorphism,  $m$ -Cayley graph, tetracirculant, pentacirculant, graph product, edge regular graph, amply regular graph,  $n$ -distance balanced graph.



# Poglavje 1

## Uvod

Na matematičnem raziskovalnem področju in v matematični literaturi, predvsem seveda na področju teorije grafov, se pogosto srečujemo z različnimi družinami grafov, ki zadoščajo nekemu skupnemu tipu regularnosti. Na eni strani imamo tako splošni pojem regularnega grafa, za katerega velja, da imajo vse točke v grafu enako število sosednjih točk, zato lahko govorimo tudi o točkovni regularnosti grafa. Če na drugi strani za regularen graf zahtevamo še nekatere dodatne omejitve oziroma pogoje, dobimo različne poddružine regularnih grafov. Omenimo nekatere izmed njih. Regularen graf je povezavno regularen, če imata poljubni sosednji točki (torej krajišči skupne povezave) natanko  $\lambda$  skupnih sosednjih točk za neko nenegativno celo število  $\lambda$ . Povezavno regularen graf je skoraj krepko regularen, če v grafu obstajata vsaj dve točki na razdalji 2, ter imata poljubni dve taki točki natanko  $\mu$  skupnih sosednjih točk, kjer je  $\mu$  neko naravno število. Povezavno regularen graf je krepko regularen, če imata poljubni nesosednji točki natanko  $\mu$  skupnih sosednjih točk. Regularen graf je razdaljno regularen, če je za poljubni točki  $u, v$  in za poljubni nenegativni celi števili  $i, j$  število točk na razdalji  $i$  od točke  $u$  in na razdalji  $j$  od točke  $v$  odvisno le od števil  $i, j$  ter razdalje med točkama  $u, v$ . Včasih pogoj regularnosti še nekoliko priredimo, kot v primeru razdaljno uravnoveženih grafov, v katerih za poljubni točki  $u, v$  velja, da je število točk, ki so bližje točki  $u$  kot točki  $v$ , enako številu točk, ki so bližje točki  $v$  kot točki  $u$ . Vsem tem družinam grafov je skupno to, da je definicija tipa regularnosti odvisna le od razdalje med poljubnima točkama. Zato lahko govorimo, da ti grafi zadoščajo določenemu tipu povezavne regularnosti. V doktorski disertaciji se bomo v treh temah osredotočili predvsem na družine oziroma poddružine povezavno regularnih grafov, skoraj krepko regularnih grafov in razdaljno uravnoveženih grafov.

V prvi temi v poglavju 3 obravnavamo poddružini  $m$ -Cayleyjevih grafov, in sicer povezane kubične simetrične tetracirkulante oziroma povezane kubične simetrične pentacirkulante. Graf  $\Gamma$  je  $m$ -Cayleyjev graf netrivialne grupe  $G$ , če njegova grupa avtomorfizmov vsebuje polregularno podgrupo, ki je izomorfná grupi  $G$  in ima  $m$  orbit na množici točk grafa  $\Gamma$ . Če je grupa  $G$  ciklična in je  $m = 4$  ali  $5$ , potem graf  $\Gamma$  v tem zaporedju imenujemo tetracirkulant ali pentacirkulant. Raziskovanje kubičnih simetričnih grafov, to je grafov stopnje 3, katerih grupa avtomorfizmov deluje tranzitivno na množici lokov grafa, je v matematični literaturi močno zastopano zaradi dejstva, da gre za prvo zanimivo poddružino družine vseh simetričnih grafov

(saj so simetrični grafi stopnje 2 le cikli). Raziskovanje  $m$ -Cayleyjevih grafov pa je tesno povezano tudi z vprašanjem obstoja hamiltonskih poti v povezanih točkovno tranzitivnih grafih, ki ga je leta 1969 postavil Lovász [28]. Posebna pozornost pri raziskovanju je bila do sedaj namenjena  $m$ -Cayleyjevim grafom ciklične grupe za primer, ko je  $m = 1, 2$  ali  $3$ . Te grafe zaporedoma imenujemo cirkulanti, bicirkulanti in tricirkulanti. Znano je, da sta polni graf  $K_4$  in polni dvodelni graf  $K_{3,3}$  edina povezana kubična simetrična cirkulanta (glej [16, Proposition 3.4]). Rezultati v [15, 31, 34] nam dajo popolno klasifikacijo povezanih kubičnih simetričnih bicirkulantov, medtem ko so povezani kubični simetrični tricirkulanti klasificirani v [24]. V doktorski disertaciji je narejena popolna klasifikacija povezanih kubičnih simetričnih tetracirkulantov in povezanih kubičnih simetričnih pentacirkulantov. Čeprav se v tem poglavju ne ukvarjamo neposredno s povezavno regularnostjo grafov in je obravnavana kubičnih simetričnih tetracirkulantov in kubičnih simetričnih pentacirkulantov posredno pomembna predvsem zaradi nekaterih drugih odprtih vprašanj iz teorije grafov, je očitno, da ti grafi spadajo v družino povezavno regularnih grafov.

Kadar proučujemo določene lastnosti grafov, je zanimivo vprašanje, ali lahko iz neke množice grafov dobimo še kakšne nove primere grafov s to proučevano lastnostjo. To včasih lahko storimo z različnimi produkti grafov iz dane množice. Produkt dveh (ali več) grafov je graf, katerega množica točk je kartezični produkt množice točk posameznih grafov. Pravilo, ki določa povezave v produktu grafov, pa je mogoče izbrati na več načinov. Produkti grafov sami po sebi predstavljajo pomembno vejo raziskovanja v teoriji grafov. Poleg mnogih teoretičnih rezultatov, ki jih lahko najdemo v številnih člankih in tudi knjigah (več o produktih grafov in njihovih strukturnih lastnostih si lahko bralec prebere naprimer v [22]), njihova praktična uporaba sega tudi izven področja matematike, recimo v računalništvo, pomembni so pri načrtovanju omrežij, v kemiji in še nekaterih drugih področjih. V doktorski disertaciji se bomo v poglavju 4 ukvarjali s povezavno regularnimi grafi v povezavi z najbolj poznanimi in največkrat uporabljenimi produkti grafov. To so kartezični produkt, tenzorski produkt, krepki produkt, leksikografski produkt, produkt grafov z oznako  $G[H] - nG$ , ki je v angleški literaturi poznan pod imenom “deleted lexicographic product” in konormalni produkt. Pri konstrukciji novih grafov s pomočjo produktov nas torej zanima, katerim pogojem morata zadoščati grafa  $G$  in  $H$ , da ima dobljeni produkt grafov proučevano lastnost. Primer takega raziskovanja lahko najdemo v [1, 36, 37], kjer so med drugim navedeni potrebni in zadostni pogoji, ki jim morata zadoščati dva grafa, da je njun kartezični, tenzorski ali krepki produkt razdaljno regularen graf. Ta primer je tudi ustrezna motivacija za to, da se bomo v doktorski disertaciji na podoben način ukvarjali s tako imenovanimi povezavno regularnimi in skoraj krepko regularnimi grafi v povezavi z določenimi produkti grafov. Narejena je karakterizacija povezanih povezavno regularnih kartezičnih produktov, tenzorskih produktov, krepkih produktov, leksikografskih produktov, produktov z oznako  $G[H] - nG$  in konormalnih produktov dveh grafov. Kot posledice so narejene tudi karakterizacije povezanih skoraj krepko regularnih omenjenih produktov grafov.

Svojo vrsto povezavne regularnosti predstavljajo tudi tako imenovani razdaljno uravnoteženi grafi, v katerih za vsako povezavo s krajišči  $u, v$  velja, da je število točk, ki so bližje točki  $u$  kot točki  $v$ , enako številu točk, ki so bližje točki  $v$  kot

točki  $u$ . Prvi je tovrstne grafe na primeru podgrafov hiperkock obravnaval Handa (glej [19]), samo ime pa so v [23] prvič uporabili Jerebic in ostali, ki so proučevali osnovne lastnosti razdaljno uravnoreženih grafov in karakterizirali razdaljno uravnorežene kartezične in leksikografske produkte grafov. Kutnar in ostali so v [25] proučevali nekatere simetrijske pogoje, ki jim zadoščajo razdaljno uravnoreženi grafi ter definirali tako imenovane krepke razdaljno uravnorežene grafe, v katerih za vsako povezavo s krajišči  $u, v$  in za vsako naravno število  $i$  velja, da je število točk na razdalji  $i$  od točke  $u$  in na razdalji  $i + 1$  od točke  $v$  enako številu točk na razdalji  $i + 1$  od točke  $u$  in na razdalji  $i$  od točke  $v$ . Koncept krepke razdaljne uravnoreženosti je v [26] uporabljen na primeru posplošenih Petersenovih grafov. Definicijo razdaljno uravnoreženih grafov lahko po naravni poti posplošimo v definicijo  $n$ -razdaljno uravnoreženih grafov, za katere velja, da je za poljuben par točk  $u, v$  na razdalji  $n$  število točk, ki so bližje točki  $u$  kot točki  $v$ , enako številu točk, ki so bližje točki  $v$  kot točki  $u$ . V doktorski disertaciji se bomo v poglavju 5, skladno z rezultati o razdaljno oz. 1-razdaljno uravnoreženimi grafi in njihovimi lastnostmi, osredotočili na 2-razdaljno uravnorežene grafe. Pri tem se je najprej smiselno vprašati, ali obstajajo 2-razdaljno uravnoreženi grafi, ki niso razdaljno uravnoreženi. Za pritrdilen odgovor se lahko opremo na rezultat Hande, ki je v [19] pokazal, da je vsak razdaljno uravnorežen graf vsaj 2-povezan. Pri tem je graf  $\Gamma$   $k$ -točkovno povezan oz. na kratko  $k$ -povezan, če ima več kot  $k$  točk in v primeru, ko v grafu  $\Gamma$  zberemo manj kot  $k$  točk, ostane graf  $\Gamma$  povezan. Zato lahko naše vprašanje o obstoju 2-razdaljno uravnoreženih grafov, ki niso razdaljno uravnoreženi, prevedemo na vprašanje, ali obstajajo povezani 2-razdaljno uravnoreženi grafi, ki niso 2-povezani. Pokazali bomo, da obstaja družina grafov, v kateri najdemo grafe, ki ustrezajo temu pogoju, nato pa karakterizirali vse povezane 2-razdaljno uravnorežene grafe, ki niso 2-povezani. Podobno, kot je v [23] narejena karakterizacija razdaljno uravnoreženih kartezičnih in leksikografskih produktov grafov, bomo karakterizirali še vse povezane 2-razdaljno uravnorežene kartezične in leksikografske produkte dveh grafov.

V poglavju 2 navajamo osnovna znanja iz teorije grup in teorije grafov, ki jih potrebujemo v nadaljnjih poglavjih.

Omenimo še, da je večina rezultatov disertacije objavljenih v naslednjih dveh znanstvenih člankih:

- B. Frelih, K. Kutnar, *Classification of cubic symmetric tetracirculants and pentacirculants*, European J. Combin. **34** (2013), 169–194.
- B. Frelih, Š. Miklavič, *Edge regular graph products*, Electron. J. Combin. **20** (2013), 62–78.



## Poglavje 2

# Osnovna znanja

### 2.1 Grupe

V tem razdelku naj bo  $G = (G, *)$  grupa z grupno operacijo  $*$ , za katero uporabljamo multiplikativno notacijo. Nevtralni element grupe  $G$  označimo z  $1$ , inverzni element elementa  $g \in G$  pa z  $g^{-1}$ . Za produkt  $g * h$  elementov  $g, h \in G$  uporabljamo poenostavljen zapis  $gh$ . Osnovne pojme grup, ki jih ne bomo navedli, si lahko bralec poišče v [32, 35, 39].

#### 2.1.1 Delovanje grup

Naj bo  $\Omega$  neprazna množica. *Desno delovanje* grupe  $G$  na množici  $\Omega$  je funkcija

$$\Omega \times G \rightarrow \Omega,$$

ki je definirana s predpisom

$$(\omega, g) \mapsto \omega^g$$

in zadošča naslednjima aksiomoma:

- (i)  $\omega^1 = \omega$  za vsak element  $\omega \in \Omega$ ;
- (ii)  $(\omega^g)^h = \omega^{gh}$  za vse elemente  $g, h \in G$  in  $\omega \in \Omega$ .

Na podoben način definiramo *levo delovanje* grupe  $G$  na množici  $\Omega$ . Razlika med levim in desnim delovanjem je v vrstnem redu, po katerem produkt  $gh$  elementov  $g, h \in G$  deluje na element  $\omega \in \Omega$ . Pri levem delovanju na element  $\omega$  najprej deluje element  $h$ , za njim pa element  $g$ , pri desnem delovanju pa na element  $\omega$  najprej deluje element  $g$ , za njim pa element  $h$ .

Naj grupa  $G$  deluje na množici  $\Omega$ . Vsakemu elementu  $g \in G$  lahko priredimo preslikavo  $\bar{g} : \Omega \rightarrow \Omega$ , ki je definirana s predpisom  $\bar{g}(\omega) = \omega^g$ . Preslikava  $\bar{g}$  je bijekcija na množici  $\Omega$ . Torej obstaja preslikava  $\rho : G \rightarrow \text{Sym}(\Omega)$ , ki je definirana

s predpisom  $\rho(g) = \bar{g}$ . Z uporabo aksiomov (i) in (ii) iz definicije delovanja grupe na množici vidimo, da je preslikava  $\rho$  homomorfizem grup, saj za vsak element  $\omega \in \Omega$  in vse elemente  $g, h \in G$  velja, da je slika elementa  $\omega$  glede na  $\overline{gh}$  enaka sliki elementa  $\omega$  glede na produkt  $\bar{g}\bar{h}$ . Velja tudi obrat. Če je preslikava  $f: G \rightarrow \text{Sym}(\Omega)$  homomorfizem grup, potem ta preslikava porodi delovanje grupe  $G$  na množici  $\Omega$  na tak način, da je  $f = \rho$ . Homomorfizmu grup  $\rho$  pravimo *permutacijska reprezentacija delovanja* grupe  $G$  na množici  $\Omega$ . Glede na to, ali je delovanje desno ali levo, ločimo *desno permutacijsko reprezentacijo* in *levo permutacijsko reprezentacijo* grupe  $G$  na množici  $\Omega$ . *Jedro homomorfizma*  $\rho$  je množica vseh tistih elementov grupe  $G$ , ki delujejo na trivialni način. To je torej množica

$$\text{Ker}\rho = \{g \in G \mid \omega^g = \omega, \forall \omega \in \Omega\} = \{g \in G \mid \bar{g}(\omega) = \omega, \forall \omega \in \Omega\} = \{g \in G \mid \bar{g} = id\}.$$

Če je jedro trivialno, pravimo, da je delovanje *zvesto*.

Množici

$$\text{Orb}_G(\omega) = \omega^G = \{\omega^g \mid g \in G\},$$

kjer je  $\omega \in \Omega$ , pravimo *G-orbita* elementa  $\omega$  glede na delovanje grupe  $G$  (ali na kratko *orbita*, če je iz konteksta razvidno, o kateri grupi govorimo). Ni težko videti, da sta orbiti  $\omega_1^G$  in  $\omega_2^G$  kot množici bodisi enaki bodisi disjunktne, zato množica vseh orbit tvori particijo množice  $\Omega$  na paroma disjunktne podmnožice. Če ima grupa  $G$  samo eno orbito pri delovanju na množici  $\Omega$ , pravimo, da grupa  $G$  deluje na množici  $\Omega$  *tranzitivno*.

Množici

$$G_\omega = \{g \in G \mid \omega^g = \omega\},$$

kjer je  $\omega \in \Omega$ , pravimo *stabilizator elementa*  $\omega$  v grupi  $G$ . Ni težko preveriti, da je  $G_\omega$  podgrupa v grupi  $G$ . Če je  $|G_\omega| = 1$  za vsak element  $\omega \in \Omega$ , pravimo, da grupa  $G$  deluje *polregularno* oziroma, da je grupa  $G$  *polregularna*. Če grupa  $G$  deluje na množici  $\Omega$  tranzitivno in je  $|G_\omega| = 1$  za vsak element  $\omega \in \Omega$ , pravimo, da grupa  $G$  deluje *regularno* oziroma, da je grupa  $G$  *regularna*.

## 2.2 Grafi

Naj bo  $V$  končna neprazna množica in  $E$  poljubna družina dvoelementnih podmnožic množice  $V$ . Paru  $\Gamma = (V, E)$  pravimo *graf* na množici točk  $V = V(\Gamma)$  z množico povezav  $E = E(\Gamma)$ . *Podgraf* grafa  $\Gamma = (V, E)$  je graf  $\Gamma' = (V', E')$  z množico točk  $V' \subseteq V$  in množico povezav  $E' \subseteq E$ . Če je  $\{u, v\}$  povezava grafa  $\Gamma$ , pravimo, da sta točki  $u$  in  $v$  *sosednji* v grafu  $\Gamma$ . Povezavo  $\{u, v\}$  pišemo krajše  $uv$ , točkama  $u$  in  $v$  pa pravimo *krajišči povezave*  $uv$ . Točki  $v$  grafa  $\Gamma$ , ki ni krajišče nobene povezave, pravimo *izolirana točka*. *Komplement* grafa  $\Gamma$  je graf na množici točk  $V(\Gamma)$ , v katerem sta točki  $u, v \in V(\Gamma)$  *sosednji* natanko tedaj, ko nista *sosednji* v grafu  $\Gamma$ . Pravimo, da sta grafa  $\Gamma$  in  $\Gamma'$  *izomorfna*, če obstaja taka bijektivna preslikava  $\varphi: V(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma')$ , ki slika *sosednje* točke grafa  $\Gamma$  v *sosednje* točke grafa  $\Gamma'$  in slika *nesosednje* točke grafa  $\Gamma$  v *nesosednje* točke grafa  $\Gamma'$ . Če sta grafa  $\Gamma$  in  $\Gamma'$  *izomorfna*, to označimo z  $\Gamma \cong \Gamma'$ . *Red grafa*  $\Gamma$  je enak kardinalnosti njegove množice



točk. Če je  $A$  neka podmnožica kartezičnega produkta  $V \times V$ , paru  $(V, A)$  pravimo *usmerjeni graf* (ali *digraf*).

Dvema ali več povezavam, ki povezujejo isti par točk, pravimo *vzporedne povezave*. Povezavi, ki povezuje neko točko samo s seboj, pravimo *zanka*. Graf brez zank in vzporednih povezav je *enostavni graf*. V nadaljevanju oziroma v nadaljnjih poglavjih enostavni graf poimenujemo kar graf. Grafu na  $n$  točkah, v katerem sta poljubni dve točki sosednji, pravimo *polni graf* in ga označimo s  $K_n$ . Grafu na  $n$  točkah, ki je brez povezav, pravimo *prazni graf* in ga označimo z  $E_n$ . Če ima graf vsaj eno povezavo, pravimo, da je graf *neprazen*. Disjunktno unijo  $t$  kopij polnega grafa  $K_n$  označimo s  $t \times K_n$ . Komplement grafa  $t \times K_n$  označimo s  $K_{t \times n}$ .

Množico vseh sosednjih točk točke  $v \in V(\Gamma)$  označimo z  $N_\Gamma(v)$ . *Stopnja* ali *valenca točke  $v$*  v grafu  $\Gamma$  je enaka  $|N_\Gamma(v)|$ . Če je število  $|N_\Gamma(v)|$  enako za vse točke  $v \in V(\Gamma)$ , potem temu številu pravimo *stopnja* ali *valenca grafa  $\Gamma$*  in ga označimo s  $k_\Gamma$ . V tem primeru tudi rečemo, da je graf  $\Gamma$  *regularen graf stopnje  $k_\Gamma$* . *Kubični graf* je regularen graf stopnje 3.

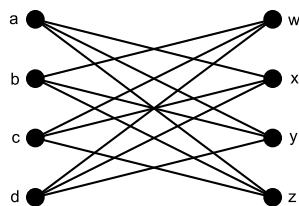
*Sprehod* dolžine  $s$  med točkama  $u$  in  $z$  je zaporedje  $s$  povezav  $uv, vw, wx, \dots, yz$  grafa  $\Gamma$ . Če sta točki  $u$  in  $z$  enaki, potem mu pravimo *zaprti sprehod*. Če so vse povezave sprehoda različne, potem mu pravimo *enostavni sprehod*. Če so v enostavnem sprehodu vse točke različne, potem takemu sprehodu pravimo *pot*. Zaprti poti pravimo *cikel*. Graf  $\Gamma$  je *povezan*, če med poljubnima točkama grafa  $\Gamma$  obstaja pot. V nasprotnem primeru je graf  $\Gamma$  *nepovezan* in razpade na povezane podgrafe, ki jim pravimo *povezane komponente* grafa  $\Gamma$ . Graf  $\Gamma$  je  *$k$ -točkovno povezan* oz. na kratko  *$k$ -povezan*, če ima več kot  $k$  točk in v primeru, ko zberemo manj kot  $k$  točk in tem točkam sosednje povezave, ostane graf  $\Gamma$  povezan. Če v povezanem grafu  $\Gamma$  obstaja taka točka  $v$ , da po njeni odstranitvi graf  $\Gamma$  postane nepovezan, potem taki točki pravimo *presečna točka* grafa  $\Gamma$ . *Dolžina poti* med točkama  $u$  in  $v$  v grafu  $\Gamma$ , ki jo označimo z  $\partial_\Gamma(u, v)$ , je enaka številu povezav, ki jih vsebuje pot med tema dvema točkama. Rečemo tudi, da sta točki  $u$  in  $v$  v grafu  $\Gamma$  na razdalji  $\partial_\Gamma(u, v)$ . Če točki  $u$  in  $v$  v grafu  $\Gamma$  nista povezani, potem pravimo, da je dolžina poti med njima enaka  $\infty$ , pri čemer privzamemo, da je  $\infty > n$  za vsako nenegativno celo število  $n$ . Z  $\max\{\partial_\Gamma(u, v) \mid u, v \in V(\Gamma)\}$  je definiran *premer* grafa oz. *dolžina najdaljše poti* v grafu  $\Gamma$ . *Ožina grafa  $\Gamma$*  je enaka dolžini njegovega najkrajšega cikla. Množico točk  $x \in V(\Gamma)$ , za katere velja, da je  $\partial_\Gamma(u, x) < \partial_\Gamma(v, x)$  za izbrani točki  $u, v \in V(\Gamma)$ , označimo z  $W_{uv}^\Gamma$ . Graf  $\Gamma$  je *dvodelni graf*, če lahko množico točk  $V(\Gamma)$  zapišemo kot disjunktno unijo dveh podmnožic  $U$  in  $U'$  (kar pomeni, da sta  $U, U' \subseteq V(\Gamma)$  in je  $U \cap U' = \emptyset$ ), tako da ima vsaka povezava v grafu  $\Gamma$  eno krajišče v množici  $U$ , drugo krajišče pa v množici  $U'$ . Dvodelnemu grafu, v katerem je vsaka točka množice  $U$ , ki ima  $m$  točk, sosednja vsaki točki množice  $U'$ , ki ima  $n$  točk, pravimo *polni dvodelni graf* in ga označimo s  $K_{m,n}$ . Če je  $U \subseteq V(\Gamma)$ , potem je *inducirani podgraf* grafa  $\Gamma$  na množici  $U$  graf, ki ima množico točk  $U$  in množico povezav  $\{\{u, v\} \mid u, v \in U\} \cap E(\Gamma)$ .

Urejeni par  $(u, v)$  sosednjih točk  $u$  in  $v$  grafa  $\Gamma$  imenujemo *lok* (ali *puščica*). Lok si lahko predstavljamo tudi tako, da povezavi v grafu  $\Gamma$  določimo usmeritev v eno od dveh možnih smeri (iz enega krajišča v drugega) in tako dobljeni usmerjeni povezavi pravimo lok. Množico vseh lokov grafa  $\Gamma$  označimo z  $A(\Gamma)$ . Zaporedju  $s + 1$  točk v grafu  $\Gamma$ , za katere velja, da sta poljubni dve zaporedni točki sosednji, poljubne tri zaporedne točke pa med seboj različne, pravimo  *$s$ -lok*.

Družina grafov  $CQ(k, m)$  je bila prvič definirana v [10] na naslednji način. Naj bo  $\mathbb{Z}_m$  aditivna ciklična grupa reda  $m$  in  $\mathbb{Z}_m^*$  multiplikativna grupa, ki vsebuje tiste elemente grupe  $\mathbb{Z}_m$ , ki so tuji številu  $m$ . Naj bo  $k$  tako naravno število, da je  $1 \leq k \leq m - 1$  in je največji skupni delitelj števil  $k$  in  $m$  enak 1. Potem je  $k \in \mathbb{Z}_m^*$ . S  $k^{-1}$  označimo element, ki je inverzen elementu  $k$  v grupi  $\mathbb{Z}_m^*$ . Naj bo F008A graf kocke in označimo njene točke z  $V(\text{F008A}) = \{a, b, c, d, w, x, y, z\}$ , kot je prikazano na sliki 2.1. Za poljubni taki naravni števili  $k$  in  $m$ , da je  $1 \leq k \leq m - 1$  in  $(k, m) = 1$ , je  $CQ(k, m)$  graf z množico točk  $V(CQ(k, m)) = V(\text{F008A}) \times \mathbb{Z}_m$  in množico povezav

$$\begin{aligned} E(CQ(k, m)) = & \{(a, i)(x, i), (a, i)(y, i), (a, i)(z, i), (b, i)(w, i), \\ & (b, i)(z, i), (c, i)(z, i), (d, i)(y, i), \\ & (b, i)(y, i + 1), (c, i)(w, i + k), (c, i)(x, i - k^{-1}), \\ & (d, i)(w, i - k^{-1} - 1), (d, i)(x, i + k) \mid i = 0, 1, \dots, m - 1\}, \end{aligned}$$

kjer vsa števila  $i + t$  ( $i, t \in \mathbb{Z}_m$ ) računamo po modulu  $m$ .



Slika 2.1: Kocka  $Q_3 = \text{F008A}$ .

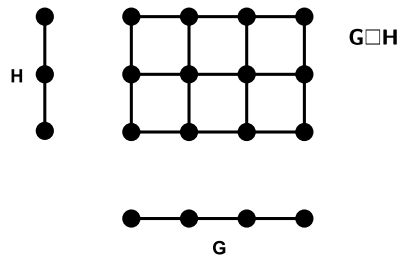
### 2.2.1 Produkti grafov

Naj bosta  $G$  in  $H$  poljubna grafa z množicama točk  $V(G)$  in  $V(H)$ . *Produkt grafov*  $G$  in  $H$  je graf, ki ima množico točk  $V(G) \times V(H)$ , glede na to, kako so definirane povezave, pa ločimo več različnih družin produktov grafov. Navedli bomo definicije najbolj poznanih in v matematični literaturi največkrat obravnavanih produktov grafov, s katerimi se bomo ukvarjali tudi v doktorski disertaciji. Naj bosta  $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in V(G) \times V(H)$  točki produkta grafov  $G$  in  $H$ .

V *kartezičnem produktu* grafov  $G$  in  $H$ , ki ga označimo z  $G \square H$  in je prikazan na sliki 2.2, sta točki  $(g_1, h_1)$  in  $(g_2, h_2)$  sosednji natanko tedaj, ko veljata naslednji dve možnosti:

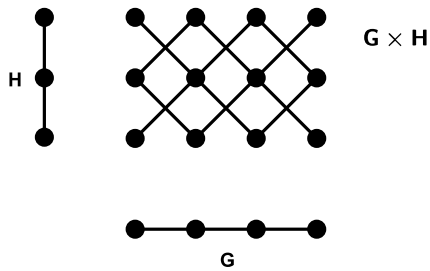
- $g_1 = g_2$  in sta točki  $h_1, h_2$  sosednji v grafu  $H$ ,
- $h_1 = h_2$  in sta točki  $g_1, g_2$  sosednji v grafu  $G$ .

Na podlagi definicije vidimo, da je kartezični produkt komutativen, kar pomeni, da sta grafa  $G \square H$  in  $H \square G$  izomorfna.



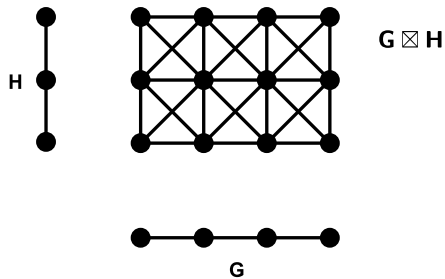
Slika 2.2: Kartezični produkt grafov  $G$  in  $H$ .

V *tenzorskem* ali *direktnem produktu* grafov  $G$  in  $H$ , ki ga označimo z  $G \times H$  in je prikazan na sliki 2.3, sta točki  $(g_1, h_1)$  in  $(g_2, h_2)$  sosednji natanko tedaj, ko velja, da sta točki  $g_1, g_2$  sosednji v grafu  $G$ , točki  $h_1, h_2$  pa sta sosednji v grafu  $H$ . Tenzorski produkt grafov  $G$  in  $H$  je komutativen.



Slika 2.3: Tenzorski produkt grafov  $G$  in  $H$ .

V *krepkem produktu* grafov  $G$  in  $H$ , ki ga označimo z  $G \boxtimes H$  in je prikazan na sliki 2.4, sta točki  $(g_1, h_1)$  in  $(g_2, h_2)$  sosednji natanko tedaj, ko veljajo naslednje tri možnosti:



Slika 2.4: Kreпки produkt grafov  $G$  in  $H$ .

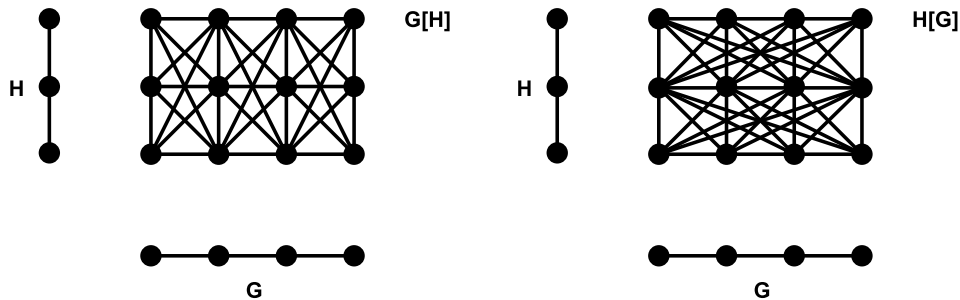
- $g_1 = g_2$  in sta točki  $h_1, h_2$  sosednji v grafu  $H$ ,
- $h_1 = h_2$  in sta točki  $g_1, g_2$  sosednji v grafu  $G$ ,
- točki  $g_1, g_2$  sta sosednji v grafu  $G$ , točki  $h_1, h_2$  pa sta sosednji v grafu  $H$ .

Krepki produkt grafov  $G$  in  $H$  je komutativen.

V leksikografskem produktu grafov  $G$  in  $H$ , ki ga označimo z  $G[H]$  in je prikazan na sliki 2.5, sta točki  $(g_1, h_1)$  in  $(g_2, h_2)$  sosednji natanko tedaj, ko veljata naslednji dve možnosti:

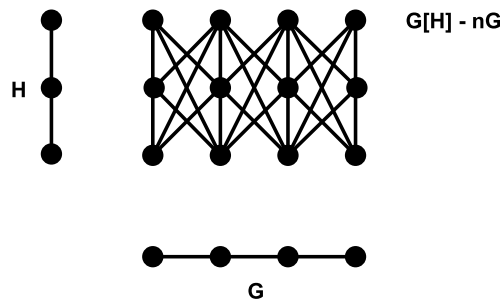
- $g_1 = g_2$  in sta točki  $h_1, h_2$  sosednji v grafu  $H$ ,
- točki  $g_1, g_2$  sta sosednji v grafu  $G$ .

Leksikografski produkt grafov  $G$  in  $H$  v splošnem ni komutativen.



Slika 2.5: Leksikografska produkta grafov  $G$  in  $H$ .

Naj bo  $n = |V(H)|$ . V produktu grafov  $G$  in  $H$ , ki ga označimo z  $G[H] - nG$  in je v angleški literaturi poznan pod izrazom “deleted lexicographic product”, prikazan pa je na sliki 2.6, sta točki  $(g_1, h_1)$  in  $(g_2, h_2)$  sosednji natanko tedaj, ko veljata naslednji dve možnosti:

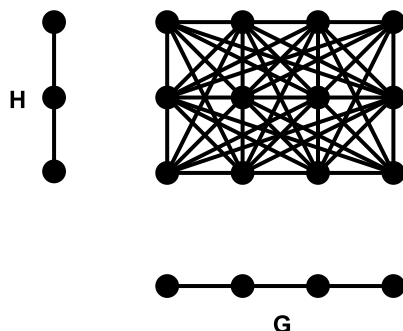


Slika 2.6: Produkt grafov z oznako  $G[H] - nG$ .

- $g_1 = g_2$  in sta točki  $h_1, h_2$  sosednji v grafu  $H$ ,
- točki  $g_1, g_2$  sta sosednji v grafu  $G$  in  $h_1 \neq h_2$ .

Produkt grafov  $G[H] = nG$  v splošnem ni komutativen.

V *konormalnem produktu* grafov  $G$  in  $H$ , ki je prikazan na sliki 2.7, sta točki  $(g_1, h_1)$  in  $(g_2, h_2)$  sosednji natanko tedaj, ko sta točki  $g_1, g_2$  sosednji v grafu  $G$  ali pa sta točki  $h_1, h_2$  sosednji v grafu  $H$ . Konormalni produkt grafov  $G$  in  $H$  je komutativen.



Slika 2.7: Konormalni produkt grafov  $G$  in  $H$ .

## 2.2.2 Delovanje grup na grafih

*Avtomorfizem grafa* je permutacija množice točk, ki ohranja sosednost točk grafa. Množica vseh avtomorfizmov grafa  $\Gamma$  z operacijo kompozituma preslikav tvori *grupo avtomorfizmov*  $\text{Aut}(\Gamma)$  grafa  $\Gamma$ . Poljubna podgrupa  $G$  grupe avtomorfizmov grafa  $\Gamma$  deluje na naraven način na množici točk  $V(\Gamma)$ , množici povezav  $E(\Gamma)$  in na množici lokov  $A(\Gamma)$ . Pravimo, da grupa  $G$  deluje *točkovno tranzitivno*, *povezavno tranzitivno*, *ločno tranzitivno* oziroma *s-ločno tranzitivno* na grafu  $\Gamma$ , če je delovanje grupe  $G$  na pripadajoči množici točk, povezav, lokov oziroma *s-lokov* grafa  $\Gamma$  tranzitivno. V tem primeru je graf  $\Gamma$  *G-točkovno tranzitiven*, *G-povezavno tranzitiven*, *G-ločno tranzitiven* ali *G-simetričen* oziroma *G-s-ločno tranzitiven*. Če grupa  $G$  deluje regularno na množici *s-lokov* grafa  $\Gamma$ , pravimo, da je graf  $\Gamma$  *G-s-regularen*. Če grupa  $G$  sovpada z grupo avtomorfizmov grafa  $\Gamma$ , predpono  $G$  izpustimo in govorimo o *točkovni tranzitivnosti*, *povezavni tranzitivnosti*, *ločni tranzitivnosti* ali *simetričnosti* oziroma *s-ločni tranzitivnosti* grafa  $\Gamma$ .

## 2.2.3 Polregularni avtomorfizmi ter kvocientni grafi in multigrfi

Naj bo  $\Gamma$  graf in  $\mathcal{W}$  particija njegove množice točk  $V(\Gamma)$ . Potem je *kvocientni graf*  $\Gamma_{\mathcal{W}}$  grafa  $\Gamma$ , glede na particijo  $\mathcal{W}$ , graf z množico točk  $\mathcal{W}$  in množico povezav,

ki je na naraven način inducirana z množico povezav  $E(\Gamma)$ . V primeru, ko je  $\mathcal{W}$  množica orbit podgrupe  $H$  grupe avtomorfizmov  $\text{Aut}(\Gamma)$ , oznako  $\Gamma_{\mathcal{W}}$  zamenjamo z oznako  $\Gamma_H$ . Če je podgrupa  $H = \langle \rho \rangle$  generirana z enim samim elementom in zato ciklična, uporabljamo oznako  $\Gamma_{\rho}$ .

Naj bosta  $m \geq 1$  in  $n \geq 2$  naravni števili. Netrivialen avtomorfizem grafa  $\Gamma$  je  $(m, n)$ -polregularen, če ima, kot permutacija točk grafa  $\Gamma$ , v svoji ciklični dekompoziciji  $m$  ciklov dolžine  $n$  in nobenega drugega cikla.

Naj bo  $\Gamma$  graf, katerega grupa avtomorfizmov vsebuje  $(m, n)$ -polregularen avtomorfizem  $\rho$ . Označimo množico orbit grupe  $\langle \rho \rangle$  z  $\mathcal{W}$ . Naj bosta  $W, W' \in \mathcal{W}$  poljubni orbiti. Očitno je podgraf grafa  $\Gamma$ , ki je inducirana z množico  $W$  regularen. Prav tako je regularen tudi dvodelen podgraf grafa  $\Gamma$ , ki je inducirana s povezavami, ki imajo eno krajišče v množici  $W$ , drugo krajišče pa v množici  $W'$ . Označimo stopnjo teh dveh regularnih podgrafov s  $k_W$  oz. s  $k_{W, W'}$ . Kvocientni multigraf, glede na avtomorfizem  $\rho$ , je graf z množico točk  $\mathcal{W}$ , pri čemer sta točki  $W, W' \in \mathcal{W}$  povezani s  $k_{W, W'}$  povezavami, v točki  $W \in \mathcal{W}$  pa imamo  $k_W/2$  zank, če je število  $k_W$  sodo ter  $(k_W - 1)/2$  zank in eno polpovezavo, če je število  $k_W$  liho. Prav tako lahko obravnavamo tudi kvocientni graf  $\Gamma_{\mathcal{W}}$ , ki je temeljni graf kvocientnega multigrafa (to pomeni, da ne upoštevamo zank in polpovezav).

Naj bo  $\Gamma$  povezan graf, ki premore  $(m, n)$ -polregularen avtomorfizem

$$\rho = (u_0^0, u_0^1, \dots, u_0^{n-1}) (u_1^0, u_1^1, \dots, u_1^{n-1}) \cdots (u_{m-1}^0, u_{m-1}^1, \dots, u_{m-1}^{n-1})$$

in naj bo  $\mathcal{W} = \{W_i \mid i \in \mathbb{Z}_m\}$  množica orbit  $W_i = \{u_i^s \mid s \in \mathbb{Z}_n\}$  grupe  $\langle \rho \rangle$ . Potem lahko graf  $\Gamma$  predstavimo s *Fruchtovo notacijo* (glej [14]) na sledeči način. Vsako orbito grupe  $\langle \rho \rangle$  predstavimo s krožcem. Simbol  $n/T$ , kjer je  $T = T^{-1} \subseteq \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ , v notranjosti krožca, ki predstavlja orbito  $W_i$ , pomeni, da je za vsak  $s \in \mathbb{Z}_n$  točka  $u_i^s$  sosednja vsem točkam  $u_i^{s+t}$ , kjer je  $t \in T$ . Kadar je  $|T| \leq 2$ , uporabljamo poenostavljeno notacijo  $n/t$ , ko je  $T = \{t, -t\}$ ,  $n/(n/2)$ , ko je  $T = \{n/2\}$  oziroma  $n$ , ko je  $T = \emptyset$ . Puščica iz krožca, ki predstavlja orbito  $W_i$ , v krožec, ki predstavlja orbito  $W_j$ ,  $j \neq i$ , označena z  $y \in \mathbb{Z}_n$ , pomeni, da je za vsak  $s \in \mathbb{Z}_n$  točka  $u_i^s \in W_i$  sosednja točki  $u_j^{s+y}$ . Kadar je oznaka puščice enaka 0, ponavadi namesto puščice narišemo le črto. Primeri grafov, ki so predstavljeni s Fruchtovo notacijo, so podani na sliki 3.1 v podrazdelku 3.1.2.

### 2.2.4 Krovi grafov

*Krovna projekcija* grafa  $\tilde{\Gamma}$  je taka surjektivna preslikava  $p: \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ , da se za poljubno točko  $\tilde{u} \in V(\tilde{\Gamma})$  množica lokov, ki imajo za svoje začetno krajišče točko  $\tilde{u}$ , bijektivno preslika v množico lokov, ki imajo za svoje začetno krajišče točko  $u = p(\tilde{u})$ . Grafu  $\tilde{\Gamma}$  pravimo *krovni graf* ali *krov baznega grafa*  $\Gamma$ . Množica  $\text{fib}_u = p^{-1}(u)$  je *vlakno* točke  $u \in V(\Gamma)$ . Podgrupi  $K$  vseh tistih avtomorfizmov grafa  $\tilde{\Gamma}$ , ki kot množico fiksirajo vsako vlakno, pravimo *grupa krovnih transformacij*. Graf  $\tilde{\Gamma}$  se imenuje tudi *K-krov* grafa  $\Gamma$ . Enostavno je videti, da grupa krovnih transformacij povezanega krovnega grafa deluje polregularno na vsakem vlaknu. V posebnem primeru, ko je grupa krovnih transformacij regularna na vlaknih grafa  $\tilde{\Gamma}$ , pravimo, da je graf  $\tilde{\Gamma}$  *regularen K-krov*. Rečemo, da se avtomorfizem  $\alpha \in \text{Aut}(\Gamma)$  *dvigne* v

avtomorfizem grafa  $\tilde{\Gamma}$ , če obstaja tak avtomorfizem  $\tilde{\alpha} \in \text{Aut}(\tilde{\Gamma})$ , ki ga imenujemo *dvig* avtomorfizma  $\alpha$ , da je  $\tilde{\alpha}p = p\alpha$ , oziroma da diagram

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Gamma} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{\Gamma} \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \Gamma & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma \end{array}$$

komutira. Če je krovni graf  $\tilde{\Gamma}$  povezan, potem je podgrupa  $K \leq \text{Aut}(\tilde{\Gamma})$  dvig trivialne podgrupe grupe avtomorfizmov  $\text{Aut}(\Gamma)$ . Opozorimo, da se podgrupa  $G \leq \text{Aut}(\tilde{\Gamma})$  projicira s preslikavo  $p$  natanko tedaj, ko je particija množice točk  $V(\tilde{\Gamma})$  na orbite podgrupe  $K$   $G$ -invariantna.

Kombinatorični opis  $K$ -krova sta podala Gross in Tucker v [18] s pomočjo tako imenovanih *napetostnih grafov* na naslednji način. Naj bo  $\Gamma$  graf in  $K$  končna grupa. *Dodelitev napetosti* grafu  $\Gamma$  je preslikava  $\zeta: A(\Gamma) \rightarrow K$  z lastnostjo, da je  $\zeta((u, v)) = \zeta((v, u)^{-1})$  za vsak lok  $(u, v) \in A(\Gamma)$  (zaradi poenostavitve pisanja bomo namesto  $\zeta((u, v))$  pisali  $\zeta(u, v)$ ).

Vrednosti preslikave  $\zeta$  se imenujejo *napetosti*, pripadajoča grupa  $K$  pa *napetostna grupa*. *Napetostni graf*  $\Gamma \times_{\zeta} K$ , ki izhaja iz dodelitve napetosti  $\zeta: A(\Gamma) \rightarrow K$ , ima množico točk  $V(\Gamma) \times K$ , povezave pa so oblike  $\{(u, g), (v, \zeta(x)g)\}$ , kjer je  $(u, v) \in A(\Gamma)$ . Graf  $\Gamma \times_{\zeta} K$  je očitno krovni graf grafa  $\Gamma$ , pri čemer projiciramo prve koordinate točk grafa  $\Gamma \times_{\zeta} K$  v točke grafa  $\Gamma$ . Z delovanjem grupe  $K$  na množici točk  $V(\Gamma \times_{\zeta} K)$  na ta način, da je  $(u, g)^{g'} = (u, gg')$ , za  $(u, g) \in V(\Gamma \times_{\zeta} K)$  in  $g' \in K$ , dobimo polregularno grupo avtomorfizmov grafa  $\Gamma \times_{\zeta} K$ . Iz tega neposredno sledi, da lahko graf  $\Gamma \times_{\zeta} K$  dejansko gledamo kot  $K$ -krov grafa  $\Gamma$ .

Za dano vpeto drevo  $T$  grafa  $\Gamma$  rečemo, da je dodelitev napetosti  $\zeta: A(\Gamma) \rightarrow K$   *$T$ -reducirana*, če so napetosti na lokih drevesa  $T$  enake nevtralnemu elementu grupe  $K$ . Zaprtemu sprehodu  $W$ , ki vsebuje le en lok, ki ne leži na vpetem drevesu  $T$ , pravimo *fundamentalen zaprt sprehod*. Podobno ciklu  $W$ , ki vsebuje le en lok, ki ne leži na vpetem drevesu  $T$ , pravimo *fundamentalen cikel*.

V [17] je pokazano, da lahko vsak regularen krovni graf  $\tilde{\Gamma}$  grafa  $\Gamma$  dobimo iz  $T$ -reducirane dodelitve napetosti  $\zeta$  glede na poljubno izbrano fiksno vpeto drevo  $T$  grafa  $\Gamma$ . Problem, ali se avtomorfizem  $\alpha$  grafa  $\Gamma$  dvigne ali ne, lahko izrazimo s pomočjo napetosti v grafu na naslednji način. Naj bo dan avtomorfizem  $\alpha \in \text{Aut}(\Gamma)$ . Definirajmo funkcijo  $\bar{\alpha}$  iz množice napetosti fundamentalnih zaprtih sprehodov pri izbrani točki  $v \in V(\Gamma)$  v napetostno grupo  $K$  s predpisom  $\zeta(C)^{\bar{\alpha}} = \zeta(C^{\alpha})$ , kjer  $C$  preteče vse fundamentalne zaprte sprehode za izbrano točko  $v$ ,  $\zeta(C)$  in  $\zeta(C^{\alpha})$  pa sta napetosti zaprtega sprehoda  $C$  oziroma  $C^{\alpha}$ . Če je grupa  $K$  abelska, je funkcija  $\bar{\alpha}$  neodvisna od izbora bazne točke in lahko fundamentalne zaprte sprehode v točki  $v$  nadomestimo s fundamentalnimi cikli, ki so generirani z loki grafa  $\Gamma$ , ki ne pripadajo vpetemu drevesu tega grafa. Prav tako iz definicije očitno sledi, da je graf  $\Gamma \times_{\zeta} K$ , ki izhaja iz  $T$ -reducirane dodelitve napetosti  $\zeta$ , povezan natanko tedaj, ko napetosti na lokih grafa  $\Gamma$ , ki ne ležijo na vpetem drevesu  $T$ , generirajo napetostno grupo  $K$ .

Ta podrazdelek bomo sklenili s štirimi trditvami, ki se nanašajo na dvig avtomorfizmov v krovih grafov. Prva trditev izhaja iz [29, Theorem 4.2], druga iz [21],

medtem ko je tretja vzeta iz [9, Proposition 2.2], čeprav jo lahko izpeljemo tudi iz [30, Corollaries 9.4, 9.7, 9.8].

Za povezan regularen krov  $\Gamma \times_{\zeta} K$  grafa  $\Gamma$ , ki izhaja iz  $T$ -reducirane dodelitve napetosti  $\zeta$  glede na abelsko napetostno grupo  $K$ , in za avtomorfizem  $\alpha \in \text{Aut}(\Gamma)$ , ki se dvigne, bomo z  $\bar{\alpha}$  vedno označevali preslikavo iz množice napetosti fundamentalnih ciklov grafa  $\Gamma$  v napetostno grupo  $K$ , z  $\alpha^*$  pa bomo označevali avtomorfizem grupe  $K$ , ki izhaja iz preslikave  $\bar{\alpha}$ .

**Trditev 2.2.1** [29] *Naj bo  $K$  končna grupa in naj bo  $\Gamma \times_{\zeta} K$  povezan regularen krov grafa  $\Gamma$ , ki izhaja iz dodelitve napetosti  $\zeta$  glede na napetostno grupo  $K$ . Potem se avtomorfizem  $\alpha$  grafa  $\Gamma$  dvigne natanko tedaj, ko lahko funkcijo  $\bar{\alpha}$  razširimo v avtomorfizem  $\alpha^*$  grupe  $K$ .*

Rečemo, da sta krovni projekciji  $p_i: \tilde{\Gamma}_i \rightarrow \Gamma$  za  $i \in \{1, 2\}$  izomorfni, če obstaja tak izomorfizem grafov  $\phi: \tilde{\Gamma}_1 \rightarrow \tilde{\Gamma}_2$ , da je  $\phi p_2 = p_1$ .

**Trditev 2.2.2** [21] *Naj bo  $K$  končna grupa. Povezana regularna krova  $\Gamma \times_{\zeta} K$  in  $\Gamma \times_{\varphi} K$ , kjer sta dodelitvi napetosti  $\zeta$  in  $\varphi$   $T$ -reducirani, sta izomorfna natanko tedaj, ko obstaja tak avtomorfizem  $\sigma \in \text{Aut}(K)$ , da je  $\zeta(u, v)^{\sigma} = \varphi(u, v)$  za vsak lok  $(u, v)$  grafa  $\Gamma$ , ki ne leži na vpetem drevesu  $T$ .*

**Trditev 2.2.3** [9] *Naj bo  $K$  končna grupa in naj bo  $\Gamma \times_{\zeta} K$  povezan regularen krovni graf grafa  $\Gamma$ , ki izhaja iz dodelitve napetosti  $\zeta$  glede na napetostno grupo  $K$ . Naj dvigi avtomorfizma  $\alpha \in \text{Aut}(\Gamma)$  centralizirajo grupo  $K$ , ki jo obravnavamo kot grupo krovnih transformacij. Potem za vsak zaprt sprehod  $W$  grafa  $\Gamma$  obstaja nek tak element  $k \in K$ , da je  $\zeta(W^{\alpha}) = k\zeta(W)k^{-1}$ . V posebnem primeru, ko je grupa  $K$  abelska, je  $\zeta(W^{\alpha}) = \zeta(W)$  za vsak zaprt sprehod  $W$  grafa  $\Gamma$ .*

Za dano dodelitev napetosti  $\zeta$  grafu  $\Gamma$  in dan avtomorfizem  $\beta \in \text{Aut}(\Gamma)$ , naj bo  $\zeta^{\beta}$  taka dodelitev napetosti grafu  $\Gamma$ , da je  $\zeta^{\beta}(u, v) = \zeta(u^{\beta^{-1}}, v^{\beta^{-1}})$  za vsak lok  $(u, v) \in A(\Gamma)$ , z  $\tilde{\beta}$  pa označimo permutacijo, ki deluje na množici točk  $V(\Gamma) \times K$  tako, da je  $(u, k)^{\tilde{\beta}} = (u^{\beta}, k)$ .

**Trditev 2.2.4** [24, Proposition 2.4] *Naj bo  $K$  končna grupa in naj bo  $\tilde{\Gamma} = \Gamma \times_{\zeta} K$  povezan regularen krovni graf grafa  $\Gamma$ , ki izhaja iz dodelitve napetosti  $\zeta$  glede na napetostno grupo  $K$ . Naj bo  $\beta \in \text{Aut}(\Gamma)$ . Potem veljajo naslednje trditve.*

- (i)  $\tilde{\beta}$  je izomorfizem grafov  $\tilde{\Gamma}$  in  $\Gamma \times_{\zeta^{\beta}} K$ .
- (ii) Če je  $\alpha$  avtomorfizem grafa  $\tilde{\Gamma}$ , ki se projicira na  $\bar{\alpha}$ , potem je  $\tilde{\beta}^{-1}\alpha\tilde{\beta}$  avtomorfizem grafa  $\Gamma \times_{\zeta^{\beta}} K$ , ki se projicira na  $\beta^{-1}\bar{\alpha}\beta$ .
- (iii) Če avtomorfizem  $\alpha$  centralizira grupo krovnih transformacij  $K$ , potem tudi avtomorfizem  $\tilde{\beta}^{-1}\alpha\tilde{\beta}$  centralizira to grupo  $K$ .



## Poglavje 3

# Kubični simetrični tetracirkulanti in pentacirkulanti

Graf  $\Gamma$  je  $m$ -Cayleyjev graf netrivialne grupe  $G$ , če njegova grupa avtomorfizmov vsebuje polregularno podgrupo, ki je izomorfna grupi  $G$  in ima  $m$  orbit na množici točk grafa  $\Gamma$ . Če je grupa  $G$  ciklična in je  $m = 1, 2, 3, 4$  ali  $5$ , potem graf  $\Gamma$  v tem zaporedju imenujemo *cirkulant*, *bicirkulant*, *tricirkulant*, *tetracirkulant* ali *pentacirkulant*.

Polni graf  $K_4$  in polni dvodeleni graf  $K_{3,3}$  sta edina povezana kubična simetrična cirkulanta (glej [16, Proposition 3.4]). Rezultati iz [15, 31, 34], nam dajo popolno klasifikacijo povezanih kubičnih simetričnih bicirkulantov, medtem ko so povezani kubični simetrični tricirkulanti klasificirani v [24]. Dokaza izrekov 3.0.5 in 3.0.6, ki sta glavna rezultata tega poglavja in podajata popolno klasifikacijo povezanih kubičnih simetričnih tetracirkulantov oziroma pentacirkulantov, nadaljujeta začetno delo raziskovanja na tem področju. Oznake grafov  $F_nA, F_nB, \dots$  se nanašajo na oznake ustreznih grafov v Fosterjevem cenzusu oziroma seznamu vseh povezanih kubičnih simetričnih grafov do reda 768 (glej [5] in [8]). Družina grafov z oznako  $CQ(k, m)$  je definirana v razdelku 2.2.

**Izrek 3.0.5** *Povezan kubičen simetričen graf je tetracirkulant natanko tedaj, ko je izomorfen enemu od naslednjih grafov:*

- (i) F008A, F020A, F020B, F024A, F028A, F032A, F040A,
- (ii) F016A, F048A, F056C, F060A, F080A, F096A, F112B, F120B, F224C, F240C,
- (iii)  $CQ(k, m)$  za naravna števila  $k, m$ ,  $2 \leq k \leq m - 3$ , ki zadoščajo pogoju, da  $m \mid (k^2 + k + 1)$ ,
- (iv)  $CQ(2k - 1, 2m)$  za naravna števila  $k, m$ ,  $2 \leq k \leq m - 1$ , ki zadoščajo pogoju, da  $m \mid (4k^2 - 2k + 1)$ .

**Izrek 3.0.6** *Povezan kubičen simetričen graf je pentacirkulant natanko tedaj, ko je izomorfen bodisi grafu F050A ali grafu F150A.*

Dokaz izreka 3.0.5 je v razdelku 3.1, dokaz izreka 3.0.6 pa v razdelku 3.2. Ti dve klasifikaciji dobimo s pomočjo metode, ki je bila prvič uporabljena v [24] za klasifikacijo kubičnih simetričnih tricirkulantov. Naj bo  $G$  grupa in  $K$  njena podgrupa. *Jedro podgrupe*  $K$  v grupi  $G$ , ki ga označimo s  $\text{core}_G(K)$ , je največja netrivialna podgrupa edinka grupe  $G$ , ki je vsebovana v podgrupi  $K$ . V dokazih je najprej potrebno obravnavati tako imenovane kubične simetrične tetracirkulante brez jedra (oz. pentacirkulante brez jedra). To so grafi, katerih grupa avtomorfizmov vsebuje netrivialen avtomorfizem  $\rho$ , ki ima v svoji ciklični dekompoziciji štiri (oz. pet) ciklov enake dolžine, podgrupa, ki je generirana z avtomorfizmom  $\rho$ , pa je brez jedra v celi grupi avtomorfizmov tega grafa. Izjemen rezultat iz teorije grup, da ‘ustrezno velika’ ciklična podgrupa ni nikoli brez jedra, ki sta ga v [20] dokazala Herzog in Kaplan (glej trditve 3.0.7), skupaj z dobro znanim dejstvom, da je red grupe avtomorfizmov povezanega kubičnega simetričnega grafa reda  $n$  enak  $3 \cdot 2^{s-1}n$ , kjer je  $s \leq 5$ , saj je Tutte v [38] pokazal, da je vsak povezan kubičen simetričen graf  $s$ -regularen za nek  $s \leq 5$ , nam omogoča klasifikacijo povezanih kubičnih simetričnih tetracirkulantov brez jedra, glej lemo 3.1.1 (oz. pentacirkulantov brez jedra, glej lemo 3.2.1). Povezani kubični simetrični tetracirkulanti brez jedra so navedeni v izreku 3.0.5 (i), graf F050A pa je edini povezan kubični simetrični pentacirkulant brez jedra.

Za povezane kubične simetrične tetracirkulante z jedrom uporabimo Lorimerjev rezultat o kubičnih simetričnih grafih, katerih grupa avtomorfizmov vsebuje podgrupo edinko. Iz tega rezultata sledi, da je vsak tak graf bodisi regularen ciklični krov polnega grafa  $K_4$  ali pa regularen ciklični krov kubičnega simetričnega tetracirkulanta brez jedra (glej trditve 3.0.8). Podobno iz tega Lorimerjevega rezultata sledi, da je povezan kubičen simetričen pentacirkulant z jedrom regularen ciklični krov kubičnega simetričnega pentacirkulanta brez jedra (glej trditve 3.0.9). Na podlagi tega lahko s pomočjo tehnike grafovskih krovov klasificiramo povezane kubične simetrične tetracirkulante z jedrom (glej podrazdelek 3.1.2) in pentacirkulante z jedrom (glej razdelek 3.2). Prvi so navedeni v izreku 3.0.5 (ii)-(iv), graf F150A pa je edini povezan kubičen simetričen pentacirkulant z jedrom. Lastnosti grafov, ki se pojavijo v izreku 3.0.5, so navedene v tabelah 3.1 in 3.2.

Za dokaz glavnih dveh rezultatov tega poglavja v razdelkih 3.1 in 3.2 potrebujemo tudi naslednje definicije, oznake in trditve.

Označimo množico vseh povezanih kubičnih simetričnih grafov, katerih grupa avtomorfizmov vsebuje  $(m, n)$ -polregularen avtomorfizem, s  $\mathcal{C}(m, n)$ . Rečemo, da je graf  $\Gamma \in \mathcal{C}(m, n)$  *brez jedra*, če obstaja tak  $(m, n)$ -polregularen avtomorfizem  $\rho \in \text{Aut}(\Gamma)$ , da ima ciklična podgrupa  $\langle \rho \rangle$  trivialno jedro v grupi avtomorfizmov  $\text{Aut}(\Gamma)$ . Na podlagi rezultata iz prve trditve, ki sledi, lahko klasificiramo povezane kubične simetrične tetracirkulante brez jedra in povezane kubične simetrične pentacirkulante brez jedra (glej lemi 3.1.1 in 3.2.1).

**Trditve 3.0.7** [20, Theorem B] *Če je  $H$  taka ciklična podgrupa končne grupe  $G$ , da je  $|H| \geq \sqrt{|G|}$ , potem  $H$  vsebuje netrivialno podgrupo edinko grupe  $G$ .*

Naslednji dve trditvi sledita iz [27, Theorem 9] in jih bomo potrebovali v razdelkih 3.1 in 3.2.

**Trditev 3.0.8** Naj bo  $\Gamma \in \mathcal{C}(4, n)$  graf s  $(4, n)$ -polregularnim avtomorfizmom  $\rho \in \text{Aut}(\Gamma)$  in naj bo  $N$  jedro ciklične podgrupe  $\langle \rho \rangle$  v grupi avtomorfizmov  $\text{Aut}(\Gamma)$ . Potem je edinka  $N$  jedro delovanja grupe avtomorfizmov  $\text{Aut}(\Gamma)$  na množici orbit edinke  $N$ , kvocientna grupa  $\text{Aut}(\Gamma)/N$  deluje ločno tranzitivno na kvocientnem grafu  $\Gamma_N$ ,  $\Gamma_N \in \mathcal{C}(4, n/|N|)$  in je graf  $\Gamma_N$  brez jedra ali pa je izomorfen polnemu grafu F004A. Poleg tega je  $\Gamma_\rho \cong (\Gamma_N)_{\bar{\rho}}$ , kjer je  $\bar{\rho}$   $(4, n/|N|)$ -polregularen avtomorfizem v kvocientni grupi  $\text{Aut}(\Gamma)/N$ .

**Trditev 3.0.9** Naj bo  $\Gamma \in \mathcal{C}(5, n)$  graf s  $(5, n)$ -polregularnim avtomorfizmom  $\rho \in \text{Aut}(\Gamma)$  in naj bo  $N$  jedro ciklične podgrupe  $\langle \rho \rangle$  v grupi avtomorfizmov  $\text{Aut}(\Gamma)$ . Potem je edinka  $N$  jedro delovanja grupe avtomorfizmov  $\text{Aut}(\Gamma)$  na množici orbit edinke  $N$ , kvocientna grupa  $\text{Aut}(\Gamma)/N$  deluje ločno tranzitivno na kvocientnem grafu  $\Gamma_N$ ,  $\Gamma_N \in \mathcal{C}(5, n/|N|)$  in je graf  $\Gamma_N$  brez jedra. Poleg tega je  $\Gamma_\rho \cong (\Gamma_N)_{\bar{\rho}}$ , kjer je  $\bar{\rho}$   $(5, n/|N|)$ -polregularen avtomorfizem v kvocientni grupi  $\text{Aut}(\Gamma)/N$ .

Iz trditve 3.0.8 sledi, da je kubični simetrični tetracirkulant  $\Gamma$  regularen ciklični krov bodisi kubičnega simetričnega tetracirkulanta brez jedra ali pa polnega grafa F004A, ki je kubični simetrični graf na štirih točkah, ni pa tetracirkulant. Ta zadnja izjema nastopi v primeru, ko je jedro  $N$  ciklične podgrupe  $\langle \rho \rangle$  v grupi avtomorfizmov grafa  $\Gamma$  s  $(4, n)$ -polregularnim avtomorfizmom  $\rho$  kar enako ciklični podgrupi  $\langle \rho \rangle$ . Avtomorfizem  $\bar{\rho}$  kvocientnega grafa  $\Gamma_N$ , ki je izomorfen grafu F004A, pa je v tem primeru identiteta, zato ta kvocientni graf ni tetracirkulant. V primeru kubičnih simetričnih pentacirkulantov, na katere se nanaša trditev 3.0.9, take izjeme nimamo, saj kubični graf na petih točkah ne obstaja.

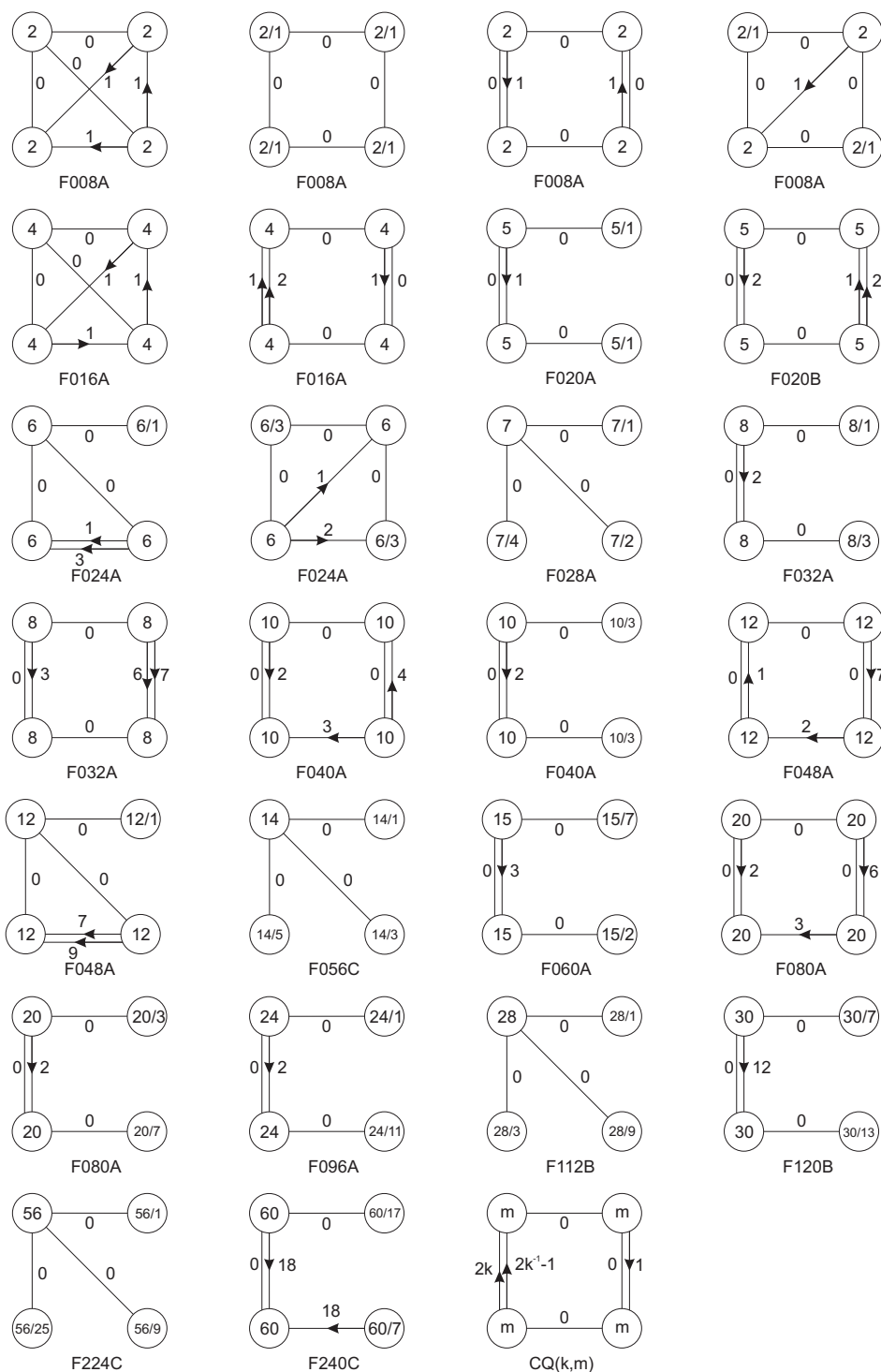
### 3.1 Kubični simetrični tetracirkulanti

V podrazdelku 3.1.1 je narejena klasifikacija povezanih kubičnih simetričnih tetracirkulantov brez jedra, v podrazdelku 3.1.2 pa je podan seznam vseh povezanih kubičnih simetričnih tetracirkulantov z jedrom, ki ga dobimo z obravnavanjem cikličnih regularnih krovov polnega grafa F004A in cikličnih regularnih krovov vseh povezanih kubičnih simetričnih tetracirkulantov brez jedra. Rezultati teh dveh podrazdelkov so osnova za dokaz izreka 3.0.5 v podrazdelku 3.1.3. Vsi grafi, ki se pojavijo v izreku 3.0.5 so na sliki 3.1 podani v Fruchtovi notaciji, katere definicija je navedena v podrazdelku 2.2.3.

#### 3.1.1 Kubični simetrični tetracirkulanti brez jedra

Dokaz prve leme v tem podrazdelku med drugim temelji na seznamu vseh povezanih kubičnih simetričnih grafov do reda 768 (glej [8]) in uporabi programskega paketa MAGMA [4].

**Lema 3.1.1** Graf  $\Gamma \in \cup_{n \geq 2} \mathcal{C}(4, n)$  je brez jedra natanko tedaj, ko je izomorfen enemu od naslednjih grafov: F008A, F020A, F020B, F024A, F028A, F032A ali F040A.



Slika 3.1: Kubični simetrični tetracirkulanti v Fruchtovi notaciji glede na  $(4, n)$ -polregularen avtomorfizem. Grafi so podani glede na predstavnike  $(4, n)$ -polregularnih avtomorfizmov, ki generirajo nekonjugirane podgrupe. Graf  $F024A = CQ(1, 3)$  ima tri razrede konjugiranosti cikličnih podgrup generiranih s  $(4, 6)$ -polregularnim avtomorfizmom. Podgrupe v enem od njih so brez jedra, podgrupe v ostalih dveh razredih pa vsebujejo jedro. Kvocientni graf glede na jedro v eni od teh podgrup je kocka  $F008A$ .

DOKAZ. Naj bo  $\Gamma$  povezan kubičen  $s$ -ločno tranzitiven tetracirkulant brez jedra reda  $o = 4n$ . Iz [3, Proposition 18.1] sledi, da je grupa avtomorfizmov  $\text{Aut}(\Gamma)$  regularna na množici  $s$ -lokov grafa  $\Gamma$ . Po Tutteovem izreku (glej [3, Theorem 18.6]) je  $s \leq 5$ . Od tod sledi, da je  $|\text{Aut}(\Gamma)| = 3 \cdot 2^{s-1} \cdot 4n = 12 \cdot 2^{s-1} \cdot n \leq 192n$ . Ker je graf  $\Gamma$  brez jedra, obstaja tak  $(4, n)$ -polregularen avtomorfizem  $\rho \in \text{Aut}(\Gamma)$ , da ima ciklična podgrupa  $\langle \rho \rangle$  trivialno jedro v grupi avtomorfizmov  $\text{Aut}(\Gamma)$ . Po trditvi 3.0.7 dobimo, da je  $n^2 < |\text{Aut}(\Gamma)|$  oziroma, da je  $n < 192$ . Za posamezne vrednosti  $s \leq 5$  dobimo naslednje rezultate.

Če je  $s = 1$ , potem je  $n^2 < |\text{Aut}(\Gamma)| = 12n$ . Od tod sledi, da je  $n < 12$  in  $o = 4n < 48$ . S pomočjo seznama vseh povezanih kubičnih simetričnih grafov do reda 768 (glej [8]), ki ga bomo uporabili tudi za ostale primere, ugotovimo, da ni nobenega povezanega kubičnega 1-regularnega grafa, katerega red je deljiv s 4 in je manjši od 48.

Če je  $s = 2$ , potem je  $n^2 < |\text{Aut}(\Gamma)| = 24n$ . Od tod sledi, da je  $n < 24$  in  $o = 4n < 96$ . Edini povezani kubični 2-regularni grafi, katerih red je deljiv s 4 in manjši od 96, so F004A, F008A, F016A, F020A, F024A, F032A, F048A, F056B, F060A, F064A, F072A in F084A. Preverimo lahko, da grafi F004A, F056B, F064A, F072A in F084A niso tetracirkulanti, grafi F016A, F048A in F060A pa niso brez jedra.

Če je  $s = 3$ , potem je  $n^2 < |\text{Aut}(\Gamma)| = 48n$ . Od tod sledi, da je  $n < 48$  in  $o = 4n < 192$ . Edini povezani kubični 3-regularni grafi, ki zadoščajo temu pogoju, so F020B, F028A, F040A, F056C, F080A, F096B in F112B. Vendar grafi F056C, F080A in F112B niso brez jedra, graf F096B pa ni tetracirkulant.

Če je  $s = 4$ , potem je  $n^2 < |\text{Aut}(\Gamma)| = 96n$ . Od tod sledi, da je  $n < 96$  in  $o = 4n < 384$ . Edini povezan kubičen 4-regularen graf, ki zadošča temu pogoju, je graf F204A, ki pa ni tetracirkulant.

Če je  $s = 5$ , potem je  $n^2 < |\text{Aut}(\Gamma)| = 192n$ . Od tod sledi, da je  $n < 192$  in  $o = 4n < 768$ . Edini povezan kubičen 5-regularen graf, ki zadošča temu pogoju, je graf F468A, ki pa ni tetracirkulant.

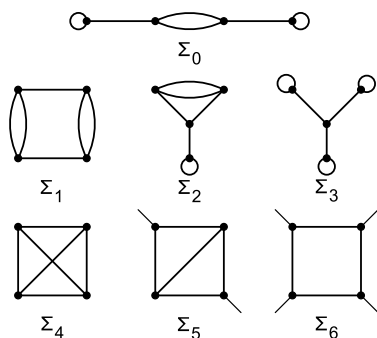
$X$	F008A				F020A	F020B	F024A			F028A	F032A		F040A	
$ V(X) $	8				20	20	24			28	32		40	
ožina( $X$ )	4				5	6	6			7	6		8	
dvodelen	da				ne	da	da			ne	da		da	
$n$	2				5	5	6			7	8		10	
$\mu$	4				1	1	3			1	2		2	
kvocientni multigraf	$\Sigma_1$	$\Sigma_5$	$\Sigma_6$	$\Sigma_4^*$	$\Sigma_0$	$\Sigma_1$	$\Sigma_2$	$\Sigma_1^*$	$\Sigma_5^*$	$\Sigma_3$	$\Sigma_0$	$\Sigma_1$	$\Sigma_0$	$\Sigma_1^*$

Tabela 3.1: Seznam vseh povezanih kubičnih simetričnih tetracirkulantov brez jedra, kjer je  $\mu$  število razredov konjugiranosti ciklične podgrupe, ki je generirana s  $(4, n)$ -polregularnim avtomorfizmom  $\rho$ ,  $\Sigma_i$  pa je oznaka pripadajočega kvocientnega multigrafa, ki ga najdemo na sliki 3.2. Za podgrupo, ki je generirana s  $(4, n)$ -polregularnim avtomorfizmom  $\rho$  in ima jedro, je kvocientni multigraf posebej označen z  $*$ .

Iz zgornjih rezultatov nam tako ostanejo samo še naslednji povezani kubični simetrični grafi: F008A, F020A, F020B, F024A, F028A, F032A in F040A. S pomočjo

programskega paketa MAGMA [4] lahko na enostaven način preverimo, da so vsi ti grafi tetracirkulanti brez jedra. ■

Nekatere lastnosti grafov brez jedra iz množice  $\cup_{n \geq 2} \mathcal{C}(4, n)$  so navedene v tabeli 3.1.



Slika 3.2: Multigrfi, ki se lahko pojavijo kot kvocientni multigrfi povezanih kubičnih simetričnih tetracirkulantov glede na  $(4, n)$ -polregularen avtomorfizem  $\rho$ .

### 3.1.2 Kubični simetrični tetracirkulanti z jedrom

V tabeli 3.2 so navedeni primeri povezanih kubičnih simetričnih tetracirkulantov z jedrom in nekatere njihove lastnosti, ki jih lahko preverimo s pomočjo programskega paketa MAGMA [4]. Če združimo rezultate, ki so zbrani v lemah 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6, 3.1.7, 3.1.8 in 3.1.9, ugotovimo, da je seznam takih grafov v tabeli popoln. To pomeni, da je vsak povezan kubičen simetričen tetracirkulant z jedrom izomorfen enemu od grafov, ki so navedeni v tabeli 3.2.

V tem podrazdelku je  $\Gamma \in \mathcal{C}(4, n)$  povezan kubičen simetričen tetracirkulant z jedrom, katerega grupa avtomorfizmov vsebuje tak  $(4, n)$ -polregularen avtomorfizem  $\rho$ , da je

$$N = \text{core}_{\text{Aut}(\Gamma)}(\langle \rho \rangle) \neq \langle 1 \rangle, \quad |N| = r.$$

Po trditvi 3.0.8 je graf  $\Gamma$  bodisi regularen  $\mathbb{Z}_r$ -krov polnega grafa F004A (v tem primeru je avtomorfizem  $\bar{\rho}$  identiteta), ali pa je graf  $\Gamma$  regularen  $\mathbb{Z}_r$ -krov enega od sedmih povezanih kubičnih simetričnih tetracirkulantov brez jedra, ki so navedeni v lemi 3.1.1 (v tem primeru je  $\bar{\rho}$   $(4, n/|N|)$ -polregularen avtomorfizem grafa  $\Gamma_N$ ). Torej moramo obravnavati osem različnih primerov. Rezultati so zbrani v lemah 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6, 3.1.7, 3.1.8 in 3.1.9.

**Lema 3.1.2** Če je  $\Gamma_N \cong \text{F004A}$ , potem je  $\Gamma \cong \text{F016A}$ .

**DOKAZ.** Po [11, Theorem 6.1] je netrivialen simetričen regularen ciklični krov polnega grafa F004A izomorfen bodisi kocki F008A ali pa Möbius-Kantorjevemu grafu

F016A. Ker je kocka F008A po lemi 3.1.1 brez jedra, Möbius-Kantorjev graf F016A pa je kubičen simetričen tetracirkulant, ki je naveden v tabeli 3.2, je lema s tem dokazana. ■

Definicija družine grafov z oznako  $CQ(k, m)$ , ki nastopajo v naslednji lemi, je navedena v razdelku 2.2.

**Lema 3.1.3** Če je  $\Gamma_N \cong F008A$ , potem je

- (i)  $\Gamma \cong CQ(k, m)$  za taki števili  $k, m, 2 \leq k \leq m - 3$ , da  $m | (k^2 + k + 1)$  ali
- (ii)  $\Gamma \cong CQ(2k - 1, 2m)$  za taki števili  $k, m, 2 \leq k \leq m - 1$ , da  $m | (4k^2 - 2k + 1)$  ali
- (iii)  $\Gamma \cong CQ(1, 2) \cong F016A$  ali
- (iv)  $\Gamma \cong CQ(1, 6) \cong F048A$ .

DOKAZ. Po [10, Theorem 1.1] je graf  $\Gamma$  izomorfen enemu izmed grafov, ki so navedeni v lemi, ki jo dokazujemo, ali pa Nauruovemu grafu  $CQ(1, 3) \cong F024A$ , ki je po lemi 3.1.1 brez jedra. Torej moramo pokazati le, da so grafi navedeni v lemi, ki jo dokazujemo, tetracirkulanti.

Naj bo

$$\begin{aligned} \alpha = & ((a, 0), (b, 0), (a, 1), (b, 1) \dots (a, m - 1), (b, m - 1)) \\ & ((d, 0), (c, 0), (d, 1), (c, 1) \dots (d, m - 1), (c, m - 1)) \\ & ((x, 0), (w, 0), (x, 1), (w, 1) \dots (x, m - 1), (w, m - 1)) \\ & ((y, 0), (z, 0), (y, 1), (z, 1) \dots (y, m - 1), (z, m - 1)) \end{aligned}$$

permutacija množice točk  $V(CQ(k, m))$ . Potem veljajo naslednje enakosti:

$$\begin{aligned} ((a, i)(x, i))^\alpha &= (b, i)(w, i), \\ ((a, i)(y, i))^\alpha &= (b, i)(z, i), \\ ((a, i)(z, i))^\alpha &= (b, i)(y, i + 1), \\ ((b, i)(w, i))^\alpha &= (a, i + 1)(x, i + 1), \\ ((b, i)(z, i))^\alpha &= (a, i + 1)(y, i + 1), \\ ((c, i)(z, i))^\alpha &= (d, i + 1)(y, i + 1), \\ ((d, i)(y, i))^\alpha &= (c, i)(z, i), \\ ((b, i)(y, i + 1))^\alpha &= (a, i + 1)(z, i + 1), \\ ((c, i)(w, i + k))^\alpha &= (d, i + 1)(x, i + k + 1) = (d, i + 1)(x, i + 1 + k), \\ ((c, i)(x, i - k^{-1}))^\alpha &= (d, i + 1)(w, i - k^{-1}) = (d, i + 1)(w, i + 1 - k^{-1} - 1), \\ ((d, i)(w, i - k^{-1} - 1))^\alpha &= (c, i)(x, i - k^{-1} - 1 + 1) = (c, i)(x, i - k^{-1}), \\ ((d, i)(x, i + k))^\alpha &= (c, i)(w, i + k). \end{aligned}$$

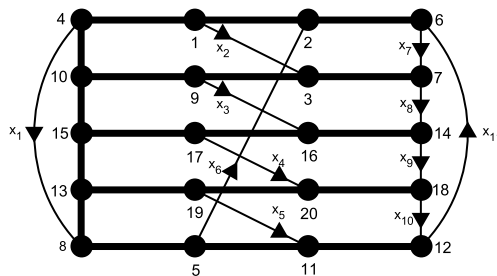
Torej preslikava  $\alpha$  slika množico povezav  $E(CQ(k, m))$  bijektivno samo vase. Sledi, da je  $\alpha \in \text{Aut}(CQ(k, m))$ , zato je graf  $CQ(k, m)$  tetracirkulant. ■

$X$	F008A				F016A		F040A		F048A	
$ V(X) $	8				16		40		48	
ožina( $X$ )	4				6		8		8	
dvodelen	da				da		da		da	
$n$	2				4		10		12	
$\mu$	4				2					
kvocientni multigraf	$\Sigma_1$	$\Sigma_5$	$\Sigma_6$	$\Sigma_4$	$\Sigma_4$	$\Sigma_1$	$\Sigma_0$	$\Sigma_1$	$\Sigma_1$	$\Sigma_2$
$ N $	1	1	1	2	4	2	1	2	6	2
$X_N$	F008A	F008A	F008A	F004A	F004A	F008A	F040A	F020B	F008A	F024A
$X$	F056C	F060A	F080A		F096A	F112B	F120B	F224C	F240C	$CQ(k, m)$
$ V(X) $	56	60	80		96	112	120	224	240	$8m$
ožina( $X$ )	8	9	10		6	8	10	12	10	–
dvodelen	da	ne	da		da	da	da	da	da	da
$n$	14	15	20		24	28	30	56	60	$2m$
$\mu$	1	1	2		1	1	1	1	1	–
kvocientni multigraf	$\Sigma_3$	$\Sigma_0$	$\Sigma_1$	$\Sigma_0$	$\Sigma_0$	$\Sigma_3$	$\Sigma_0$	$\Sigma_3$	$\Sigma_0$	–
$ N $	2	3	4	2	3	4	6	8	12	–
$X_N$	F028A	F020A	F020B	F040A	F032A	F028A	F020A	F028A	F020A	F008A

Tabela 3.2: Seznam vseh povezanih kubičnih simetričnih tetracirkulantov z jedrom ter grafov F008A, F024A  $\cong CQ(1, 3)$  in F040A, kjer je  $\mu$  število razredov konjugiranosti ciklične podgrupe, ki je generirana s  $(4, n)$ -polregularnim avtomorfizmom  $\rho \in \text{Aut}(\Gamma)$  in je  $N = \text{core}_{\text{Aut}(\Gamma)}(\langle \rho \rangle)$ . Grafi  $CQ(k, m)$  so definirani v razdelku 2.2. Vsak graf  $CQ(k, m)$  je tetracirkulant, ni pa vsak graf  $CQ(k, m)$  simetričen (glej dokaz leme 3.1.3).

**Lema 3.1.4** Če je  $\Gamma_N \cong F020A$ , potem je graf  $\Gamma$  izomorfen enemu izmed grafov F060A, F120B ali F240C.

DOKAZ. Graf F020A je poznan kot graf dodekaedra in je prikazan na sliki 3.3. Znano je, da je ta graf 2-regularen in da ima ožino 5 (glej [8]).



Slika 3.3: Dodelitev napetosti  $\zeta$  grafu F020A. Vpeto drevo vsebuje neusmerjene odebeljene povezave, ki imajo trivialne napetosti.

Izberimo naslednje avtomorfizme grafa F020A

$$\begin{aligned}
 \alpha &= (1, 9, 17, 19, 5)(2, 3, 16, 20, 11)(4, 10, 15, 13, 8)(6, 7, 14, 18, 12), \\
 \beta &= (1, 12, 16)(2, 18, 9)(3, 6, 14)(4, 11, 17)(5, 20, 10)(8, 19, 15)(7)(13), \\
 \gamma &= (3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10)(11, 12)(13, 14)(15, 16)(18, 19)(1)(2)(17)(20).
 \end{aligned}$$

Potem je grupa avtomorfizmov  $\text{Aut}(F020A) = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ . Naj bo  $H = \langle \alpha, \beta \rangle$  grupa generirana z avtomorfizmoma  $\alpha$  in  $\beta$ . Fruchtova notacija grafa F020A glede na



(4, 5)-polregularen avtomorfizem  $\alpha$  je prikazana na sliki 3.1. S programskim paketom MAGMA [4] lahko preverimo, da je vsak (4, 5)-polregularen avtomorfizem grafa F020A konjugiran avtomorfizmu  $\alpha$ . Prav tako lahko preverimo, da vsaka ločno tranzitivna podgrupa grupe avtomorfizmov  $\text{Aut}(F020A)$ , ki vsebuje avtomorfizem  $\alpha$ , vsebuje tudi podgrupo  $H$ . Po trditvi 2.2.4 lahko zato, brez škode za splošnost, predpostavimo, da se avtomorfizem  $\rho$  grafa  $\Gamma$  projecira na avtomorfizem  $\alpha$  (to pomeni, da avtomorfizem  $\alpha$  centralizira grupo krovnih transformacij  $N$ ) in da se podgrupa  $H$  dvigne v podgrupo grupe avtomorfizmov  $\text{Aut}(\Gamma)$ .

Vsak tak krov  $\Gamma$  lahko dobimo iz grafa F020A z ustrezno  $T$ -reducirano dodelitvijo napetosti  $\zeta : A(F020A) \rightarrow \mathbb{Z}_r$ , kjer je  $T$  vpeto drevo grafa F020A, ki vsebuje povezave

$\{2, 6\}, \{3, 7\}, \{14, 16\}, \{18, 20\}, \{11, 12\}, \{1, 2\}, \{3, 9\}, \{16, 17\}, \{19, 20\}, \{5, 11\},$   
 $\{1, 4\}, \{9, 10\}, \{15, 17\}, \{13, 19\}, \{5, 8\}, \{4, 10\}, \{10, 15\}, \{13, 15\}, \{8, 13\}$   
 (glej tudi sliko 3.3).

V grafu F020A je 11 fundamentalnih ciklov, ki so generirani z naslednjimi enajstim loki, ki ne pripadajo vpetemu drevesu  $T$ : (4, 8), (1, 3), (9, 16), (17, 20), (19, 11), (5, 2), (6, 7), (7, 14), (14, 18), (18, 12) in (12, 6) (glej tabelo 3.3, kjer so navedeni vsi ti cikli in njihove napetosti).

Obravnavajmo sedaj preslikavi  $\bar{\alpha}, \bar{\beta} : S = \{x_i \mid i \in \{1, 2, \dots, 11\}\} \rightarrow \mathbb{Z}_r$ . Ker je graf  $\Gamma$  povezan, je  $\mathbb{Z}_r = \langle S \rangle$ . Po trditvi 2.2.1 lahko preslikavi  $\bar{\alpha}$  in  $\bar{\beta}$  razširimo do avtomorfizmov  $\alpha^*$  in  $\beta^*$  grupe  $\mathbb{Z}_r$ . Ker dvig avtomorfizma  $\alpha$  centralizira grupo krovnih transformacij, po trditvi 2.2.3 velja, da je  $\alpha^* = \text{id} \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_r)$ .

Sedaj lahko uporabimo informacije iz tabele 3.3. Iz vrstic A.2, A.3 in A.4 dobimo, da je  $x_2 = x_3 = x_4 = x_5$ . Iz vrstic A.7, A.8 in A.9 dobimo, da je  $x_7 = x_8 = x_9 = x_{10}$ . Iz vrstice A.6 dobimo, da je  $x_6 = x_2 - x_1$ , iz vrstice A.11 pa, da je  $x_{11} = x_7 - x_1$ . Sledi, da je  $\mathbb{Z}_r = \langle x_1, x_2, x_7 \rangle$ . Ker je  $x_4 = x_2$ , iz vrstice B.4 sledi, da sta elementa  $x_1$  in  $x_2$  istega reda, torej je  $\mathbb{Z}_r = \langle x_2, x_7 \rangle$ . Iz vrstic B.2 in B.3 dobimo, da je  $x_2^{\beta^*} = -x_6 + x_{11} = -x_2 + x_7$  in  $x_3^{\beta^*} = x_1 + x_6 = x_2$ . Ker je  $x_2 = x_3$ , sledi, da je  $x_7 = 2x_2$ , zato je  $\mathbb{Z}_r = \langle x_2 \rangle$ .

Po trditvi 2.2.2 lahko, brez škode za splošnost, predpostavimo, da je  $x_2 = 1$ . Ker je  $x_4 = x_5$ , iz vrstic B.4 in B.5 dobimo, da je  $x_1 = -x_2$ . Iz vrstic A.6 in A.11 sledi, da je  $x_6 = 2x_2$  in  $x_{11} = 3x_2$ . Ker je  $x_7 = x_8$ , iz vrstic B.7 in B.8 sledi, da je  $12x_2 = 0$ . Ker je  $x_2 = 1$ , dobimo, da je  $r \in \{2, 3, 4, 6, 12\}$ . Sedaj obravnavamo vsako od možnosti za število  $r$ .

Če je  $r = 2$ , potem je graf  $\Gamma$   $\mathbb{Z}_2$ -krov grafa F020A in je zato reda 40. Obstaja le en povezan kubičen simetričen graf reda 40, to je graf F040A. Toda grupa avtomorfizmov tega grafa ne vsebuje podgrupe generirane s (4, 10)-polregularnim avtomorfizmom, ki bi vsebovala tako jedro  $N$  reda 2, da bi bil kvocientni graf  $\Gamma_N$  izomorfen grafu F020A (glej tabelo 3.2).

Če je  $r = 3$ , potem je graf  $\Gamma$   $\mathbb{Z}_3$ -krov grafa F020A in je zato reda 60. Graf F060A je edini povezan kubičen simetričen graf reda 60, ki je dejansko iskani krov grafa F020A (glej tabelo 3.2).

Če je  $r = 4$ , potem je graf  $\Gamma$  reda 80. Graf F080A je edini povezan kubičen simetričen graf reda 80. S programskim paketom MAGMA lahko preverimo, da grupa

avtomorfizmov tega grafa ne vsebuje podgrupe, generirane s  $(4, 20)$ -polregularnim avtomorfizmom, ki bi vsebovala tako jedro  $N$  reda 4, da bi bil kvocientni graf  $\Gamma_N$  izomorfen grafu F020A (glej tabelo 3.2).

Vrstica		$C$	$\zeta(C)$	$C^\alpha$	$\zeta(C^\alpha)$
A.1	$C_1$	4, 8, 13, 15, 10, 4	$x_1$	10, 4, 8, 13, 15, 10	$x_1$
A.2	$C_2$	1, 3, 9, 10, 4, 1	$x_2$	9, 16, 17, 15, 10, 9	$x_3$
A.3	$C_3$	9, 16, 17, 15, 10, 9	$x_3$	17, 20, 19, 13, 15, 17	$x_4$
A.4	$C_4$	17, 20, 19, 13, 15, 17	$x_4$	19, 11, 5, 8, 13, 19	$x_5$
A.5	$C_5$	19, 11, 5, 8, 13, 19	$x_5$	5, 2, 1, 4, 8, 5	$x_6 + x_1$
A.6	$C_6$	5, 2, 1, 4, 10, 15, 13, 8, 5	$x_6$	1, 3, 9, 10, 15, 13, 8, 4, 1	$x_2 - x_1$
A.7	$C_7$	6, 7, 3, 9, 10, 4, 1, 2, 6	$x_7$	7, 14, 16, 17, 15, 10, 9, 3, 7	$x_8$
A.8	$C_8$	7, 14, 16, 17, 15, 10, 9, 3, 7	$x_8$	14, 18, 20, 19, 13, 15, 17, 16, 14	$x_9$
A.9	$C_9$	14, 18, 20, 19, 13, 15, 17, 16, 14	$x_9$	18, 12, 11, 5, 8, 13, 19, 20, 18	$x_{10}$
A.10	$C_{10}$	18, 12, 11, 5, 8, 13, 19, 20, 18	$x_{10}$	12, 6, 2, 1, 4, 8, 5, 11, 12	$x_{11} + x_1$
A.11	$C_{11}$	12, 6, 2, 1, 4, 10, 15, 13, 8, 5, 11, 12	$x_{11}$	6, 7, 3, 9, 10, 15, 13, 8, 4, 1, 2, 6	$x_7 - x_1$
		$C$	$\zeta(C)$	$C^\beta$	$\zeta(C^\beta)$
B.1	$C_1$	4, 8, 13, 15, 10, 4	$x_1$	11, 19, 13, 8, 5, 11	$-x_5$
B.2	$C_2$	1, 3, 9, 10, 4, 1	$x_2$	12, 6, 2, 5, 11, 12	$x_{11} - x_6$
B.3	$C_3$	9, 16, 17, 15, 10, 9	$x_3$	2, 1, 4, 8, 5, 2	$x_1 + x_6$
B.4	$C_4$	17, 20, 19, 13, 15, 17	$x_4$	4, 10, 15, 13, 8, 4	$-x_1$
B.5	$C_5$	19, 11, 5, 8, 13, 19	$x_5$	15, 17, 20, 19, 13, 15	$x_4$
B.6	$C_6$	5, 2, 1, 4, 10, 15, 13, 8, 5	$x_6$	20, 18, 12, 11, 5, 8, 13, 19, 20	$x_{10}$
B.7	$C_7$	6, 7, 3, 9, 10, 4, 1, 2, 6	$x_7$	14, 7, 6, 2, 5, 11, 12, 18, 14	$-x_8 - x_7 - x_6$ $-x_{10} - x_9$
B.8	$C_8$	7, 14, 16, 17, 15, 10, 9, 3, 7	$x_8$	7, 3, 1, 4, 8, 5, 2, 6, 7	$-x_2 + x_1 + x_6 + x_7$
B.9	$C_9$	14, 18, 20, 19, 13, 15, 17, 16, 14	$x_9$	3, 9, 10, 15, 13, 8, 4, 1, 3	$-x_1 + x_2$
B.10	$C_{10}$	18, 12, 11, 5, 8, 13, 19, 20, 18	$x_{10}$	9, 16, 17, 20, 19, 13, 15, 10, 9	$x_3 + x_4$
B.11	$C_{11}$	12, 6, 2, 1, 4, 10, 15, 13, 8, 5, 11, 12	$x_{11}$	16, 14, 18, 12, 11, 5, 8, 13, 19, 20, 17, 16	$x_9 + x_{10} - x_4$

Tabela 3.3: Fundamentalni cikli in njihove slike z ustreznimi napetostmi v grafu dodekaedra F020A.

Če je  $r = 6$ , potem je graf  $\Gamma$  reda 120. Graf F120B je edini povezan kubičen simetričen tetracirkulant reda 120, ki je dejansko naš iskani krov grafa F020A (glej tabelo 3.2).

Če je  $r = 12$ , potem je graf  $X$  reda 240. Graf F240C je edini povezan kubičen simetričen tetracirkulant reda 240, ki je dejansko naš iskani krov grafa F020A (glej tabelo 3.2).

Iz dobljenih rezultatov sledi, da je graf  $\Gamma$  izomorfen enemu izmed grafov F060A, F120B ali F240C. ■

**Lema 3.1.5** Če je  $\Gamma_N \cong \text{F020B}$ , potem je  $\Gamma \cong \text{F080A}$ .

**DOKAZ.** Graf F020B je tako imenovani  $I$ -graf (glej [33]), znan tudi pod imenom Desarguesov graf in je prikazan na sliki 3.4. Znano je, da je ta graf 3-regularen in da ima ožino 6 (glej [8]). Izberimo naslednje avtomorfizme grafa F020B

$$\alpha = (1, 18, 7, 5, 19)(2, 20, 3, 13, 16)(4, 14, 12, 11, 15)(6, 17, 8, 10, 9),$$

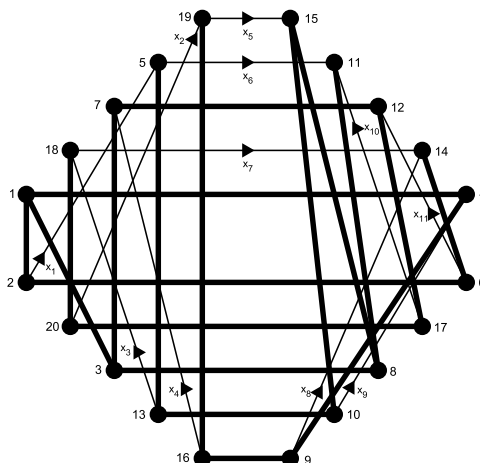
$$\begin{aligned}\beta &= (1, 13)(2, 10)(3, 18)(4, 5)(6, 15)(7, 20)(8, 14)(9, 11)(12, 19)(16, 17), \\ \gamma &= (1, 4)(2, 10)(3, 9)(5, 13)(6, 15)(7, 16)(8, 14)(11, 18)(12, 19)(17, 20).\end{aligned}$$

Potem je grupa avtomorfizmov  $\text{Aut}(F020B) = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ . S programskim paketom MAGMA [4] lahko preverimo, da je vsaka podgrupa grupe avtomorfizmov  $\text{Aut}(F020B)$ , ki je generirana s  $(4, 5)$ -polregularnim avtomorfizmom, konjugirana ciklični podgrupi  $\langle \alpha \rangle$ , vsaka prava ločno tranzitivna podgrupa grupe  $\text{Aut}(F020B)$  pa je v tej grupi konjugirana bodisi 2-regularni podgrupi  $H_1 = \langle \alpha, \beta \rangle$  ali pa 2-regularni podgrupi  $H_2 = \langle \alpha, \gamma \rangle$ .

To pomeni, da moramo obravnavati vse take ločno tranzitivne ciklične krove grafa F020B, da dvigi avtomorfizma  $\alpha$  centralizirajo grupo krovnih transformacij in imajo natanko 4 orbite dolžine  $n$  na teh krovnih grafih.

Graf  $\Gamma$  lahko dobimo iz grafa F020B z ustrezno  $T$ -reducirano dodelitvijo napetosti  $\zeta: A(F020B) \rightarrow \mathbb{Z}_r$ , kjer je  $T$  vpeto drevo grafa F020B, ki vsebuje povezave

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 9\}, \{5, 13\}, \{6, 14\}, \{7, 12\}, \{8, 11\}, \{8, 15\}, \{9, 16\}, \{10, 15\}, \{10, 13\}, \{12, 17\}, \{16, 19\}, \{17, 20\}, \{18, 20\}$  (glej tudi sliko 3.4).



Slika 3.4: Dodelitev napetosti  $\zeta$  Desarguesovemu grafu F020B. Vpeto drevo vsebuje neusmerjene odebeljene povezave, ki imajo trivialne napetosti.

V grafu F020B je 11 fundamentalnih ciklov, ki so generirani z naslednjimi enajstimi loki, ki ne pripadajo vpetemu drevesu  $T$ :  $(2, 5)$ ,  $(20, 19)$ ,  $(13, 18)$ ,  $(16, 7)$ ,  $(19, 15)$ ,  $(5, 11)$ ,  $(18, 14)$ ,  $(9, 14)$ ,  $(10, 4)$ ,  $(17, 11)$  in  $(6, 12)$ .

Obravnavajmo preslikave  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  in  $\bar{\gamma}$  iz množice  $S = \{x_i \mid i \in \{1, 2, \dots, 11\}\}$ , ki je množica napetosti enajstih fundamentalnih ciklov grafa F020B, v napetostno grupo  $\mathbb{Z}_r$  (glej tabelo 3.4, kjer so navedeni vsi ti cikli in njihove napetosti glede na avtomorfizme  $\alpha$ ,  $\beta$  in  $\gamma$ ). Po trditvi 2.2.1 lahko preslikavo  $\bar{\alpha}$  razširimo do avtomorfizma  $\alpha^* \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_r)$ . Ker dvig avtomorfizma  $\alpha$  centralizira grupo krovnih transformacij, po trditvi 2.2.3 velja, da je  $\alpha^* = \text{id} \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_r)$ .

Vrstica		$C$	$\zeta(C)$	$C^\alpha$	$\zeta(C^\alpha)$
A.1	$C_1$	2, 5, 13, 10, 15, 8, 3, 1, 2	$x_1$	20, 19, 16, 9, 4, 10, 13, 18, 20	$x_2 - x_9 + x_3$
A.2	$C_2$	20, 19, 16, 9, 4, 1, 3, 7, 12, 17, 20	$x_2$	3, 1, 2, 6, 14, 18, 13, 5, 11, 8, 3	$-x_7 - x_3 + x_6$
A.3	$C_3$	13, 18, 20, 17, 12, 7, 3, 8, 15, 10, 13	$x_3$	16, 7, 3, 8, 11, 5, 13, 10, 4, 9, 16	$x_4 - x_6 + x_9$
A.4	$C_4$	16, 7, 3, 1, 4, 9, 16	$x_4$	2, 5, 13, 18, 14, 6, 2	$x_1 + x_3 + x_7$
A.5	$C_5$	19, 15, 8, 3, 1, 4, 9, 16, 19	$x_5$	1, 4, 10, 13, 18, 14, 6, 2, 1	$-x_9 + x_3 + x_7$
A.6	$C_6$	5, 11, 8, 15, 10, 13, 5	$x_6$	19, 15, 10, 4, 9, 16, 19	$x_5 + x_9$
A.7	$C_7$	18, 14, 6, 2, 1, 3, 7, 12, 17, 20, 18	$x_7$	7, 12, 17, 20, 18, 13, 5, 11, 8, 3, 7	$-x_3 + x_6$
A.8	$C_8$	9, 14, 6, 2, 1, 4, 9	$x_8$	6, 12, 17, 20, 18, 14, 6	$x_{11} + x_7$
A.9	$C_9$	10, 4, 1, 3, 8, 15, 10	$x_9$	9, 14, 18, 13, 10, 4, 9	$x_8 - x_7 - x_3 + x_9$
A.10	$C_{10}$	17, 11, 8, 3, 7, 12, 17	$x_{10}$	8, 15, 10, 13, 5, 11, 8	$x_6$
A.11	$C_{11}$	6, 12, 7, 3, 1, 2, 6	$x_{11}$	17, 11, 5, 13, 18, 20, 17	$x_{10} - x_6 + x_3$
		$C$	$\zeta(C)$	$C^\beta$	$\zeta(C^\beta)$
B.1	$C_1$	2, 5, 13, 10, 15, 8, 3, 1, 2	$x_1$	10, 4, 1, 2, 6, 14, 18, 13, 10	$x_9 - x_7 - x_3$
B.2	$C_2$	20, 19, 16, 9, 4, 1, 3, 7, 12, 17, 20	$x_2$	7, 12, 17, 11, 5, 13, 18, 20, 19, 16, 7	$x_{10} - x_6 + x_3 + x_2 + x_4$
B.3	$C_3$	13, 18, 20, 17, 12, 7, 3, 8, 15, 10, 13	$x_3$	1, 3, 7, 16, 19, 20, 18, 14, 6, 2, 1	$-x_4 - x_2 + x_7$
B.4	$C_4$	16, 7, 3, 1, 4, 9, 16	$x_4$	17, 20, 18, 13, 5, 11, 17	$-x_3 + x_6 - x_{10}$
B.5	$C_5$	19, 15, 8, 3, 1, 4, 9, 16, 19	$x_5$	12, 6, 14, 18, 13, 5, 11, 17, 12	$-x_{11} - x_7 - x_3$ $+x_6 - x_{10}$
B.6	$C_6$	5, 11, 8, 15, 10, 13, 5	$x_6$	4, 9, 14, 6, 2, 1, 4	$x_8$
B.7	$C_7$	18, 14, 6, 2, 1, 3, 7, 12, 17, 20, 18	$x_7$	3, 8, 15, 10, 13, 18, 20, 19, 16, 7, 3	$x_3 + x_2 + x_4$
B.8	$C_8$	9, 14, 6, 2, 1, 4, 9	$x_8$	11, 8, 15, 10, 13, 5, 11	$x_6$
B.9	$C_9$	10, 4, 1, 3, 8, 15, 10	$x_9$	2, 5, 13, 18, 14, 6, 2	$x_1 + x_3 + x_7$
B.10	$C_{10}$	17, 11, 8, 3, 7, 12, 17	$x_{10}$	16, 9, 14, 18, 20, 19, 16	$x_8 - x_7 + x_2$
B.11	$C_{11}$	6, 12, 7, 3, 1, 2, 6	$x_{11}$	15, 19, 20, 18, 13, 10, 15	$-x_5 - x_2 - x_3$
		$C$	$\zeta(C)$	$C^\gamma$	$\zeta(C^\gamma)$
C.1	$C_1$	2, 5, 13, 10, 15, 8, 3, 1, 2	$x_1$	10, 13, 5, 2, 6, 14, 9, 4, 10	$-x_1 - x_8 - x_9$
C.2	$C_2$	20, 19, 16, 9, 4, 1, 3, 7, 12, 17, 20	$x_2$	17, 12, 7, 3, 1, 4, 9, 16, 19, 20, 17	$-x_2$
C.3	$C_3$	13, 18, 20, 17, 12, 7, 3, 8, 15, 10, 13	$x_3$	5, 11, 17, 20, 19, 16, 9, 14, 6, 2, 5	$x_6 - x_{10} + x_2$ $+x_8 + x_1$
C.4	$C_4$	16, 7, 3, 1, 4, 9, 16	$x_4$	7, 16, 9, 4, 1, 3, 7	$-x_4$
C.5	$C_5$	19, 15, 8, 3, 1, 4, 9, 16, 19	$x_5$	12, 6, 14, 9, 4, 1, 3, 7, 12	$-x_{11} - x_8$
C.6	$C_6$	5, 11, 8, 15, 10, 13, 5	$x_6$	13, 18, 14, 6, 2, 5, 13	$x_3 + x_7 + x_1$
C.7	$C_7$	18, 14, 6, 2, 1, 3, 7, 12, 17, 20, 18	$x_7$	11, 8, 15, 10, 4, 9, 16, 19, 20, 17, 11	$x_9 - x_2 + x_{10}$
C.8	$C_8$	9, 14, 6, 2, 1, 4, 9	$x_8$	3, 8, 15, 10, 4, 1, 3	$x_9$
C.9	$C_9$	10, 4, 1, 3, 8, 15, 10	$x_9$	2, 1, 4, 9, 14, 6, 2	$x_8$
C.10	$C_{10}$	17, 11, 8, 3, 7, 12, 17	$x_{10}$	20, 18, 14, 9, 16, 19, 20	$x_7 - x_8 - x_2$
C.11	$C_{11}$	6, 12, 7, 3, 1, 2, 6	$x_{11}$	15, 19, 16, 9, 4, 10, 15	$-x_5 - x_9$

Tabela 3.4: Fundamentalni cikli in njihove slike z ustreznimi napetostmi v Desarguesovemu grafu F020B glede na avtomorfizme  $\alpha$ ,  $\beta$  in  $\gamma$ .

Graf  $\Gamma$  je povezan, zato je  $\mathbb{Z}_r = \langle S \rangle$ . S pomočjo tabele 3.4 dobimo naslednje informacije. Iz vrstice A.10 dobimo, da je  $x_6 = x_{10}$ , zato iz vrstice A.11 sledi, da je  $x_{11} = x_3$ . Z uporabo te enakosti v vrsticah A.7 in A.8 dobimo, da je  $x_6 = x_8 = x_{10} = x_3 + x_7$ . Iz vrstice A.2 dobimo, da je  $x_2 = 0$ , iz vrstic A.1, A.5 in A.4 pa, da je  $x_1 = x_3 - x_9$ ,  $x_5 = x_3 + x_7 - x_9$  in  $x_4 = 2x_3 + x_7 - x_9$ . Iz teh rezultatov sledi, da je  $\mathbb{Z}_r = \langle x_3, x_7, x_9 \rangle$ .

Sedaj moramo obravnavati dva primera glede na to, katera od podgrup  $H_1$  oziroma  $H_2$  se dvigne.

PRIMER 1. Dvigne se podgrupa  $H_1$ .

Po trditvi 2.2.1 lahko preslikavo  $\bar{\beta}$  razširimo do avtomorfizma  $\beta^* \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_r)$ . Ker je  $x_2 = 0$  in  $x_6 = x_{10}$ , iz vrstice B.2 dobimo, da je  $x_2^{\beta^*} = x_2 + x_3 + x_4 - x_6 + x_{10} = 0$ , zato je  $x_4 = -x_3 = 2x_3 + x_7 - x_9$ . Sledi, da je  $x_9 = 3x_3 + x_7$  in  $\mathbb{Z}_r = \langle x_3, x_7 \rangle$ . Iz vrstic B.6 in B.10 dobimo, da je  $x_6^{\beta^*} = x_8$  in  $x_{10}^{\beta^*} = x_2 - x_7 + x_8$ . Ker je  $x_6 = x_{10}$  in  $x_2 = 0$ , sledi, da je  $x_7 = 0$  in je zato  $\mathbb{Z}_r = \langle x_3 \rangle$ .

Po trditvi 2.2.2 lahko, brez škode za splošnost, predpostavimo, da je  $x_3 = 1$ . Ker je  $x_9 = 3x_3$ , iz vrstic B.9 in B.3 sledi, da je  $x_1 + x_3 + x_7 = -3x_2 - 3x_4 + 3x_7$ , zato je  $x_3 = 3x_4$ . Ker velja tudi, da je  $x_4 = -x_3$ , dobimo, da je  $4x_3 = 0$  in je zato  $4 = 0$ . Sledi, da je  $r \in \{2, 4\}$ .

Če je  $r = 2$ , potem je graf  $\Gamma$  reda 40. Edini povezan kubičen simetričen graf reda 40 je graf F040A, ki pa je po lemi 3.1.1 brez jedra.

Če je  $r = 4$ , potem je graf  $\Gamma$  reda 80. Edini povezan kubičen simetričen graf reda 80 je graf F080A, ki je dejansko krov grafa F020B, ki ga iščemo (glej tabelo 3.2).

PRIMER 2. Dvigne se podgrupa  $H_2$ .

Po trditvi 2.2.1 lahko preslikavo  $\bar{\gamma}$  razširimo do avtomorfizma  $\gamma^* \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_r)$ . Ker je  $x_2 = 0$  in  $x_8 = x_3 + x_7$ , iz vrstice C.10 dobimo, da je  $x_{10}^{\gamma^*} = -x_2 + x_7 - x_8 = -x_3$ . Ker je  $x_8 = x_{10}$  in  $x_1 = x_3 - x_9$ , iz vrstic C.8 in C.10 dobimo, da je  $x_9 = -x_3$  in je zato  $\mathbb{Z}_r = \langle x_3, x_7 \rangle$ . Ker je  $x_6 = x_8$ , iz vrstic C.6 in C.8 dobimo, da je  $2x_3 + x_7 - x_9 = x_9$ . Sledi, da je  $x_7 = -4x_3$  in je zato  $\mathbb{Z}_r = \langle x_3 \rangle$ .

Po trditvi 2.2.2 lahko, brez škode za splošnost, predpostavimo, da je  $x_3 = 1$ . Ker je  $x_3 = x_{11}$ , iz vrstic C.3 in C.11 dobimo, da je  $2x_3 + x_7 - x_9 = -x_3 - x_7$ . Sledi, da je  $4x_3 = 0$  in je zato  $4 = 0$ , kar pomeni, da je  $r \in \{2, 4\}$ . Podobno kot v prvem primeru lahko sedaj pokažemo, da je graf  $\Gamma$  bodisi izomorfen grafu F040A, za katerega po lemi 3.1.1 že vemo, da je brez jedra, ali pa je izomorfen grafu F080A. V bistvu se cela grupa avtomorfizmov grafa F080A projecira na celo grupo avtomorfizmov grafa F020B, zato se obe podgrupi  $H_1$  in  $H_2$  dvigneta. ■

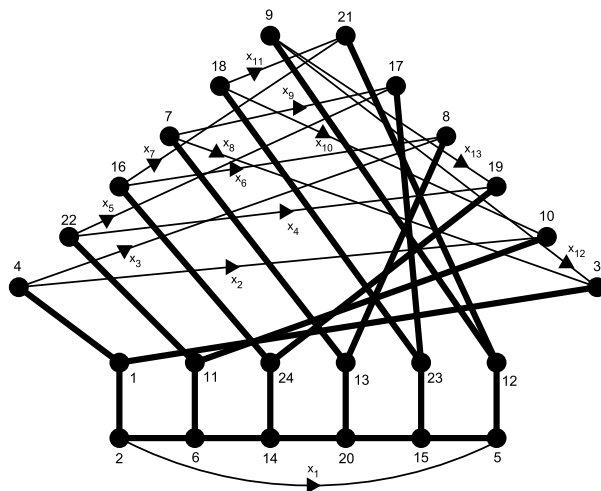
**Lema 3.1.6** Če je  $\Gamma_N \cong \text{F024A}$ , potem je  $\Gamma \cong \text{F048A}$ .

DOKAZ. Graf F024A je poznan tudi pod imenom Nauru graf in je prikazan na sliki 3.5. Znano je, da je ta graf edini povezan kubičen simetričen graf reda 24. Poleg tega je znano še, da je ta graf 2-regularen in da ima ožino 6 (glej [8]). Izberimo naslednje avtomorfizme grafa F024A

$$\begin{aligned} \alpha &= (1, 11, 24, 13, 23, 12)(2, 6, 14, 20, 15, 5)(3, 10, 19, 8, 17, 21)(4, 22, 16, 7, 18, 9), \\ \beta &= (1, 3, 9, 12, 5, 2)(4, 7, 19, 21, 15, 6)(8, 17, 24, 18, 20, 11)(10, 13, 22, 16, 23, 14), \\ \gamma &= (3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10)(11, 12)(14, 15)(16, 17)(18, 19)(21, 22)(23, 24)(1)(2) \\ &\quad (13)(20). \end{aligned}$$

Potem je  $\text{Aut}(\text{F024A}) = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$  in ima ta grupa avtomorfizmov dva razreda konjugiranosti pravih ločno tranzitivnih podgrup. Naj bosta podgrupi  $H_1 = \langle \alpha, \beta \rangle$  in  $H_2$

predstavnici teh dveh razredov konjugiranosti. Če je  $\langle \sigma \rangle \leq H_2$  podgrupa generirana s  $(4, 6)$ -polregularnim avtomorfizmom  $\sigma$ , potem ima ciklična podgrupa  $\langle \sigma \rangle$  jedro v grupi avtomorfizmov  $\text{Aut}(F024A)$ . Po drugi strani je ciklična podgrupa  $\langle \alpha \rangle$  brez jedra v grupi avtomorfizmov  $\text{Aut}(F024A)$ . Poleg tega je vsak tak  $(4, 6)$ -polregularen avtomorfizem  $\tau$  grafa  $F024A$ , da je ciklična podgrupa  $\langle \tau \rangle$  brez jedra v grupi avtomorfizmov  $\text{Aut}(F024A)$ , konjugiran avtomorfizmu  $\alpha$ , vsaka ločno tranzitivna podgrupa grupe avtomorfizmov  $\text{Aut}(F024A)$ , ki vsebuje avtomorfizem  $\alpha$ , pa vsebuje tudi podgrupo  $H_1$ . Vse to lahko neposredno preverimo s programskim paketom MAGMA [4]. Po trditvi 2.2.4 lahko zato, brez škode za splošnost, predpostavimo, da se avtomorfizem  $\rho$  grafa  $\Gamma$  projicira na avtomorfizem  $\alpha$  (kar pomeni, da dvigi avtomorfizma  $\alpha$  centralizirajo grupo krovnih transformacij  $N \cong \mathbb{Z}_r$ ) in da se podgrupa  $H_1$  dvigne v podgrupo grupe avtomorfizmov  $\text{Aut}(\Gamma)$ .



Slika 3.5: Dodelitev napetosti  $\zeta$  Nauruovemu grafu  $F024A$ . Vpeto drevo vsebuje neusmerjene odebeljene povezave, ki imajo trivialne napetosti.

Vsak tak krov  $\Gamma$  lahko dobimo iz grafa  $F024A$  z ustrezno  $T$ -reducirano dodelitvijo napetosti  $\zeta : A(F024A) \rightarrow \mathbb{Z}_r$ , kjer je  $T$  vpeto drevo grafa  $F024A$ , ki vsebuje povezave

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 6\}, \{5, 12\}, \{5, 15\}, \{6, 11\}, \{6, 14\}, \{7, 13\}, \{8, 13\}, \{9, 12\}, \{10, 11\}, \{11, 22\}, \{12, 21\}, \{13, 20\}, \{14, 20\}, \{14, 24\}, \{15, 20\}, \{15, 23\}, \{16, 24\}, \{17, 23\}, \{18, 23\}, \{19, 24\}$  (glej tudi sliko 3.5).

V grafu  $F024A$  je 13 fundamentalnih ciklov, ki so generirani z naslednjimi trinajstimi loki, ki ne pripadajo vpetemu drevesu  $T$ :  $(2, 5)$ ,  $(4, 10)$ ,  $(4, 8)$ ,  $(22, 19)$ ,  $(22, 17)$ ,  $(16, 8)$ ,  $(16, 21)$ ,  $(7, 3)$ ,  $(7, 17)$ ,  $(18, 10)$ ,  $(18, 21)$ ,  $(9, 3)$  in  $(9, 19)$  (vsi ti cikli in njihove napetosti so navedeni v tabeli 3.5).

Obravnavajmo sedaj preslikavi  $\bar{\alpha}, \bar{\beta} : S = \{x_i \mid i \in \{1, 2, \dots, 13\}\} \rightarrow \mathbb{Z}_r$ . Ker je graf  $\Gamma$  povezan, je  $\mathbb{Z}_r = \langle S \rangle$ . Po trditvi 2.2.1 lahko preslikavi  $\bar{\alpha}$  in  $\bar{\beta}$  razširimo do

avtomorfizmov  $\alpha^*$  in  $\beta^*$  grupe  $\mathbb{Z}_r$ . Ker dvigi avtomorfizma  $\alpha$  centralizirajo grupo krovnih transformacij, po trditvi 2.2.3 sledi, da je  $\alpha^* = \text{id} \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_r)$ .

Vrstica		$C$	$\zeta(C)$	$C^\alpha$	$\zeta(C^\alpha)$
A.1	$C_1$	2, 5, 15, 20, 14, 6, 2	$x_1$	6, 2, 5, 15, 20, 14, 6	$x_1$
A.2	$C_2$	4, 10, 11, 6, 2, 1, 4	$x_2$	22, 19, 24, 14, 6, 11, 22	$x_4$
A.3	$C_3$	4, 8, 13, 20, 14, 6, 2, 1, 4	$x_3$	22, 17, 23, 15, 20, 14, 6, 11, 22	$x_5$
A.4	$C_4$	22, 19, 24, 14, 6, 11, 22	$x_4$	16, 8, 13, 20, 14, 24, 16	$x_6$
A.5	$C_5$	22, 17, 23, 15, 20, 14, 6, 11, 22	$x_5$	16, 21, 12, 5, 15, 20, 14, 24, 16	$x_7$
A.6	$C_6$	16, 8, 13, 20, 14, 24, 16	$x_6$	7, 17, 23, 15, 20, 13, 7	$x_9$
A.7	$C_7$	16, 21, 12, 5, 15, 20, 14, 24, 16	$x_7$	7, 3, 1, 2, 5, 15, 20, 13, 7	$x_8 + x_1$
A.8	$C_8$	7, 3, 1, 2, 6, 14, 20, 13, 7	$x_8$	18, 10, 11, 6, 14, 20, 15, 23, 18	$x_{10}$
A.9	$C_9$	7, 17, 23, 15, 20, 13, 7	$x_9$	18, 21, 12, 5, 15, 23, 18	$x_{11}$
A.10	$C_{10}$	18, 10, 11, 6, 14, 20, 15, 23, 18	$x_{10}$	9, 19, 24, 14, 20, 15, 5, 12, 9	$x_{13}$
A.11	$C_{11}$	18, 21, 12, 5, 15, 23, 18	$x_{11}$	9, 3, 1, 2, 5, 12, 9	$x_{12} + x_1$
A.12	$C_{12}$	9, 3, 1, 2, 6, 14, 20, 15, 5, 12, 9	$x_{12}$	4, 10, 11, 6, 14, 20, 15, 5, 2, 1, 4	$x_2 - x_1$
A.13	$C_{13}$	9, 19, 24, 14, 20, 15, 5, 12, 9	$x_{13}$	4, 8, 13, 20, 15, 5, 2, 1, 4	$x_3 - x_1$
		$C$	$\zeta(C)$	$C^\beta$	$\zeta(C^\beta)$
B.1	$C_1$	2, 5, 15, 20, 14, 6, 2	$x_1$	1, 2, 6, 11, 10, 4, 1	$-x_2$
B.2	$C_2$	4, 10, 11, 6, 2, 1, 4	$x_2$	7, 13, 8, 4, 1, 3, 7	$-x_3 - x_8$
B.3	$C_3$	4, 8, 13, 20, 14, 6, 2, 1, 4	$x_3$	7, 17, 22, 11, 10, 4, 1, 3, 7	$x_9 - x_5 - x_2 - x_8$
B.4	$C_4$	22, 19, 24, 14, 6, 11, 22	$x_4$	16, 21, 18, 10, 4, 8, 16	$x_7 - x_{11} + x_{10}$ $-x_2 + x_3 - x_6$
B.5	$C_5$	22, 17, 23, 15, 20, 14, 6, 11, 22	$x_5$	16, 24, 14, 6, 11, 10, 4, 8, 16	$-x_2 + x_3 - x_6$
B.6	$C_6$	16, 8, 13, 20, 14, 24, 16	$x_6$	23, 17, 22, 11, 10, 18, 23	$-x_5 - x_{10}$
B.7	$C_7$	16, 21, 12, 5, 15, 20, 14, 24, 16	$x_7$	23, 15, 5, 2, 6, 11, 10, 18, 23	$-x_1 - x_{10}$
B.8	$C_8$	7, 3, 1, 2, 6, 14, 20, 13, 7	$x_8$	19, 9, 3, 1, 4, 10, 11, 22, 19	$-x_{13} + x_{12}$ $+x_2 + x_4$
B.9	$C_9$	7, 17, 23, 15, 20, 13, 7	$x_9$	19, 24, 14, 6, 11, 22, 19	$x_4$
B.10	$C_{10}$	18, 10, 11, 6, 14, 20, 15, 23, 18	$x_{10}$	20, 13, 8, 4, 10, 11, 6, 14, 20	$-x_3 + x_2$
B.11	$C_{11}$	18, 21, 12, 5, 15, 23, 18	$x_{11}$	20, 15, 5, 2, 6, 14, 20	$-x_1$
B.12	$C_{12}$	9, 3, 1, 2, 6, 14, 20, 15, 5, 12, 9	$x_{12}$	12, 9, 3, 1, 4, 10, 11, 6, 2, 5, 12	$x_{12} + x_2 + x_1$
B.13	$C_{13}$	9, 19, 24, 14, 20, 15, 5, 12, 9	$x_{13}$	12, 21, 18, 10, 11, 6, 2, 5, 12	$-x_{11} + x_{10} + x_1$

Tabela 3.5: Fundamentalni cikli in njihove slike z ustreznimi napetostmi v Nauruovem grafu F024A.

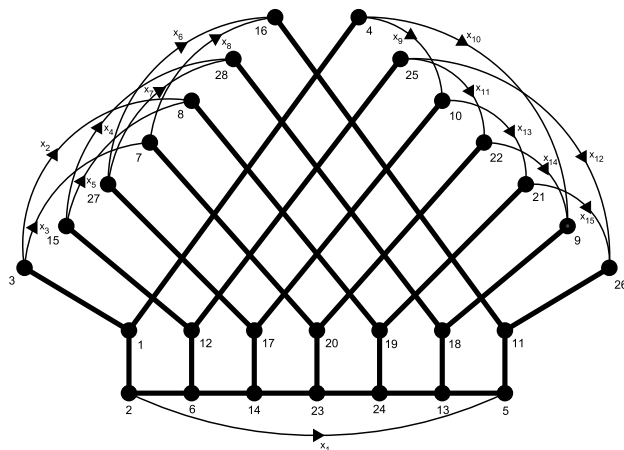
Sedaj lahko uporabimo informacije iz tabele 3.5. Iz vrstic A.2, A.4, A.6 in A.9 dobimo, da je  $x_2 = x_4 = x_6 = x_9 = x_{11}$ , iz vrstic A.3 in A.5 dobimo, da je  $x_3 = x_5 = x_7$ , iz vrstic A.8, A.10 in A.13 dobimo, da je  $x_8 = x_{10} = x_{13} = x_3 - x_1$ , iz vrstice A.12 pa dobimo, da je  $x_{12} = x_2 - x_1$ . Iz vseh teh rezultatov združenih skupaj sledi, da je  $\mathbb{Z}_r = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ . Ker je  $x_9 = x_{11}$ , iz vrstic B.9 in B.11 dobimo, da je  $x_4 = -x_1$ , zato je  $x_2 = -x_1$ , od tod pa sledi, da je  $\mathbb{Z}_r = \langle x_1, x_3 \rangle$ . Iz vrstice B.3 dobimo, da je  $x_3^{\beta^*} = x_9 - x_5 - x_2 - x_8 = x_1 - 2x_3$ , iz vrstice B.7 pa, da je  $x_7^{\beta^*} = -x_1 - x_{10} = -x_3$ . Ker je  $x_3 = x_7$ , sledi, da je  $x_1 = x_3$  in je zato  $\mathbb{Z}_r = \langle x_1 \rangle$ .

Po trditvi 2.2.2 lahko, brez škode za splošnost, predpostavimo, da je  $x_1 = 1$ . Sedaj iz vrstice B.1 dobimo, da je  $x_1^{\beta^*} = -x_2 = x_1$ , poleg tega pa vemo, da je  $x_3^{\beta^*} = x_1 - 2x_3 = -x_1$ . Ker je  $x_1 = x_3$ , sledi, da je  $x_1 = -x_1$ , to pa pomeni, da je  $2 = 0$  in je zato  $\langle x_1 \rangle = \mathbb{Z}_2$ .

Na podlagi teh rezultatov ugotovimo, da je graf  $\Gamma$  reda 48. Edini povezan kubičen simetričen graf reda 48 je graf F048A, ki je dejansko krov grafa F024A, ki ga iščemo (glej tabelo 3.2). ■

**Lema 3.1.7** Če je  $\Gamma_N \cong F028A$ , potem je graf  $\Gamma$  izomorfen enemu izmed grafov F056C, F112B ali F224C.

DOKAZ. Graf F028A je poznan tudi kot Coxeterjev graf in je prikazan na sliki 3.6.



Slika 3.6: Dodelitev napetosti  $\zeta$  Coxeterjevemu grafu F028A. Vpeto drevo vsebuje neusmerjene odebeljene povezave, ki imajo trivialne napetosti.

Ta graf je 3-regularen in ima ožino 7 (glej [8]) ter je hkrati edini povezan kubičen simetričen graf reda 28. Izberimo naslednje avtomorfizme grafa F028A

$$\begin{aligned} \alpha &= (1, 12, 17, 20, 19, 18, 11)(2, 6, 14, 23, 24, 13, 5) \\ &\quad (3, 15, 27, 7, 8, 28, 16)(4, 25, 10, 22, 21, 9, 26), \\ \beta &= (1, 26)(2, 21)(3, 25)(4, 11)(5, 10)(6, 19)(7, 22) \\ &\quad (8, 12)(9, 16)(13, 17)(14, 24)(18, 27)(15)(20)(23)(28), \\ \gamma &= (5, 6)(7, 8)(9, 10)(11, 12)(13, 14)(15, 16)(17, 18) \\ &\quad (19, 20)(21, 22)(23, 24)(25, 26)(27, 28)(1)(2)(3)(4). \end{aligned}$$

Potem je grupa avtomorfizmov  $\text{Aut}(F028A) = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ . S programskim paketom MAGMA [4] lahko neposredno preverimo, da je vsaka podgrupa, ki je generirana s  $(4, 7)$ -polregularnim avtomorfizmom grafa F028A, konjugirana ciklični podgrupi  $\langle \alpha \rangle$  in da vsaka ločno tranzitivna podgrupa grupe avtomorfizmov  $\text{Aut}(F028A)$  vsebuje podgrupo  $H = \langle \alpha, \beta \rangle$ . Po trditvi 2.2.4 lahko zato, brez škode za splošnost, predpostavimo, da se avtomorfizem  $\rho$  projecira na avtomorfizem  $\alpha$  (kar pomeni, da dvigi avtomorfizma  $\alpha$  centralizirajo grupo krovnih transformacij  $N$ ), podgrupa  $H$  pa se dvigne v podgrupo grupe avtomorfizmov  $\text{Aut}(\Gamma)$ .

Vsak tak krov  $\Gamma$  lahko dobimo iz grafa F028A z ustrezno  $T$ -reducirano dodelitvijo napetosti  $\zeta : A(F028A) \rightarrow \mathbb{Z}_r$ , kjer je  $T$  vpeto drevo grafa F028A, ki vsebuje povezave

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 6\}, \{5, 11\}, \{5, 13\}, \{6, 12\}, \{6, 14\}, \{7, 20\}, \{8, 19\}, \{9, 18\},$   
 $\{10, 17\}, \{11, 16\}, \{11, 26\}, \{12, 15\}, \{12, 25\}, \{13, 18\}, \{13, 24\}, \{14, 17\}, \{14, 23\},$   
 $\{17, 27\}, \{18, 28\}, \{19, 21\}, \{19, 24\}, \{20, 22\}, \{20, 23\}, \{23, 24\}$  (glej tudi sliko 3.6).



V grafu F028A je 15 fundamentalnih ciklov, ki so generirani z naslednjimi pet-najstimi loki, ki ne pripadajo vpetemu drevesu  $T$ :  $(2, 5)$ ,  $(3, 8)$ ,  $(3, 7)$ ,  $(15, 28)$ ,  $(15, 8)$ ,  $(27, 16)$ ,  $(27, 28)$ ,  $(7, 16)$ ,  $(4, 10)$ ,  $(4, 9)$ ,  $(25, 22)$ ,  $(25, 26)$ ,  $(10, 21)$ ,  $(22, 9)$  in  $(21, 26)$  (vsi ti cikli in njihove napetosti so navedeni v tabeli 3.6).

Vrstica		$C$	$\zeta(C)$	$C^\alpha$	$\zeta(C^\alpha)$
A.1	$C_1$	2, 5, 13, 24, 23, 14, 6, 2	$x_1$	6, 2, 5, 13, 24, 23, 14, 6	$x_1$
A.2	$C_2$	3, 8, 19, 24, 23, 14, 6, 2, 1, 3	$x_2$	15, 28, 18, 13, 24, 23, 14, 6, 12, 15	$x_4$
A.3	$C_3$	3, 7, 20, 23, 14, 6, 2, 1, 3	$x_3$	15, 8, 19, 24, 23, 14, 6, 12, 15	$x_5$
A.4	$C_4$	15, 28, 18, 13, 24, 23, 14, 6, 12, 15	$x_4$	27, 16, 11, 5, 13, 24, 23, 14, 17, 27	$x_6$
A.5	$C_5$	15, 8, 19, 24, 23, 14, 6, 12, 15	$x_5$	27, 28, 18, 13, 24, 23, 14, 17, 27	$x_7$
A.6	$C_6$	27, 16, 11, 5, 13, 24, 23, 14, 17, 27	$x_6$	7, 3, 1, 2, 5, 13, 24, 23, 20, 7	$-x_3 + x_1$
A.7	$C_7$	27, 28, 18, 13, 24, 23, 14, 17, 27	$x_7$	7, 16, 11, 5, 13, 24, 23, 20, 7	$x_8$
A.8	$C_8$	7, 16, 11, 5, 13, 24, 23, 20, 7	$x_8$	8, 3, 1, 2, 5, 13, 24, 19, 8	$-x_2 + x_1$
A.9	$C_9$	4, 10, 17, 14, 6, 2, 1, 4	$x_9$	25, 22, 20, 23, 14, 6, 12, 25	$x_{11}$
A.10	$C_{10}$	4, 9, 18, 13, 24, 23, 14, 6, 2, 1, 4	$x_{10}$	25, 26, 11, 5, 13, 24, 23, 14, 6, 12, 25	$x_{12}$
A.11	$C_{11}$	25, 22, 20, 23, 14, 6, 12, 25	$x_{11}$	10, 21, 19, 24, 23, 14, 17, 10	$x_{13}$
A.12	$C_{12}$	25, 26, 11, 5, 13, 24, 23, 14, 6, 12, 25	$x_{12}$	10, 4, 1, 2, 5, 13, 24, 23, 14, 17, 10	$-x_9 + x_1$
A.13	$C_{13}$	10, 21, 19, 24, 23, 14, 17, 10	$x_{13}$	22, 9, 18, 13, 24, 23, 20, 22	$x_{14}$
A.14	$C_{14}$	22, 9, 18, 13, 24, 23, 20, 22	$x_{14}$	21, 26, 11, 5, 13, 24, 19, 21	$x_{15}$
A.15	$C_{15}$	21, 26, 11, 5, 13, 24, 19, 21	$x_{15}$	9, 4, 1, 2, 5, 13, 18, 9	$-x_{10} + x_1$
		$C$	$\zeta(C)$	$C^\beta$	$\zeta(C^\beta)$
B.1	$C_1$	2, 5, 13, 24, 23, 14, 6, 2	$x_1$	21, 10, 17, 14, 23, 24, 19, 21	$-x_{13}$
B.2	$C_2$	3, 8, 19, 24, 23, 14, 6, 2, 1, 3	$x_2$	25, 12, 6, 14, 23, 24, 19, 21, 26, 25	$x_{15} - x_{12}$
B.3	$C_3$	3, 7, 20, 23, 14, 6, 2, 1, 3	$x_3$	25, 22, 20, 23, 24, 19, 21, 26, 25	$x_{11} + x_{15}$ $-x_{12}$
B.4	$C_4$	15, 28, 18, 13, 24, 23, 14, 6, 12, 15	$x_4$	15, 28, 27, 17, 14, 23, 24, 19, 8, 15	$x_4 - x_7$ $-x_5$
B.5	$C_5$	15, 8, 19, 24, 23, 14, 6, 12, 15	$x_5$	15, 12, 6, 14, 23, 24, 19, 8, 15	$-x_5$
B.6	$C_6$	27, 16, 11, 5, 13, 24, 23, 14, 17, 27	$x_6$	18, 9, 4, 10, 17, 14, 23, 24, 13, 18	$-x_{10} + x_9$
B.7	$C_7$	27, 28, 18, 13, 24, 23, 14, 17, 27	$x_7$	18, 28, 27, 17, 14, 23, 24, 13, 18	$-x_7$
B.8	$C_8$	7, 16, 11, 5, 13, 24, 23, 20, 7	$x_8$	22, 9, 4, 10, 17, 14, 23, 20, 22	$x_{14} - x_{10} +$ $x_9$
B.9	$C_9$	4, 10, 17, 14, 6, 2, 1, 4	$x_9$	11, 5, 13, 24, 19, 21, 26, 11	$x_{15}$
B.10	$C_{10}$	4, 9, 18, 13, 24, 23, 14, 6, 2, 1, 4	$x_{10}$	11, 16, 27, 17, 14, 23, 24, 19, 21, 26, 11	$-x_6 + x_{15}$
B.11	$C_{11}$	25, 22, 20, 23, 14, 6, 12, 25	$x_{11}$	3, 7, 20, 23, 24, 19, 8, 3	$x_3 - x_2$
B.12	$C_{12}$	25, 26, 11, 5, 13, 24, 23, 14, 6, 12, 25	$x_{12}$	3, 1, 4, 10, 17, 14, 23, 24, 19, 8, 3	$x_9 - x_2$
B.13	$C_{13}$	10, 21, 19, 24, 23, 14, 17, 10	$x_{13}$	5, 2, 6, 14, 23, 24, 13, 5	$-x_1$
B.14	$C_{14}$	22, 9, 18, 13, 24, 23, 20, 22	$x_{14}$	7, 16, 27, 17, 14, 23, 20, 7	$x_8 - x_6$
B.15	$C_{15}$	21, 26, 11, 5, 13, 24, 19, 21	$x_{15}$	2, 1, 4, 10, 17, 14, 6, 2	$x_9$

Tabela 3.6: Fundamentalni cikli in njihove slike z ustreznimi napetostmi v Coxeterjevemu grafu F028A.

Obravnavajmo sedaj preslikavi  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}: S = \{x_i \mid i \in \{1, 2, \dots, 15\}\} \rightarrow \mathbb{Z}_r$ . Graf  $\Gamma$  je povezan, zato je  $\mathbb{Z}_r = \langle S \rangle$ . Po trditvi 2.2.1 lahko preslikavi  $\bar{\alpha}$  in  $\bar{\beta}$  razširimo do avtomorfizmov  $\alpha^*$  in  $\beta^*$  grupe  $\mathbb{Z}_r$ . Ker dvigi avtomorfizma  $\alpha$  centralizirajo grupo krovnih transformacij, po trditvi 2.2.3 sledi, da je  $\alpha^* = \text{id} \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_r)$ .

Sedaj lahko uporabimo informacije iz tabele 3.6. Iz vrstic A.2 in A.4 dobimo,

da je  $x_2 = x_4 = x_6$ . Iz vrstic A.3, A.5, A.7 in A.8 dobimo, da je  $x_3 = x_5 = x_7 = x_8 = x_1 - x_2$ . Iz vrstic A.9, A.11, A.13, A.14 in A.15 dobimo, da je  $x_9 = x_{11} = x_{13} = x_{14} = x_{15} = x_1 - x_{10}$ . Iz vrstice A.10 pa dobimo, da je  $x_{12} = x_{10}$ . Iz vseh teh enakosti ugotovimo, da je  $\mathbb{Z}_r = \langle x_1, x_2, x_{10} \rangle$ . Ker je  $x_{13} = x_{15}$ , iz vrstic B.13 in B.15 sledi, da je  $-x_1 = x_9$ , zato je  $x_{10} = 2x_1$  in  $\mathbb{Z}_r = \langle x_1, x_2 \rangle$ . Iz vrstic B.2 in B.4 dobimo, da je  $x_2^{\beta^*} = -x_{12} + x_{15} = x_1 - 2x_{10} = -3x_1$  in  $x_4^{\beta^*} = x_4 - x_5 - x_7 = -2x_1 + 3x_2$ . Ker je  $x_2 = x_4$ , sledi, da je  $x_1 = -3x_2$  in je zato  $\mathbb{Z}_r = \langle x_2 \rangle$ .

Po trditvi 2.2.2 lahko, brez škode za splošnost, predpostavimo, da je  $x_2 = 1$ . Ker je  $x_{11} = x_{13}$ , iz vrstic B.11 in B.13 sledi, da je  $-x_2 + x_3 = -x_1$ . Od tod pa dobimo, da je  $8x_2 = 0$  oziroma  $8 = 0$  in je zato  $r \in \{2, 4, 8\}$ .

Če je  $r = 2$ , potem je graf  $\Gamma$  reda 56. Edini povezan kubičen simetričen tetracirkulant reda 56 je graf F056C, ki je dejansko iskani ciklični krov grafa F028A (glej tabelo 3.2).

Če je  $r = 4$ , potem je graf  $\Gamma$  reda 112. Obstajata dva povezana kubična simetrična tetracirkulanta reda 112. Prvi je graf F112B, za katerega lahko s programskim paketom MAGMA [4] preverimo, da je dejansko iskani ciklični krov grafa F028A (glej tudi tabelo 3.2). Drugi pa je graf F112C, za katerega lahko preverimo, da ni iskani ciklični krov grafa F028A (je pa graf F112C  $\cong CQ(9, 14)$  krov grafa kocke F008A).

Če je  $r = 8$ , potem je graf  $\Gamma$  reda 224. Edini povezan kubičen simetričen tetracirkulant reda 224 je graf F224C, ki je dejansko iskani ciklični krov grafa F028A, kar lahko preverimo s programskim paketom MAGMA [4] (glej tudi tabelo 3.2). ■

**Lema 3.1.8** *Če je  $\Gamma_N \cong F032A$ , potem je  $\Gamma \cong F096A$ .*

**DOKAZ.** Graf F032A je edini povezan kubičen simetričen graf reda 32. Poznan je tudi pod imenom Dyckov graf in je prikazan na sliki 3.7. Ta graf je 2-regularen in ima ožino 6 (glej [8]). Izberimo naslednje avtomorfizme grafa F032A

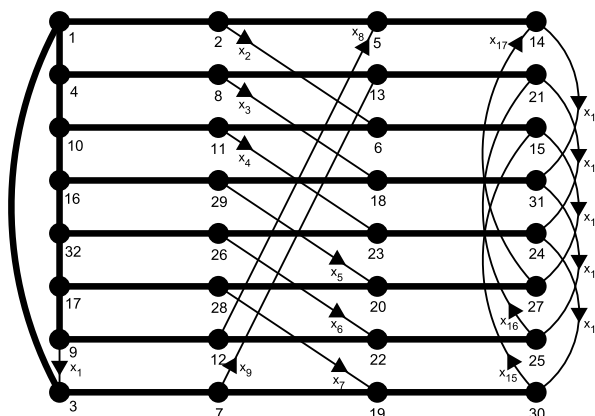
$$\begin{aligned} \alpha &= (1, 4, 10, 16, 32, 17, 9, 3)(2, 8, 11, 29, 26, 28, 12, 7)(5, 13, 6, 18, 23, 20, 22, 19) \\ &\quad (14, 21, 15, 31, 24, 27, 25, 30), \\ \beta &= (2, 3, 4)(5, 7, 10)(6, 9, 8)(11, 12, 13)(14, 19, 16)(15, 17, 18)(21, 23, 22)(24, 26, 25) \\ &\quad (27, 28, 29)(30, 32, 31)(1)(20), \\ \gamma &= (1, 23, 27, 7, 32, 5, 21, 29)(2, 24, 20, 3, 26, 14, 13, 16)(4, 11, 15, 19, 17, 12, 25, 18) \\ &\quad (6, 30, 28, 9, 22, 31, 8, 10). \end{aligned}$$

Potem je grupa avtomorfizmov  $\text{Aut}(F032A) = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ . Naj bo  $H = \langle \alpha, \beta \rangle$ . Vsaka podgrupa grupe avtomorfizmov  $\text{Aut}(F032A)$ , ki je generirana s  $(4, 8)$ -polregularnim avtomorfizmom, je konjugirana bodisi ciklični podgrupi  $\langle \alpha \rangle$  ali pa ciklični podgrupi  $\langle \gamma \rangle$ . Velja tudi, da je vsaka prava ločno tranzitivna podgrupa grupe avtomorfizmov  $\text{Aut}(F032A)$ , ki vsebuje  $(4, 8)$ -polregularen avtomorfizem, konjugirana podgrupi  $H$ .

Ko obravnavamo vse take mogoče ciklične krove grafa F032A, da dvigi avtomorfizma  $\alpha$  (oz.  $\gamma$ ) centralizirajo grupo krovnih transformacij in imajo natanko 4 orbite dolžine  $n$  na krovnih grafih, moramo obravnavati dva primera glede na to, ali se dvigne podgrupa  $H$  ali pa se dvigne cela grupa avtomorfizmov  $\text{Aut}(F032A)$ .

Vsak tak krov  $\Gamma$  lahko dobimo iz grafa F032A z ustrezno  $T$ -reducirano dodelitvijo napetosti  $\zeta : A(\text{F032A}) \rightarrow \mathbb{Z}_r$ , kjer je  $T$  vpeto drevo grafa F032A, ki vsebuje povezave

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 7\}, \{4, 8\}, \{4, 10\}, \{5, 14\}, \{6, 11\}, \{6, 15\}, \{7, 19\}, \{8, 13\}, \{9, 12\}, \{9, 17\}, \{10, 11\}, \{10, 16\}, \{12, 22\}, \{13, 21\}, \{16, 29\}, \{16, 32\}, \{17, 28\}, \{17, 32\}, \{18, 29\}, \{18, 31\}, \{19, 30\}, \{20, 27\}, \{20, 28\}, \{22, 25\}, \{23, 24\}, \{23, 26\}, \{26, 32\}$  (glej tudi sliko 3.7).



Slika 3.7: Dodelitev napetosti  $\zeta$  Dyckovemu grafu F032A. Vpeto drevo vsebuje neusmerjene odebeljene povezave, ki imajo trivialne napetosti.

V grafu F032A je 17 fundamentalnih ciklov, ki so generirani z naslednjimi sedemnajstimi loki, ki ne pripadajo vpetemu drevesu  $T$ :  $(9, 3)$ ,  $(2, 6)$ ,  $(8, 18)$ ,  $(11, 23)$ ,  $(29, 20)$ ,  $(26, 22)$ ,  $(28, 19)$ ,  $(12, 5)$ ,  $(7, 13)$ ,  $(14, 31)$ ,  $(21, 24)$ ,  $(15, 27)$ ,  $(31, 25)$ ,  $(24, 30)$ ,  $(30, 15)$ ,  $(25, 21)$  in  $(27, 14)$  (vsi ti cikli in njihove napetosti so navedeni v tabelah 3.7 in 3.8).

PRIMER 1. Dvigi avtomorfizma  $\alpha$  centralizirajo grupo krovnih transformacij in imajo natanko 4 orbite dolžine  $n$  na krovnem grafu (v tem primeru se torej dvigne podgrupa  $H$ ).

Obravnavajmo preslikavi  $\bar{\alpha}$  in  $\bar{\beta}$  iz množice  $S = \{x_i \mid i \in \{1, 2, \dots, 17\}\}$ , ki je množica napetosti sedemnajstih fundamentalnih ciklov grafa F032A, v napetostno grupo  $\mathbb{Z}_r$  (glej tabelo 3.7, kjer so navedeni vsi cikli in njihove napetosti glede na avtomorfizma  $\alpha$  in  $\beta$ ). Ker je graf  $\Gamma$  povezan, je  $\mathbb{Z}_r = \langle S \rangle$ . Po trditvi 2.2.1 lahko preslikavi  $\bar{\alpha}$  in  $\bar{\beta}$  razširimo do avtomorfizmov  $\alpha^*$  in  $\beta^*$  grupe  $\mathbb{Z}_r$ . Ker dvigi avtomorfizma  $\alpha$  centralizirajo grupo krovnih transformacij, po trditvi 2.2.3 sledi, da je  $\alpha^* = \text{id} \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_r)$ .

Iz tabele 3.7 lahko dobimo naslednje informacije. Iz vrstic A.2, A.3, A.4, A.5 in A.9 dobimo, da je  $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_9$ . Iz vrstic A.7 in A.8 dobimo, da je  $x_7 = x_8 = x_1 + x_2$ . Iz vrstic A.10, A.11, A.12 in A.15 nato dobimo, da

Vrstica		$C$	$\zeta(C)$	$C^\alpha$	$\zeta(C^\alpha)$
A.1	$C_1$	9, 3, 1, 4, 10, 16, 32, 17, 9	$x_1$	3, 1, 4, 10, 16, 32, 17, 9, 3	$x_1$
A.2	$C_2$	2, 6, 11, 10, 4, 1, 2	$x_2$	8, 18, 29, 16, 10, 4, 8	$x_3$
A.3	$C_3$	8, 18, 29, 16, 10, 4, 8	$x_3$	11, 23, 26, 32, 16, 10, 11	$x_4$
A.4	$C_4$	11, 23, 26, 32, 16, 10, 11	$x_4$	29, 20, 28, 17, 32, 16, 29	$x_5$
A.5	$C_5$	29, 20, 28, 17, 32, 16, 29	$x_5$	26, 22, 12, 9, 17, 32, 26	$x_6$
A.6	$C_6$	26, 22, 12, 9, 17, 32, 26	$x_6$	28, 19, 7, 3, 9, 17, 28	$x_7 - x_1$
A.7	$C_7$	28, 19, 7, 3, 1, 4, 10, 16, 32, 17, 28	$x_7$	12, 5, 2, 1, 4, 10, 16, 32, 17, 9, 12	$x_8$
A.8	$C_8$	12, 5, 2, 1, 4, 10, 16, 32, 17, 9, 12	$x_8$	7, 13, 8, 4, 10, 16, 32, 17, 9, 3, 7	$x_9 + x_1$
A.9	$C_9$	7, 13, 8, 4, 1, 3, 7	$x_9$	2, 6, 11, 10, 4, 1, 2	$x_2$
A.10	$C_{10}$	14, 31, 18, 29, 16, 10, 4, 1, 2, 5, 14	$x_{10}$	21, 24, 23, 26, 32, 16, 10, 4, 8, 13, 21	$x_{11}$
A.11	$C_{11}$	21, 24, 23, 26, 32, 16, 10, 4, 8, 13, 21	$x_{11}$	15, 27, 20, 28, 17, 32, 16, 10, 11, 6, 15	$x_{12}$
A.12	$C_{12}$	15, 27, 20, 28, 17, 32, 16, 10, 11, 6, 15	$x_{12}$	31, 25, 22, 12, 9, 17, 32, 16, 29, 18, 31	$x_{13}$
A.13	$C_{13}$	31, 25, 22, 12, 9, 17, 32, 16, 29, 18, 31	$x_{13}$	24, 30, 19, 7, 3, 9, 17, 32, 26, 23, 24	$x_{14} - x_1$
A.14	$C_{14}$	24, 30, 19, 7, 3, 1, 4, 10, 16, 32, 26, 23, 24	$x_{14}$	27, 14, 5, 2, 1, 4, 10, 16, 32, 17, 28, 20, 27	$x_{17}$
A.15	$C_{15}$	30, 15, 6, 11, 10, 4, 1, 3, 7, 19, 30	$x_{15}$	14, 31, 18, 29, 16, 10, 4, 1, 2, 5, 14	$x_{10}$
A.16	$C_{16}$	25, 21, 13, 8, 4, 10, 16, 32, 17, 9, 12, 22, 25	$x_{16}$	30, 15, 6, 11, 10, 16, 32, 17, 9, 3, 7, 19, 30	$x_{15} + x_1$
A.17	$C_{17}$	27, 14, 5, 2, 1, 4, 10, 16, 32, 17, 28, 20, 27	$x_{17}$	25, 21, 13, 8, 4, 10, 16, 32, 17, 9, 12, 22, 25	$x_{16}$
		$C$	$\zeta(C)$	$C^\beta$	$\zeta(C^\beta)$
B.1	$C_1$	9, 3, 1, 4, 10, 16, 32, 17, 9	$x_1$	8, 4, 1, 2, 5, 14, 31, 18, 8	$x_{10} - x_3$
B.2	$C_2$	2, 6, 11, 10, 4, 1, 2	$x_2$	3, 9, 12, 5, 2, 1, 3	$-x_1 + x_8$
B.3	$C_3$	8, 18, 29, 16, 10, 4, 8	$x_3$	6, 15, 27, 14, 5, 2, 6	$x_{12} + x_{17} + x_2$
B.4	$C_4$	11, 23, 26, 32, 16, 10, 11	$x_4$	12, 22, 25, 31, 14, 5, 12	$-x_{13} - x_{10} - x_8$
B.5	$C_5$	29, 20, 28, 17, 32, 16, 29	$x_5$	27, 20, 29, 18, 31, 14, 27	$-x_5 - x_{10} - x_{17}$
B.6	$C_6$	26, 22, 12, 9, 17, 32, 26	$x_6$	25, 21, 13, 8, 18, 31, 25	$x_{16} + x_3 + x_{13}$
B.7	$C_7$	28, 19, 7, 3, 1, 4, 10, 16, 32, 17, 28	$x_7$	29, 16, 10, 4, 1, 2, 5, 14, 31, 18, 29	$x_{10}$
B.8	$C_8$	12, 5, 2, 1, 4, 10, 16, 32, 17, 9, 12	$x_8$	13, 7, 3, 1, 2, 5, 14, 31, 18, 8, 13	$-x_9 + x_{10} - x_3$
B.9	$C_9$	7, 13, 8, 4, 1, 3, 7	$x_9$	10, 11, 6, 2, 1, 4, 10	$-x_2$
B.10	$C_{10}$	14, 31, 18, 29, 16, 10, 4, 1, 2, 5, 14	$x_{10}$	19, 30, 15, 27, 14, 5, 2, 1, 3, 7, 19	$x_{15} + x_{12} + x_{17}$
B.11	$C_{11}$	21, 24, 23, 26, 32, 16, 10, 4, 8, 13, 21	$x_{11}$	23, 26, 22, 25, 31, 14, 5, 2, 6, 11, 23	$x_6 - x_{13} - x_{10}$ $+x_2 + x_4$
B.12	$C_{12}$	15, 27, 20, 28, 17, 32, 16, 10, 11, 6, 15	$x_{12}$	17, 28, 20, 29, 18, 31, 14, 5, 12, 9, 17	$-x_5 - x_{10} - x_8$
B.13	$C_{13}$	31, 25, 22, 12, 9, 17, 32, 16, 29, 18, 31	$x_{13}$	30, 24, 21, 13, 8, 18, 31, 14, 27, 15, 30	$-x_{15} - x_{14} - x_{11} + x_3$ $-x_{10} - x_{17} - x_{12}$
B.14	$C_{14}$	24, 30, 19, 7, 3, 1, 4, 10, 16, 32, 26, 23, 24	$x_{14}$	26, 32, 16, 10, 4, 1, 2, 5, 14, 31, 25, 22, 26	$x_{10} + x_{13} - x_6$
B.15	$C_{15}$	30, 15, 6, 11, 10, 4, 1, 3, 7, 19, 30	$x_{15}$	32, 17, 9, 12, 5, 2, 1, 4, 10, 16, 32	$x_8$
B.16	$C_{16}$	25, 21, 13, 8, 4, 10, 16, 32, 17, 9, 12, 22, 25	$x_{16}$	24, 23, 11, 6, 2, 5, 14, 31, 18, 8, 13, 21, 24	$-x_4 - x_2 + x_{10}$ $-x_3 + x_{11}$
B.17	$C_{17}$	27, 14, 5, 2, 1, 4, 10, 16, 32, 17, 28, 20, 27	$x_{17}$	28, 19, 7, 3, 1, 2, 5, 14, 31, 18, 29, 20, 28	$x_7 + x_{10} + x_5$

Tabela 3.7: Fundamentalni cikli in njihove slike z ustreznimi napetostmi v Dyckovemu grafu F032A glede na avtomorfizma  $\alpha$  in  $\beta$ .

je  $x_{10} = x_{11} = x_{12} = x_{13} = x_{15}$ . Iz vrstic A.14, A.17 in A.16 pa dobimo, da je  $x_{14} = x_{17} = x_{16} = x_1 + x_{10}$ . Če združimo vse te rezultate skupaj, ugotovimo, da je  $\mathbb{Z}_r = \langle x_1, x_2, x_{10} \rangle$ . Iz vrstic B.2 in B.3 dobimo, da je  $x_2^{\beta^*} = -x_1 + x_8 = x_2$  in  $x_3^{\beta^*} = x_{12} + x_{17} + x_2 = x_1 + x_2 + 2x_{10}$ . Ker je  $x_2 = x_3$ , sledi, da je  $x_2 = x_1 + x_2 + 2x_{10}$  oziroma  $x_1 = -2x_{10}$  in je zato  $\mathbb{Z}_r = \langle x_2, x_{10} \rangle$ . Iz vrstic B.7 in B.8 dobimo, da je  $x_7^{\beta^*} = x_{10}$  in  $x_8^{\beta^*} = -x_9 + x_{10} - x_3 = -2x_2 + x_{10}$ . Ker je  $x_7 = x_8$ , sledi, da je  $x_{10} = -2x_2 + x_{10}$  oziroma  $2x_2 = 0$ . Iz vrstic B.10 in B.11 dobimo, da je  $x_{10}^{\beta^*} = x_{15} + x_{12} + x_{17} = x_{10}$  in  $x_{11}^{\beta^*} = x_6 - x_{13} - x_{10} + x_2 + x_4 = x_2 - 2x_{10}$ . Ker je  $x_{10} = x_{11}$ , sledi, da je  $x_{10} = x_2 - 2x_{10}$  oziroma  $x_2 = 3x_{10}$  in je zato  $\mathbb{Z}_r = \langle x_{10} \rangle$ .

Vrstica		$C$	$\zeta(C)$	$C^\gamma$	$\zeta(C^\gamma)$
C.1	$C_1$	9, 3, 1, 4, 10, 16, 32, 17, 9	$x_1$	22, 26, 23, 11, 6, 2, 5, 12, 22	$-x_6 - x_4 - x_2 - x_8$
C.2	$C_2$	2, 6, 11, 10, 4, 1, 2	$x_2$	24, 30, 15, 6, 11, 23, 24	$x_{14} + x_{15} + x_4$
C.3	$C_3$	8, 18, 29, 16, 10, 4, 8	$x_3$	10, 4, 1, 2, 6, 11, 10	$x_2$
C.4	$C_4$	11, 23, 26, 32, 16, 10, 11	$x_4$	15, 27, 14, 5, 2, 6, 15	$x_{12} + x_{17} + x_2$
C.5	$C_5$	29, 20, 28, 17, 32, 16, 29	$x_5$	1, 3, 9, 12, 5, 2, 1	$-x_1 + x_8$
C.6	$C_6$	26, 22, 12, 9, 17, 32, 26	$x_6$	14, 31, 25, 22, 12, 5, 14	$x_{10} + x_{13} + x_8$
C.7	$C_7$	28, 19, 7, 3, 1, 4, 10, 16, 32, 17, 28	$x_7$	9, 17, 32, 26, 23, 11, 6, 2, 5, 12, 9	$-x_4 - x_2 - x_8$
C.8	$C_8$	12, 5, 2, 1, 4, 10, 16, 32, 17, 9, 12	$x_8$	25, 21, 24, 23, 11, 6, 2, 5, 12, 22, 25	$x_{16} + x_{11} - x_4$ $-x_2 - x_8$
C.9	$C_9$	7, 13, 8, 4, 1, 3, 7	$x_9$	32, 16, 10, 11, 23, 26, 32	$x_4$
C.10	$C_{10}$	14, 31, 18, 29, 16, 10, 4, 1, 2, 5, 14	$x_{10}$	13, 8, 4, 1, 2, 6, 11, 23, 24, 21, 13	$x_2 + x_4 - x_{11}$
C.11	$C_{11}$	21, 24, 23, 26, 32, 16, 10, 4, 8, 13, 21	$x_{11}$	29, 20, 27, 14, 5, 2, 6, 11, 10, 16, 29	$x_5 + x_{17} + x_2$
C.12	$C_{12}$	15, 27, 20, 28, 17, 32, 16, 10, 11, 6, 15	$x_{12}$	19, 7, 3, 9, 12, 5, 2, 6, 15, 30, 19	$-x_1 + x_8 + x_2 - x_{15}$
C.13	$C_{13}$	31, 25, 22, 12, 9, 17, 32, 16, 29, 18, 31	$x_{13}$	8, 18, 31, 25, 22, 12, 5, 2, 1, 4, 8	$x_3 + x_{13} + x_8$
C.14	$C_{14}$	24, 30, 19, 7, 3, 1, 4, 10, 16, 32, 26, 23, 24	$x_{14}$	20, 28, 17, 32, 26, 23, 11, 6, 2, 5, 14, 27, 20	$-x_4 - x_2 - x_{17}$
C.15	$C_{15}$	30, 15, 6, 11, 10, 4, 1, 3, 7, 19, 30	$x_{15}$	28, 19, 30, 15, 6, 11, 23, 26, 32, 17, 28	$x_7 + x_{15} + x_4$
C.16	$C_{16}$	25, 21, 13, 8, 4, 10, 16, 32, 17, 9, 12, 22, 25	$x_{16}$	18, 29, 16, 10, 11, 6, 2, 5, 12, 22, 25, 31, 18	$-x_2 - x_8 - x_{13}$
C.17	$C_{17}$	27, 14, 5, 2, 1, 4, 10, 16, 32, 17, 28, 20, 27	$x_{17}$	7, 13, 21, 24, 23, 11, 6, 2, 5, 12, 9, 3, 7	$x_9 + x_{11} - x_4$ $-x_2 - x_8 + x_1$

Tabela 3.8: Fundamentalni cikli in njihove slike z ustreznimi napetostmi v Dyckovem grafu F032A glede na avtomorfizem  $\gamma$ .

Po trditvi 2.2.2 lahko, brez škode za splošnost, predpostavimo, da je  $x_{10} = 1$ . Ker je  $2x_2 = 0$  in  $x_2 = 3x_{10}$ , sledi, da je  $6x_{10} = 0$  oziroma  $6 = 0$  in je zato  $r \in \{2, 3, 6\}$ .

Če je  $r = 2$ , potem je graf  $\Gamma$  reda 64. S programskim paketom MAGMA preverimo, da je  $\mathcal{C}(4, 16) = \emptyset$ .

Če je  $r = 3$ , potem je graf  $\Gamma$  reda 96. Edini povezan kubičen simetričen tetracirkulant reda 96 je graf F096A, ki je dejansko iskani ciklični krov grafa F032A.

Če pa je  $r = 6$ , potem je graf  $\Gamma$  reda 192, toda s programskim paketom MAGMA lahko preverimo, da je  $\mathcal{C}(4, 48) = \emptyset$ .

PRIMER 2. Dvigi avtomorfizma  $\gamma$  centralizirajo grupo krovnih transformacij in imajo natanko 4 orbite dolžine  $n$  na krovnem grafu (v tem primeru se dvigne cela

grupa avtomorfizmov  $\text{Aut}(F032A)$ ).

Obravnavajmo preslikave  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  in  $\bar{\gamma}$  iz množice  $S = \{x_i \mid i \in \{1, 2, \dots, 17\}\}$ , ki je množica napetosti sedemnajstih fundamentalnih ciklov grafa F032A, v napetostno grupo  $\mathbb{Z}_r$  (glej tabeli 3.7 in 3.8, kjer so navedeni vsi cikli in njihove napetosti glede na avtomorfizme  $\alpha$ ,  $\beta$  in  $\gamma$ ). Ker je graf  $\Gamma$  povezan, je  $\mathbb{Z}_r = \langle S \rangle$ . Po trditvi 2.2.1 lahko preslikave  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  in  $\bar{\gamma}$  razširimo do avtomorfizmov  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  in  $\gamma^*$  grupe  $\mathbb{Z}_r$ . Ker dvigi avtomorfizma  $\gamma$  centralizirajo grupo krovnih transformacij, po trditvi 2.2.3 sledi, da je  $\gamma^* = \text{id} \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_r)$ .

Iz tabel 3.7 in 3.8 lahko dobimo naslednje informacije. Iz vrstice C.3 dobimo, da je  $x_3 = x_2$ . Iz vrstic A.2, A.3, A.4 in A.5 sledi, da je  $x_3 = x_4 = x_5 = x_6$ . Iz vrstic C.9, C.15 in C.13 dobimo, da je  $x_9 = x_2$ ,  $x_7 = -x_2$  in  $x_8 = -x_2$ . Iz vrstic C.5, C.11, C.10, C.4, C.6, C.14, C.2 in C.16 sledi, da je  $x_1 = -2x_2$ ,  $x_{11} = 2x_2 + x_{17}$ ,  $x_{10} = -x_{17}$ ,  $x_{12} = -x_{17}$ ,  $x_{13} = 2x_2 + x_{17}$ ,  $x_{14} = -2x_2 - x_{17}$ ,  $x_{15} = 2x_2 + x_{17}$  in  $x_{16} = -2x_2 - x_{17}$ . Če združimo vse te rezultate skupaj, ugotovimo, da je  $\mathbb{Z}_r = \langle x_2, x_{17} \rangle$ . Iz vrstic B.2, B.7 in B.9 dobimo, da je  $x_2^{\beta^*} = -x_1 + x_8 = x_2$ ,  $x_7^{\beta^*} = x_{10} = -x_{17}$  in  $x_9^{\beta^*} = -x_2$ . Ker je  $x_9 = x_2 = -x_7$ , sledi, da je  $2x_2 = 0$  in  $x_2 = x_{17}$ , zato je  $\mathbb{Z}_r = \langle x_2 \rangle$ .

Po trditvi 2.2.2 lahko, brez škode za splošnost, predpostavimo, da je  $x_2 = 1$ . Ker je  $2x_2 = 0$ , sledi, da je  $2 = 0$ . Zato je  $r = 2$  in je graf  $\Gamma$  reda 64. Že v prvem primeru smo pokazali, da je  $\mathcal{C}(4, 16) = \emptyset$ , zato iz obeh primerov sledi, da je  $\Gamma \cong F096A$ . ■

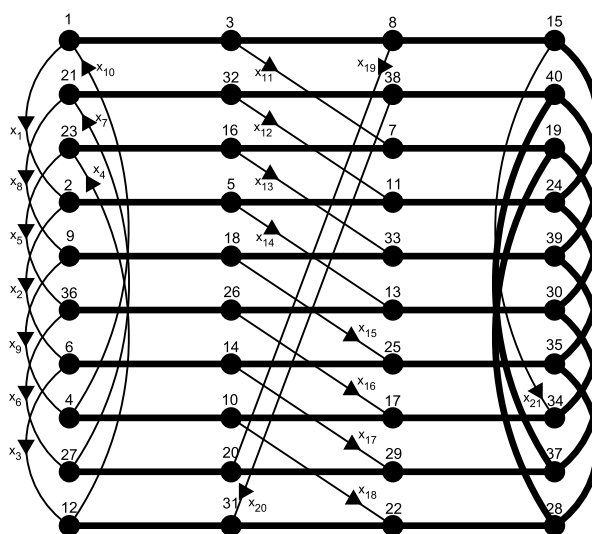
**Lema 3.1.9** *Če je  $\Gamma_N \cong F040A$ , potem je  $\Gamma \cong F080A$ .*

**DOKAZ.** Graf F040A je prikazan na sliki 3.8 in je edini povezan kubičen simetričen graf reda 40. Je 3-regularen, njegova ožina pa je 8 (glej [8]). Izberimo naslednje avtomorfizme grafa F040A

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (1, 21, 23, 2, 9, 36, 6, 4, 27, 12)(3, 32, 16, 5, 18, 26, 14, 10, 20, 31) \\
&\quad (8, 38, 7, 11, 33, 13, 25, 17, 29, 22)(15, 40, 19, 24, 39, 30, 35, 34, 37, 28), \\
\beta_1 &= (1, 32, 30)(2, 11, 13)(3, 21, 37)(4, 38, 19)(6, 24, 26)(7, 9, 40)(8, 27, 29) \\
&\quad (10, 31, 28)(12, 35, 17)(14, 15, 36)(16, 18, 39)(23, 25, 34)(5)(20)(22)(33), \\
\gamma &= (1, 4)(2, 9)(3, 10)(5, 18)(6, 21)(7, 17)(8, 22)(11, 25)(12, 27)(13, 33) \\
&\quad (14, 32)(15, 28)(16, 26)(19, 34)(20, 31)(23, 36)(24, 35)(29, 38)(30, 39)(37, 40), \\
\delta &= (5, 6)(7, 8)(9, 10)(11, 12)(13, 14)(15, 16)(17, 18)(19, 20)(21, 22)(23, 24) \\
&\quad (25, 26)(27, 28)(29, 30)(31, 32)(33, 34)(35, 36)(1)(2)(3)(4)(37)(38)(39)(40), \\
\alpha_2 &= (1, 28, 5, 31, 26, 40, 27, 33, 8, 25)(2, 22, 13, 38, 36, 39, 20, 18, 3, 35) \\
&\quad (4, 19, 11, 12, 17, 37, 21, 16, 15, 14)(6, 10, 30, 32, 23, 34, 29, 9, 7, 24), \\
\beta_2 &= (1, 13, 40, 18)(2, 30, 39, 9)(3, 26, 38, 25)(4, 5, 37, 33)(6, 19, 34, 21) \\
&\quad (7, 17, 32, 14)(8, 36, 31, 35)(10, 11, 29, 16)(12, 28, 15, 27)(20, 23, 22, 24).
\end{aligned}$$

Potem je grupa avtomorfizmov  $\text{Aut}(F040A) = \langle \alpha_1, \beta_1, \gamma, \delta \rangle = \langle \alpha_2, \beta_2, \delta \rangle$ . Vsaka podgrupa grupe avtomorfizmov  $\text{Aut}(F040A)$ , ki je brez jedra in je generirana s (4, 10)-polregularnim avtomorfizmom, je konjugirana ciklični podgrupi  $\langle \alpha_1 \rangle$ . Vsaka

podgrupa grupe avtomorfizmov  $\text{Aut}(F040A)$ , ki ima jedro in je generirana s  $(4, 10)$ -polregularnim avtomorfizmom, pa je konjugirana ciklični podgrupi  $\langle \alpha_2 \rangle$ . Poleg tega je vsaka prava ločno tranzitivna podgrupa v grupi avtomorfizmov  $\text{Aut}(F040A)$  konjugirana eni od naslednjih treh podgrup:  $H_1 = \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$ ,  $H_2 = \langle \alpha_1, \beta_1, \gamma \rangle$  ali  $H_3 = \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle$ . Velja še, da je podgrupa  $H_1$  1-regularna, podgrupi  $H_2$  in  $H_3$  sta 2-regularni,  $H_1 \leq H_2$ , podgrupa  $H_3$  pa ne vsebuje podgrupe, ki je generirana s  $(4, 10)$ -polregularnim avtomorfizmom in ne vsebuje jedra. Vse to lahko neposredno preverimo s programskim paketom MAGMA [4]. Torej zadošča, da poiščemo tiste ločno tranzitivne regularne  $\mathbb{Z}_r$ -krove grafa F040A, za katere se dvigne podgrupa  $H_1$  in dvigi avtomorfizma  $\alpha_1$  centralizirajo grupo krovnih transformacij ter imajo natanko 4 orbite dolžine  $n$  na krovnem grafu  $\Gamma$ .



Slika 3.8: Dodelitev napetosti  $\zeta$  grafu F040A. Vpeto drevo vsebuje neusmerjene odebeljene povezave, ki imajo trivialne napetosti.

Vsak tak krov  $\Gamma$  lahko dobimo iz grafa F040A z ustrezno  $T$ -reducirano dodelitvijo napetosti  $\zeta: A(F040A) \rightarrow \mathbb{Z}_r$ , kjer je  $T$  vpeto drevo grafa F040A, ki vsebuje povezave

$\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 8\}, \{4, 10\}, \{5, 11\}, \{6, 14\}, \{7, 16\}, \{7, 19\}, \{8, 15\}, \{9, 18\}, \{10, 17\}, \{11, 24\}, \{12, 31\}, \{13, 26\}, \{13, 30\}, \{14, 25\}, \{15, 24\}, \{16, 23\}, \{17, 34\}, \{18, 33\}, \{19, 28\}, \{19, 30\}, \{20, 27\}, \{20, 29\}, \{21, 32\}, \{22, 28\}, \{22, 31\}, \{24, 35\}, \{25, 35\}, \{26, 36\}, \{28, 35\}, \{29, 37\}, \{30, 37\}, \{32, 38\}, \{33, 39\}, \{34, 39\}, \{37, 40\}, \{38, 40\}, \{39, 40\}$  (glej tudi sliko 3.8).

V grafu F040A je 21 fundamentalnih ciklov, ki so generirani z naslednjimi enaindvajsetimi loki, ki ne pripadajo vpetemu drevesu  $T$ :  $(1, 2), (2, 6), (6, 12), (12, 23), (23, 36), (36, 27), (27, 21), (21, 9), (9, 4), (4, 1), (3, 7), (32, 11), (16, 33), (5, 13), (18, 25), (26, 17), (14, 29), (10, 22), (8, 20), (38, 31)$  in  $(15, 34)$  (vsi ti cikli in njihove

napetosti glede na avtomorfizma  $\alpha_1$  in  $\beta_1$  so navedeni v tabelah 3.9 in 3.10).

Vrstica		$C$	$\zeta(C)$	$C^{\alpha_1}$	$\zeta(C^{\alpha_1})$
A.1	$C_1$	1, 2, 5, 11, 24, 15, 8, 3, 1	$x_1$	21, 9, 18, 33, 39, 40, 38, 32, 21	$x_8$
A.2	$C_2$	2, 6, 14, 25, 35, 24, 11, 5, 2	$x_2$	9, 4, 10, 17, 34, 39, 33, 18, 9	$x_9$
A.3	$C_3$	6, 12, 31, 22, 28, 35, 25, 14, 6	$x_3$	4, 1, 3, 8, 15, 34, 17, 10, 4	$x_{10} + x_{21}$
A.4	$C_4$	12, 23, 16, 7, 19, 28, 22, 31, 12	$x_4$	1, 2, 5, 11, 24, 15, 8, 3, 1	$x_1$
A.5	$C_5$	23, 36, 26, 13, 30, 19, 7, 16, 23	$x_5$	2, 6, 14, 25, 35, 24, 11, 5, 2	$x_2$
A.6	$C_6$	36, 27, 20, 29, 37, 30, 13, 26, 36	$x_6$	6, 12, 31, 22, 28, 35, 25, 14, 6	$x_3$
A.7	$C_7$	27, 21, 32, 38, 40, 37, 29, 20, 27	$x_7$	12, 23, 16, 7, 19, 28, 22, 31, 12	$x_4$
A.8	$C_8$	21, 9, 18, 33, 39, 40, 38, 32, 21	$x_8$	23, 36, 26, 13, 30, 19, 7, 16, 23	$x_5$
A.9	$C_9$	9, 4, 10, 17, 34, 39, 33, 18, 9	$x_9$	36, 27, 20, 29, 37, 30, 13, 26, 36	$x_6$
A.10	$C_{10}$	4, 1, 3, 8, 15, 24, 35, 28, 19, 30, 37, 40, 39, 34, 17, 10, 4	$x_{10}$	27, 21, 32, 38, 40, 39, 34, 15, 24, 35, 28, 19, 30, 37, 29, 20, 27	$x_7 - x_{21}$
A.11	$C_{11}$	3, 7, 19, 28, 35, 24, 15, 8, 3	$x_{11}$	32, 11, 24, 15, 34, 39, 40, 38, 32	$x_{12} + x_{21}$
A.12	$C_{12}$	32, 11, 24, 35, 28, 19, 30, 37, 40, 38, 32	$x_{12}$	16, 33, 39, 34, 15, 24, 35, 28, 19, 7, 16	$x_{13} - x_{21}$
A.13	$C_{13}$	16, 33, 39, 40, 37, 30, 19, 7, 16	$x_{13}$	5, 13, 30, 19, 28, 35, 24, 11, 5	$x_{14}$
A.14	$C_{14}$	5, 13, 30, 19, 28, 35, 24, 11, 5	$x_{14}$	18, 25, 35, 24, 15, 34, 39, 33, 18	$x_{15} + x_{21}$
A.15	$C_{15}$	18, 25, 35, 28, 19, 30, 37, 40, 39, 33, 18	$x_{15}$	26, 17, 34, 15, 24, 35, 28, 19, 30, 13, 26	$x_{16} - x_{21}$
A.16	$C_{16}$	26, 17, 34, 39, 40, 37, 30, 13, 26	$x_{16}$	14, 29, 37, 30, 19, 28, 35, 25, 14	$x_{17}$
A.17	$C_{17}$	14, 29, 37, 30, 19, 28, 35, 25, 14	$x_{17}$	10, 22, 28, 35, 24, 15, 34, 17, 10	$x_{18} + x_{21}$
A.18	$C_{18}$	10, 22, 28, 19, 30, 37, 40, 39, 34, 17, 10	$x_{18}$	20, 8, 15, 24, 35, 28, 19, 30, 37, 29, 20	$-x_{19}$
A.19	$C_{19}$	8, 20, 29, 37, 30, 19, 28, 35, 24, 15, 8	$x_{19}$	38, 31, 22, 28, 35, 24, 15, 34, 39, 40, 38	$x_{20} + x_{21}$
A.20	$C_{20}$	38, 31, 22, 28, 19, 30, 37, 40, 38	$x_{20}$	7, 3, 8, 15, 24, 35, 28, 19, 7	$-x_{11}$
A.21	$C_{21}$	15, 34, 39, 40, 37, 30, 19, 28, 35, 24, 15	$x_{21}$	40, 37, 30, 19, 28, 35, 24, 15, 34, 39, 40	$x_{21}$

Tabela 3.9: Fundamentalni cikli in njihove slike z ustreznimi napetostmi v grafu F040A glede na avtomorfizem  $\alpha_1$ .

Obravnavajmo preslikavi  $\bar{\alpha}_1$  in  $\bar{\beta}_1$  iz množice  $S = \{x_i \mid i \in \{1, 2, \dots, 21\}\}$ , ki je množica napetosti vseh enainvajsetih fundamentalnih ciklov grafa F040A, v napetostno grupo  $\mathbb{Z}_r$ . Ker je graf  $\Gamma$  povezan, je  $\mathbb{Z}_r = \langle S \rangle$ . Po trditvi 2.2.1 lahko preslikavi  $\bar{\alpha}_1$  in  $\bar{\beta}_1$  razširimo do avtomorfizmov  $\alpha_1^*$  in  $\beta_1^*$  grupe  $\mathbb{Z}_r$ . Ker dvigi avtomorfizma  $\alpha_1$  centralizirajo grupo krovnih transformacij, po trditvi 2.2.3 sledi, da je  $\alpha_1^* = \text{id} \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_r)$ .

Iz tabel 3.9 in 3.10 lahko dobimo naslednje informacije. Iz vrstic A.7, A.4, A.1, A.8, A.5, A.2, A.9, A.6 in A.3 dobimo, da je  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} + x_{21}$ . Iz vrstic A.11, A.12, A.13, A.14, A.15, A.16 in A.20 dobimo, da je  $x_{11} = x_{13} = x_{14} = x_{16} = x_{17} = -x_{20}$ . Iz vrstic A.12, A.15, A.17 in A.18 pa dobimo, da je  $x_{12} = x_{15} = x_{18} = -x_{19} = x_{11} - x_{21}$ . Če združimo vse te enakosti skupaj, dobimo, da je  $\mathbb{Z}_r = \langle x_{10}, x_{11}, x_{21} \rangle$ . Iz vrstic B.2 in B.3 sledi, da je  $x_2^{\beta_1^*} = x_{21} - x_{16} - x_{14} = x_{21} - x_{11} - x_{11} = -2x_{11} + x_{21}$  in  $x_3^{\beta_1^*} = -x_{18} - x_{21} = -x_{11} + x_{21} - x_{21} = -x_{11}$ . Ker je  $x_2 = x_3$ , dobimo, da je  $x_{21} = x_{11}$  in je zato  $\mathbb{Z}_r = \langle x_{10}, x_{11} \rangle$ . Podobno iz vrstic B.3 in B.4 sledi, da je  $x_3^{\beta_1^*} = -x_{11}$  in  $x_4^{\beta_1^*} = -x_{15} + x_9 + x_{18} = x_{10} + x_{11}$ . Ker je  $x_3 = x_4$ , dobimo, da je  $x_{10} = -2x_{11}$  in je zato  $\mathbb{Z}_r = \langle x_{11} \rangle$ .

Po trditvi 2.2.2 lahko, brez škode za splošnost, predpostavimo, da je  $x_{11} = 1$ .



Iz vrstic B.11 in B.17 sedaj sledi, da je  $x_{11}^{\beta_1^*} = x_8 + x_9 - x_{16} + x_6 + x_7 = -5x_{11}$  in  $x_{17}^{\beta_1^*} = -x_{10} - x_{21} = x_{11}$ . Ker je  $x_{11} = x_{17}$ , dobimo, da je  $6x_{11} = 0$  in je zato  $6 = 0$ . Torej je  $r \in \{2, 3, 6\}$  in moramo obravnavati tri primere.

Vrstica		$C$	$\zeta(C)$	$C^{\beta_1}$	$\zeta(C^{\beta_1})$
B.1	$C_1$	1, 2, 5, 11, 24, 15, 8, 3, 1	$x_1$	32, 11, 5, 13, 26, 36, 27, 21, 32	$x_{12} + x_{14}$ $+x_6 + x_7$
B.2	$C_2$	2, 6, 14, 25, 35, 24, 11, 5, 2	$x_2$	11, 24, 15, 34, 17, 26, 13, 5, 11	$x_{21} - x_{16} - x_{14}$
B.3	$C_3$	6, 12, 31, 22, 28, 35, 25, 14, 6	$x_3$	24, 35, 28, 22, 10, 17, 34, 15, 24	$-x_{18} - x_{21}$
B.4	$C_4$	12, 23, 16, 7, 19, 28, 22, 31, 12	$x_4$	35, 25, 18, 9, 4, 10, 22, 28, 35	$-x_{15} + x_9 + x_{18}$
B.5	$C_5$	23, 36, 26, 13, 30, 19, 7, 16, 23	$x_5$	25, 14, 6, 2, 1, 4, 9, 18, 25	$-x_2 - x_1 - x_{10}$ $-x_9 + x_{15}$
B.6	$C_6$	36, 27, 20, 29, 37, 30, 13, 26, 36	$x_6$	14, 29, 20, 8, 3, 1, 2, 6, 14	$x_{17} - x_{19}$ $+x_1 + x_2$
B.7	$C_7$	27, 21, 32, 38, 40, 37, 29, 20, 27	$x_7$	29, 37, 30, 19, 7, 3, 8, 20, 29	$-x_{11} + x_{19}$
B.8	$C_8$	21, 9, 18, 33, 39, 40, 38, 32, 21	$x_8$	37, 40, 39, 33, 16, 7, 19, 30, 37	$-x_{13}$
B.9	$C_9$	9, 4, 10, 17, 34, 39, 33, 18, 9	$x_9$	40, 38, 31, 12, 23, 16, 33, 39, 40	$x_{20} + x_4 + x_{13}$
B.10	$C_{10}$	4, 1, 3, 8, 15, 24, 35, 28, 19, 30, 37, 40, 39, 34, 17, 10, 4	$x_{10}$	38, 32, 21, 27, 36, 26, 17, 10, 4, 1, 3, 7, 16, 23, 12, 31, 38	$-x_7 - x_6 + x_{16}$ $+x_{10} + x_{11}$ $-x_4 - x_{20}$
B.11	$C_{11}$	3, 7, 19, 28, 35, 24, 15, 8, 3	$x_{11}$	21, 9, 4, 10, 17, 26, 36, 27, 21	$x_8 + x_9 - x_{16}$ $+x_6 + x_7$
B.12	$C_{12}$	32, 11, 24, 35, 28, 19, 30, 37, 40, 38, 32	$x_{12}$	30, 13, 26, 17, 10, 4, 1, 3, 7, 19, 30	$x_{16} + x_{10} + x_{11}$
B.13	$C_{13}$	16, 33, 39, 40, 37, 30, 19, 7, 16	$x_{13}$	18, 33, 16, 7, 3, 1, 4, 9, 18	$-x_{13} - x_{11}$ $-x_{10} - x_9$
B.14	$C_{14}$	5, 13, 30, 19, 28, 35, 24, 11, 5	$x_{14}$	5, 2, 1, 4, 10, 17, 26, 13, 5	$-x_1 - x_{10}$ $-x_{16} - x_{14}$
B.15	$C_{15}$	18, 25, 35, 28, 19, 30, 37, 40, 39, 33, 18	$x_{15}$	39, 34, 17, 10, 4, 1, 3, 7, 16, 33, 39	$x_{10} + x_{11} + x_{13}$
B.16	$C_{16}$	26, 17, 34, 39, 40, 37, 30, 13, 26	$x_{16}$	6, 12, 23, 16, 7, 3, 1, 2, 6	$x_3 + x_4 - x_{11}$ $+x_1 + x_2$
B.17	$C_{17}$	14, 29, 37, 30, 19, 28, 35, 25, 14	$x_{17}$	15, 8, 3, 1, 4, 10, 17, 34, 15	$-x_{10} - x_{21}$
B.18	$C_{18}$	10, 22, 28, 19, 30, 37, 40, 39, 34, 17, 10	$x_{18}$	31, 22, 10, 4, 1, 3, 7, 16, 23, 12, 31	$-x_{18} + x_{10}$ $+x_{11} - x_4$
B.19	$C_{19}$	8, 20, 29, 37, 30, 19, 28, 35, 24, 15, 8	$x_{19}$	27, 20, 8, 3, 1, 4, 10, 17, 26, 36, 27	$-x_{19} - x_{10}$ $-x_{16} + x_6$
B.20	$C_{20}$	38, 31, 22, 28, 19, 30, 37, 40, 38	$x_{20}$	19, 28, 22, 10, 4, 1, 3, 7, 19	$-x_{18} + x_{10} + x_{11}$
B.21	$C_{21}$	15, 34, 39, 40, 37, 30, 19, 28, 35, 24, 15	$x_{21}$	36, 23, 16, 7, 3, 1, 4, 10, 17, 26, 36	$-x_5 - x_{11}$ $-x_{10} - x_{16}$

Tabela 3.10: Fundamentalni cikli in njihove slike z ustreznimi napetostmi v grafu F040A glede na avtomorfizem  $\beta_1$ .

Če je  $r = 2$ , potem je graf  $\Gamma$  reda 80. Edini povezan kubičen simetričen graf reda 80 je graf F080A, ki je dejansko iskani ciklični krov grafa F040A.

Če je  $r = 3$ , potem je graf  $\Gamma$  reda 120. Edini povezan kubičen simetričen tetracirkulant reda 120 je graf F120B, toda ta graf ni iskani ciklični krov grafa F040A.

Če je  $r = 6$ , potem je graf  $\Gamma$  reda 240. Edini povezan kubičen simetričen tetracirkulant reda 240 je graf F240C, toda tudi ta graf ni iskani ciklični krov grafa F040A. ■

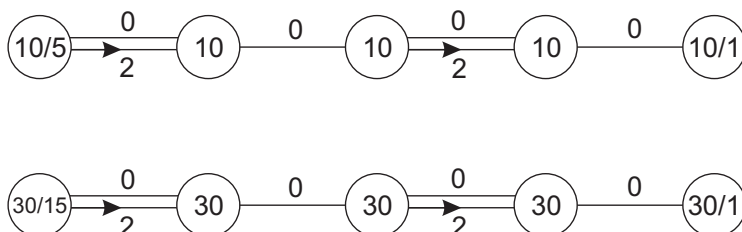
### 3.1.3 Dokaz izreka 3.0.5

DOKAZ IZREKA 3.0.5: Naj bo  $\Gamma$  povezan kubičen simetričen tetracirkulant s  $(4, n)$ -polregularnim avtomorfizmom  $\rho \in \text{Aut}(\Gamma)$ . Če je graf  $\Gamma$  brez jedra, potem je po lemi 3.1.1 izomorfen enemu od naslednjih sedmih grafov: F008A, F020A, F020B, F024A, F028A, F032A ali F040A.

Predpostavimo sedaj, da graf  $\Gamma$  ima jedro. To pomeni, da v podgrupi  $\langle \rho \rangle$  obstaja netrivialna podgrupa  $N$ , ki je podgrupa edinka v celi grupi avtomorfizmov  $\text{Aut}(\Gamma)$ . Po trditvi 3.0.8 je kvocientni graf  $\Gamma_N$  bodisi izomorfen polnemu grafu F004A ali pa je povezan kubičen simetričen tetracirkulant brez jedra in je zato po lemi 3.1.1 izomorfen enemu od grafov F008A, F020A, F020B, F024A, F028A, F032A ali F040A. V bistvu to pomeni, da je graf  $\Gamma$  izomorfen regularnemu  $\mathbb{Z}_r$ -krovu kvocientnega grafa  $\Gamma_N$ , kjer je  $|N| = r$ . Izrek sedaj sledi iz lem 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6, 3.1.7, 3.1.8 in 3.1.9. ■

## 3.2 Kubični simetrični pentacirkulanti

V tem razdelku bomo dokazali, da sta grafa F050A in F150A, ki sta v Fruchtovi notaciji prikazana na sliki 3.9, edina povezana kubična simetrična pentacirkulanta. Najprej bomo s prvo lemo, ki sledi, dokazali, da je graf F050A edini povezan kubičen simetričen pentacirkulant brez jedra.



Slika 3.9: Pentacirkulanta F050A in F150A v Fruchtovi notaciji glede na  $(5, n)$ -polregularen avtomorfizem.

**Lema 3.2.1** Graf  $\Gamma \in \cup_{n \geq 2} \mathcal{C}(5, n)$  je brez jedra natanko tedaj, ko je izomorfen grafu F050A.

DOKAZ. Naj bo  $\Gamma$  povezan kubičen  $s$ -ločno tranzitiven pentacirkulant brez jedra reda  $o = 5n$ . Iz [3, Proposition 18.1] sledi, da je grupa avtomorfizmov  $\text{Aut}(\Gamma)$  regularna na množici  $s$ -lokov grafa  $\Gamma$ . Po Tutteovem izreku (glej [3, Theorem 18.6]) je  $s \leq 5$ . Od tod sledi, da je  $|\text{Aut}(\Gamma)| = 3 \cdot 2^{s-1} \cdot 5n = 15 \cdot 2^{s-1} \cdot n \leq 240n$ . Ker je graf  $\Gamma$  brez jedra, obstaja tak  $(5, n)$ -polregularen avtomorfizem  $\rho \in \text{Aut}(\Gamma)$ , da ima ciklična podgrupa  $\langle \rho \rangle$  trivialno jedro v grupi avtomorfizmov  $\text{Aut}(\Gamma)$ . Po trditvi 3.0.7

dobimo, da je  $n^2 < |\text{Aut}(\Gamma)|$  oziroma, da je  $n < 240$ . Za posamezne vrednosti  $s \leq 5$  dobimo naslednje rezultate.

Če je  $s = 1$ , potem je  $n^2 < |\text{Aut}(\Gamma)| = 15n$ . Od tod sledi, da je  $n < 15$  in  $o = 5n < 75$ . S pomočjo seznama vseh povezanih kubičnih simetričnih grafov do reda 768 (glej [8]) ugotovimo, da ni nobenega povezanega kubičnega 1-regularnega grafa, katerega red je deljiv s 5 in je manjši od 75.

Če je  $s = 2$ , potem je  $n^2 < |\text{Aut}(\Gamma)| = 30n$ . Od tod sledi, da je  $n < 30$  in  $o = 5n < 150$ . Edini povezani kubični 2-regularni grafi, katerih red je deljiv s 5 in manjši od 150, so F020A, F050A, F060A, F120A in F120B. Preverimo lahko, da je med njimi le graf F050A pentacirkulant, grafi F020A, F060A, F120A in F120B pa niso.

Če je  $s = 3$ , potem je  $n^2 < |\text{Aut}(\Gamma)| = 60n$ . Od tod sledi, da je  $n < 60$  in  $o = 5n < 300$ . Edini povezani kubični 3-regularni grafi, ki zadoščajo temu pogoju, so F010A, F020B, F040A, F080A, F110A in F220C, vendar nobeden od teh grafov ni pentacirkulant.

Če je  $s = 4$ , potem je  $n^2 < |\text{Aut}(\Gamma)| = 120n$ . Od tod sledi, da je  $n < 120$  in  $o = 5n < 600$ . S pomočjo seznama vseh povezanih kubičnih simetričnih grafov do reda 768 (glej [8]) ugotovimo, da ni nobenega povezanega kubičnega 4-regularnega grafa, katerega red je deljiv s 5 in je manjši od 600.

Če je  $s = 5$ , potem je  $n^2 < |\text{Aut}(\Gamma)| = 240n$ . Od tod sledi, da je  $n < 240$  in  $o = 5n < 1200$ . Glede na seznam kubičnih simetričnih grafov [7], so edini povezani kubični 5-regularni grafi, ki zadoščajo temu pogoju, grafi F030A, F090A in F650B, ki pa niso pentacirkulanti.

Iz teh rezultatov sledi, da je graf F050A edini povezan kubičen simetričen pentacirkulant brez jedra. Da je ta graf res pentacirkulant, ostali grafi, ki so navedeni zgoraj, pa niso, preverimo s programskim paketom MAGMA [4]. ■

### 3.2.1 Dokaz izreka 3.0.6

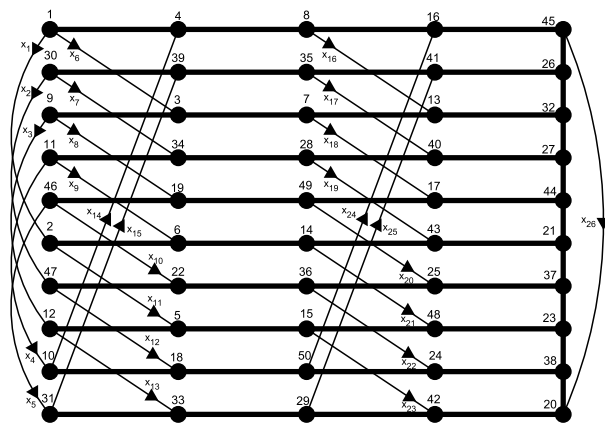
**DOKAZ IZREKA 3.0.6:** Naj bo  $\Gamma$  povezan kubičen simetričen pentacirkulant s  $(5, n)$ -polregularnim avtomorfizmom  $\rho \in \text{Aut}(\Gamma)$ . Če je graf  $\Gamma$  brez jedra, potem je po lemi 3.2.1 izomorfen grafu F050A.

Predpostavimo sedaj, da graf  $\Gamma$  ima jedro. Potem obstaja taka netrivialna podgrupa  $N$  ciklične podgrupe  $\langle \rho \rangle$ , da je  $N$  podgrupa edinka v grupi avtomorfizmov  $\text{Aut}(\Gamma)$ . Po trditvi 3.0.9 je kvocientni graf  $\Gamma_N$  povezan kubičen simetričen pentacirkulant brez jedra in je zato po lemi 3.2.1 izomorfen grafu F050A. V bistvu je zato graf  $\Gamma$  izomorfen regularnemu  $\mathbb{Z}_r$ -krovu tega kvocientnega grafa, kjer je  $|N| = r$ . Poleg tega velja še, da se avtomorfizem  $\rho$  grafa  $\Gamma$  projecira na  $(5, n/r)$ -polregularen avtomorfizem kvocientnega grafa  $\Gamma_N$ .

Graf F050A je prikazan na sliki 3.10. Znano je, da je graf F050A edini povezan kubičen simetričen graf reda 50. Ta graf je 2-regularen, ima ožino 6 in je Cayleyjev graf posplošene diedrske grupe (glej [2, 8]). Izberimo naslednje avtomorfizme grafa

F050A

$$\begin{aligned}
\alpha &= (1, 30, 9, 11, 46, 2, 47, 12, 10, 31)(4, 39, 3, 34, 19, 6, 22, 5, 18, 33) \\
&\quad (8, 35, 7, 28, 49, 14, 36, 15, 50, 29)(16, 41, 13, 40, 17, 43, 25, 48, 24, 42) \\
&\quad (45, 26, 32, 27, 44, 21, 37, 23, 38, 20), \\
\beta &= (1)(35)(2, 4, 3)(5, 10, 7)(6, 8, 9)(11, 13, 12)(14, 16, 19)(15, 18, 17)(20, 22, 21) \\
&\quad (23, 24, 25)(26, 31, 28)(27, 29, 30)(32, 33, 34)(36, 37, 38)(39, 40, 41)(42, 47, 44) \\
&\quad (43, 45, 46)(48, 50, 49), \\
\gamma &= (1)(2)(13)(22)(23)(32)(35)(36)(39)(48)(3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10)(11, 12)(14, 15) \\
&\quad (16, 17)(18, 19)(20, 21)(24, 25)(26, 27)(28, 29)(30, 31)(33, 34)(37, 38)(40, 41) \\
&\quad (42, 43)(44, 45)(46, 47)(49, 50).
\end{aligned}$$



Slika 3.10: Dodelitev napetosti  $\zeta$  grafu F050A. Vpeto drevo vsebuje neusmerjene odebeljene povezave, ki imajo trivialne napetosti.

Potem je grupa avtomorfizmov  $\text{Aut}(F050A) = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ . Naj bo  $H = \langle \alpha, \beta \rangle$ . S programskim paketom MAGMA [4] lahko neposredno preverimo, da je vsak  $(5, 10)$ -polregularen avtomorfizem grafa F050A konjugiran avtomorfizmu  $\alpha$  in da vsaka prava ločno tranzitivna podgrupa grupe avtomorfizmov  $\text{Aut}(F050A)$ , ki vsebuje avtomorfizem  $\alpha$ , vsebuje tudi podgrupo  $H$ . Po trditvi 2.2.4 lahko, brez škode za splošnost, predpostavimo, da se avtomorfizem  $\rho$  grafa  $\Gamma$  projecira na avtomorfizem  $\alpha$  grafa F050A (kar pomeni, da dvigi avtomorfizma  $\alpha$  centralizirajo grupo krovnih transformacij  $N$ ) in da se podgrupa  $H$  dvigne v podgrupo grupe avtomorfizmov  $\text{Aut}(\Gamma)$ .

Vsak tak krov  $\Gamma$  lahko dobimo iz grafa F050A z ustrezno  $T$ -reducirano dodelitvijo napetosti  $\zeta: A(F050A) \rightarrow \mathbb{Z}_r$ , kjer je  $T$  vpeto drevo grafa F050A, ki vsebuje povezave

$$\{1, 4\}, \{4, 8\}, \{8, 16\}, \{16, 45\}, \{30, 39\}, \{39, 35\}, \{35, 41\}, \{41, 26\}, \{9, 3\}, \{3, 7\}, \{7, 13\}, \{13, 32\}, \{11, 34\}, \{34, 28\}, \{28, 40\}, \{40, 27\}, \{46, 19\}, \{19, 49\}, \{49, 17\},$$

$\{17, 44\}$ ,  $\{2, 6\}$ ,  $\{6, 14\}$ ,  $\{14, 43\}$ ,  $\{43, 21\}$ ,  $\{47, 22\}$ ,  $\{22, 36\}$ ,  $\{36, 25\}$ ,  $\{25, 37\}$ ,  $\{12, 5\}$ ,  $\{5, 15\}$ ,  $\{15, 48\}$ ,  $\{48, 23\}$ ,  $\{10, 18\}$ ,  $\{18, 50\}$ ,  $\{50, 24\}$ ,  $\{24, 38\}$ ,  $\{31, 33\}$ ,  $\{33, 29\}$ ,  $\{29, 42\}$ ,  $\{42, 20\}$ ,  $\{45, 26\}$ ,  $\{26, 32\}$ ,  $\{32, 27\}$ ,  $\{27, 44\}$ ,  $\{44, 21\}$ ,  $\{21, 37\}$ ,  $\{37, 23\}$ ,  $\{23, 38\}$ ,  $\{38, 20\}$  (glej tudi sliko 3.10).

Vrstice		$C$	$\zeta(C)$	$C^\alpha$	$\zeta(C^\alpha)$
A.1	$C_1$	1, 2, 6, 14, 43, 21, 44, 27, 32, 26, 45, 16, 8, 4, 1	$x_1$	30, 47, 22, 36, 25, 37, 21, 44, 27, 32, 26, 41, 35, 39, 30	$x_2$
A.2	$C_2$	30, 47, 22, 36, 25, 37, 21, 44, 27, 32, 26, 41, 35, 39, 30	$x_2$	9, 12, 5, 15, 48, 23, 37, 21, 44, 27, 32, 13, 7, 3, 9	$x_3$
A.3	$C_3$	9, 12, 5, 15, 48, 23, 37, 21, 44, 27, 32, 13, 7, 3, 9	$x_3$	11, 10, 18, 50, 24, 38, 23, 37, 21, 44, 27, 40, 28, 34, 11	$x_4$
A.4	$C_4$	11, 10, 18, 50, 24, 38, 23, 37, 21, 44, 27, 40, 28, 34, 11	$x_4$	46, 31, 33, 29, 42, 20, 38, 23, 37, 21, 44, 17, 49, 19, 46	$x_5$
A.5	$C_5$	46, 31, 33, 29, 42, 20, 38, 23, 37, 21, 44, 17, 49, 19, 46	$x_5$	2, 1, 4, 8, 16, 45, 20, 38, 23, 37, 21, 43, 14, 6, 2	$-x_1 + x_{26}$
A.6	$C_6$	1, 3, 7, 13, 32, 26, 45, 16, 8, 4, 1	$x_6$	30, 34, 28, 40, 27, 32, 26, 41, 35, 39, 30	$x_7$
A.7	$C_7$	30, 34, 28, 40, 27, 32, 26, 41, 35, 39, 30	$x_7$	9, 19, 49, 17, 44, 27, 32, 13, 7, 3, 9	$x_8$
A.8	$C_8$	9, 19, 49, 17, 44, 27, 32, 13, 7, 3, 9	$x_8$	11, 6, 14, 43, 21, 44, 27, 40, 28, 34, 11	$x_9$
A.9	$C_9$	11, 6, 14, 43, 21, 44, 27, 40, 28, 34, 11	$x_9$	46, 22, 36, 25, 37, 21, 44, 17, 49, 19, 46	$x_{10}$
A.10	$C_{10}$	46, 22, 36, 25, 37, 21, 44, 17, 49, 19, 46	$x_{10}$	2, 5, 15, 48, 23, 37, 21, 43, 14, 6, 2	$x_{11}$
A.11	$C_{11}$	2, 5, 15, 48, 23, 37, 21, 43, 14, 6, 2	$x_{11}$	47, 18, 50, 24, 38, 23, 37, 25, 36, 22, 47	$x_{12}$
A.12	$C_{12}$	47, 18, 50, 24, 38, 23, 37, 25, 36, 22, 47	$x_{12}$	12, 33, 29, 42, 20, 38, 23, 48, 15, 5, 12	$x_{13}$
A.13	$C_{13}$	12, 33, 29, 42, 20, 38, 23, 48, 15, 5, 12	$x_{13}$	10, 4, 8, 16, 45, 20, 38, 24, 50, 18, 10	$x_{14} + x_{26}$
A.14	$C_{14}$	10, 4, 8, 16, 45, 26, 32, 27, 44, 21, 37, 23, 38, 24, 50, 18, 10	$x_{14}$	31, 39, 35, 41, 26, 32, 27, 44, 21, 37, 23, 38, 20, 42, 29, 33, 31	$x_{15}$
A.15	$C_{15}$	31, 39, 35, 41, 26, 32, 27, 44, 21, 37, 23, 38, 20, 42, 29, 33, 31	$x_{15}$	1, 3, 7, 13, 32, 27, 44, 21, 37, 23, 38, 20, 45, 16, 8, 4, 1	$x_6 - x_{26}$
A.16	$C_{16}$	8, 13, 32, 26, 45, 16, 8	$x_{16}$	35, 40, 27, 32, 26, 41, 35	$x_{17}$
A.17	$C_{17}$	35, 40, 27, 32, 26, 41, 35	$x_{17}$	7, 17, 44, 27, 32, 13, 7	$x_{18}$
A.18	$C_{18}$	7, 17, 44, 27, 32, 13, 7	$x_{18}$	28, 43, 21, 44, 27, 40, 28	$x_{19}$
A.19	$C_{19}$	28, 43, 21, 44, 27, 40, 28	$x_{19}$	49, 25, 37, 21, 44, 17, 49	$x_{20}$
A.20	$C_{20}$	49, 25, 37, 21, 44, 17, 49	$x_{20}$	14, 48, 23, 37, 21, 43, 14	$x_{21}$
A.21	$C_{21}$	14, 48, 23, 37, 21, 43, 14	$x_{21}$	36, 24, 38, 23, 37, 25, 36	$x_{22}$
A.22	$C_{22}$	36, 24, 38, 23, 37, 25, 36	$x_{22}$	15, 42, 20, 38, 23, 48, 15	$x_{23}$
A.23	$C_{23}$	15, 42, 20, 38, 23, 48, 15	$x_{23}$	50, 16, 45, 20, 38, 24, 50	$x_{24} + x_{26}$
A.24	$C_{24}$	50, 16, 45, 26, 32, 27, 44, 21, 37, 23, 38, 24, 50	$x_{24}$	29, 41, 26, 32, 27, 44, 21, 37, 23, 38, 20, 42, 29	$x_{25}$
A.25	$C_{25}$	29, 41, 26, 32, 27, 44, 21, 37, 23, 38, 20, 42, 29	$x_{25}$	8, 13, 32, 27, 44, 21, 37, 23, 38, 20, 45, 16, 8	$x_{16} - x_{26}$
A.26	$C_{26}$	45, 20, 38, 23, 37, 21, 44, 27, 32, 26, 45	$x_{26}$	26, 45, 20, 38, 23, 37, 21, 44, 27, 32, 26	$x_{26}$

Tabela 3.11: Fundamentalni cikli in njihove slike z ustreznimi napetostmi v grafu F050A glede na avtomorfizem  $\alpha$ .

V grafu F050A je 26 fundamentalnih ciklov, ki so generirani z naslednjimi šestindvajsetimi loki, ki ne pripadajo vpetemu drevesu  $T$ :  $(1, 2)$ ,  $(30, 47)$ ,  $(9, 12)$ ,  $(11, 10)$ ,  $(46, 31)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(30, 34)$ ,  $(9, 19)$ ,  $(11, 6)$ ,  $(46, 22)$ ,  $(2, 5)$ ,  $(47, 18)$ ,  $(12, 33)$ ,  $(10, 4)$ ,  $(31, 39)$ ,  $(8, 13)$ ,  $(35, 40)$ ,  $(7, 17)$ ,  $(28, 43)$ ,  $(49, 25)$ ,  $(14, 48)$ ,  $(36, 24)$ ,  $(15, 42)$ ,  $(50, 16)$ ,

(29, 41) in (45, 20).

<i>Vrstice</i>		$C$	$\zeta(C)$	$C^\beta$	$\zeta(C^\beta)$
B.1	$C_1$	1, 2, 6, 14, 43, 21, 44, 27, 32, 26, 45, 16, 8, 4, 1	$x_1$	1, 4, 8, 16, 45, 20, 42, 29, 33, 31, 46, 19, 9, 3, 1	$x_{26} - x_5$ $-x_8 - x_6$
B.2	$C_2$	30, 47, 22, 36, 25, 37, 21, 44, 27, 32, 26, 41, 35, 39, 30	$x_2$	27, 44, 21, 37, 23, 38, 20, 42, 29, 33, 31, 39, 35, 40, 27	$x_{15} + x_{17}$
B.3	$C_3$	9, 12, 5, 15, 48, 23, 37, 21, 44, 27, 32, 13, 7, 3, 9	$x_3$	6, 11, 10, 18, 50, 24, 38, 20, 42, 29, 33, 12, 5, 2, 6	$-x_9 + x_4$ $-x_{13} - x_{11}$
B.4	$C_4$	11, 10, 18, 50, 24, 38, 23, 37, 21, 44, 27, 40, 28, 34, 11	$x_4$	13, 7, 17, 49, 25, 36, 24, 38, 20, 42, 29, 41, 26, 32, 13	$x_{18} + x_{20}$ $+x_{22} + x_{25}$
B.5	$C_5$	46, 31, 33, 29, 42, 20, 38, 23, 37, 21, 44, 17, 49, 19, 46	$x_5$	43, 28, 34, 30, 47, 22, 36, 24, 38, 20, 42, 15, 48, 14, 43	$-x_{19} - x_7 + x_2$ $+x_{22} - x_{23} - x_{21}$
B.6	$C_6$	1, 3, 7, 13, 32, 26, 45, 16, 8, 4, 1	$x_6$	1, 2, 5, 12, 33, 31, 46, 19, 9, 3, 1	$x_1 + x_{11} + x_{13}$ $-x_5 - x_8 - x_6$
B.7	$C_7$	30, 34, 28, 40, 27, 32, 26, 41, 35, 39, 30	$x_7$	27, 32, 26, 41, 29, 33, 31, 39, 35, 40, 27	$-x_{25} + x_{15} + x_{17}$
B.8	$C_8$	9, 19, 49, 17, 44, 27, 32, 13, 7, 3, 9	$x_8$	6, 14, 48, 15, 42, 29, 33, 12, 5, 2, 6	$x_{21} + x_{23}$ $-x_{13} - x_{11}$
B.9	$C_9$	11, 6, 14, 43, 21, 44, 27, 40, 28, 34, 11	$x_9$	13, 8, 16, 45, 20, 42, 29, 41, 26, 32, 13	$-x_{16} + x_{26} + x_{25}$
B.10	$C_{10}$	46, 22, 36, 25, 37, 21, 44, 17, 49, 19, 46	$x_{10}$	43, 21, 37, 23, 38, 20, 42, 15, 48, 14, 43	$-x_{23} - x_{21}$
B.11	$C_{11}$	2, 5, 15, 48, 23, 37, 21, 43, 14, 6, 2	$x_{11}$	4, 10, 18, 50, 24, 38, 20, 45, 16, 8, 4	$-x_{14} - x_{26}$
B.12	$C_{12}$	47, 18, 50, 24, 38, 23, 37, 25, 36, 22, 47	$x_{12}$	44, 17, 49, 25, 36, 24, 38, 23, 37, 21, 44	$x_{20} + x_{22}$
B.13	$C_{13}$	12, 33, 29, 42, 20, 38, 23, 48, 15, 5, 12	$x_{13}$	11, 34, 30, 47, 22, 36, 24, 50, 18, 10, 11	$-x_7 + x_2$ $+x_{22} - x_4$
B.14	$C_{14}$	10, 4, 8, 16, 45, 26, 32, 27, 44, 21, 37, 23, 38, 24, 50, 18, 10	$x_{14}$	7, 3, 9, 19, 46, 31, 33, 29, 42, 20, 38, 24, 36, 25, 49, 17, 7	$x_8 + x_5 - x_{22}$ $-x_{20} - x_{18}$
B.15	$C_{15}$	31, 39, 35, 41, 26, 32, 27, 44, 21, 37, 23, 38, 20, 42, 29, 33, 31	$x_{15}$	28, 40, 35, 39, 31, 33, 29, 42, 20, 38, 24, 36, 22, 47, 30, 34, 28	$-x_{17} - x_{15} - x_{22}$ $-x_2 + x_7$
B.16	$C_{16}$	8, 13, 32, 26, 45, 16, 8	$x_{16}$	9, 12, 33, 31, 46, 19, 9	$x_3 + x_{13}$ $-x_5 - x_8$
B.17	$C_{17}$	35, 40, 27, 32, 26, 41, 35	$x_{17}$	35, 41, 29, 33, 31, 39, 35	$-x_{25} + x_{15}$
B.18	$C_{18}$	7, 17, 44, 27, 32, 13, 7	$x_{18}$	5, 15, 42, 29, 33, 12, 5	$x_{23} - x_{13}$
B.19	$C_{19}$	28, 43, 21, 44, 27, 40, 28	$x_{19}$	26, 45, 20, 42, 29, 41, 26	$x_{26} + x_{25}$
B.20	$C_{20}$	49, 25, 37, 21, 44, 17, 49	$x_{20}$	48, 23, 38, 20, 42, 15, 48	$-x_{23}$
B.21	$C_{21}$	14, 48, 23, 37, 21, 43, 14	$x_{21}$	16, 50, 24, 38, 20, 45, 16	$-x_{24} - x_{26}$
B.22	$C_{22}$	36, 24, 38, 23, 37, 25, 36	$x_{22}$	37, 25, 36, 24, 38, 23, 37	$x_{22}$
B.23	$C_{23}$	15, 42, 20, 38, 23, 48, 15	$x_{23}$	18, 47, 22, 36, 24, 50, 18	$-x_{12} + x_{22}$
B.24	$C_{24}$	50, 16, 45, 26, 32, 27, 44, 21, 37, 23, 38, 24, 50	$x_{24}$	49, 19, 46, 31, 33, 29, 42, 20, 38, 24, 36, 25, 49	$x_5 - x_{22} - x_{20}$
B.25	$C_{25}$	29, 41, 26, 32, 27, 44, 21, 37, 23, 38, 20, 42, 29	$x_{25}$	30, 39, 31, 33, 29, 42, 20, 38, 24, 36, 22, 47, 30	$-x_{15} - x_{22} - x_2$
B.26	$C_{26}$	45, 20, 38, 23, 37, 21, 44, 27, 32, 26, 45	$x_{26}$	46, 22, 36, 24, 38, 20, 42, 29, 33, 31, 46	$x_{10} + x_{22} - x_5$

Tabela 3.12: Fundamentalni cikli in njihove slike z ustreznimi napetostmi v grafu F050A glede na avtomorfizem  $\beta$ .

Obravnavajmo sedaj preslikavi  $\bar{\alpha}$  in  $\bar{\beta}$  iz množice  $S = \{x_i \mid i \in \{1, 2, \dots, 26\}\}$ , ki je množica napetosti vseh šestindvajsetih fundamentalnih ciklov grafa F050A, v

napetostno grupo  $\mathbb{Z}_r$  (glej tabeli 3.11 in 3.12, kjer so navedeni vsi cikli in njihove napetosti). Ker je graf  $\Gamma$  povezan, je  $\mathbb{Z}_r = \langle S \rangle$ . Po trditvi 2.2.1 lahko preslikavi  $\bar{\alpha}$  in  $\bar{\beta}$  razširimo do avtomorfizmov  $\alpha^*$  in  $\beta^*$  grupe  $\mathbb{Z}_r$ . Ker dvigi avtomorfizma  $\alpha$  centralizirajo grupo krovnih transformacij, po trditvi 2.2.3 sledi, da je  $\alpha^* = \text{id} \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_r)$ .

Sedaj lahko uporabimo informacije iz tabel 3.11 in 3.12. Iz tabele 3.11 dobimo, da je  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$ ,  $x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = x_{11} = x_{12} = x_{13}$ ,  $x_{14} = x_{15}$ ,  $x_{16} = x_{17} = x_{18} = x_{19} = x_{20} = x_{21} = x_{22} = x_{23}$  in  $x_{24} = x_{25}$ . Če združimo skupaj vse te enakosti, sledi, da je  $\mathbb{Z}_r = \langle x_1, x_6, x_{14}, x_{16}, x_{24}, x_{26} \rangle$ . Iz vrstice A.5 dobimo, da je  $x_5 = -x_1 + x_{26}$ . Ker je  $x_1 = x_5$ , je  $x_{26} = 2x_1$  in zato sledi, da je  $\mathbb{Z}_r = \langle x_1, x_6, x_{14}, x_{16}, x_{24} \rangle$ . Iz vrstice A.13 dobimo, da je  $x_{13} = x_{14} + x_{26} = x_{14} + 2x_1$ . Ker je  $x_6 = x_{13}$ , dobimo, da je  $x_6 = 2x_1 + x_{14}$  in je zato  $\mathbb{Z}_r = \langle x_1, x_{14}, x_{16}, x_{24} \rangle$ . Iz vrstice A.23 dobimo, da je  $x_{23} = x_{24} + x_{26} = x_{24} + 2x_1$ . Ker je  $x_{16} = x_{23}$ , dobimo, da je  $x_{16} = 2x_1 + x_{24}$  in je zato  $\mathbb{Z}_r = \langle x_1, x_{14}, x_{24} \rangle$ . Iz vrstice B.16 dobimo, da je  $x_{16}^{\beta^*} = x_3 + x_{13} - x_5 - x_8 = 0$ . Ker je  $x_{16} = 2x_1 + x_{24}$ , dobimo, da je  $x_{24} = -2x_1$  in je zato  $\mathbb{Z}_r = \langle x_1, x_{14} \rangle$ . Ker je  $x_{16} = x_{17}$ , iz vrstice B.17 dobimo, da je  $x_{15} = x_{25}$ , od tod pa sledi, da je  $x_{14} = x_{24} = -2x_1$  in je zato  $\mathbb{Z}_r = \langle x_1 \rangle$ .

Po trditvi 2.2.2 lahko, brez škode za splošnost, predpostavimo, da je  $x_1 = 1$ . Ker je  $x_{16} = x_{19} = 0$ , iz vrstice B.19 dobimo, da je  $x_{26} = -x_{25} = -x_{24}$ . Ker je  $x_{16} = x_{22} = x_{23} = 0$  in  $x_7 = x_{12}$ , iz vrstice B.23 dobimo, da je  $x_{12} = x_{22}$  in je zato  $x_7 = 0$ . Ker je  $x_{16} = x_{17} = 0$ , iz vrstice B.2 sledi, da je  $x_2^{\beta^*} = x_{15} + x_{17} = x_{14} = -2x_1$ . Iz vrstice B.5 dobimo, da je  $x_5^{\beta^*} = x_2 = x_1$ . Ker je  $x_2 = x_5$ , sledi, da je  $-2x_1 = x_1$  in je zato  $3x_1 = 0$  oziroma  $3 = 0$ . Torej je  $\langle x_1 \rangle = \mathbb{Z}_3$ . Sledi, da je graf  $\Gamma$  regularen  $\mathbb{Z}_3$ -krov grafa F050A reda 150. Graf F150A je edini povezan kubičen simetričen graf reda 150. S programskim paketom MAGMA [4] lahko neposredno preverimo, da je graf F150A pentacirkulant. ■





## Poglavje 4

# Povezavno regularni produkti grafov

V tem poglavju je obdelana medsebojna povezanost koncepta grafovskih produktov s konceptom povezavne regularnosti grafov. Bolj natančno, narejena je karakterizacija povezanih povezavno regularnih grafov, ki jih lahko dobimo kot kartezični produkt, tenzorski produkt, krepki produkt, leksikografski produkt, produkt z oznako  $G[H] - nG$  (v angleški literaturi poznan pod izrazom “deleted lexicographic product”) ali konormalni produkt dveh grafov. Kot posledico te karakterizacije utemeljimo še, kateri od teh produktov so skoraj krepko regularni grafi. Vsi omenjeni produkti so definirani v podrazdelku 2.2.1.

Najprej bomo podali nekatere definicije in osnovna dejstva o povezavno regularnih grafih, ki jih potrebujemo v nadaljevanju poglavja za dokaze naših glavnih rezultatov.

Povezavno regularnost in skoraj krepko regularnost grafa definiramo na naslednji način. Naj bo  $\Gamma$  neprazen graf. Če je število  $|N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)|$  konstantno za vsak par sosednjih točk  $u, v \in V(\Gamma)$ , potem to število označimo z  $\lambda_\Gamma$  in rečemo, da parameter  $\lambda_\Gamma$  grafa  $\Gamma$  *obstaja*. Predpostavimo še, da v grafu  $\Gamma$  obstaja vsaj en par točk na razdalji 2. Če je število  $|N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)|$  konstantno za vsak par točk  $u, v \in V(\Gamma)$ , za katerega je  $d_\Gamma(u, v) = 2$ , potem to število označimo z  $\mu_\Gamma$  in rečemo, da parameter  $\mu_\Gamma$  grafa  $\Gamma$  *obstaja*. Regularen neprazen graf  $\Gamma$  je *povezavno regularen*, če obstaja parameter  $\lambda_\Gamma$  grafa  $\Gamma$ . Povezavno regularen graf  $\Gamma$  je *skoraj krepko regularen*, če vsebuje vsaj en par točk na razdalji 2 in če obstaja parameter  $\mu_\Gamma$  grafa  $\Gamma$ . V naslednji trditvi so navedena nekatera dobro znana dejstva o povezavno regularnih grafih (glej, na primer, [6, stran 3]). Grafi  $t \times K_n$  in  $K_{t \times n}$ , ki nastopajo v tej trditvi, so definirani v razdelku 2.2.

**Trditev 4.0.2** (i) Naj bo  $\Gamma$  povezavno regularen graf in naj bo  $k_\Gamma = \lambda_\Gamma + 1$ . Potem je graf  $\Gamma$  izomorfen grafu  $t \times K_n$  za neki naravni števili  $t \geq 1$  in  $n \geq 2$ .

(ii) Naj bo  $\Gamma$  tak regularen graf, da poljubni nesosednji točki nimata skupnih sosednjih točk. Potem je graf  $\Gamma$  izomorfen grafu  $t \times K_n$  za neki naravni števili  $t$  in  $n$ .

(iii) Naj bo  $\Gamma$  tak regularen graf, da imata poljubni nesosednji točki natanko  $k_\Gamma$  skupnih sosednjih točk. Potem je graf  $\Gamma$  izomorfen grafu  $K_{t \times n}$  za neki naravni števili  $t$  in  $n$ .

## 4.1 Povezavno regularni kartezični produkti grafov $G$ in $H$

V tem razdelku naj bosta  $G$  in  $H$  grafa ter  $\Gamma = G \square H$  njun kartezični produkt. Narejena je karakterizacija povezanih povezavno regularnih kartezičnih produktov grafov  $G$  in  $H$  (glej izrek 4.1.2) ter karakterizacija povezanih skoraj krepko regularnih kartezičnih produktov grafov  $G$  in  $H$  (glej posledico 4.1.4). Kartezični produkt  $\Gamma$  je povezan natanko tedaj, ko sta povezana grafa  $G$  in  $H$  (glej [22, Proposition 1.34]). Ker nas zanimajo povezani krepki produkti, sta v tem razdelku tudi oba grafa  $G$  in  $H$  povezana. V izogib trivialnostim predpostavimo še, da je  $|V(G)| \geq 2$  in  $|V(H)| \geq 2$ , saj je sicer kartezični produkt  $\Gamma$  izomorfen bodisi grafu  $H$  bodisi grafu  $G$ .

Preden dokažemo glavna rezultata tega razdelka, pokažimo, da je regularnost grafov  $G$  in  $H$  potreben in zadosten pogoj za regularnost kartezičnega produkta  $\Gamma$  ter poiščemo njegovo stopnjo v odvisnosti od stopenj grafov  $G$  in  $H$ .

**Lema 4.1.1** *Kartezični produkt  $\Gamma$  je regularen graf natanko tedaj, ko sta regularna oba grafa  $G$  in  $H$ . V tem primeru je  $k_\Gamma = k_G + k_H$ .*

**DOKAZ.** Naj bo kartezični produkt  $\Gamma$  regularen graf stopnje  $k_\Gamma$ . Za poljubno točko  $g \in V(G)$  in poljubni točki  $h_1, h_2 \in V(H)$  obravnavajmo točki  $(g, h_1), (g, h_2) \in V(\Gamma)$ . Iz definicije kartezičnega produkta sledi, da je

$$k_\Gamma = |N_\Gamma((g, h_1))| = |N_G(g)| + |N_H(h_1)|$$

in

$$k_\Gamma = |N_\Gamma((g, h_2))| = |N_G(g)| + |N_H(h_2)|.$$

Sledi, da je  $|N_H(h_1)| = |N_H(h_2)|$  za poljubni točki grafa  $H$ , zato je graf  $H$  regularen. Ker je kartezični produkt komutativen, je dokaz, da je tudi graf  $G$  regularen, analogen dokazu regularnosti grafa  $H$ .

Naj bosta sedaj grafa  $G$  in  $H$  regularna. Potem je kartezični produkt  $\Gamma$  regularen graf, saj je

$$|N_\Gamma((g, h))| = |N_G(g)| + |N_H(h)| = k_G + k_H$$

za poljubno točko  $(g, h) \in V(\Gamma)$ . Iz zadnje enakosti sledi tudi enakost za stopnjo kartezičnega produkta  $\Gamma$ . ■

Naslednji izrek nam da karakterizacijo povezanih povezavno regularnih kartezičnih produktov grafov  $G$  in  $H$ .

**Izrek 4.1.2** *Kartezični produkt  $\Gamma = G \square H$  je povezan povezavno regularen graf natanko tedaj, ko sta grafa  $G$  in  $H$  taka povezana povezavno regularna grafa, da je  $\lambda_G = \lambda_H$ . Poleg tega velja, da je  $\lambda_\Gamma = \lambda_G = \lambda_H$ .*

DOKAZ. Naj bosta grafa  $G$  in  $H$  taka povezana povezavno regularna grafa, da je  $\lambda_G = \lambda_H$ . Potem je povezan tudi kartezični produkt  $\Gamma$ . Vzemimo poljubni sosednji točki  $u = (g_1, h_1)$ ,  $v = (g_2, h_2)$  grafa  $\Gamma$  in poiščimo njune skupne sosednje točke. Iz definicije kartezičnega produkta sledi, da za ti dve točki velja, da je bodisi  $g_1 = g_2$  in sta točki  $h_1, h_2$  sosednji v grafu  $H$ , ali pa je  $h_1 = h_2$  in sta točki  $g_1, g_2$  sosednji v grafu  $G$ . V prvem navedenem primeru dobimo, da je

$$N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v) = N_\Gamma((g_1, h_1)) \cap N_\Gamma((g_1, h_2)) = \{(g_1, h) \mid h \in N_H(h_1) \cap N_H(h_2)\},$$

zato je

$$|N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = \lambda_H. \quad (4.1)$$

V drugem navedenem primeru dobimo, da je

$$N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v) = N_\Gamma((g_1, h_1)) \cap N_\Gamma((g_2, h_1)) = \{(g, h_1) \mid g \in N_G(g_1) \cap N_G(g_2)\},$$

zato je

$$|N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = \lambda_G. \quad (4.2)$$

Ker je po predpostavki  $\lambda_G = \lambda_H$ , iz enakosti (4.1) in (4.2) sledi, da je število skupnih sosednjih točk dveh sosednjih točk grafa  $\Gamma$  neodvisno od izbire teh dveh točk, zato parameter  $\lambda_\Gamma$  grafa  $\Gamma$  obstaja. Torej je kartezični produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf s parametrom  $\lambda_\Gamma = \lambda_G = \lambda_H$ .

Naj bo sedaj kartezični produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf. Potem sta povezana tudi grafa  $G$  in  $H$ . Vzemimo poljubni sosednji točki  $g_1, g_2$  grafa  $G$ . Za poljubno točko  $h \in V(H)$  obravnavajmo točki  $u = (g_1, h), v = (g_2, h) \in V(\Gamma)$ . Iz definicije kartezičnega produkta sledi, da je  $\partial_\Gamma(u, v) = 1$ . Za točki  $u$  in  $v$  sedaj poiščemo njune skupne sosednje točke. Opazimo, da je

$$N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v) = \{(g, h) \mid g \in N_G(g_1) \cap N_G(g_2)\},$$

zato je

$$\lambda_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)|. \quad (4.3)$$

Torej je število skupnih sosednjih točk dveh sosednjih točk grafa  $G$  neodvisno od izbire teh dveh sosednjih točk, zato parameter  $\lambda_G$  grafa  $G$  obstaja in je graf  $G$  povezan povezavno regularen graf. Vzemimo sedaj še poljubni sosednji točki  $h_1, h_2$  grafa  $H$ . Za poljubno točko  $g \in V(G)$  obravnavajmo točki  $u = (g, h_1), v = (g, h_2) \in V(\Gamma)$ . Iz definicije kartezičnega produkta sledi, da je  $\partial_\Gamma(u, v) = 1$ . Za točki  $u$  in  $v$  sedaj poiščimo njune skupne sosednje točke. Opazimo, da je

$$N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v) = \{(g, h) \mid h \in N_H(h_1) \cap N_H(h_2)\},$$

zato je

$$\lambda_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = |N_H(h_1) \cap N_H(h_2)|. \quad (4.4)$$

Torej je število skupnih sosednjih točk dveh sosednjih točk grafa  $H$  neodvisno od izbire teh dveh sosednjih točk, zato parameter  $\lambda_H$  grafa  $H$  obstaja. Torej je tudi graf  $H$  povezan povezavno regularen graf. Iz enakosti (4.3) in (4.4) sledi še, da je  $\lambda_G = \lambda_\Gamma = \lambda_H$ . ■

Za karakterizacijo povezanih skoraj krepko regularnih kartezičnih produktov grafov  $G$  in  $H$  bomo potrebovali delni rezultat, ki je naveden v naslednji lemi.

**Lema 4.1.3** *Naj bo kartezični produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf. Potem veljajo naslednje trditve:*

- (i) *Parameter  $\mu_\Gamma = 2$ .*
- (ii) *Graf  $G$  je povezan skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\mu_G = 2$ , ali pa je graf  $G$  polni graf  $K_n$  za  $n = \lambda_\Gamma + 2$ .*
- (iii) *Graf  $H$  je povezan skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\mu_H = 2$ , ali pa je graf  $H$  polni graf  $K_n$  za  $n = \lambda_\Gamma + 2$ .*

**DOKAZ.** Naj bo kartezični produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf. Potem sta povezana tudi grafa  $G$  in  $H$ . Za dokaz trditve pod točko (i) vzemimo poljubni točki  $u = (g_1, h_1), v = (g_2, h_2) \in V(\Gamma)$ , za kateri velja, da je  $g_1 \neq g_2, h_1 \neq h_2$  in je  $\partial_\Gamma(u, v) = 2$ . Opazimo, da sta v grafu  $\Gamma$  točki  $(g_1, h_2)$  in  $(g_2, h_1)$  edini skupni sosednji točki točk  $u$  in  $v$ . Sledi, da je parameter  $\mu_\Gamma = 2$ .

Za dokaz trditve pod točko (ii) predpostavimo, da graf  $G$  ni polni graf. Vzemimo poljubni točki  $g_1, g_2 \in V(G)$ , ki sta v grafu  $G$  na razdalji 2. Za poljubno točko  $h \in V(H)$  obravnavajmo točki  $u = (g_1, h), v = (g_2, h) \in V(\Gamma)$ . Iz definicije kartezičnega produkta sledi, da je  $\partial_\Gamma(u, v) = 2$ , in da je

$$N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v) = \{(g, h) \mid g \in N_G(g_1) \cap N_G(g_2)\}. \quad (4.5)$$

Sledi, da je

$$\mu_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)|. \quad (4.6)$$

Torej je število skupnih sosednjih točk dveh točk, ki sta v grafu  $G$  na razdalji 2, neodvisno od izbire teh dveh točk, zato parameter  $\mu_G$  grafa  $G$  obstaja. Torej je graf  $G$  povezan skoraj krepko regularen graf. Iz enakosti (4.6) in trditve pod točko (i) sledi, da je  $\mu_G = \mu_\Gamma = 2$ . Če pa je graf  $G$  polni graf  $K_n$ , potem enakost  $n = \lambda_\Gamma + 2$  sledi iz izreka 4.1.2, saj sta grafa  $\Gamma$  in  $G$  povezavno regularna grafa, za katera velja, da je  $\lambda_\Gamma = \lambda_G$ .

Za dokaz trditve pod točko (iii) predpostavimo, da graf  $H$  ni polni graf. Vzemimo poljubni točki  $h_1, h_2 \in V(H)$ , ki sta v grafu  $H$  na razdalji 2. Za poljubno točko  $g \in V(G)$  obravnavajmo točki  $u = (g, h_1), v = (g, h_2) \in V(\Gamma)$ . Iz definicije kartezičnega produkta sledi, da je  $\partial_\Gamma(u, v) = 2$ , in da je

$$N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v) = \{(g, h) \mid h \in N_H(h_1) \cap N_H(h_2)\}. \quad (4.7)$$

Sledi, da je

$$\mu_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = |N_H(h_1) \cap N_H(h_2)|. \quad (4.8)$$

Torej je število skupnih sosednjih točk dveh točk, ki sta v grafu  $H$  na razdalji 2, neodvisno od izbire teh dveh točk, zato parameter  $\mu_H$  grafa  $H$  obstaja. Torej je graf  $H$  povezan skoraj krepko regularen graf. Iz enakosti (4.8) in trditve pod točko (i) sledi, da je  $\mu_H = \mu_\Gamma = 2$ . Če pa je graf  $H$  polni graf  $K_n$ , potem enakost  $n = \lambda_\Gamma + 2$  sledi iz izreka 4.1.2, saj sta grafa  $\Gamma$  in  $H$  povezavno regularna grafa, za katera velja, da je  $\lambda_\Gamma = \lambda_H$ . ■

Naslednja posledica nam da karakterizacijo povezanih skoraj krepko regularnih kartezičnih produktov grafov  $G$  in  $H$ .

**Posledica 4.1.4** *Kartezični produkt  $\Gamma = G \square H$  je povezan skoraj krepko regularen graf natanko tedaj, ko velja ena od naslednjih trditev:*

- (i) *Grafa  $G$  in  $H$  sta oba povezana skoraj krepko regularna grafa, za katera velja, da je  $\mu_G = \mu_H = 2$  in  $\lambda_G = \lambda_H$ .*
- (ii) *Graf  $G$  je povezan skoraj krepko regularen graf, za katerega velja, da je  $\mu_G = 2$ , graf  $H$  pa je polni graf  $K_n$ , kjer je  $n = \lambda_G + 2$ .*
- (iii) *Graf  $H$  je povezan skoraj krepko regularen graf, za katerega velja, da je  $\mu_H = 2$ , graf  $G$  pa je polni graf  $K_n$ , kjer je  $n = \lambda_H + 2$ .*
- (iv) *Oba grafa  $G$  in  $H$  sta izomorfna polnemu grafu  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 2$ .*

**DOKAZ.** Naj bo kartezični produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf. Potem je graf  $\Gamma$  tudi povezavno regularen graf, zato iz izreka 4.1.2 sledi, da sta oba grafa  $G$  in  $H$  povezana povezavno regularna grafa, za katera velja, da je  $\lambda_\Gamma = \lambda_G = \lambda_H$ . Trditve pod točkami (i), (ii), (iii) in (iv) sledijo naposredno iz leme 4.1.3.

Naj sedaj veljajo predpostavke pod točko (i), (ii), (iii) ali (iv). Vzemimo poljubni točki  $u = (g_1, h_1), v = (g_2, h_2) \in V(\Gamma)$ , za kateri velja, da je  $\partial_\Gamma(u, v) = 2$ . V odvisnosti od tega, katere predpostavke pod točkami (i)-(iv) veljajo, lahko za točki  $u$  in  $v$  nastopijo največ tri različne možnosti. Prva možnost, ki se pojavi ob predpostavkah v vsaki od točk (i)-(iv), je, da  $g_1 \neq g_2$  in  $h_1 \neq h_2$ . V tem primeru iz leme 4.1.3 sledi, da imata točki  $u$  in  $v$  natanko 2 skupni sosednji točki. Druga možnost, ki se pojavi samo ob predpostavkah pod točkama (i) in (ii), je, da je  $h_1 = h_2$  in sta točki  $g_1, g_2$  v grafu  $G$  na razdalji 2. V tem primeru iz enakosti (4.5) sledi, da je

$$|N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)| = \mu_G = 2.$$

Tretja možnost, ki se pojavi samo ob predpostavkah pod točkama (i) in (iii), pa je, da je  $g_1 = g_2$  in sta točki  $h_1, h_2$  v grafu  $H$  na razdalji 2. V tem primeru iz enakosti (4.7) sledi, da je

$$|N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = |N_H(h_1) \cap N_H(h_2)| = \mu_H = 2.$$

V vseh primerih je število skupnih sosednjih točk dveh točk, ki sta v grafu  $\Gamma$  na razdalji 2, enako 2 in je neodvisno od izbire teh dveh točk. Sledi, da parameter  $\mu_\Gamma$  grafa  $\Gamma$  obstaja, zato je kartezični produkt  $\Gamma$  ob predpostavkah pod vsako od točk (i)-(iv) povezan skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\mu_\Gamma = 2$ . ■

## 4.2 Povezavno regularni tenzorski produkti grafov $G$ in $H$

V tem razdelku naj bosta  $G$  in  $H$  grafa ter  $\Gamma = G \times H$  njun tenzorski produkt. Narejena je karakterizacija povezanih povezavno regularnih tenzorski produktov grafov  $G$  in  $H$  (glej izrek 4.2.2) ter karakterizacija povezanih skoraj krepko regularnih

tenzorski produktov grafov  $G$  in  $H$  (glej posledico 4.2.16). Tenzorski produkt  $\Gamma$  je povezan natanko tedaj, ko sta povezana grafa  $G$  in  $H$  in vsaj eden od teh dveh grafov ni dvodelen. Če sta oba grafa  $G$  in  $H$  povezana in dvodelna, potem ima njun tenzorski produkt  $\Gamma$  natanko dve povezani komponenti (glej [22, Theorem 5.29]). Ker nas zanimajo povezani tenzorski produkti, sta v tem razdelku tudi grafa  $G$  in  $H$  oba povezana, in vsaj eden od njiju ni dvodelen. Ker je tenzorski produkt komutativen, lahko, brez škode za splošnost, predpostavimo, da graf  $G$  ni dvodelen in je zato  $|V(G)| \geq 3$ . V izogib trivialnostim predpostavimo še, da je  $|V(H)| \geq 2$ .

Preden navedemo glavni izrek tega razdelka, pokažimo, da je regularnost grafov  $G$  in  $H$  potreben in zadosten pogoj za regularnost tenzorskega produkta  $\Gamma$  ter poiščimo njegovo stopnjo v odvisnosti od stopenj grafov  $G$  in  $H$ .

**Lema 4.2.1** *Tenzorski produkt  $\Gamma$  je regularen graf natanko tedaj, ko sta regularna oba grafa  $G$  in  $H$ . V tem primeru je  $k_\Gamma = k_G k_H$ .*

DOKAZ. Predpostavimo, da je tenzorski produkt  $\Gamma$  regularen graf stopnje  $k_\Gamma$ . Za poljubno točko  $g \in V(G)$  in poljubni točki  $h_1, h_2 \in V(H)$  obravnavajmo točki  $(g, h_1), (g, h_2) \in V(\Gamma)$ . Iz definicije tenzorskega produkta dobimo, da je

$$k_\Gamma = |N_\Gamma((g, h_1))| = |N_G(g)| |N_H(h_1)|$$

in

$$k_\Gamma = |N_\Gamma((g, h_2))| = |N_G(g)| |N_H(h_2)|.$$

Sledi, da je  $|N_H(h_1)| = |N_H(h_2)|$ , zato je graf  $H$  regularen. Ker je tenzorski produkt komutativen, je dokaz, da je tudi graf  $G$  regularen, analogen dokazu regularnosti grafa  $H$ .

Naj bosta sedaj grafa  $G$  in  $H$  regularna. Potem je tenzorski produkt  $\Gamma$  regularen graf, saj je

$$|N_\Gamma((g, h))| = |N_G(g)| |N_H(h)| = k_G k_H$$

za poljubno točko  $(g, h) \in V(\Gamma)$ . Iz zadnjih enakosti sledi, da je  $k_\Gamma = k_G k_H$ . ■

Naslednji izrek nam da karakterizacijo povezanih povezavno regularnih tenzorskih produktov grafov  $G$  in  $H$ . Ker obravnavamo povezane tenzorske produkte, smo na začetku razdelka privzeli, da graf  $G$  ni dvodelen.

**Izrek 4.2.2** *Tenzorski produkt  $\Gamma = G \times H$  je povezan povezavno regularen graf natanko tedaj, ko sta povezana povezavno regularna tudi grafa  $G$ ,  $H$  in graf  $G$  ni dvodelen. Pri tem velja, da je  $\lambda_\Gamma = \lambda_G \lambda_H$ .*

DOKAZ. Naj bosta  $G$  in  $H$  oba povezana povezavno regularna grafa s parametroma  $\lambda_G$  in  $\lambda_H$  in naj velja, da graf  $G$  ni dvodelen. Potem je tenzorski produkt  $\Gamma$  povezan graf. Vzemimo poljubni sosednji točki  $u = (g_1, h_1), v = (g_2, h_2) \in V(\Gamma)$ . Iz definicije tenzorskega produkta sledi, da  $g_1 \neq g_2$ ,  $h_1 \neq h_2$ , in da sta točki  $g_1, g_2$  sosednji v grafu  $G$ , točki  $h_1, h_2$  pa sta sosednji v grafu  $H$ . V grafu  $\Gamma$  poiščimo skupne sosednje točke sosednjih točk  $u$  in  $v$ . Dobimo, da je

$$N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v) = \{(g, h) \mid g \in N_G(g_1) \cap N_G(g_2), h \in N_H(h_1) \cap N_H(h_2)\},$$

od tod pa sledi, da je

$$|N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = \lambda_G \lambda_H.$$

Torej je število skupnih sosednjih točk dveh sosednjih točk grafa  $\Gamma$  neodvisno od izbire teh dveh točk, zato parameter  $\lambda_\Gamma$  grafa  $\Gamma$  obstaja. Sledi, da je tenzorski produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf s parametrom  $\lambda_\Gamma = \lambda_G \lambda_H$ .

Naj bo sedaj tenzorski produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf. Potem sta povezana tudi grafa  $G$  in  $H$ , za graf  $G$  pa smo privzeli, da ni dvodelen. Predpostavimo, da vsaj eden od grafov  $G$  ali  $H$  ni povezavno regularen. Zaradi komutativnosti tenzorskega produkta lahko, brez škode za splošnost, predpostavimo, da graf  $G$  ni povezavno regularen. Potem v njem obstajata vsaj dva taka para sosednjih točk  $g_1, g_2$  in  $g_3, g_4$ , da je v grafu  $G$  število skupnih sosednjih točk sosednjih točk  $g_1, g_2$  enako  $\alpha$ , število skupnih sosednjih točk sosednjih točk  $g_3, g_4$  pa enako  $\beta$ , pri čemer velja, da  $\alpha \neq \beta$ . Za poljubni sosednji točki  $h_1, h_2 \in V(H)$  obravnavajmo točke  $u = (g_1, h_1), v = (g_2, h_2), w = (g_3, h_1), z = (g_4, h_2) \in V(\Gamma)$ . Iz definicije tenzorskega produkta sledi, da na ta način dobimo v grafu  $\Gamma$  dva para sosednjih točk  $u, v$  in  $w, z$ . V grafu  $\Gamma$ , na podoben način kot v prvem delu dokaza, preštejemo skupne sosednje točke sosednjih točk  $u$  in  $v$  ter skupne sosednje točke sosednjih točk  $w$  in  $z$ . Ker je graf  $\Gamma$  povezavno regularen, dobimo, da je

$$\lambda_\Gamma = \alpha |N_H(h_1) \cap N_H(h_2)|$$

in

$$\lambda_\Gamma = \beta |N_H(h_1) \cap N_H(h_2)|.$$

To pa je v protislovju s predpostavko, da  $\alpha \neq \beta$ . Torej sta ob predpostavki, da je tenzorski produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf, povezana povezavno regularna tudi grafa  $G$  in  $H$ . ■

Za karakterizacijo povezanih skoraj krepko regularnih tenzorskih produktov bomo potrebovali nekaj delnih rezultatov.

**Lema 4.2.3** *Naj bo tenzorski produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf. Potem veljata naslednji trditvi:*

- (i) *Graf  $G$  je bodisi polni graf  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$  ali pa je povezan skoraj krepko regularen graf, ki ni dvodelen.*
- (ii) *Graf  $H$  je bodisi polni graf  $K_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$  ali pa je povezan skoraj krepko regularen graf.*

**DOKAZ.** Naj bo tenzorski produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf. Potem sta povezana tudi grafa  $G$  in  $H$ . Poleg tega smo na začetku razdelka privzeli, da graf  $G$  ni dvodelen.

(i) Naj bo  $G$  graf, ki ni polni graf  $K_n$ . Vzemimo poljubni točki  $g_1, g_2$ , ki sta v grafu  $G$  na razdalji 2. Naj bosta  $h_1, h_2$  poljubni sosednji točki v grafu  $H$ . Iz definicije tenzorskega produkta sledi, da sta točki  $u = (g_1, h_1), v = (g_2, h_1)$  v grafu  $\Gamma$  na razdalji 2. Če v grafu  $\Gamma$  poiščemo njune skupne sosednje točke, dobimo, da je

$$N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v) = \{(g, h) \mid g \in N_G(g_1) \cap N_G(g_2), h \in N_H(h_1)\},$$

zato je

$$\mu_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)|k_H.$$

Torej je število skupnih sosednjih točk dveh točk, ki sta v grafu  $G$  na razdalji 2, neodvisno od izbire teh dveh točk, zato parameter  $\mu_G$  grafa  $G$  obstaja in je graf  $G$  skoraj krepko regularen.

(ii) Z ustrežno zamenjavo točk in oznak v dokazu pod točko (i) na podoben način pokažemo, da je v primeru, ko graf  $H$  ni polni graf  $K_m$ , tudi ta graf skoraj krepko regularen. ■

Iz definicije tenzorskega produkta sledi, da v grafu  $\Gamma = G \times H$  obstaja največ sedem različnih tipov točk na razdalji 2, ki jih bomo sedaj navedli in se v nadaljevanju sklicevali na njih. Vsi pari točk, ki so v grafu  $\Gamma$  na razdalji 2 in so istega tipa, imajo v grafu  $\Gamma$  enako število skupnih sosednjih točk. Naj bosta  $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in V(\Gamma)$  točki, ki sta v grafu  $\Gamma$  na razdalji 2. Potem rečemo, da sta ti dve točki na razdalji 2

- tipa *I*, če sta točki  $g_1, g_2$  sosednji v grafu  $G$  in je  $h_1 = h_2$ ,
- tipa *II*, če sta točki  $g_1, g_2$  v grafu  $G$  na razdalji 2 in je  $h_1 = h_2$ ,
- tipa *III*, če sta točki  $h_1, h_2$  sosednji v grafu  $H$  in je  $g_1 = g_2$ ,
- tipa *IV*, če sta točki  $h_1, h_2$  v grafu  $H$  na razdalji 2 in je  $g_1 = g_2$ ,
- tipa *V*, če sta točki  $g_1, g_2$  v grafu  $G$  na razdalji 2 in sta točki  $h_1, h_2$  v grafu  $H$  na razdalji 2,
- tipa *VI*, če sta točki  $g_1, g_2$  sosednji v grafu  $G$  in sta točki  $h_1, h_2$  v grafu  $H$  na razdalji 2,
- tipa *VII*, če sta točki  $g_1, g_2$  v grafu  $G$  na razdalji 2 in sta točki  $h_1, h_2$  sosednji v grafu  $H$ .

Neposredno iz definicije tenzorskega produkta in iz leme 4.2.3 sledijo naslednje leme, ki nam dajo potrebne pogoje za obstoj določenega tipa točk na razdalji 2 v skoraj krepko regularnem tenzorskem produktu grafov  $G$  in  $H$ . Spomnimo se, da je vsak skoraj krepko regularen graf tudi povezavno regularen in zato v njem obstaja parameter  $\lambda$ .

**Lema 4.2.4** *Naj bo tenzorski produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf. Če v grafu  $\Gamma$  obstajata točki na razdalji 2, ki sta tipa *I*, potem veljata naslednji trditvi:*

- (i) *Bodisi je graf  $G$  polni graf  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$  ali pa je graf  $G$  povezan skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\lambda_G \neq 0$ .*
- (ii) *Bodisi je graf  $H$  polni graf  $K_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$  ali pa je graf  $H$  povezan skoraj krepko regularen graf.*

*V tem primeru v grafu  $\Gamma$  velja, da je število skupnih sosednjih točk dveh točk tipa *I* enako  $\lambda_G k_H$ .* ■



**Lema 4.2.5** Naj bo tenzorski produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf. Če v grafu  $\Gamma$  obstajata točki na razdalji 2, ki sta tipa II, potem veljata naslednji trditvi:

- (i) Graf  $G$  je povezan skoraj krepko regularen graf, ki ni dvodelen.
- (ii) Bodisi je graf  $H$  polni graf  $K_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$  ali pa je graf  $H$  povezan skoraj krepko regularen graf.

V tem primeru v grafu  $\Gamma$  velja, da je število skupnih sosednjih točk dveh točk tipa II enako  $\mu_G k_H$ . ■

**Lema 4.2.6** Naj bo tenzorski produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf. Če v grafu  $\Gamma$  obstajata točki na razdalji 2, ki sta tipa III, potem veljata naslednji trditvi:

- (i) Bodisi je graf  $G$  polni graf  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$  ali pa je graf  $G$  povezan skoraj krepko regularen graf, ki ni dvodelen.
- (ii) Bodisi je graf  $H$  polni graf  $K_m$  za neko naravno število  $m \geq 3$  ali pa je graf  $H$  povezan skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\lambda_H \neq 0$ .

V tem primeru v grafu  $\Gamma$  velja, da je število skupnih sosednjih točk dveh točk tipa III enako  $k_G \lambda_H$ . ■

**Lema 4.2.7** Naj bo tenzorski produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf. Če v grafu  $\Gamma$  obstajata točki na razdalji 2, ki sta tipa IV, potem veljata naslednji trditvi:

- (i) Bodisi je graf  $G$  polni graf  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$  ali pa je graf  $G$  povezan skoraj krepko regularen graf, ki ni dvodelen.
- (ii) Graf  $H$  je povezan skoraj krepko regularen graf.

V tem primeru v grafu  $\Gamma$  velja, da je število skupnih sosednjih točk dveh točk tipa IV enako  $k_G \mu_H$ . ■

**Lema 4.2.8** Naj bo tenzorski produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf. Če v grafu  $\Gamma$  obstajata točki na razdalji 2, ki sta tipa V, potem veljata naslednji trditvi:

- (i) Graf  $G$  je povezan skoraj krepko regularen graf, ki ni dvodelen.
- (ii) Graf  $H$  je povezan skoraj krepko regularen graf.

V tem primeru v grafu  $\Gamma$  velja, da je število skupnih sosednjih točk dveh točk tipa V enako  $\mu_G \mu_H$ . ■

**Lema 4.2.9** Naj bo tenzorski produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf. Če v grafu  $\Gamma$  obstajata točki na razdalji 2, ki sta tipa VI, potem veljata naslednji trditvi:

- (i) Bodisi je graf  $G$  polni graf  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$  ali pa je graf  $G$  povezan skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\lambda_G \neq 0$ .
- (ii) Graf  $H$  je povezan skoraj krepko regularen graf.

V tem primeru v grafu  $\Gamma$  velja, da je število skupnih sosednjih točk dveh točk tipa  $VI$  enako  $\lambda_G \mu_H$ . ■

**Lema 4.2.10** Naj bo tenzorski produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf. Če v grafu  $\Gamma$  obstajata točki na razdalji 2, ki sta tipa  $VII$ , potem veljata naslednji trditvi:

- (i) Graf  $G$  je povezan skoraj krepko regularen graf, ki ni dvodelen.
- (ii) Bodisi je graf  $H$  polni graf  $K_m$  za neko naravno število  $m \geq 3$  ali pa je graf  $H$  povezan skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\lambda_H \neq 0$ .

V tem primeru v grafu  $\Gamma$  velja, da je število skupnih sosednjih točk dveh točk tipa  $VII$  enako  $\mu_G \lambda_H$ . ■

V naslednjih lemah bomo utemeljili, za katere pare grafov  $G$  in  $H$  iz leme 4.2.3 tenzorski produkt grafov  $G$  in  $H$  ni skoraj krepko regularen graf.

**Lema 4.2.11** Če je graf  $H$  polni graf  $K_m$  za neko naravno število  $m \geq 3$  in je graf  $G$  skoraj krepko regularen graf, potem tenzorski produkt  $\Gamma$  ni skoraj krepko regularen graf.

**DOKAZ.** Naj bo graf  $H$  polni graf  $K_m$  za neko naravno število  $m \geq 3$  in naj bo graf  $G$  skoraj krepko regularen graf. Naj bosta  $h_1$  in  $h_2$  poljubni točki grafa  $H$ ,  $g_1$  in  $g_2$  pa poljubni točki, ki sta v grafu  $G$  na razdalji 2. Iz definicije tenzorskega produkta in definicije tipov točk, ki so v grafu  $\Gamma$  na razdalji 2, sledi, da sta v grafu  $\Gamma$  točki  $u = (g_1, h_1)$ ,  $v = (g_2, h_1)$  točki na razdalji 2 tipa  $II$ , točki  $u = (g_1, h_1)$ ,  $z = (g_2, h_2)$  pa točki na razdalji 2 tipa  $VII$ . Predpostavimo, da je graf  $\Gamma$  skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\mu_\Gamma$ . Iz leme 4.2.5 sledi, da je

$$\mu_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = \mu_G k_H,$$

iz leme 4.2.10 pa sledi, da je

$$\mu_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(z)| = \mu_G \lambda_H.$$

Iz teh enakosti dobimo, da je  $k_H = \lambda_H$  in pridemo do protislovja, zato v tem primeru tenzorski produkt  $\Gamma$  ni skoraj krepko regularen graf. ■

**Lema 4.2.12** Če je graf  $H$  skoraj krepko regularen graf in je graf  $G$  polni graf  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$ , potem tenzorski produkt  $\Gamma$  ni skoraj krepko regularen graf.

**DOKAZ.** Naj bo graf  $H$  skoraj krepko regularen graf in naj bo graf  $G$  polni graf  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$ . Naj bosta  $h_1$  in  $h_2$  poljubni točki, ki sta v grafu  $H$  na razdalji 2,  $g_1$  in  $g_2$  pa poljubni točki grafa  $G$ . Iz definicije tenzorskega produkta in definicije tipov točk, ki so v grafu  $\Gamma$  na razdalji 2, sledi, da sta v grafu  $\Gamma$  točki  $u = (g_1, h_1)$ ,  $v = (g_1, h_2)$  točki na razdalji 2 tipa  $IV$ , točki  $u = (g_1, h_1)$ ,  $z = (g_2, h_2)$

pa točki na razdalji 2 tipa *VI*. Predpostavimo, da je graf  $\Gamma$  skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\mu_\Gamma$ . Iz leme 4.2.7 sledi, da je

$$\mu_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = k_G \mu_H,$$

iz leme 4.2.9 pa sledi, da je

$$\mu_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(z)| = \lambda_G \mu_H.$$

Iz teh enakosti dobimo, da je  $k_G = \lambda_G$  in pridemo do protislovja, zato v tem primeru tenzorski produkt  $\Gamma$  ni skoraj krepko regularen graf. ■

**Lema 4.2.13** *Če je graf  $H$  skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\lambda_H \neq 0$  in je graf  $G$  skoraj krepko regularen graf, potem tenzorski produkt  $\Gamma$  ni skoraj krepko regularen graf.*

DOKAZ. Naj bo graf  $H$  skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\lambda_H \neq 0$  in naj bo graf  $G$  skoraj krepko regularen graf. Naj bosta  $h_1$  in  $h_2$  poljubni sosednji točki grafa  $H$ ,  $g_1$  in  $g_2$  pa poljubni točki, ki sta v grafu  $G$  na razdalji 2. Iz definicije tenzorskega produkta in definicije tipov točk, ki so v grafu  $\Gamma$  na razdalji 2, sledi, da sta v grafu  $\Gamma$  točki  $u = (g_1, h_1), v = (g_2, h_1)$  točki na razdalji 2 tipa *II*, točki  $u = (g_1, h_1), z = (g_2, h_2)$  pa točki na razdalji 2 tipa *VII*. Predpostavimo, da je graf  $\Gamma$  skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\mu_\Gamma$ . Iz leme 4.2.5 sledi, da je

$$\mu_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = \mu_G k_H,$$

iz leme 4.2.10 pa sledi, da je

$$\mu_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(z)| = \mu_G \lambda_H.$$

Iz teh enakosti dobimo, da je  $k_H = \lambda_H$  in pridemo do protislovja, zato v tem primeru tenzorski produkt  $\Gamma$  ni skoraj krepko regularen graf. ■

**Lema 4.2.14** *Če je graf  $H$  skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\lambda_H = 0$  in je graf  $G$  skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\lambda_G \neq 0$ , potem tenzorski produkt  $\Gamma$  ni skoraj krepko regularen graf.*

DOKAZ. Naj bo graf  $H$  skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\lambda_H = 0$  in naj bo graf  $G$  skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\lambda_G \neq 0$ . Naj bosta  $h_1$  in  $h_2$  poljubni točki, ki sta v grafu  $H$  na razdalji 2,  $g_1$  in  $g_2$  pa poljubni sosednji točki grafa  $G$ . Iz definicije tenzorskega produkta in definicije tipov točk, ki so v grafu  $\Gamma$  na razdalji 2, sledi, da sta v grafu  $\Gamma$  točki  $u = (g_1, h_1), v = (g_1, h_2)$  točki na razdalji 2 tipa *IV*, točki  $u = (g_1, h_1), z = (g_2, h_2)$  pa točki na razdalji 2 tipa *VI*. Predpostavimo, da je graf  $\Gamma$  skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\mu_\Gamma$ . Iz leme 4.2.7 sledi, da je

$$\mu_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = k_G \mu_H,$$

iz leme 4.2.9 pa sledi, da je

$$\mu_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(z)| = \lambda_G \mu_H.$$

Iz teh enakosti dobimo, da je  $k_G = \lambda_G$  in pridemo do protislovja, zato v tem primeru tenzorski produkt  $\Gamma$  ni skoraj krepko regularen graf. ■

**Lema 4.2.15** *Če je graf  $H$  skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\lambda_H = 0$  in je graf  $G$  skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\lambda_G = 0$ , potem tenzorski produkt  $\Gamma$  ni skoraj krepko regularen graf.*

DOKAZ. Naj bo graf  $H$  skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\lambda_H = 0$  in naj bo graf  $G$  skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\lambda_G = 0$ . Naj bosta  $h_1$  in  $h_2$  poljubni točki, ki sta v grafu  $H$  na razdalji 2,  $g_1$  in  $g_2$  pa poljubni točki, ki sta na razdalji 2 v grafu  $G$ . Iz definicije tenzorskega produkta in definicije tipov točk, ki so v grafu  $\Gamma$  na razdalji 2, sledi, da sta v grafu  $\Gamma$  točki  $u = (g_1, h_1), v = (g_2, h_1)$  točki na razdalji 2 tipa  $II$ , točki  $u = (g_1, h_1), z = (g_2, h_2)$  pa točki na razdalji 2 tipa  $V$ . Predpostavimo, da je graf  $\Gamma$  skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\mu_\Gamma$ . Iz leme 4.2.5 sledi, da je

$$\mu_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = \mu_G k_H,$$

iz leme 4.2.8 pa sledi, da je

$$\mu_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(z)| = \mu_G \mu_H.$$

Iz teh enakosti dobimo, da je  $k_H = \mu_H$ . Iz trditve 4.0.2 (iii) sedaj sledi, da je graf  $H$  izomorfen grafu  $K_{t \times n}$  za neki naravni števili  $t$  in  $n$ , kar pa je v protislovju s predpostavko, da je  $\lambda_H = 0$ . Zato v tem primeru tenzorski produkt  $\Gamma$  ni skoraj krepko regularen graf. ■

Naslednja posledica nam poda karakterizacijo povezanih skoraj krepko regularnih tenzorskih produktov grafov  $G$  in  $H$ .

**Posledica 4.2.16** *Tenzorski produkt  $\Gamma = G \times H$  je povezan skoraj krepko regularen graf natanko tedaj, ko velja ena od naslednjih trditev:*

- (i) *Graf  $H$  je polni graf  $K_2$ , graf  $G$  pa je polni graf  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$ .*
- (ii) *Graf  $H$  je polni graf  $K_2$ , graf  $G$  pa je povezan skoraj krepko regularen graf, ki ni dvodelen, in je bodisi  $\lambda_G = 0$  ali pa je  $\lambda_G = \mu_G$ .*
- (iii) *Oba grafa  $H$  in  $G$  sta izomorfna polnemu grafu  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$ .*

DOKAZ. Naj bo tenzorski produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf. Potem sta povezana tudi grafa  $G$  in  $H$ , za graf  $G$  pa smo privzeli, da ni dvodelen. Iz lem 4.2.3, 4.2.11, 4.2.12, 4.2.13, 4.2.14 in 4.2.15 sledi, da je bodisi graf  $G$  polni graf  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$  in je graf  $H$  polni graf  $K_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$  ali pa je graf  $G$  skoraj krepko regularen graf in je graf  $H$  polni graf  $K_2$ . Najprej si pogledjmo primer, ko je graf  $H$  polni graf  $K_2$ . Če je graf  $G$  polni graf  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$ , potem dobimo trditev pod točko (i). Naj bo sedaj graf  $G$  skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\lambda_G \neq 0$ . Potem v grafu  $\Gamma$  obstajata točki na razdalji 2, ki sta tipa  $I$  in točki na razdalji 2, ki sta tipa  $II$ . Ker je graf  $\Gamma$  skoraj krepko regularen s parametrom  $\mu_\Gamma$ , iz leme 4.2.4 sledi, da je

$$\mu_\Gamma = \lambda_G k_H,$$

iz leme 4.2.5 pa sledi, da je

$$\mu_\Gamma = \mu_G k_H.$$

Iz teh dveh enakosti dobimo, da je  $\lambda_G = \mu_G$  in dobimo trditev pod točko (ii). Pogledjmo si še primer, ko je graf  $H$  polni graf  $K_m$  za neko naravno število  $m \geq 3$  in je graf  $G$  polni graf  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$ . V tem primeru v grafu  $\Gamma$  obstajata točki na razdalji 2, ki sta tipa  $I$  in točki na razdalji 2, ki sta tipa  $III$ . Ker je graf  $\Gamma$  skoraj krepko regularen s parametrom  $\mu_\Gamma$ , iz leme 4.2.4 sledi, da je

$$\mu_\Gamma = \lambda_G k_H = (n-2)(m-1),$$

iz leme 4.2.6 pa sledi, da je

$$\mu_\Gamma = k_G \lambda_H = (n-1)(m-2).$$

Iz teh dveh enakosti dobimo, da je  $n = m$ , kar pa je ravno trditev pod točko (iii).

Naj sedaj veljajo predpostavke pod točko (i), (ii) ali (iii). V vseh treh primerih sledi, da je tenzorski produkt  $\Gamma$  povezan graf. Če veljajo predpostavke pod točko (i), potem v grafu  $\Gamma$  obstajajo samo točke na razdalji 2, ki so tipa  $I$ . Ker je število skupnih sosednjih točk dveh točk istega tipa neodvisno od izbire takih dveh točk, je v tem primeru tenzorski produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf. Iz leme 4.2.4 sledi, da je njegov parameter  $\mu_\Gamma = \lambda_G k_H = n - 2$ .

Pri predpostavkah pod točko (ii) imamo dva primera. Če je graf  $G$  skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\lambda_G = 0$ , potem v grafu  $\Gamma$  obstajajo samo točke na razdalji 2, ki so tipa  $II$ . Ker je število skupnih sosednjih točk dveh točk istega tipa v grafu  $\Gamma$  neodvisno od izbire takih dveh točk, iz leme 4.2.5 sledi, da je to število enako

$$\mu_G k_H = \mu_G.$$

Če pa je graf  $G$  skoraj krepko regularen graf s parametrom  $\lambda_G \neq 0$ , potem v grafu  $\Gamma$  obstajajo poleg točk na razdalji 2, ki so tipa  $II$ , samo še točke na razdalji 2, ki so tipa  $I$ . Ker je število skupnih sosednjih točk dveh točk istega tipa v grafu  $\Gamma$  neodvisno od izbire takih dveh točk, iz leme 4.2.4 sledi, da je to število za poljubni dve točki tipa  $I$  enako

$$\lambda_G k_H = \lambda_G.$$

Ker je po predpostavki  $\lambda_G = \mu_G$ , sledi, da je število skupnih sosednjih točk dveh točk na razdalji 2 v grafu  $\Gamma$  neodvisno od izbire teh dveh točk na razdalji 2, zato je v primeru predpostavk pod točko (ii) tenzorski produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf. Iz lem 4.2.4 in 4.2.5 sledi, da je njegov parameter  $\mu_\Gamma = \lambda_G = \mu_G$ . Naj sedaj veljajo predpostavke pod točko (iii). Potem v grafu  $\Gamma$  obstajajo samo točke na razdalji 2, ki so tipa  $I$ , in točke na razdalji 2, ki so tipa  $III$ . Ker je število skupnih sosednjih točk dveh točk istega tipa v grafu  $\Gamma$  neodvisno od izbire takih dveh točk, iz leme 4.2.4 sledi, da je to število za točke tipa  $I$  enako

$$\lambda_G k_H,$$

za točke tipa  $III$  pa iz leme 4.2.6 sledi, da je to število enako

$$k_G \lambda_H.$$

Ker sta po predpostavki oba grafa  $G$  in  $H$  izomorfna polnemu grafu  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$ , je  $\lambda_G k_H = k_G \lambda_H$ . Sledi, da je število skupnih sosednjih točk dveh točk na razdalji 2 v grafu  $\Gamma$  neodvisno od izbire teh dveh točk, zato je v primeru predpostavk pod točko (iii) tenzorski produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf. Iz lem 4.2.4 in 4.2.6 sledi, da je njegov parameter  $\mu_\Gamma = \lambda_G k_H = k_G \lambda_H = (n-1)(n-2)$ . ■

### 4.3 Povezavno regularni krepki produkti grafov $G$ in $H$

V tem razdelku naj bosta  $G$  in  $H$  grafa ter  $\Gamma = G \boxtimes H$  njun krepki produkt. Narajena je karakterizacija povezanih povezavno regularnih krepkih produktov grafov  $G$  in  $H$  (glej izrek 4.3.4). Kot posledica te karakterizacije je podana še utemeljitev, da nobeden od teh grafov ni skoraj krepko regularen (glej posledico 4.3.5). Iz definicije krepkega produkta sledi, da je krepki produkt  $\Gamma$  povezan natanko tedaj, ko sta povezana grafa  $G$  in  $H$ . Ker nas zanimajo povezani krepki produkti, sta v tem razdelku tudi grafa  $G$  in  $H$  povezana. V izogib trivialnostim predpostavimo še, da je  $|V(G)| \geq 2$  in  $|V(H)| \geq 2$ , saj je sicer krepki produkt  $\Gamma$  izomorfen bodisi grafu  $G$  bodisi grafu  $H$ .

Za dokaz glavnega izreka tega razdelka potrebujemo nekaj delnih rezultatov. Najprej dokažemo, da je regularnost grafov  $G$  in  $H$  potreben in zadosten pogoj za regularnost krepkega produkta  $\Gamma$  ter poiščemo njegovo stopnjo v odvisnosti od stopenj grafov  $G$  in  $H$ .

**Lema 4.3.1** *Krepki produkt  $\Gamma$  je regularen natanko tedaj, ko sta regularna oba grafa  $G$  in  $H$ . V tem primeru je  $k_\Gamma = k_G + k_H + k_G k_H$ .*

**DOKAZ.** Naj bo krepki produkt  $\Gamma$  regularen graf stopnje  $k_\Gamma$ . Za poljubno točko  $g \in V(G)$  in poljubni točki  $h_1, h_2 \in V(H)$  obravnavajmo točki  $(g, h_1), (g, h_2) \in V(\Gamma)$ . Po definiciji krepkega produkta  $\Gamma$  dobimo, da je

$$k_\Gamma = |N_\Gamma((g, h_1))| = |N_G(g)| + |N_H(h_1)| + |N_G(g)||N_H(h_1)|$$

in

$$k_\Gamma = |N_\Gamma((g, h_2))| = |N_G(g)| + |N_H(h_2)| + |N_G(g)||N_H(h_2)|.$$

Sledi, da je  $|N_H(h_1)| = |N_H(h_2)|$ , zato je graf  $H$  regularen. Ker je krepki produkt komutativen, je dokaz, da je tudi graf  $G$  regularen, analogen dokazu regularnosti grafa  $H$ .

Naj bosta sedaj grafa  $G$  in  $H$  regularna. Potem je krepki produkt  $\Gamma$  regularen graf, saj je

$$|N_\Gamma((g, h))| = |N_G(g)| + |N_H(h)| + |N_G(g)||N_H(h)| = k_G + k_H + k_G k_H$$

za poljubno točko  $(g, h) \in V(\Gamma)$ . ■

Naslednji rezultat nam pove, da za povezavno regularnost krepkega produkta  $\Gamma$  potrebujemo, da sta povezavno regularna tudi grafa  $G$  in  $H$ .

**Lema 4.3.2** *Če je krepki produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf, potem sta povezana povezavno regularna tudi grafa  $G$  in  $H$ .*

**DOKAZ.** Naj bo krepki produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf. Potem sta povezana tudi grafa  $G$  in  $H$ . Po lemi 4.3.1 sta oba grafa  $G$  in  $H$  tudi regularna. Vzemimo poljubni sosednji točki  $g_1, g_2 \in V(G)$ . Za poljubno točko  $h \in V(H)$  obravnavajmo točki  $u = (g_1, h), v = (g_2, h) \in V(\Gamma)$ . Iz definicije krepkega produkta sledi, da je  $\partial_\Gamma(u, v) = 1$ . Za točki  $u$  in  $v$  sedaj preštujemo njune skupne sosednje točke. Najprej opazimo, da je

$$\begin{aligned} N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v) &= \{(g, h) \mid g \in N_G(g_1) \cap N_G(g_2)\} \cup \\ &\quad \{(g_1, h_1), (g_2, h_2) \mid h_1, h_2 \in N_H(h)\} \cup \\ &\quad \{(g_3, h_3) \mid g_3 \in N_G(g_1) \cap N_G(g_2), h_3 \in N_H(h)\}, \end{aligned}$$

zato je

$$|N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)| + 2k_H + k_H |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)|. \quad (4.9)$$

Ker je  $\lambda_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)|$ , sledi, da je

$$|N_G(g_1) \cap N_G(g_2)| = \frac{\lambda_\Gamma - 2k_H}{k_H + 1}.$$

Torej je število skupnih sosednjih točk dveh sosednjih točk grafa  $G$  neodvisno od izbire teh dveh sosednjih točk, zato parameter  $\lambda_G$  grafa  $G$  obstaja. Zaradi komutativnosti krepkega produkta lahko na analogen način dokažemo, da obstaja tudi parameter  $\lambda_H$  grafa  $H$ . Torej sta oba grafa  $G$  in  $H$  povezana povezavno regularna grafa. ■

Na podlagi prejšnjih dveh lem lahko dobimo število skupnih sosednjih točk poljubnih dveh sosednjih točk povezavno regularnega krepkega produkta  $\Gamma$  v odvisnosti od stopenj grafov  $G$  in  $H$  ter parametrov  $\lambda_G$  in  $\lambda_H$ .

**Posledica 4.3.3** Če je krepki produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf, potem je

$$\lambda_\Gamma = 2k_H + (k_H + 1)\lambda_G = 2k_G + (k_G + 1)\lambda_H = \lambda_H\lambda_G + 2\lambda_G + 2\lambda_H + 2.$$

**DOKAZ.** Po lemah 4.3.1 in 4.3.2 sta oba grafa  $G$  in  $H$  povezana povezavno regularna grafa, zato obstaja parameter  $\lambda_G$  grafa  $G$  in obstaja parameter  $\lambda_H$  grafa  $H$ . Prva enakost sedaj sledi iz enakosti (4.9). Drugo enakost dobimo z zamenjavo vlog grafov  $G$  in  $H$ , saj je krepki produkt komutativen. Da dokažemo tretjo enakost, vzemimo sosednji točki  $g_1, g_2$  grafa  $G$  in sosednji točki  $h_1, h_2$  grafa  $H$ . Obravnavajmo točki  $u = (g_1, h_1), v = (g_2, h_2) \in V(\Gamma)$ . Po definiciji krepkega produkta velja, da je  $\partial_\Gamma(u, v) = 1$ . Za točki  $u$  in  $v$  sedaj preštejemo njune skupne sosednje točke. Dve izmed njih sta točki  $(g_1, h_2)$  in  $(g_2, h_1)$ . Poleg tega imamo  $2\lambda_G$  skupnih sosednjih točk, katerih druga koordinata je enaka  $h_1$  (in prva koordinata ni enaka  $g_2$ ) ali je enaka  $h_2$  (in prva koordinata ni enaka  $g_1$ ). To so ravno točke oblike  $(x, h_1)$  in  $(x, h_2)$ , kjer je  $x \in N_G(g_1) \cap N_G(g_2)$ . Na podoben način preštejemo, da imamo  $2\lambda_H$  skupnih sosednjih točk, katerih prva koordinata je enaka  $g_1$  (in druga koordinata ni enaka  $h_2$ ) ali je enaka  $g_2$  (in druga koordinata ni enaka  $h_1$ ). To so ravno točke oblike  $(g_1, y)$  in  $(g_2, y)$ , kjer je  $y \in N_H(h_1) \cap N_H(h_2)$ . Končno preštejemo še, da imamo  $\lambda_G\lambda_H$  skupnih sosednjih točk, katerih prva koordinata ni enaka  $g_1$  ali  $g_2$ , druga koordinata pa ni enaka  $h_1$  ali  $h_2$ . Te točke pa so oblike  $(x, y)$ , kjer je  $x \in N_G(g_1) \cap N_G(g_2)$  in  $y \in N_H(h_1) \cap N_H(h_2)$ . Rezultat sedaj sledi neposredno iz tega štetja. ■

Zbrane rezultate tega razdelka sedaj uporabimo za karakterizacijo povezanih povezavno regularnih krepkih produktov grafov  $G$  in  $H$ .

**Izrek 4.3.4** Krepki produkt  $\Gamma = G \boxtimes H$  je povezan povezavno regularen graf natanko tedaj, ko je graf  $G$  izomorfen polnemu grafu  $K_n$  in je graf  $H$  izomorfen polnemu grafu  $K_m$  za neki naravni števili  $n, m \geq 2$ .

**DOKAZ.** Naj bo krepki produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf. Potem sta povezana tudi grafa  $G$  in  $H$ . Po posledici 4.3.3 dobimo, da je

$$2k_G + (k_G + 1)\lambda_H = \lambda_H\lambda_G + 2\lambda_G + 2\lambda_H + 2,$$

od tod pa sledi, da je

$$(k_G - \lambda_G)(\lambda_H + 2) = \lambda_H + 2,$$

oziroma, da je  $k_G = \lambda_G + 1$ . Ker je graf  $G$  povezan, iz trditve 4.0.2 (i) sledi, da je graf  $G$  izomorfen polnemu grafu  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 2$ . Na podoben način dokažemo, da je graf  $H$  izomorfen polnemu grafu  $K_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$ .

Naj bo sedaj graf  $G$  izomorfen polnemu grafu  $K_n$  in naj bo graf  $H$  izomorfen polnemu grafu  $K_m$  za neki naravni števili  $n, m \geq 2$ . Opazimo, da je v tem primeru krepki produkt  $\Gamma$  izomorfen polnemu grafu  $K_{mn}$ , ki je očitno povezan povezavno regularen graf. ■

Neposredno iz prejšnjega izreka sledi, da med povezanimi povezavno regularnimi krepkimi produkti ni nobenega takega, ki bi bil tudi skoraj krepko regularen.



**Posledica 4.3.5** *Povezan krepki produkt  $\Gamma = G \boxtimes H$  ni nikoli skoraj krepko regularen graf.*

**DOKAZ.** Predpostavimo, da je povezan krepki produkt  $\Gamma$  skoraj krepko regularen graf. Ker je krepki produkt  $\Gamma$  v tem primeru tudi povezavno regularen graf, iz izreka 4.3.4 sledi, da je graf  $G$  izomorfen polnemu grafu  $K_n$  in je graf  $H$  izomorfen polnemu grafu  $K_m$  za neki naravni števili  $n, m \geq 2$ . Toda potem je krepki produkt  $\Gamma$  izomorfen polnemu grafu  $K_{mn}$ , ki pa ne more biti skoraj krepko regularen graf (saj v njem nimamo točk na razdalji 2), s čimer pridemo v protislovje s predpostavko. ■

## 4.4 Povezavno regularni leksikografski produkti grafov $G$ in $H$

V tem razdelku naj bosta  $G$  in  $H$  grafa ter  $\Gamma = G[H]$  njun leksikografski produkt. Narejena je karakterizacija povezanih povezavno regularnih leksikografskih produktov grafov  $G$  in  $H$  (glej izrek 4.4.4) ter karakterizacija povezanih skoraj krepko regularnih leksikografskih produktov grafov  $G$  in  $H$  (glej posledico 4.4.5). Iz definicije sledi, da je leksikografski produkt  $\Gamma$  povezan natanko tedaj, ko je povezan graf  $G$ . Ker nas zanimajo povezani leksikografski produkti, bomo do konca tega razdelka privzeli, da je tudi graf  $G$  povezan. V izogib trivialnostim predpostavimo še, da je  $|V(G)| \geq 2$  in  $|V(H)| \geq 2$ .

Za dokaz glavnega izreka tega razdelka potrebujemo nekaj delnih rezultatov. Najprej dokažemo, da je regularnost grafov  $G$  in  $H$  potreben in zadosten pogoj za regularnost leksikografskega produkta  $\Gamma$  ter poiščemo njegovo stopnjo v odvisnosti od stopenj grafov  $G$  in  $H$  ter reda grafa  $H$ .

**Lema 4.4.1** *Leksikografski produkt  $\Gamma$  je regularen graf natanko tedaj, ko sta regularna oba grafa  $G$  in  $H$ . V tem primeru je  $k_\Gamma = k_H + k_G|V(H)|$ .*

**DOKAZ.** Naj bo leksikografski produkt  $\Gamma$  regularen graf. Za poljubno točko  $g \in V(G)$  in poljubni točki  $h_1, h_2 \in V(H)$  obravnavajmo točki  $(g, h_1), (g, h_2) \in V(\Gamma)$ . Po definiciji leksikografskega produkta dobimo, da je

$$k_\Gamma = |N_\Gamma((g, h_1))| = |N_H(h_1)| + |N_G(g)||V(H)|, \quad (4.10)$$

in

$$k_\Gamma = |N_\Gamma((g, h_2))| = |N_H(h_2)| + |N_G(g)||V(H)|.$$

Sledi, da je  $|N_H(h_1)| = |N_H(h_2)|$ , zato je graf  $H$  regularen. Sedaj iz enakosti (4.10) dobimo, da je

$$k_\Gamma = |N_\Gamma((g, h_1))| = |N_G(g)||V(H)| + k_H.$$

Od tod pa sledi, da je  $|N_G(g)| = (k_\Gamma - k_H)/|V(H)|$  in je zato tudi graf  $G$  regularen.

Naj bosta sedaj oba grafa  $G$  in  $H$  regularna. Očitno je potem tudi njun leksikografski produkt  $\Gamma$  regularen graf, saj je

$$|N_\Gamma((g, h))| = |N_H(h)| + |N_G(g)||V(H)| = k_H + k_G|V(H)|$$

za poljubno točko  $(g, h) \in V(\Gamma)$ . ■

Naslednji rezultat nam da potrebne pogoje, ki jim morata zadoščati grafa  $G$  in  $H$ , da je leksikografski produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf.

**Lema 4.4.2** *Naj bo leksikografski produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf. Potem veljata naslednji trditvi:*

- (i) *Graf  $G$  je povezan povezavno regularen graf.*
- (ii) *Bodisi je graf  $H$  prazen graf  $E_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$  ali pa je graf  $H$  povezavno regularen graf.*

**DOKAZ.** Naj bo leksikografski produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf. Potem je tudi graf  $G$  povezan graf. Po lemi 4.4.1 sta potem oba grafa  $G$  in  $H$  regularna.

(i) Vzemimo poljuben par sosednjih točk  $g_1, g_2 \in V(G)$ . Za poljubno točko  $h \in V(H)$  obravnavajmo točki  $u = (g_1, h), v = (g_2, h) \in V(\Gamma)$ . Iz definicije leksikografskega produkta sledi, da je  $\partial_\Gamma(u, v) = 1$ . Preštejmo sedaj skupne sosednje točke sosednjih točk  $u$  in  $v$  v grafu  $\Gamma$ . Najprej opazimo, da je

$$\begin{aligned} N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v) &= \{(g_1, h'), (g_2, h') \mid h' \in N_H(h)\} \cup \\ &\quad \{(g', h') \mid g' \in N_G(g_1) \cap N_G(g_2), h' \in V(H)\}, \end{aligned}$$

zato je

$$|N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = 2|N_H(h)| + |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)||V(H)|. \quad (4.11)$$

Ker je leksikografski produkt  $\Gamma$  povezavno regularen graf, je  $\lambda_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)|$ . Ker je poleg tega še graf  $H$  regularen, iz enakosti (4.11) sledi, da je

$$|N_G(g_1) \cap N_G(g_2)| = \frac{\lambda_\Gamma - 2k_H}{|V(H)|}.$$

Torej je število skupnih sosednjih točk sosednjih točk grafa  $G$  neodvisno od izbire teh dveh sosednjih točk, zato parameter  $\lambda_G$  grafa  $G$  obstaja in dobimo trditev pod točko (i).

(ii) Naj bo  $H$  neprazen graf. Vzemimo poljuben par sosednjih točk  $h_1, h_2 \in V(H)$ . Za poljubno točko  $g \in V(G)$  obravnavajmo točki  $u = (g, h_1), v = (g, h_2) \in V(\Gamma)$ . Iz definicije leksikografskega produkta sledi, da je  $\partial_\Gamma(u, v) = 1$ . Sedaj preštejmo skupne sosednje točke sosednjih točk  $u$  in  $v$  v grafu  $\Gamma$ . Opazimo, da je

$$N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v) = \{(g, h) \mid h \in N_H(h_1) \cap N_H(h_2)\} \cup \{(g', h') \mid g' \in N_G(g), h' \in V(H)\},$$

zato je

$$|N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = |N_H(h_1) \cap N_H(h_2)| + |N_G(g)||V(H)|. \quad (4.12)$$

Ker je  $\lambda_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)|$  in je graf  $G$  regularen, iz enakosti (4.12) sledi, da je

$$|N_H(h_1) \cap N_H(h_2)| = \lambda_\Gamma - k_G|V(H)|.$$

Torej je število skupnih sosednjih točk dveh sosednjih točk grafa  $H$  neodvisno od izbire teh dveh točk, zato parameter  $\lambda_H$  grafa  $H$  obstaja in dobimo trditev pod

točko (ii). ■

Iz prejšnjih dveh lem lahko dobimo število skupnih sosednjih točk poljubnih dveh sosednjih točk povezanega povezavno regularnega leksikografskega produkta  $\Gamma$  v odvisnosti od stopenj grafov  $G$  in  $H$ , parametrov  $\lambda_G$  in  $\lambda_H$  ter reda grafa  $H$ .

**Posledica 4.4.3** Če je leksikografski produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf in je graf  $H$  neprazen, potem velja, da je

$$\lambda_\Gamma = 2k_H + \lambda_G|V(H)| = k_G|V(H)| + \lambda_H.$$

DOKAZ. Po lemi 4.4.1 sta oba grafa  $G$  in  $H$  regularna. Po lemi 4.4.2 obstaja parameter  $\lambda_G$  grafa  $G$  in obstaja parameter  $\lambda_H$  grafa  $H$ . Rezultat sedaj sledi iz enakosti (4.11) in (4.12). ■

Zbrane rezultate tega razdelka sedaj uporabimo za karakterizacijo povezanih povezavno regularnih leksikografskih produktov grafov  $G$  in  $H$ .

**Izrek 4.4.4** Leksikografski produkt  $\Gamma = G[H]$  je povezan povezavno regularen graf natanko tedaj, ko velja ena izmed naslednjih dveh trditev:

- (i) Graf  $H$  je izomorfen praznemu grafu  $E_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$ , graf  $G$  pa je povezan povezavno regularen graf.
- (ii) Graf  $G$  je izomorfen polnemu grafu  $K_n$ , graf  $H$  pa je izomorfen grafu  $K_{t \times m}$  za neka naravna števila  $n, t \geq 2$  in  $m \geq 1$ .

DOKAZ. Naj bo leksikografski produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf. Potem je povezan tudi graf  $G$ . Poleg tega iz lem 4.4.1 in 4.4.2 sledi, da je graf  $G$  povezavno regularen graf, graf  $H$  pa regularen. Če je graf  $H$  prazen graf  $E_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$ , potem dobimo trditev pod točko (i). Sedaj privzemimo, da je graf  $H$  neprazen. Po posledici 4.4.3 dobimo, da je  $k_G|V(H)| + \lambda_H = 2k_H + \lambda_G|V(H)|$ . Od tod sledi, da je

$$|V(H)|(k_G - \lambda_G) = 2k_H - \lambda_H.$$

Ker očitno velja, da je  $\lambda_G < k_G$  in  $k_H < |V(H)|$ , dobimo, da je  $k_G - \lambda_G = 1$  in  $2k_H - \lambda_H = |V(H)|$ . Ker je graf  $G$  povezan, po trditvi 4.0.2 (i) dobimo, da je ta graf izomorfen polnemu grafu. Poleg tega opazimo, da imata v komplementu grafa  $H$  poljubni dve nesosednji točki natanko  $|V(H)| - 2k_H + \lambda_H = 0$  skupnih sosednjih točk. Ker je komplement grafa  $H$  tudi regularen, iz trditve 4.0.2 (ii) sledi, da je komplement grafa  $H$  izomorfen grafu  $t \times K_m$  za neki naravni števili  $t, m \geq 1$ . Torej je graf  $H$  izomorfen grafu  $K_{t \times m}$  za neki naravni števili  $t, m \geq 1$ . Ker pa je graf  $H$  po predpostavki neprazen, dobimo še, da je  $t \geq 2$ .

Naj sedaj veljajo predpostavke pod točko (i) ali (ii). Potem je leksikografski produkt  $\Gamma$  regularen po lemi 4.4.1. Od tu dalje ni težko pokazati, da v primer, ko veljajo predpostavke pod točko (i), sledi, da je  $\lambda_\Gamma = \lambda_G|V(H)|$ , v primeru, ko veljajo predpostavke pod točko (ii), pa sledi, da je graf  $\Gamma$  izomorfen grafu  $K_{tn \times m}$ , ki je očitno povezavno regularen graf s parametrom  $\lambda_\Gamma = tnm - 2m$ . V obeh primerih je

zato leksikografski produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf.  $\blacksquare$

Kot posledico prejšnega izreka dobimo še karakterizacijo povezanih skoraj krepko regularnih leksikografskih produktov grafov  $G$  in  $H$ .

**Posledica 4.4.5** *Leksikografski produkt  $\Gamma = G[H]$  je povezan skoraj krepko regularen graf natanko tedaj, ko velja ena od naslednjih dveh trditev:*

- (i) *Graf  $H$  je izomorfen praznemu grafu  $E_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$ , graf  $G$  pa je izomorfen grafu  $K_{t \times n}$  za neki naravni števili  $t \geq 2$  in  $n \geq 1$ .*
- (ii) *Graf  $G$  je izomorfen polnemu grafu  $K_n$ , graf  $H$  pa je izomorfen grafu  $K_{t \times m}$  za neka naravna števila  $n, m, t \geq 2$ .*

**DOKAZ.** Naj bo leksikografski produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf.

Najprej obravnavajmo primer (i) iz izreka 4.4.4, to je primer, ko je graf  $H$  izomorfen praznemu grafu  $E_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$  in je graf  $G$  povezan povezavno regularen graf. Če je  $G$  polni graf, potem naša trditev pod točko (i) drži. Privzemimo torej, da  $G$  ni polni graf. Vzemimo poljubno točko  $g \in V(G)$  in poljubni točki  $h_1, h_2 \in V(H)$ . Označimo  $u = (g, h_1)$ ,  $v = (g, h_2)$  in pri tem opazimo, da je  $\partial_\Gamma(u, v) = 2$ . Očitno je tudi, da je

$$|N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = k_G |V(H)|.$$

Sedaj vzemimo taki poljubni točki  $g_1, g_2 \in V(G)$ , da je  $\partial_G(g_1, g_2) = 2$ , in poljubno točko  $h \in V(H)$ . Označimo  $w = (g_1, h)$ ,  $z = (g_2, h)$  in opazimo, da je  $\partial_\Gamma(w, z) = 2$ . V tem primeru velja, da je

$$|N_\Gamma(w) \cap N_\Gamma(z)| = |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)| |V(H)|.$$

Ker je leksikografski produkt  $\Gamma$  skoraj krepko regularen graf, velja, da je

$$k_G |V(H)| = |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)| |V(H)|.$$

Od tod sledi, da je  $k_G = |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)|$ . Torej parameter  $\mu_G$  grafa  $G$  obstaja in je enak stopnji  $k_G$ . To pa pomeni, da za poljubni točki  $x, y \in V(G)$  velja, da je  $\partial_G(x, y) \leq 2$ . Po trditvi 4.0.2 (iii) sledi, da je graf  $G$  izomorfen grafu  $K_{t \times n}$  za neki naravni števili  $t$  in  $n$ . Ker je graf  $G$  povezan, je očitno  $t \geq 2$ .

Obravnavajmo sedaj primer (ii) iz izreka 4.4.4, to je primer, ko je graf  $G$  izomorfen polnemu grafu  $K_n$  in je graf  $H$  izomorfen grafu  $K_{t \times m}$  za neka naravna števila  $n, t \geq 2$  in  $m \geq 1$ . Ker leksikografski produkt  $\Gamma$  ni polni graf, je  $m \geq 2$ .

Naj sedaj veljajo predpostavke pod točko (i) ali (ii). Če veljajo predpostavke pod točko (i), potem je leksikografski produkt  $\Gamma$  izomorfen grafu  $K_{t \times mn}$ , če veljajo predpostavke pod točko (ii), pa je leksikografski produkt  $\Gamma$  izomorfen grafu  $K_{tn \times m}$ . V obeh primerih je leksikografski produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf.  $\blacksquare$

## 4.5 Povezavno regularni produkti $G[H] - nG$

V tem razdelku naj bosta  $G$  in  $H$  grafa ter  $\Gamma$  produkt teh dveh grafov z oznako  $G[H] - nG$ , ki je v angleški literaturi poznan pod izrazom “deleted lexicographic product”. Pri tem je  $n = |V(H)|$ . Narejena je karakterizacija povezanih povezavno regularnih produktov grafov z oznako  $G[H] - nG$  (glej izreka 4.5.3 in 4.5.9). Narejena je tudi karakterizacija povezanih skoraj krepko regularnih produktov grafov z oznako  $G[H] - nG$  (glej izreka 4.5.5 in 4.5.11). V izogib trivialnostim predpostavimo, da je  $|V(G)| \geq 2$  in  $|V(H)| \geq 2$ .

Ker nas zanimajo povezani produkti  $\Gamma$ , bomo v naslednji lemi podali potrebne in zadostne pogoje, ki jim morata zadoščati grafa  $G$  in  $H$ , da je produkt  $\Gamma$  povezan graf.

**Lema 4.5.1** (i) Če je graf  $H$  izomorfen praznemu grafu  $E_2$ , potem je produkt  $\Gamma$  povezan graf natanko tedaj, ko je graf  $G$  povezan graf, ki ni dvodelen.

(ii) Če graf  $H$  ni izomorfen praznemu grafu  $E_2$ , potem je produkt  $\Gamma$  povezan graf natanko tedaj, ko je povezan graf  $G$ .

DOKAZ. (i) Opazimo, da je v primeru, ko je  $H = E_2$ , produkt  $\Gamma$  izomorfen tenzorskem produktu  $G \times K_2$ . Rezultat sledi iz [22, Theorem 5.29].

(ii) Naj velja, da  $H \neq E_2$ . Če graf  $G$  ni povezan, potem tudi produkt  $\Gamma$  očitno ni povezan. Naj bo sedaj graf  $G$  povezan. Vzemimo dve poljubni točki  $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in V(\Gamma)$ . Radi bi pokazali, da v produktu  $\Gamma$  med tema dvema točkama obstaja pot. Ker je graf  $G$  povezan, obstaja v tem grafu pot med točkama  $g_1$  in  $g_2$ . Sledi, da v produktu  $\Gamma$  obstaja pot med točkama  $(g_1, h_1)$  in  $(g_2, h)$  za neko točko  $h \in H$ . Če je  $h = h_2$  ali pa sta točki  $h$  in  $h_2$  sosednji v grafu  $H$ , potem smo z dokazom končali. Če pa velja, da  $h \neq h_2$  in da točki  $h$  in  $h_2$  nista sosednji v grafu  $H$ , potem graf  $H$  ni izomorfen polnemu grafu  $K_2$ . Ker graf hkrati ni izomorfen praznemu grafu  $E_2$ , to pomeni, da je  $|V(H)| \geq 3$ . Vzemimo sedaj točko  $g$ , ki je sosednja točki  $g_2$  v grafu  $G$  in točko  $h' \in V(H) \setminus \{h_2, h\}$ . Opazimo, da je točka  $(g, h')$  v produktu  $\Gamma$  sosednja točkama  $(g_2, h_2)$  in  $(g_2, h)$ , kar utemeljuje našo trditev o obstoju poti med poljubnima dvema točkama v tem grafu. ■

Naslednja lema nam pove, da je regularnost grafov  $G$  in  $H$  potreben in zadosten pogoj za regularnost produkta  $\Gamma$ . Poleg tega nam poda stopnjo tega produkta v odvisnosti od stopenj grafov  $G$  in  $H$  ter reda grafa  $H$ .

**Lema 4.5.2** Produkt  $\Gamma$  je regularen graf natanko tedaj, ko sta oba grafa  $G$  in  $H$  regularna. V tem primeru je  $k_\Gamma = k_H + k_G(|V(H)| - 1)$ .

DOKAZ. Naj bo produkt  $\Gamma$  regularen graf stopnje  $k_\Gamma$ . Za poljubno točko  $g \in V(G)$  in poljubni točki  $h_1, h_2 \in V(H)$  obravnavajmo točki  $(g, h_1), (g, h_2) \in V(\Gamma)$ . Iz definicije produkta  $\Gamma$  sledi, da je

$$k_\Gamma = |N_\Gamma((g, h_1))| = |N_H(h_1)| + |N_G(g)|(|V(H)| - 1) \quad (4.13)$$

in

$$k_\Gamma = |N_\Gamma((g, h_2))| = |N_H(h_2)| + |N_G(g)|(|V(H)| - 1).$$

Sledi, da je  $|N_H(h_1)| = |N_H(h_2)|$ , zato je graf  $H$  regularen. Če to dejstvo upoštevamo v enakosti (4.13), dobimo še, da je

$$k_\Gamma = |N_\Gamma((g, h_1))| = k_H + |N_G(g)|(|V(H)| - 1).$$

Sledi, da je  $|N_G(g)| = (k_\Gamma - k_H)/(|V(H)| - 1)$  za poljubno točko  $g \in V(G)$ , zato je tudi graf  $G$  regularen.

Naj bosta sedaj grafa  $G$  in  $H$  regularna. Potem je produkt  $\Gamma$  očitno regularen graf, saj je

$$|N_\Gamma((g, h))| = |N_H(h)| + |N_G(g)|(|V(H)| - 1) = k_H + k_G(|V(H)| - 1)$$

za poljubno točko  $(g, h) \in V(\Gamma)$  in je zato  $k_\Gamma = k_H + k_G(|V(H)| - 1)$ . ■

Karakterizacijo povezanih povezavno regularnih produktov  $\Gamma$  in karakterizacijo povezanih skoraj krepko regularnih produktov  $\Gamma$  bomo zaradi boljše preglednosti dokazov naredili v ločenih primerih glede na red grafa  $H$ . V podrazdelku 4.5.1 obravnavamo primer, ko je  $|V(H)| = 2$ , v podrazdelku 4.5.2 pa obravnavamo še primere, ko je  $|V(H)| \geq 3$ .

#### 4.5.1 Primer, ko je $|V(H)| = 2$

Spomnimo se, da obravnavamo produkte  $\Gamma = G[H] - nG$ , kjer je  $n = |V(H)|$ . Prvi izrek v tem podrazdelku nam da delno karakterizacijo povezanih povezavno regularnih produktov  $\Gamma$ , in sicer za primer, ko je  $|V(H)| = 2$ . Drugi del te karakterizacije je narejen v podrazdelku 4.5.2 (glej izrek 4.5.9).

**Izrek 4.5.3** *Naj bo  $|V(H)| = 2$ . Produkt  $\Gamma = G[H] - nG$  je povezan povezavno regularen graf natanko tedaj, ko velja ena od naslednjih dveh trditev:*

- (i) *Graf  $H$  je izomorfen praznemu grafu  $E_2$ , graf  $G$  pa je povezan regularen graf, ki ni dvodelen.*
- (ii) *Graf  $H$  je izomorfen polnemu grafu  $K_2$ , graf  $G$  pa je povezan regularen graf.*

**DOKAZ.** Naj bo  $|V(H)| = 2$  in naj bo produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf. Če je graf  $H$  izomorfen praznemu grafu  $E_2$ , potem iz lem 4.5.1 (i) in 4.5.2 sledi, da je graf  $G$  povezan regularen graf, ki ni dvodelen. Če pa je graf  $H$  izomorfen polnemu grafu  $K_2$ , potem iz lem 4.5.1 (ii) in 4.5.2 sledi, da je graf  $G$  povezan regularen graf.

Naj sedaj veljajo predpostavke pod točko (i) ali (ii). Povezanost in regularnost produkta  $\Gamma$  sledi iz lem 4.5.1 in 4.5.2. Poleg tega velja, da je v obeh primerih produkt  $\Gamma$  dvodelen graf, kar pomeni, da je  $\lambda_\Gamma = 0$  in je zato ta produkt povezan povezavno regularen graf. ■

Naslednji korak je, da utemeljimo, v katerih primerih izreka 4.5.3 je produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf. Najprej pogledajmo primer, ko je graf  $H$  izomorfen praznemu grafu  $E_2$ . Kot smo že omenili v dokazu leme 4.5.1, je v tem primeru produkt  $\Gamma$  izomorfen tenzorskemu produktu  $G \times K_2$ , ki se imenuje tudi *dvodelna podvojitev* grafa  $G$  (glej [6, Section 1.11]). Spomnimo se še, da je  $\lambda_\Gamma = 0$ . Po [6, Theorem 1.11.1 (ii)] je produkt  $\Gamma$  v tem primeru povezan skoraj krepko regularen graf natanko tedaj, ko je graf  $G$  povezan regularen graf, ki ni dvodelen in v katerem imata poljubni dve točki bodisi 0 bodisi  $\mu_\Gamma$  skupnih sosednjih točk.

V doktorski disertaciji bomo zato obravnavali primer, ko je graf  $H$  izomorfen polnemu grafu  $K_2$ . Najprej bomo poiskali potrebne pogoje, ki jim mora zadoščati graf  $G$ , da je produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen.

**Lema 4.5.4** *Naj bo graf  $H$  izomorfen polnemu grafu  $K_2$  in naj bo produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf. Potem veljajo naslednje trditve:*

- (i) *Graf  $G$  je povezan povezavno regularen graf.*
- (ii) *Bodisi je graf  $G$  polni graf ali pa je graf  $G$  povezan skoraj krepko regularen graf.*
- (iii) *Če graf  $G$  ni polni graf, potem velja, da je  $\lambda_G + 2 = \mu_G = \mu_\Gamma$ .*

**DOKAZ.** Naj bo produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf in naj bo  $V(H) = \{h_1, h_2\}$ . Iz povezanosti produkta  $\Gamma$  sledi, da je povezan tudi graf  $G$ .

(i) Vzemimo poljubni sosednji točki  $g_1, g_2$  grafa  $G$ . Obravnavajmo točki  $u = (g_1, h_1)$ ,  $v = (g_2, h_1) \in V(\Gamma)$ . Opazimo, da je  $\partial_\Gamma(u, v) = 2$ . Za točki  $u$  in  $v$  poiščimo njune skupne sosednje točke. Točka  $z = (g, h)$  je njuna skupna sosednja točka natanko tedaj, ko je  $h = h_2$  in je bodisi  $g \in \{g_1, g_2\}$  ali pa je točka  $g$  skupna sosednja točka točk  $g_1, g_2$  v grafu  $G$ . Torej velja, da je

$$\mu_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = 2 + |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)|. \quad (4.14)$$

Sledi, da je število skupnih sosednjih točk dveh sosednjih točk grafa  $G$  neodvisno od izbire teh dveh točk, zato parameter  $\lambda_G$  grafa  $G$  obstaja. Torej je v tem primeru graf  $G$  povezan povezavno regularen graf.

(ii) Predpostavimo, da  $G$  ni polni graf. Vzemimo taki poljubni točki  $g_1, g_2 \in V(G)$ , da je  $\partial_G(g_1, g_2) = 2$ . Obravnavajmo točki  $u = (g_1, h_1)$ ,  $v = (g_2, h_1) \in V(\Gamma)$ . Opazimo, da velja, da je  $\partial_\Gamma(u, v) = 2$ . Za točki  $u$  in  $v$  poiščimo njune skupne sosednje točke. Točka  $z = (g, h)$  je njuna skupna sosednja točka natanko tedaj, ko je  $h = h_2$  in je  $g$  skupna sosednja točka točk  $g_1, g_2$  v grafu  $G$ . Torej velja, da je

$$\mu_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)|. \quad (4.15)$$

Sledi, da je število skupnih sosednjih točk dveh točk grafa  $G$ , ki sta na razdalji 2, neodvisno od izbire teh dveh točk, zato parameter  $\mu_G$  grafa  $G$  obstaja. Torej je v tem primeru graf  $G$  bodisi polni graf ali pa povezan skoraj krepko regularen graf.

(iii) Trditev pod to točko sledi iz enakosti (4.14) in (4.15). ■

Naslednji izrek nam da karakterizacijo povezanih skoraj krepko regularnih produktov  $\Gamma$  v primeru, ko je graf  $H$  izomorfen polnemu grafu  $K_2$ .

**Izrek 4.5.5** *Naj bo graf  $H$  izomorfen polnemu grafu  $K_2$ . Produkt  $\Gamma = G[H] - nG$  je povezan skoraj krepko regularen graf natanko tedaj, ko je bodisi graf  $G$  polni graf ali pa je graf  $G$  povezan skoraj krepko regularen graf, za katerega velja, da je  $\lambda_G + 2 = \mu_G$ .*

**DOKAZ.** Naj bo produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf in naj bo graf  $H$  izomorfen polnemu grafu  $K_2$ . Če graf  $G$  ni polni graf, potem po lemi 4.5.4 (iii) sledi, da je graf  $G$  povezan skoraj krepko regularen graf, za katerega velja, da je  $\lambda_G + 2 = \mu_G$ .

Naj bo graf  $G$  izomorfen polnemu grafu  $K_m$ . Potem je produkt  $\Gamma$  izomorfen polnemu dvodelnemu grafu  $K_{m,m}$ , ki je očitno povezan skoraj krepko regularen graf. Naj bo sedaj graf  $G$  povezan skoraj krepko regularen graf, za katerega velja, da je  $\lambda_G + 2 = \mu_G$ . Ker je produkt  $\Gamma$  dvodelen graf, je ta produkt povezavno regularen graf, za katerega velja, da je  $\lambda_\Gamma = 0$ . Vzemimo taki točki  $u = (g_1, h), v = (g_2, h') \in V(\Gamma)$ , da je  $\partial_\Gamma(u, v) = 2$ . Opazimo, da imamo dve možnosti:

- (i)  $h = h'$  in sta točki  $g_1, g_2$  sosednji v grafu  $G$ . V tem primeru imata točki  $u$  in  $v$  natanko  $2 + \lambda_G$  skupnih sosednjih točk.
- (ii)  $h = h'$  in je  $\partial_G(g_1, g_2) = 2$ . V tem primeru imata točki  $u$  in  $v$  natanko  $\mu_G$  skupnih sosednjih točk.

Ker velja, da je  $\lambda_G + 2 = \mu_G$ , je število skupnih sosednjih točk točk  $u$  in  $v$ , ki sta v grafu  $\Gamma$  na razdalji 2, neodvisno od izbire teh dveh točk. To pomeni, da parameter  $\mu_\Gamma$  produkta  $\Gamma$  obstaja in je zato ta produkt povezan skoraj krepko regularen graf. ■

#### 4.5.2 Primer, ko je $|V(H)| \geq 3$

V tem podrazdelku obravnavamo primere produktov  $\Gamma = G[H] - nG$ , ko je  $n = |V(H)| \geq 3$ . Prvi rezultat nam da potrebne pogoje, ki jim mora zadoščati graf  $H$ , da je produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf.

**Lema 4.5.6** *Če je produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf, potem je graf  $H$  bodisi izomorfen praznemu grafu  $E_n$  ali pa polnemu grafu  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$ .*

**DOKAZ.** Naj bo produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf in naj velja, da  $H$  ni niti prazen niti polni graf. Potem obstajajo take različne točke  $h_1, h_2, h_3 \in V(H)$ , da je  $\partial_H(h_1, h_2) = 1$  in  $\partial_H(h_1, h_3) \neq 1$ . Vzemimo sosednji točki  $g_1, g_2 \in V(G)$  in obravnavajmo točke  $u = (g_1, h_1), v = (g_2, h_2)$  in  $z = (g_2, h_3) \in V(\Gamma)$ . Iz definicije produkta  $\Gamma$  sledi, da je  $\partial_\Gamma(u, v) = 1$  in  $\partial_\Gamma(u, z) = 1$ . Sedaj v grafu  $\Gamma$  poiščimo skupne sosednje točke sosednjih točk  $u, v$  in skupne sosednje točke sosednjih točk  $u, z$ . Opazimo, da je

$$\begin{aligned} N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v) &= \{(g_1, h) \mid h \in N_H(h_1) \setminus \{h_2\}\} \cup \\ &\quad \{(g_2, h) \mid h \in N_H(h_2) \setminus \{h_1\}\} \cup \\ &\quad \{(g, h) \mid g \in N_G(g_1) \cap N_G(g_2), h \in V(H) \setminus \{h_1, h_2\}\} \end{aligned}$$



in

$$\begin{aligned} N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(z) &= \{(g_1, h) \mid h \in N_H(h_1)\} \cup \\ &\quad \{(g_2, h) \mid h \in N_H(h_3)\} \cup \\ &\quad \{(g, h) \mid g \in N_G(g_1) \cap N_G(g_2), h \in V(H) \setminus \{h_1, h_3\}\}. \end{aligned}$$

Torej je

$$|N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = 2(k_H - 1) + |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)|(|V(H)| - 2),$$

in

$$|N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(z)| = 2k_H + |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)|(|V(H)| - 2).$$

Od tod očitno sledi, da

$$|N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| \neq |N_\Gamma(w) \cap N_\Gamma(z)|,$$

kar je v protislovju s predpostavko, da parameter  $\lambda_\Gamma$  grafa  $\Gamma$  obstaja. Sledi, da je graf  $H$  bodisi izomorfen praznemu grafu  $E_n$  ali pa polnemu grafu  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$ .  $\blacksquare$

Z naslednjo lemo dobimo še potreben pogoj, ki mu mora zadoščati graf  $G$ , da je produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf.

**Lema 4.5.7** *Če je produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf, potem je povezan povezavno regularen tudi graf  $G$ .*

**DOKAZ.** Naj bo produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf. Potem je povezan tudi graf  $G$ . Po lemi 4.5.2 je graf  $G$  regularen, po lemi 4.5.6 pa velja, da je graf  $H$  bodisi izomorfen praznemu grafu  $E_n$  ali pa polnemu grafu  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$ . Vzemimo poljubni sosednji točki  $g_1, g_2 \in V(G)$ . Za poljubni različni točki  $h_1, h_2 \in V(H)$  obravnavajmo točki  $u = (g_1, h_1), v = (g_2, h_2) \in V(\Gamma)$ . Iz definicije produkta  $\Gamma$  sledi, da je  $\partial_\Gamma(u, v) = 1$ . Za točki  $u$  in  $v$  sedaj poiščimo njune skupne sosednje točke. Opazimo, da je

$$\begin{aligned} N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v) &= \{(g_1, h) \mid h \in N_H(h_1) \setminus \{h_2\}\} \cup \\ &\quad \{(g_2, h) \mid h \in N_H(h_2) \setminus \{h_1\}\} \cup \\ &\quad \{(g, h) \mid g \in N_G(g_1) \cap N_G(g_2), h \in V(H) \setminus \{h_1, h_2\}\}. \end{aligned}$$

Torej je

$$|N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = 2t + |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)|(n - 2), \quad (4.16)$$

kjer je  $t = 0$ , če je graf  $H$  izomorfen praznemu grafu  $E_n$ , in je  $t = n - 2$ , če je graf  $H$  izomorfen polnemu grafu  $K_n$ . Ker je  $\lambda_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)|$ , sledi, da je

$$|N_G(g_1) \cap N_G(g_2)| = \frac{\lambda_\Gamma - 2t}{n - 2}.$$

Torej je število skupnih sosednjih točk dveh sosednjih točk grafa  $G$  neodvisno od izbire teh dveh točk in zato parameter  $\lambda_G$  grafa  $G$  obstaja. Sledi, da je graf  $G$

povezan povezavno regularen graf. ■

Iz dokaza prejšnje leme sledi enakost za parameter  $\lambda_\Gamma$  v odvisnosti od parametra  $\lambda_G$ , stopnje grafa  $G$  in reda polnega grafa  $H$ .

**Posledica 4.5.8** *Če je produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf in je graf  $H$  izomorfen polnemu grafu  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$ , potem je*

$$\lambda_\Gamma = (\lambda_G + 2)(n - 2) = (k_G + 1)(n - 2).$$

**DOKAZ.** Naj bo produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf in naj bo graf  $H$  izomorfen polnemu grafu  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$ . Opazimo, da iz enakosti (4.16) sledi, da je  $\lambda_\Gamma = (\lambda_G + 2)(n - 2)$ . Da dokažemo, da je  $\lambda_\Gamma = (k_G + 1)(n - 2)$ , vzemimo poljubno točko  $g \in V(G)$  in poljubni različni točki  $h_1, h_2 \in V(H)$  ter obravnavajmo točki  $u = (g, h_1)$  in  $v = (g, h_2) \in V(\Gamma)$ . Opazimo, da je  $\partial_\Gamma(u, v) = 1$ . Poiščimo sedaj skupne sosednje točke točk  $u$  in  $v$  v produktu  $\Gamma$ . Ker je

$$N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v) = \{(g_1, h) \mid g_1 \in N_G(g) \cup \{g\}, h \in V(H) \setminus \{h_1, h_2\}\},$$

sledi, da je

$$\lambda_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = (k_G + 1)(n - 2). \quad \blacksquare$$

Na podlagi zbranih rezultatov tega podrazdelka dobimo naslednji izrek, ki skupaj z izrekom 4.5.3 podaja karakterizacijo vseh povezanih povezavno regularnih produktov  $\Gamma = G[H] - nG$ .

**Izrek 4.5.9** *Naj bo  $|V(H)| \geq 3$ . Produkt  $\Gamma = G[H] - nG$  je povezan povezavno regularen graf natanko tedaj, ko velja ena od naslednjih dveh trditev:*

- (i) *Graf  $H$  je izomorfen praznemu grafu  $E_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$ , graf  $G$  pa je povezan povezavno regularen graf.*
- (ii) *Graf  $H$  je izomorfen polnemu grafu  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$ , graf  $G$  pa je izomorfen polnemu grafu  $K_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$ .*

**DOKAZ.** Naj bo produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf. Trditev pod točko (i) sledi iz leme 4.5.7, po kateri je graf  $G$  povezan povezavno regularen graf, in leme 4.5.6, po kateri je graf  $H$  izomorfen bodisi praznemu grafu  $E_n$  ali polnemu grafu  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$ .

(ii) Naj bo graf  $H$  izomorfen polnemu grafu  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$ . Po posledici 4.5.8 velja, da je  $\lambda_G + 1 = k_G$ . Ker je graf  $G$  povezan, po trditvi 4.0.2 (i) sledi, da je graf  $G$  izomorfen grafu  $K_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$ .

Naj sedaj veljajo predpostavke pod točko (i) ali (ii). V primeru predpostavk pod točko (i), ko je graf  $H$  izomorfen praznemu grafu  $E_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$  in je graf  $G$  povezan povezavno regularen graf, vzemimo poljubni sosednji

točki  $u = (g_1, h_1), v = (g_2, h_2) \in V(\Gamma)$ . Opazimo, da sta točki  $g_1, g_2$  sosednji v grafu  $G$  in da  $h_1 \neq h_2$ . Poleg tega je

$$N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v) = \{(g, h) \mid g \in N_G(g_1) \cap N_G(g_2), h \in V(H) \setminus \{h_1, h_2\}\}.$$

Od tod sledi, da je

$$|N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = \lambda_G(n - 2),$$

zato je produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf.

V primeru predpostavk pod točko (ii), ko je graf  $H$  izomorfen polnemu grafu  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$  in je graf  $G$  izomorfen polnemu grafu  $K_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$ , opazimo, da je produkt  $\Gamma$  izomorfen grafu  $K_{n \times m}$ , ki je očitno povezan povezavno regularen graf. ■

Med produkti iz zadnjega izreka bomo v nadaljevanju poiskali tiste, ki so tudi skoraj krepko regularni. Najprej bomo podali potreben pogoj, ki mu mora zadoščati graf  $G$ , da je produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf.

**Lema 4.5.10** *Naj bo  $|V(H)| \geq 3$ . Če je produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf, potem je graf  $G$  izomorfen polnemu grafu  $K_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$ .*

**DOKAZ.** Naj bo produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf in naj velja, da graf  $G$  ni polni graf. Po izreku 4.5.9 je graf  $H$  izomorfen praznemu grafu  $E_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$ . Vzemimo taki poljubni točki  $g_1, g_2 \in V(G)$ , da je  $\partial_G(g_1, g_2) = 2$ . Vzemimo še poljubni različni točki  $h_1, h_2 \in H$  in obravnavajmo točke  $u = (g_1, h_1), v = (g_2, h_1), z = (g_2, h_2) \in V(\Gamma)$ . Po definiciji produkta  $\Gamma$  velja, da je  $\partial_\Gamma(u, v) = \partial_\Gamma(u, z) = 2$ . V grafu  $\Gamma$  poiščimo skupne sosednje točke točk  $u, v$  in skupne sosednje točke točk  $u, z$ . Opazimo, da je

$$N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v) = \{(g, h) \mid g \in N_G(g_1) \cap N_G(g_2), h \in V(H) \setminus \{h_1\}\},$$

in

$$N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(z) = \{(g, h) \mid g \in N_G(g_1) \cap N_G(g_2), h \in V(H) \setminus \{h_1, h_2\}\}.$$

Od tod dobimo, da je

$$|N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)|(|V(H)| - 1)$$

in

$$|N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(z)| = |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)|(|V(H)| - 2)$$

Ker je produkt  $\Gamma$  skoraj krepko regularen graf in je  $N_G(g_1) \cap N_G(g_2) \neq \emptyset$ , sledi, da je  $|V(H)| - 1 = |V(H)| - 2$  in pridemo do protislovja. Torej je graf  $G$  izomorfen polnemu grafu  $K_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$ . ■

Naslednji izrek nam skupaj z izrekom 4.5.5, ki se nanaša na primer, ko je graf  $H$  polni graf  $K_2$ , in rezultatom [6, Theorem 1.11.1 (ii)], ki se nanaša na primer, ko je graf  $H$  prazen graf  $E_2$ , podaja karakterizacijo vseh povezanih skoraj krepko regularnih produktov  $\Gamma$ .

**Izrek 4.5.11** *Naj bo  $|V(H)| \geq 3$ . Produkt  $\Gamma = G[H] - nG$  je povezan skoraj krepko regularen graf natanko tedaj, ko velja ena od naslednjih dveh trditev:*

- (i) *Graf  $H$  je izomorfen praznemu grafu  $E_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$ , graf  $G$  pa je bodisi izomorfen polnemu grafu  $K_2$  ali pa je izomorfen polnemu grafu  $K_n$ .*
- (ii) *Graf  $H$  je izomorfen polnemu grafu  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$ , graf  $G$  pa je izomorfen polnemu grafu  $K_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$ .*

**DOKAZ.** Naj bo produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf. Po lemi 4.5.6 je graf  $H$  bodisi izomorfen praznemu grafu  $E_n$  ali polnemu grafu  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$ , po lemi 4.5.10 pa je graf  $G$  izomorfen polnemu grafu  $K_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$ . Ostane nam še, da pokažemo, da v primeru, ko je graf  $H$  izomorfen praznemu grafu  $E_n$  in je graf  $G$  izomorfen polnemu grafu  $K_m$  za neko naravno število  $m \geq 3$ , velja, da je  $m = n$ . Vzemimo poljubni različni točki  $g_1, g_2 \in V(G)$  in poljubni različni točki  $h_1, h_2 \in V(H)$ . Obravnavajmo sedaj točke  $u = (g_1, h_1)$ ,  $v = (g_2, h_1)$  in  $z = (g_1, h_2) \in V(\Gamma)$ . Ker je  $n, m \geq 3$ , dobimo, da je  $\partial_\Gamma(u, v) = \partial_\Gamma(u, z) = 2$ . Poleg tega opazimo, da je

$$|N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = (m-2)(n-1) \quad \text{in} \quad |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(z)| = (m-1)(n-2).$$

Od tod pa sledi, da je  $m = n$ .

Naj sedaj veljajo predpostavke pod točko (i) ali (ii). V prvem primeru je graf  $H$  izomorfen praznemu grafu  $E_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$ , graf  $G$  pa je izomorfen polnemu grafu  $K_m$  za neko število  $m \in \{2, n\}$ . Če je  $m = 2$ , potem je produkt  $\Gamma$  izomorfen grafu  $K_{n,n} - nK_2$ , torej polnemu dvodelnemu grafu  $K_{n,n}$  brez  $n$  povezav, pri katerih je vsaka točka krajišče natanko ene od teh povezav. Ta graf je očitno povezan skoraj krepko regularen graf. Če pa je  $m = n$ , potem hitro vidimo, da je produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf s parametroma  $\lambda_\Gamma = (n-2)^2$  in  $\mu_\Gamma = (n-2)(n-1)$ . Ta graf je izomorfen komplementu tako imenovanega  $n \times n$  Rookovega grafa, ki je pravzaprav kartezični produkt  $K_n \square K_n$ . V drugem primeru, ko je graf  $H$  izomorfen polnemu grafu  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 3$ , graf  $G$  pa je izomorfen polnemu grafu  $K_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$ , je produkt  $\Gamma$  izomorfen grafu  $K_{n \times m}$ , ki je seveda povezan skoraj krepko regularen graf. ■

## 4.6 Povezavno regularni konormalni produkti grafov $G$ in $H$

V tem razdelku naj bosta  $G$  in  $H$  grafa ter  $\Gamma$  njun konormalni produkt. Na-rejena je karakterizacija povezanih povezavno regularnih konormalnih produktov  $\Gamma$  (glej izrek 4.6.5). Za dokaz tega izreka bomo potrebovali nekaj delnih rezultatov. Kot posledico tega izreka bomo naredili še karakterizacijo povezanih skoraj krepko regularnih konormalnih produktov  $\Gamma$  (glej posledico 4.6.6). V izogib trivialnostim

predpostavimo, da je  $|V(G)| \geq 2$  in  $|V(H)| \geq 2$ . Ker nas zanimajo povezani konormalni produkti  $\Gamma$ , bomo najprej poiskali potrebne in zadostne pogoje, ki jim morata zadoščati grafa  $G$  in  $H$ , da je konormalni produkt  $\Gamma$  povezan graf.

**Lema 4.6.1** *Konormalni produkt  $\Gamma$  je povezan graf natanko tedaj, ko velja ena od naslednjih treh trditev:*

- (i) *Graf  $H$  je izomorfen praznemu grafu  $E_n$  za neko naravno število  $n \geq 2$ , graf  $G$  pa je povezan.*
- (ii) *Graf  $G$  je izomorfen praznemu grafu  $E_n$  za neko naravno število  $n \geq 2$ , graf  $H$  pa je povezan.*
- (iii) *Oba grafa  $G$  in  $H$  sta neprazna, poleg tega pa je vsaj eden od teh dveh grafov brez izoliranih točk.*

**DOKAZ.** Naj veljajo predpostavke pod točko (i), (ii) ali (iii). Vzemimo poljubni točki  $(g_1, h_1)$  in  $(g_2, h_2) \in V(\Gamma)$  in pokažimo, da v vseh treh primerih med njima obstaja sprehod.

Najprej naj veljajo predpostavke pod točko (i). Če je  $g_1 = g_2$ , potem v grafu  $G$  vzemimo točko  $g$ , ki je sosednja točki  $g_1$ . Opazimo, da je zaporedje točk  $(g_1, h_1)$ ,  $(g, h_2)$ ,  $(g_1, h_2)$  sprehod med točkama  $(g_1, h_1)$  in  $(g_2, h_2)$ . Če  $g_1 \neq g_2$ , potem vzemimo pot  $g_1, z_1, z_2, \dots, z_i, g_2$  med točkama  $g_1$  in  $g_2$  v povezanem grafu  $G$ . V tem primeru opazimo, da je zaporedje točk  $(g_1, h_1)$ ,  $(z_1, h_1)$ ,  $(z_2, h_1)$ ,  $\dots$ ,  $(z_i, h_1)$ ,  $(g_2, h_2)$  sprehod med točkama  $(g_1, h_1)$  in  $(g_2, h_2)$  v konormalnem produktu  $\Gamma$ .

Če veljajo predpostavke pod točko (ii), potem lahko povezanost konormalnega produkta  $\Gamma$  dokažemo na analogen način kot pod točko (i), saj je konormalni produkt komutativen.

Naj sedaj veljajo predpostavke pod točko (iii). Zaradi komutativnosti konormalnega produkta lahko, brez škode za splošnost, predpostavimo, da je graf  $G$  brez izoliranih točk. Ker je  $H$  neprazen graf, vsebuje sosednji točki  $x$  in  $y$ . V grafu  $G$  vzemimo točki  $z \in N_G(g_1)$  in  $w \in N_G(g_2)$ . Potem je zaporedje točk  $(g_1, h_1)$ ,  $(z, x)$ ,  $(w, y)$ ,  $(g_2, h_2)$  sprehod med točkama  $(g_1, h_1)$  in  $(g_2, h_2)$  v konormalnem produktu  $\Gamma$ .

Naj bo konormalni produkt  $\Gamma$  povezan graf. Najprej naj bo  $H$  prazen graf in predpostavimo, da graf  $G$  ni povezan. Vzemimo poljubni točki  $g_1, g_2 \in V(G)$ , ki ležita v različnih povezanih komponentah grafa  $G$ . Vzemimo še poljubno točko  $h \in V(H)$ . Potem opazimo, da ne obstaja pot med točkama  $(g_1, h)$  in  $(g_2, h)$ , kar pa je v protislovju s predpostavko, da je konormalni produkt  $\Gamma$  povezan graf. Torej je graf  $G$  povezan in trditev pod točko (i) velja.

Zaradi komutativnosti konormalnega produkta je dokaz trditve pod točko (ii) analogen dokazu trditve pod točko (i).

Naj bosta sedaj  $G$  in  $H$  oba neprazna grafa. Predpostavimo, da sta  $g \in V(G)$  in  $h \in V(H)$  izolirani točki v grafu  $G$  oziroma grafu  $H$ . Potem je očitno točka  $(g, h)$  izolirana točka konormalnega produkta  $\Gamma$ , kar pa je v protislovju s predpostavko, da je ta produkt povezan graf. Zato trditev pod točko (iii), da je vsaj eden od grafov  $G$  oziroma  $H$  brez izoliranih točk, velja. ■

Naslednja lema nam pove, da je regularnost grafov  $G$  in  $H$  potreben in zadosten pogoj za regularnost konormalnega produkta  $\Gamma$ . Podana je še stopnja regularnega konormalnega produkta  $\Gamma$  v odvisnosti od stopenj in redov grafov  $G$  in  $H$ .

**Lema 4.6.2** *Konormalni produkt  $\Gamma$  je regularen graf natanko tedaj, ko sta regularna oba grafa  $G$  in  $H$ . V tem primeru je  $k_\Gamma = k_G|V(H)| + k_H|V(G)| - k_Gk_H$ .*

DOKAZ. Naj bo konormalni produkt  $\Gamma$  regularen graf stopnje  $k_\Gamma$ . Za poljubno točko  $g \in V(G)$  in poljubni točki  $h_1, h_2 \in V(H)$  obravnavajmo točki  $(g, h_1), (g, h_2) \in V(\Gamma)$ . Po definiciji konormalnega produkta velja, da je

$$k_\Gamma = |N_\Gamma((g, h_1))| = |N_G(g)||V(H)| + |N_H(h_1)||V(G)| - |N_G(g)||N_H(h_1)|,$$

in

$$k_\Gamma = |N_\Gamma((g, h_2))| = |N_G(g)||V(H)| + |N_H(h_2)||V(G)| - |N_G(g)||N_H(h_2)|.$$

Od tod sledi, da je  $|N_H(h_1)| = |N_H(h_2)|$ , zato je graf  $H$  regularen. Regularnost grafa  $G$  sledi iz komutativnosti konormalnega produkta.

Če sta oba grafa  $G$  in  $H$  regularna, potem je konormalni produkt  $\Gamma$  očitno regularen graf, saj je

$$|N_\Gamma((g, h))| = |N_G(g)||V(H)| + |N_H(h)||V(G)| - |N_G(g)||N_H(h)|,$$

in je zato

$$|N_\Gamma((g, h))| = k_G|V(H)| + k_H|V(G)| - k_Gk_H$$

za poljubno točko  $(g, h) \in V(\Gamma)$ . Iz zadnje enakosti sledi tudi enakost za stopnjo konormalnega produkta  $\Gamma$ . ■

Naslednja lema nam da potrebne pogoje, ki jim morata zadoščati grafa  $G$  in  $H$ , da je konormalni produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf.

**Lema 4.6.3** *Če je konormalni produkt  $\Gamma$  povezavno regularen graf, potem veljata naslednji trditvi:*

- (i) *Bodisi je graf  $G$  izomorfen praznemu grafu  $E_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$  ali pa je graf  $G$  povezavno regularen graf.*
- (ii) *Bodisi je graf  $H$  izomorfen praznemu grafu  $E_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$  ali pa je graf  $H$  povezavno regularen graf.*

DOKAZ. Naj bo konormalni produkt  $\Gamma$  povezavno regularen graf. Po lemi 4.6.2 sta oba grafa  $G$  in  $H$  regularna.

(i) Naj bo  $G$  neprazen graf. Vzemimo poljuben par sosednjih točk  $g_1, g_2 \in V(G)$ . Za poljubno točko  $h \in V(H)$  obravnavajmo točki  $u = (g_1, h), v = (g_2, h) \in V(\Gamma)$ . Iz definicije konormalnega produkta sledi, da je  $\partial_\Gamma(u, v) = 1$ . Za točki  $u$  in  $v$  sedaj v grafu  $\Gamma$  poiščemo njune skupne sosednje točke. Opazimo, da je

$$\begin{aligned} N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v) &= \{(g', h') \mid g' \in N_G(g_1) \cap N_G(g_2), h' \in V(H)\} \cup \\ &\quad \{(g', h') \mid g' \in V(G), h' \in N_H(h)\}. \end{aligned}$$

Od tod dobimo, da je

$$|N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)||V(H)| + |N_H(h)||V(G)| - |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)||N_H(h)|. \quad (4.17)$$

Ker je  $\lambda_\Gamma = |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)|$ , sledi, da je

$$|N_G(g_1) \cap N_G(g_2)| = \frac{\lambda_\Gamma - k_H|V(G)|}{|V(H)| - k_H}.$$

Torej je število skupnih sosednjih točk dveh sosednjih točk grafa  $G$  neodvisno od izbire teh dveh točk, zato parameter  $\lambda_G$  grafa  $G$  obstaja, kar pomeni, da je graf  $G$  povezavno regularen graf.

(ii) Zaradi komutativnosti konormalnega produkta je dokaz te trditve, z ustrezno zamenjavo vlog grafov  $G$  in  $H$ , analogen dokazu trditve pod točko (i). ■

Iz dokaza prejšnje leme dobimo enakosti za parameter  $\lambda_\Gamma$  povezavno regularnega konormalnega produkta  $\Gamma$  v odvisnosti od parametrov  $\lambda_G$ ,  $\lambda_H$ , stopenj ter redov grafov  $G$  in  $H$ .

**Posledica 4.6.4** Če je konormalni produkt  $\Gamma$  povezavno regularen graf in sta grafa  $G, H$  neprazna, potem za parameter  $\lambda_\Gamma$  veljajo enakosti

$$\begin{aligned} \lambda_\Gamma &= \lambda_G|V(H)| + k_H|V(G)| - \lambda_G k_H \\ &= \lambda_H|V(G)| + k_G|V(H)| - \lambda_H k_G \\ &= \lambda_G|V(H)| + 2k_H(k_G - \lambda_G) + \lambda_H(|V(G)| - 2k_G + \lambda_G) \\ &= \lambda_H|V(G)| + 2k_G(k_H - \lambda_H) + \lambda_G(|V(H)| - 2k_H + \lambda_H). \end{aligned}$$

**DOKAZ.** Naj bo konormalni produkt  $\Gamma$  povezavno regularen graf. Po lemi 4.6.3 sta oba grafa  $G$  in  $H$  povezavno regularna. Prva enakost sedaj sledi iz enakosti (4.17). Da dokažemo tretjo enakost, vzemimo poljubni sosednji točki  $g_1, g_2 \in V(G)$  in poljubni sosednji točki  $h_1, h_2 \in V(H)$ . Obravnavajmo točki  $u = (g_1, h_1), v = (g_2, h_2) \in V(\Gamma)$ . Iz definicije konormalnega produkta sledi, da je  $\partial_\Gamma(u, v) = 1$ . Za točki  $u$  in  $v$  sedaj v grafu  $\Gamma$  poiščimo njune skupne sosednje točke. Opazimo, da je

$$\begin{aligned} N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v) &= \{(g, h) \mid g \in N_G(g_1) \cap N_G(g_2), h \in V(H)\} \cup \\ &\quad \{(g, h), \mid g \in N_G(g_1) \setminus N_G(g_2), h \in N_H(h_2)\} \cup \\ &\quad \{(g, h), \mid g \in N_G(g_2) \setminus N_G(g_1), h \in N_H(h_1)\} \cup \\ &\quad \{(g, h), \mid g \in V(G) \setminus (N_G(g_1) \cup N_G(g_2)), h \in N_H(h_1) \cap N_H(h_2)\}. \end{aligned}$$

Torej je

$$\begin{aligned} |N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| &= |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)||V(H)| + \\ &\quad (|N_G(g_1)| - |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)|)|N_H(h_2)| + \\ &\quad (|N_G(g_2)| - |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)|)|N_H(h_1)| + \\ &\quad (|V(G)| - |N_G(g_1) \cup N_G(g_2)|)|N_H(h_1) \cap N_H(h_2)|, \end{aligned}$$

kar pomeni, da je tretja enakost dokazana.

Drugo in četrto enakost dobimo, če v dokazu, ki smo ga že naredili, zamenjamo vlogi grafov  $G$  in  $H$ , saj je konormalni produkt komutativen. ■

Na podlagi zbranih rezultatov tega razdelka lahko naredimo karakterizacijo povezanih povezavno regularnih konormalnih produktov  $\Gamma$ , ki je navedena v naslednjem izreku.

**Izrek 4.6.5** *Konormalni produkt  $\Gamma$  grafov  $G$  in  $H$  je povezan povezavno regularen graf natanko tedaj, ko velja ena od naslednjih treh trditvev:*

- (i) *Graf  $H$  je izomorfen praznemu grafu  $E_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$ , graf  $G$  pa je povezan povezavno regularen graf.*
- (ii) *Graf  $G$  je izomorfen praznemu grafu  $E_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$ , graf  $H$  pa je povezan povezavno regularen graf.*
- (iii) *Graf  $H$  je izomorfen grafu  $K_{s \times m}$ , graf  $G$  pa je izomorfen grafu  $K_{t \times n}$  za neka naravna števila  $s, t \geq 2$  in  $m, n \geq 1$ .*

**DOKAZ.** Naj bo konormalni produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf. Če je graf  $H$  izomorfen praznemu grafu  $E_m$  (oziroma graf  $G$  izomorfen praznemu grafu  $E_m$ ) za neko naravno število  $m \geq 2$ , potem smo končali, saj je v tem primeru graf  $G$  (oziroma graf  $H$ ) povezan povezavno regularen graf po lemah 4.6.1 in 4.6.3. Naj bosta sedaj grafa  $G$  in  $H$  neprazna grafa. Po posledici 4.6.4 je

$$\lambda_G |V(H)| + k_H |V(G)| - \lambda_G k_H = \lambda_G |V(H)| + 2k_H (k_G - \lambda_G) + \lambda_H (|V(G)| - 2k_G + \lambda_G).$$

Od tod sledi, da je

$$k_H (|V(G)| - 2k_G + \lambda_G) = \lambda_H (|V(G)| - 2k_G + \lambda_G).$$

Ker očitno velja, da  $k_H \neq \lambda_H$ , dobimo, da je  $2k_G - \lambda_G = |V(G)|$ . V komplementu grafa  $G$  imata vsaki dve nesosednji točki natanko  $|V(G)| - 2k_G + \lambda_G = 0$  skupnih sosednjih točk. Ker je tudi komplement grafa  $G$  regularen graf, iz trditve 4.0.2 (ii) sledi, da je komplement grafa  $G$  izomorfen grafu  $t \times K_n$  za neki naravni števili  $t, n \geq 1$ . To pa pomeni, da je graf  $G$  izomorfen grafu  $K_{t \times n}$  za neki naravni števili  $t, n \geq 1$ . Ker pa je  $G$  neprazen graf, sledi še, da je  $t \geq 2$ . Dokaz, da je graf  $H$  izomorfen grafu  $K_{s \times m}$  za neki naravni števili  $s \geq 2$  in  $m \geq 1$  sledi iz komutativnosti konormalnega produkta.

Naj sedaj veljajo predpostavke pod točko (i), (ii) ali (iii). Iz leme 4.6.1 sledi, da je konormalni produkt  $\Gamma$  povezan graf. V primeru, ko veljajo predpostavke pod točko (i) (oziroma pod točko (ii)), iz definicije konormalnega produkta sledi, da je število skupnih sosednjih točk dveh poljubnih sosednjih točk v grafu  $\Gamma$  enako  $\lambda_G |V(H)|$  (oziroma  $\lambda_H |V(G)|$ ), zato parameter  $\lambda_\Gamma$  grafa  $\Gamma$  obstaja. Torej je v tem primeru konormalni produkt  $\Gamma$  povezan povezavno regularen graf. Če pa veljajo predpostavke pod točko (iii), potem je konormalni produkt  $\Gamma$  izomorfen grafu  $K_{st \times mn}$ , ki pa je tudi povezan povezavno regularen graf. ■



Med konormalnimi produkti iz zadnjega izreka poiščemo še tiste, ki so skoraj krepko regularni, tako da dobimo še karakterizacijo povezanih skoraj krepko regularnih konormalnih produktov, ki je navedena v naslednji posledici.

**Posledica 4.6.6** *Konormalni produkt  $\Gamma$  je povezan skoraj krepko regularen graf natančno tedaj, ko velja ena izmed naslednjih treh trditev:*

- (i) *Graf  $H$  je izomorfen praznemu grafu  $E_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$ , graf  $G$  pa je izomorfen grafu  $K_{t \times n}$  za neki naravni števili  $t \geq 2$ ,  $n \geq 1$ .*
- (ii) *Graf  $G$  je izomorfen praznemu grafu  $E_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$ , graf  $H$  pa je izomorfen grafu  $K_{t \times n}$  za neki naravni števili  $t \geq 2$ ,  $n \geq 1$ .*
- (iii) *Graf  $H$  je izomorfen grafu  $K_{s \times m}$ , graf  $G$  pa je izomorfen grafu  $K_{t \times n}$  za neki naravni števili  $s, t \geq 2$  in je bodisi  $m \geq 2$  ali  $n \geq 2$ .*

**DOKAZ.** Naj bo konormalni produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf. Najprej obravnavajmo primer (i) iz izreka 4.6.5, to je primer, ko je graf  $H$  izomorfen praznemu grafu  $E_m$  za neko naravno število  $m \geq 2$  in je graf  $G$  povezan povezavno regularen graf. Če je graf  $G$  polni graf, potem trditev pod točko (i) velja. Zato naj velja, da graf  $G$  ni polni graf. Vzemimo poljubno točko  $g \in V(G)$  in poljubni točki  $h_1, h_2 \in V(H)$  ter obravnavajmo točki  $u = (g, h_1)$  in  $v = (g, h_2) \in V(\Gamma)$ . Opazimo, da je  $\partial_\Gamma(u, v) = 2$ . Očitno je tudi, da je

$$|N_\Gamma(u) \cap N_\Gamma(v)| = k_G |V(H)|.$$

Sedaj vzemimo poljubni točki  $g_1, g_2 \in V(G)$ , za kateri velja, da je  $\partial_G(g_1, g_2) = 2$ . Vzemimo še poljubno točko  $h \in V(H)$  ter obravnavajmo točki  $w = (g_1, h)$ ,  $z = (g_2, h) \in V(\Gamma)$ . Opazimo, da je  $\partial_\Gamma(w, z) = 2$ . V tem primeru dobimo, da je

$$|N_\Gamma(w) \cap N_\Gamma(z)| = |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)| |V(H)|.$$

Ker je konormalni produkt  $\Gamma$  skoraj krepko regularen, očitno velja, da je

$$k_G |V(H)| = |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)| |V(H)|.$$

Od tod sledi, da je  $k_G = |N_G(g_1) \cap N_G(g_2)|$ . Torej parameter  $\mu_G$  grafa  $G$  obstaja in je enak  $k_G$ . Iz tega pa sledi, da za poljubni točki  $x, y \in V(G)$  velja, da je  $\partial_G(x, y) \leq 2$ . Zato je po trditvi 4.0.2 (iii) graf  $G$  izomorfen grafu  $K_{t \times n}$  za neki naravni števili  $t$  in  $n$ . Ker je graf  $G$  povezan, velja še, da je  $t \geq 2$ .

Dokaz trditve pod točko (ii) je zaradi komutativnosti konormalnega produkta analogen dokazu trditve pod točko (i).

Obravnavajmo sedaj trditev pod točko (iii) iz izreka 4.6.5, to je primer, ko je graf  $H$  izomorfen grafu  $K_{s \times m}$ , graf  $G$  pa je izomorfen grafu  $K_{t \times n}$  za neka naravna števila  $s, t \geq 2$  in  $m, n \geq 1$ . Ker konormalni produkt  $\Gamma$  ni polni graf, dobimo, da je bodisi  $m \geq 2$  ali  $n \geq 2$ .

Če v naši posledici veljajo predpostavke pod točkama (i) ali (ii), potem je konormalni produkt  $\Gamma$  izomorfen grafu  $K_{t \times mn}$ , če pa veljajo predpostavke pod točko (iii), potem je konormalni produkt  $\Gamma$  izomorfen grafu  $K_{st \times mn}$ . V obeh primerih je konormalni produkt  $\Gamma$  povezan skoraj krepko regularen graf. ■



## Poglavje 5

# 2-razdaljno uravnoreženi grafi

Množico vseh točk  $x$  grafa  $\Gamma$ , za katere velja, da je  $\partial_\Gamma(u, x) < \partial_\Gamma(v, x)$  za izbrani točki  $u, v \in V(\Gamma)$ , označimo z  $W_{uv}^\Gamma$ . Pravimo tudi, da so točke iz množice  $W_{uv}^\Gamma$  v grafu  $\Gamma$  bližje točki  $u$  kot točki  $v$ . Graf  $\Gamma$  je  $n$ -razdaljno uravnorežen, če v njem obstajata vsaj dve točki na razdalji  $n$  in če je  $|W_{uv}^\Gamma| = |W_{vu}^\Gamma|$  za vsak par točk  $u, v \in V(\Gamma)$ , za katerega velja, da je  $\partial_\Gamma(u, v) = n$  za neko naravno število  $n$ . V doktorski disertaciji oziroma v tem poglavju obravnavamo primer, ko je  $n = 2$ , torej primer 2-razdaljno uravnoreženih grafov, saj je bilo do sedaj raziskovanje osredotočeno zgolj na 1-razdaljno uravnorežene grafe, ki jim na kratko pravimo kar razdaljno uravnoreženi grafi.

V razdelku 5.1 bomo najprej utemeljili smiselnost obravnave 2-razdaljno uravnoreženih grafov. Pokazali bomo namreč, da obstajajo grafi, ki so 2-razdaljno uravnoreženi in niso razdaljno uravnoreženi. Še več, podana je karakterizacija vseh povezanih 2-razdaljno uravnoreženih grafov, ki niso 2-povezani.

V ostalih dveh razdelkih tega poglavja bomo na podoben način, kot smo to naredili v poglavju 4, obdelali medsebojno povezanost koncepta grafovskih produktov in koncepta 2-razdaljno uravnoreženih grafov. V razdelku 5.2 bomo tako karakterizirali povezane 2-razdaljno uravnorežene kartezične produkte dveh grafov, v razdelku 5.3 pa bomo karakterizirali povezane 2-razdaljno uravnorežene leksikografske produkte dveh grafov.

### 5.1 Povezani 2-razdaljno uravnoreženi grafi, ki niso 2-povezani

V tem razdelku bomo najprej konstruirali posebno družino grafov in nato pokazali, da v tej družini obstajajo grafi, ki so 2-razdaljno uravnoreženi in hkrati niso razdaljno uravnoreženi. Pri tem bomo uporabili znano dejstvo, da je vsak povezan razdaljno uravnorežen graf vsaj 2-povezan (glej [19]). V bistvu bomo karakterizirali povezane 2-razdaljno uravnorežene grafe, ki niso 2-povezani (glej posledico 5.1.4).

Naj bo  $G$  poljuben (ne nujno povezan) graf in  $c$  neka dodatna točka, ki ne pripada množici točk grafa  $G$ . Graf z oznako  $\Gamma(G, c)$  konstruiramo tako, da ima množico

točk

$$V(\Gamma(G, c)) = V(G) \cup \{c\}$$

in množico povezav

$$E(\Gamma(G, c)) = E(G) \cup \{cv \mid v \in V(G)\}.$$

Poleg povezanosti grafa  $\Gamma(G, c)$ , neposredno iz konstrukcije sledi še naslednji izrek.

**Izrek 5.1.1** *Graf  $G$  ni povezan natanko tedaj, ko graf  $\Gamma(G, c)$  ni 2-povezan.* ■

Sedaj bomo pokazali, da je regularnost grafa  $G$  zadostni pogoj, da je graf  $\Gamma(G, c)$  2-razdaljno uravnotežen.

**Izrek 5.1.2** *Če je  $G$  regularen graf, ki ni polni graf, potem je graf  $\Gamma(G, c)$  2-razdaljno uravnotežen.*

**DOKAZ.** Naj bo  $G$  regularen graf stopnje  $k$ , ki ni polni graf. Naj bodo  $G_1, G_2, \dots, G_n$  njegove povezane komponente za neko naravno število  $n$ . Če je graf  $G$  povezan, potem je  $n = 1$ , sicer pa ima graf  $G$  vsaj dve povezani komponenti. Radi bi pokazali, da je graf  $\Gamma = \Gamma(G, c)$  2-razdaljno uravnotežen. Opazimo, da je premer grafa  $\Gamma$  enak 2, kar pomeni, da sta poljubni dve točki tega grafa bodisi sosednji bodisi na razdalji 2.

V grafu  $\Gamma$  imamo največ dva bistveno različna tipa točk na razdalji 2. Prvi tip je, ko obe točki pripadata isti povezani komponenti grafa  $G$ , vendar v grafu  $G$  nista sosednji. Drugi tip pa je, ko točki pripadata različnim povezanima komponentama grafa  $G$ .

Naj bo  $G_i$  poljubna povezana komponenta grafa  $G$ . Vzemimo taki poljubni točki  $v_1, v_2 \in V(G_i)$ , ki sta v grafu  $\Gamma$  na razdalji 2. Preštejmo točke, ki so v grafu  $\Gamma$  bližje točki  $v_1$  kot točki  $v_2$ , nato pa jih primerjajmo s številom točk, ki so v grafu  $\Gamma$  bližje točki  $v_2$  kot točki  $v_1$ . Opazimo, da je

$$W_{v_1 v_2}^\Gamma = \{v_1\} \cup (N_{G_i}(v_1) \setminus (N_{G_i}(v_1) \cap N_{G_i}(v_2))).$$

Od tod sledi, da je

$$|W_{v_1 v_2}^\Gamma| = 1 + |N_{G_i}(v_1)| - |N_{G_i}(v_1) \cap N_{G_i}(v_2)|.$$

Če zamenjamo vlogi točk  $v_1$  in  $v_2$ , dobimo, da je

$$|W_{v_2 v_1}^\Gamma| = 1 + |N_{G_i}(v_2)| - |N_{G_i}(v_2) \cap N_{G_i}(v_1)|,$$

zato je število točk, ki so v grafu  $\Gamma$  bližje točki  $v_1$  kot točki  $v_2$ , enako številu točk, ki so v grafu  $\Gamma$  bližje točki  $v_2$  kot točki  $v_1$ .

Naj bosta sedaj  $G_i$  in  $G_j$  poljubni različni povezani komponenti nepovezanega grafa  $G$ . Vzemimo poljubni točki  $v \in V(G_i)$  in  $u \in V(G_j)$ . Če poiščemo število točk, ki so v grafu  $\Gamma$  bližje točki  $v$  kot točki  $u$ , in število točk, ki so v grafu  $\Gamma$  bližje točki  $u$  kot točki  $v$ , dobimo, da je

$$W_{vu}^\Gamma = \{v\} \cup N_{G_i}(v) \quad \text{in} \quad W_{uv}^\Gamma = \{u\} \cup N_{G_j}(u).$$

Sledi, da je

$$|W_{vu}^\Gamma| = 1 + k \quad \text{in} \quad |W_{uv}^\Gamma| = 1 + k,$$

saj je  $G$  regularen graf stopnje  $k$  in sta zato tudi obe povezani komponenti  $G_i$  in  $G_j$  regularna grafa stopnje  $k$ . Od tod pa sledi, da je število točk, ki so v grafu  $\Gamma$  bližje točki  $v$  kot točki  $u$ , enako številu točk, ki so v grafu  $\Gamma$  bližje točki  $u$  kot točki  $v$ . S tem smo dokazali, da je graf  $\Gamma = \Gamma(G, c)$  2-razdaljno uravnotežen graf. ■

Pokažimo še, da je vsak povezan 2-razdaljno uravnotežen graf, ki ni 2-povezan, izomorfen grafu  $\Gamma(G, c)$  za nek regularen graf  $G$ , ki ni povezan.

**Izrek 5.1.3** Če je graf  $\Gamma$  povezan 2-razdaljno uravnotežen graf, ki ni 2-povezan, potem je izomorfen grafu  $\Gamma(G, c)$  za nek regularen graf  $G$ , ki ni povezan.

**DOKAZ.** Naj bo graf  $\Gamma$  povezan 2-razdaljno uravnotežen graf, ki ni 2-povezan. Naj bo  $c$  njegova presečna točka. Ker graf  $\Gamma$  ni 2-povezan, po odstranitvi točke  $c$  iz grafa  $\Gamma$  dobimo nepovezan podgraf  $G$  s povezanimi komponentami  $G_1, G_2, \dots, G_n$  za neko naravno število  $n \geq 2$ . Radi bi pokazali, da je graf  $G$  regularen in da je presečna točka  $c$  v grafu  $\Gamma$  sosednja vsem točkam podgraфа  $G$ . Dokaz izreka bomo izpeljali v več korakih, tako da bomo dokazali nekaj delnih trditev.

Najprej trdimo, da je točka  $c$  v grafu  $\Gamma$  sosednja vsem točkam povezane komponente  $G_l$  podgraфа  $G$  za vsaj eno naravno število  $l, 1 \leq l \leq n$ . Predpostavimo, da ta trditev ne velja. Naj bosta  $G_i$  in  $G_j$  poljubni različni povezani komponenti grafa  $G$ . Potem obstajata taki točki  $v_2 \in V(G_i)$  in  $u_2 \in V(G_j)$ , da je njuna razdalja do točke  $c$  v grafu  $\Gamma$  enaka 2. To pa pomeni, da hkrati obstajata taki točki  $v_1 \in V(G_i)$  in  $u_1 \in V(G_j)$ , da je točka  $v_1$  v grafu  $\Gamma$  sosednja točkama  $c$  in  $v_2$ , točka  $u_1$  pa je v grafu  $\Gamma$  sosednja točkama  $c$  in  $u_2$ . V tem primeru za množico točk, ki so v grafu  $\Gamma$  bližje točki  $c$  kot točki  $v_2$  in obratno, velja, da je

$$W_{cv_2}^\Gamma \supseteq \{c\} \cup V(G_j) \quad \text{ter} \quad W_{v_2c}^\Gamma \subseteq V(G_i) \setminus \{v_1\}.$$

Sledi, da je

$$1 + |V(G_j)| \leq |W_{cv_2}^\Gamma| \quad \text{ter} \quad |W_{v_2c}^\Gamma| \leq |V(G_i)| - 1.$$

Od tu pa zaradi 2-razdaljne uravnoteženosti grafa  $\Gamma$  dobimo neenakost

$$|V(G_j)| \leq |V(G_i)| - 2. \quad (5.1)$$

Podobno naredimo še za množico točk, ki so v grafu  $\Gamma$  bližje točki  $c$  kot točki  $u_2$  in obratno, da dobimo

$$W_{cu_2}^\Gamma \supseteq \{c\} \cup V(G_i) \quad \text{ter} \quad W_{u_2c}^\Gamma \subseteq V(G_j) \setminus \{u_1\}.$$

Sledi, da je

$$1 + |V(G_i)| \leq |W_{cu_2}^\Gamma| \quad \text{in} \quad |W_{u_2c}^\Gamma| \leq |V(G_j)| - 1.$$

Od tu pa zaradi 2-razdaljne uravnoteženosti grafa  $\Gamma$  dobimo neenakost

$$|V(G_i)| + 2 \leq |V(G_j)|. \quad (5.2)$$

Iz neenakosti 5.1 in 5.2 dobimo zaporedje neenakosti

$$|V(G_i)| + 2 \leq |V(G_j)| \leq |V(G_i)| - 2,$$

kar nas pripelje do protislovja, zato je presečna točka  $c$  v grafu  $\Gamma$  sosednja vsem točkam iz množice  $V(G_l)$  za vsaj eno naravno število  $l, 1 \leq l \leq n$ . Brez škode za splošnost lahko od sedaj naprej predpostavimo, da je točka  $c$  v grafu  $\Gamma$  sosednja vsem točkam iz množice  $V(G_1)$ .

Naša naslednja trditev je, da je inducirani podgraf  $G_1$  grafa  $\Gamma$  regularen. Vzemimo poljubno točko  $u \in V(G) \setminus V(G_1)$ , ki je v grafu  $\Gamma$  sosednja presečni točki  $c$ . Ker je točka  $c$  v grafu  $\Gamma$  sosednja vsem točkam iz množice  $V(G_1)$ , je razdalja med točko  $u$  in poljubno točko  $v \in V(G_1)$  enaka 2. Opazimo še, da je  $|W_{ux}^\Gamma| = |W_{uy}^\Gamma|$  za poljubni točki  $x, y \in V(G_1)$  in da je  $W_{vu}^\Gamma = \{v\} \cup (N_\Gamma(v) \setminus \{c\})$  za poljubno točko  $v \in V(G_1)$ . Sledi, da je  $|W_{vu}^\Gamma| = 1 + |N_\Gamma(v)| - 1 = |N_{G_1}(v)| + 1$  za poljubno točko  $v \in V(G_1)$ . Ker je graf  $\Gamma$  2-razdaljno uravnorežen, iz teh opažanj dobimo naslednje enakosti

$$|N_{G_1}(x)| + 1 = |N_\Gamma(x)| = |W_{xu}^\Gamma| = |W_{ux}^\Gamma| = |W_{uy}^\Gamma| = |W_{yu}^\Gamma| = |N_\Gamma(y)| = |N_{G_1}(y)| + 1,$$

zato je  $|N_{G_1}(x)| = |N_{G_1}(y)|$  za poljubni točki  $x, y \in V(G_1)$ . Od sedaj naprej lahko privzamemo, da je inducirani podgraf  $G_1$  regularen stopnje  $k$  (to pa pomeni, da ima vsaka točka iz množice  $V(G_1)$  v grafu  $\Gamma$  stopnjo  $k + 1$ ).

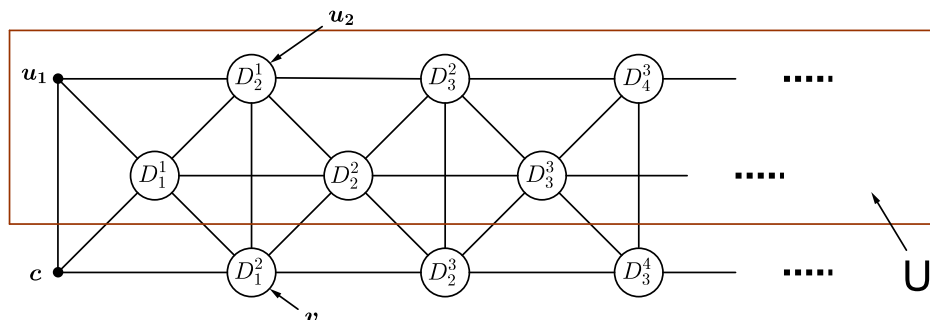
Naš naslednji korak je, da pokažemo, da je presečna točka  $c$  v grafu  $\Gamma$  sosednja tudi vsem točkam iz množice  $V(G) \setminus V(G_1)$ . Predpostavimo, da ta trditev ne velja. Torej za neko naravno število  $l, 2 \leq l \leq n$  obstaja povezana komponenta  $G_l$  podgrafa  $G$  grafa  $\Gamma$ , ki vsebuje neko točko, ki je v grafu  $\Gamma$  na razdalji 2 od točke  $c$ . Brez škode za splošnost lahko vzamemo, da je  $l = 2$ . V tem primeru obstaja taka točka  $u_2 \in V(G_2)$ , da je razdalja med točkama  $c$  in  $u_2$  v grafu  $\Gamma$  enaka 2. Posledično obstaja tudi točka  $u_1 \in V(G_2)$ , ki je v grafu  $\Gamma$  sosednja obema točkama  $c$  in  $u_2$ . Vzemimo poljubno točko  $v \in V(G_1)$ . Spomnimo se, da smo dokazali, da je stopnja vsake točke iz množice  $V(G_1)$  v grafu  $\Gamma$  enaka  $k + 1$ . Preštejmo sedaj vse točke, ki so v grafu  $\Gamma$  bližje točki  $v$  kot točki  $u_1$ . Ker je  $W_{vu_1}^\Gamma = \{v\} \cup (N_\Gamma(v) \setminus \{c\})$ , dobimo, da je  $|W_{vu_1}^\Gamma| = 1 + k + 1 - 1 = k + 1$ . Za točke, ki so v grafu  $\Gamma$  bližje točki  $c$  kot točki  $u_2$  velja, da je  $W_{cu_2}^\Gamma \supseteq V(G_1) \cup \{c\}$ , zato je

$$|W_{cu_2}^\Gamma| \geq |V(G_1)| + 1 \geq k + 2. \quad (5.3)$$

Naredimo sedaj razdaljno particijo grafa  $\Gamma$  glede na sosednji točki  $c$  in  $u_1$ , ki je prikazana na sliki 5.1. Pri tem množico točk, ki so v grafu  $\Gamma$  na razdalji  $i$  od točke  $u_1$  in na razdalji  $j$  od točke  $c$ , označimo z  $D_j^i$ . Definirajmo množico

$$U = \bigcup_{i=1}^d (D_i^{i-1} \cup D_i^i),$$

kjer je  $d$  premer grafa  $\Gamma$ . Najprej pokažimo, da je množica  $W_{u_2c}^\Gamma \subseteq U$ . Naj bo  $x$  poljubna točka iz množice  $W_{u_2c}^\Gamma$ . Ker sta po predpostavki točki  $u_1, u_2$  v grafu  $\Gamma$  sosednji,

Slika 5.1: Razdaljna particija grafa  $\Gamma$  glede na sosednji točki  $c$  in  $u_1$ .

nam trikotniška neenakost pove, da je  $\partial(u_1, x) \in \{\partial(u_2, x) - 1, \partial(u_2, x), \partial(u_2, x) + 1\}$ . Če obravnavamo vse te tri možnosti, dobimo, da je

$$\begin{aligned} \partial(u_1, x) &= \partial(u_2, x) - 1 < \partial(c, x), \\ \partial(u_1, x) &= \partial(u_2, x) < \partial(c, x), \\ \partial(u_1, x) &= \partial(u_2, x) + 1 \leq \partial(c, x). \end{aligned}$$

Iz vsakega obravnavanega primera posebej sledi, da je  $x \in U$  in je zato  $W_{u_2c}^\Gamma \subseteq U$ . Poleg tega opazimo, da je množica  $U \subseteq V(G_2)$ . Sedaj pokažimo še, da je množica  $U \subseteq W_{u_1v}^\Gamma$ . Naj bo  $x$  poljubna točka iz množice  $U$ , kar pomeni, da je točka  $x$  tudi v množici  $V(G_2)$ , zato velja, da je  $\partial(u_1, x) \leq \partial(c, x) < \partial(v, x)$ , saj sta točki  $v$  in  $c$  v grafu  $\Gamma$  sosednji in točka  $v$  ne leži v množici  $V(G_2)$ . Sledi, da je  $x \in W_{u_1v}^\Gamma$  in je zato množica  $U \subseteq W_{u_1v}^\Gamma$ . Iz relacij  $W_{u_2c}^\Gamma \subseteq U \subseteq W_{u_1v}^\Gamma$ , ki smo ju pravkar pokazali, sledi, da je  $W_{u_2c}^\Gamma \subseteq W_{u_1v}^\Gamma$  in zato velja, da je

$$|W_{u_2c}^\Gamma| \leq |W_{u_1v}^\Gamma| = k + 1. \quad (5.4)$$

Ker je graf  $\Gamma$  2-razdaljno uravnotežen, iz neenakosti (5.3) in (5.4) dobimo, da je

$$k + 2 \leq |W_{cu_2}^\Gamma| = |W_{u_2c}^\Gamma| \leq k + 1,$$

kar nas pripelje do protislovja, zato lahko od sedaj naprej privzamemo, da je presečna točka  $c$  v grafu  $\Gamma$  sosednja vsem točkama iz množice  $V(G)$ .

Nazadnje dokažemo še, da je tudi inducirani podgraf  $G_l$  grafa  $\Gamma$  regularen za vsako naravno število  $l, 2 \leq l \leq n$ , in da ima enako stopnjo  $k$  kot regularen inducirani podgraf  $G_1$  grafa  $\Gamma$ . Naj bo  $G_l$  poljubna povezana komponenta podgrafa  $G$  za neko naravno število  $l, 2 \leq l \leq n$ . Brez škode za splošnost vzamemo, da je  $l = 2$ . Ker že vemo, da je presečna točka  $c$  v grafu  $\Gamma$  sosednja vsem ostalim točkam, je poljubna točka iz množice  $V(G_2)$  na razdalji 2 od poljubne točke iz množice  $V(G_1)$ . Vzemimo poljubni točki  $u \in V(G_2)$  in  $v \in V(G_1)$  ter poiščimo točke, ki so v grafu  $\Gamma$  bližje točki  $u$  kot točki  $v$  in obratno. Dobimo, da je

$$W_{uv}^\Gamma = \{u\} \cup (N_\Gamma(u) \setminus \{c\}) = \{u\} \cup N_{G_2}(u)$$

in

$$W_{vu}^\Gamma = \{v\} \cup (N_\Gamma(v) \setminus \{c\}) = \{v\} \cup N_{G_1}(v).$$

Torej je

$$|W_{uv}^\Gamma| = 1 + |N_{G_2}(u)| \quad \text{in} \quad |W_{vu}^\Gamma| = 1 + k.$$

Ker je graf  $\Gamma$  2-razdaljno uravnorežen, sledi, da je  $|W_{uv}^\Gamma| = |W_{vu}^\Gamma|$ , zato je  $|N_{G_2}(u)| = k$  za poljubno točko  $u \in V(G_2)$ . Sledi, da je tudi inducirani podgraf  $G_2$  grafa  $\Gamma$  regularen in ima enako stopnjo  $k$  kot inducirani podgraf  $G_1$ .

S tem smo dokazali, da je presečna točka  $c$  povezanega 2-razdaljno uravnoreženega grafa  $\Gamma$ , ki ni 2-povezan, sosednja vsem točkam nepovezanega inducirane podgrafa  $G$ , na katerega razpade graf  $\Gamma$ , če iz njega odstranimo točko  $c$ , in da je podgraf  $G$  regularen. ■

Karakterizacija vseh povezanih 2-razdaljno uravnoreženih grafov, ki niso 2-povezani, sledi neposredno iz izrekov 5.1.1, 5.1.2 in 5.1.3.

**Posledica 5.1.4** *Graf  $\Gamma$  je povezan 2-razdaljno uravnorežen graf, ki ni 2-povezan, natanko tedaj, ko je izomorfen grafu  $\Gamma(G, c)$  za nek regularen graf  $G$ , ki ni povezan.* ■

## 5.2 2-razdaljno uravnoreženi kartezični produkti grafov $G$ in $H$

V tem razdelku naj bosta  $G$  in  $H$  grafa ter  $\Gamma = G \square H$  njun kartezični produkt. Narejena je karakterizacija povezanih 2-razdaljno uravnoreženih kartezičnih produktov grafov  $G$  in  $H$  (glej izrek 5.2.1). Iz definicije kartezičnega produkta sledi, da je kartezični produkt  $\Gamma$  povezan natanko tedaj, ko sta povezana grafa  $G$  in  $H$ . V izogib trivialnostim predpostavimo, da je  $|V(G)| \geq 2$  in  $|V(H)| \geq 2$ .

Ker se bomo ukvarjali z 2-razdaljno uravnoreženimi kartezičnimi produkti grafov, nas bodo zanimala točke, ki so v teh grafih na razdalji 2. Iz definicije ni težko videti, da za poljubni točki  $(g_1, h_1)$  in  $(g_2, h_2)$  kartezičnega produkta  $\Gamma$  velja, da je

$$\partial_\Gamma((g_1, h_1), (g_2, h_2)) = \partial_G(g_1, g_2) + \partial_H(h_1, h_2). \quad (5.5)$$

Iz te enakosti sledi, da v kartezičnem produktu  $\Gamma$  obstajajo največ trije bistveno različni tipi točk na razdalji 2, ki jih bomo sedaj navedli in se v nadaljevanju sklicevali na njih. Naj bosta  $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in V(\Gamma)$  točki, ki sta v grafu  $\Gamma$  na razdalji 2. Potem rečemo, da sta ti dve točki na razdalji 2

- tipa  $G2$ , če je  $h_1 = h_2$  in je  $\partial_G(g_1, g_2) = 2$ ,
- tipa  $H2$ , če je  $g_1 = g_2$  in je  $\partial_H(h_1, h_2) = 2$ ,
- tipa  $GH2$ , če je  $\partial_G(g_1, g_2) = \partial_H(h_1, h_2) = 1$ .

Naslednji izrek nam da karakterizacijo povezanih 2-razdaljno uravnoreženih kartezičnih produktov grafov  $G$  in  $H$ .



**Izrek 5.2.1** *Kartezični produkt  $\Gamma = G \square H$  je povezan 2-razdaljno uravnorežen graf natanko tedaj, ko velja ena izmed naslednjih trditev:*

- (i) *Grafa  $G$  in  $H$  sta povezana 2-razdaljno uravnorežena in 1-razdaljno uravnorežena grafa.*
- (ii) *Graf  $G$  je polni graf  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 2$ , graf  $H$  pa je povezan 2-razdaljno uravnorežen in 1-razdaljno uravnorežen graf.*
- (iii) *Graf  $H$  je polni graf  $K_n$  za neko naravno število  $n \geq 2$ , graf  $G$  pa je povezan 2-razdaljno uravnorežen in 1-razdaljno uravnorežen graf.*
- (iv) *Graf  $G$  je polni graf  $K_n$ , graf  $H$  pa je polni graf  $K_m$  za neki naravni števili  $m, n \geq 2$ .*

**DOKAZ.** Naj najprej veljajo predpostavke pod točko (i), kar pomeni, da sta oba grafa  $G$  in  $H$  povezana 2-razdaljno uravnorežena in 1-razdaljno uravnorežena grafa. Povezanost kartezičnega produkta  $\Gamma$  sledi iz povezanosti grafov  $G$  in  $H$ . V tem primeru so v kartezičnem produktu  $\Gamma$  vsi trije bistveno različni tipi točk na razdalji 2, ki smo jih navedli pred tem izrekom. Za vsakega od njih bomo pokazali, da je število točk, ki so bližje eni točki, enako številu točk, ki so bližje drugi točki. Naj bosta  $(g_1, h), (g_2, h) \in V(\Gamma)$  poljubni točki na razdalji 2 tipa  $G2$  in naj bo  $(a, x)$  poljubna točka kartezičnega produkta  $\Gamma$ . Iz enakosti 5.5 sledi, da je

$$\partial_{\Gamma}((g_1, h), (a, x)) = \partial_G(g_1, a) + \partial_H(h, x)$$

in

$$\partial_{\Gamma}((g_2, h), (a, x)) = \partial_G(g_2, a) + \partial_H(h, x).$$

Torej je točka  $(a, x)$  v kartezičnem produktu  $\Gamma$  bližja točki  $(g_1, h)$  kot točki  $(g_2, h)$  natanko tedaj, ko je točka  $a$  v grafu  $G$  bližja točki  $g_1$  kot točki  $g_2$ . Ker je točka  $(a, x) \in V(\Gamma)$  poljubno izbrana, sledi, da je

$$|W_{(g_1, h)(g_2, h)}^{\Gamma}| = |H| |W_{g_1 g_2}^G|.$$

Na podoben način dobimo, da je

$$|W_{(g_2, h)(g_1, h)}^{\Gamma}| = |H| |W_{g_2 g_1}^G|.$$

Ker je graf  $G$  po predpostavki 2-razdaljno uravnorežen in sta točki  $g_1, g_2$  v grafu  $G$  na razdalji 2, sledi, da je

$$|W_{(g_1, h)(g_2, h)}^{\Gamma}| = |H| |W_{g_1 g_2}^G| = |H| |W_{g_2 g_1}^G| = |W_{(g_2, h)(g_1, h)}^{\Gamma}|.$$

Torej za poljubni točki  $(g_1, h), (g_2, h) \in V(\Gamma)$  na razdalji 2 tipa  $G2$  velja, da je število točk, ki so bližje točki  $(g_1, h)$  kot točki  $(g_2, h)$ , enako številu točk, ki so bližje točki  $(g_2, h)$  kot točki  $(g_1, h)$ .

Zaradi komutativnosti kartezičnega produkta je dokaz, da za poljubni točki  $(g, h_1), (g, h_2) \in V(\Gamma)$  na razdalji 2 tipa  $H2$  velja, da je število točk, ki so bližje točki

$(g, h_1)$  kot točki  $(g, h_2)$ , enako številu točk, ki so bližje točki  $(g, h_2)$  kot točki  $(g, h_1)$ , analogen dokazu za točke, ki so na razdalji 2 tipa  $G^2$ .

Naj bosta sedaj  $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in V(\Gamma)$  poljubni točki na razdalji 2 tipa  $GH^2$  in naj bo  $(a, x)$  poljubna točka kartezičnega produkta  $\Gamma$ . Iz enakosti 5.5 sledi, da je

$$\partial_\Gamma((g_1, h_1), (a, x)) = \partial_G(g_1, a) + \partial_H(h_1, x) \quad (5.6)$$

in

$$\partial_\Gamma((g_2, h_2), (a, x)) = \partial_G(g_2, a) + \partial_H(h_2, x). \quad (5.7)$$

Množico točk, ki so v grafu  $G$  enako oddaljene od točk  $g_1$  in  $g_2$ , označimo z  $E_{g_1 g_2}^G$ . Glede na razdaljo točk  $h_1$  in  $h_2$  do točke  $x$  v grafu  $H$  ločimo tri primere.

V prvem primeru naj bo  $\partial_H(h_1, x) = \partial_H(h_2, x)$ . Iz enakosti 5.6 in 5.7 dobimo, da je

$$\partial_\Gamma((g_1, h_1), (a, x)) < \partial_\Gamma((g_2, h_2), (a, x)) \iff \partial_G(g_1, a) < \partial_G(g_2, a).$$

To velja za natanko tiste točke  $(a, x) \in V(\Gamma)$ , za katere je  $a \in W_{g_1 g_2}^G$ . Na podoben način dobimo, da je

$$\partial_\Gamma((g_2, h_2), (a, x)) < \partial_\Gamma((g_1, h_1), (a, x)) \iff \partial_G(g_2, a) < \partial_G(g_1, a),$$

kar pa velja za natanko tiste točke  $(a, x) \in V(\Gamma)$ , za katere je  $a \in W_{g_2 g_1}^G$ .

V drugem primeru naj bo  $\partial_H(h_1, x) < \partial_H(h_2, x)$ . Ker sta točki  $h_1$  in  $h_2$  sosednji v grafu  $H$ , je v tem primeru očitno  $\partial_H(h_2, x) = \partial_H(h_1, x) + 1$ . Iz enakosti 5.6 in 5.7 sedaj dobimo, da je

$$\partial_\Gamma((g_1, h_1), (a, x)) < \partial_\Gamma((g_2, h_2), (a, x)) \iff \partial_G(g_1, a) < \partial_G(g_2, a) + 1.$$

To velja za natanko tiste točke  $(a, x) \in V(\Gamma)$ , za katere je  $a \in W_{g_1 g_2}^G \cup E_{g_1 g_2}^G$ . Na podoben način dobimo, da je

$$\partial_\Gamma((g_2, h_2), (a, x)) < \partial_\Gamma((g_1, h_1), (a, x)) \iff \partial_G(g_2, a) + 1 < \partial_G(g_1, a),$$

takih točk pa ni, saj sta točki  $g_1, g_2$  v grafu  $G$  sosednji in se njuni razdalji do poljubne točke razlikujeta za največ 1, zato je  $\partial_G(g_2, a) + 1 \geq \partial_G(g_1, a)$ .

V tretjem primeru naj bo  $\partial_H(h_2, x) < \partial_H(h_1, x)$ . Ker sta točki  $h_1$  in  $h_2$  sosednji v grafu  $H$ , je v tem primeru očitno  $\partial_H(h_1, x) = \partial_H(h_2, x) + 1$ . Iz enakosti 5.6 in 5.7 sedaj dobimo, da je

$$\partial_\Gamma((g_2, h_2), (a, x)) < \partial_\Gamma((g_1, h_1), (a, x)) \iff \partial_G(g_2, a) < \partial_G(g_1, a) + 1.$$

To velja za natanko tiste točke  $(a, x) \in V(\Gamma)$ , za katere je  $a \in W_{g_2 g_1}^G \cup E_{g_1 g_2}^G$ . Na podoben način dobimo, da je

$$\partial_\Gamma((g_1, h_1), (a, x)) < \partial_\Gamma((g_2, h_2), (a, x)) \iff \partial_G(g_1, a) + 1 < \partial_G(g_2, a),$$

takih točk pa ni, kar smo utemeljili že v drugem primeru.

Iz obravnavanih treh primerov lahko sedaj preštejemo točke, ki so v kartezičnem produktu  $\Gamma$  bližje točki  $(g_1, h_1)$  kot točki  $(g_2, h_2)$  in obratno. Dobimo naslednji enakosti:

$$|W_{(g_1, h_1)(g_2, h_2)}^\Gamma| = |E_{h_1 h_2}^H| |W_{g_1 g_2}^G| + |W_{h_1 h_2}^H| |W_{g_1 g_2}^G \cup E_{g_1 g_2}^G| \quad (5.8)$$

in

$$|W_{(g_2, h_2)(g_1, h_1)}^\Gamma| = |E_{h_1 h_2}^H| |W_{g_2 g_1}^G| + |W_{h_2 h_1}^H| |W_{g_2 g_1}^G \cup E_{g_1 g_2}^G|. \quad (5.9)$$

Ker sta grafa  $G$  in  $H$  po predpostavki oba 1-razdaljno uravnorežena in sta točki  $g_1, g_2$  sosednji v grafu  $G$ , točki  $h_1, h_2$  pa sosednji v grafu  $H$ , velja, da je  $|W_{g_1 g_2}^G| = |W_{g_2 g_1}^G|$  in  $|W_{h_1 h_2}^H| = |W_{h_2 h_1}^H|$ . Iz enakosti 5.8 in 5.9 sedaj sledi, da je  $|W_{(g_1, h)(g_2, h)}^\Gamma| = |W_{(g_2, h)(g_1, h)}^\Gamma|$ . S tem smo pokazali, da ob predpostavki, da sta  $G$  in  $H$  oba povezana 2-razdaljno uravnorežena in 1-razdaljno uravnorežena grafa, sledi, da je kartezični produkt  $\Gamma = G \square H$  povezan 2-razdaljno uravnorežen graf. Še več. Iz predpostavke, da sta oba grafa  $G$  in  $H$  1-razdaljno uravnorežena, sledi, da je kartezični produkt  $\Gamma = G \square H$  tudi 1-razdaljno uravnorežen graf (glej [23, Proposition 4.1]).

V primeru, da veljajo predpostavke pod točkami (ii), (iii) ali (iv), je dokaz, da je kartezični produkt  $\Gamma$  povezan 2-razdaljno uravnorežen graf, podoben dokazu, ki smo ga naredili ob predpostavkah pod točko (i). Razlika je le v tem, da imamo ob predpostavkah pod točko (ii) v kartezičnem produktu le točke na razdalji 2 tipa  $H2$  in  $GH2$ , ob predpostavkah pod točko (iii) le točke na razdalji 2 tipa  $G2$  in  $GH2$ , ob predpostavkah pod točko (iv) pa le točke na razdalji 2 tipa  $GH2$ .

Naj bo sedaj kartezični produkt  $\Gamma = G \square H$  povezan 2-razdaljno uravnorežen graf. Povezanost grafov  $G$  in  $H$  sledi iz povezanosti kartezičnega produkta  $\Gamma$ . Če sta  $G$  in  $H$  oba polna grafa, potem dobimo trditev pod točko (iv). Za dokaz trditve pod točkami (i), (ii) in (iii) naj velja, da vsaj eden od grafov  $G$  ali  $H$  ni polni graf. Najprej bomo pokazali, da sta v tem primeru grafa  $G$  in  $H$  2-razdaljno uravnorežena. Privzemimo, da graf  $G$  ni polni graf. Za poljubno točko  $h \in V(H)$  in poljubni točki  $g_1, g_2 \in V(G)$ , za kateri velja, da je  $\partial_G(g_1, g_2) = 2$ , obravnavajmo točki  $(g_1, h), (g_2, h) \in V(\Gamma)$ . Iz enakosti 5.5 sledi, da je  $\partial_\Gamma((g_1, h), (g_2, h)) = 2$ . Že v prvem delu dokaza smo ugotovili, da je

$$|W_{(g_1, h)(g_2, h)}^\Gamma| = |H| |W_{g_1 g_2}^G| \quad \text{in} \quad |W_{(g_2, h)(g_1, h)}^\Gamma| = |H| |W_{g_2 g_1}^G|.$$

Ker je kartezični produkt  $\Gamma$  po predpostavki 2-razdaljno uravnorežen, iz teh dveh enakosti sledi, da je  $|W_{g_1 g_2}^G| = |W_{g_2 g_1}^G|$ , zato je 2-razdaljno uravnorežen tudi graf  $G$ . Zaradi komutativnosti kartezičnega produkta, lahko ob predpostavki, da graf  $H$  ni polni graf, s podobnimi razmislekom pokažemo še, da je 2-razdaljno uravnorežen tudi graf  $H$ .

Dokažimo še, da sta grafa  $G$  in  $H$ , ki nastopata v trditvah pod točkami (i)-(iv) tudi 1-razdaljno uravnorežena. V ta namen vzemimo sedaj točki  $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in V(\Gamma)$ , za kateri velja, da sta točki  $g_1, g_2$  sosednji v grafu  $G$  in sta točki  $h_1, h_2$  sosednji v grafu  $H$ . Ker sta točki  $(g_1, h_1)$  in  $(g_2, h_2)$  v kartezičnem produktu  $\Gamma$  na razdalji 2 in je kartezični produkt  $\Gamma$  po predpostavki 2-razdaljno uravnorežen graf, sledi, da je  $|W_{(g_1, h_1)(g_2, h_2)}^\Gamma| = |W_{(g_2, h_2)(g_1, h_1)}^\Gamma|$ . Zato iz enakosti 5.8 in 5.9 dobimo, da je

$$|E_{h_1 h_2}^H| (|W_{g_1 g_2}^G| - |W_{g_2 g_1}^G|) = |W_{h_2 h_1}^H| |W_{g_2 g_1}^G \cup E_{g_1 g_2}^G| - |W_{h_1 h_2}^H| |W_{g_1 g_2}^G \cup E_{g_1 g_2}^G|. \quad (5.10)$$

Predpostavimo, da graf  $G$  ni 1-razdaljno uravnorežen. Potem obstajata taki sosednji točki  $a, b \in V(G)$ , da je  $|W_{ab}^G| > |W_{ba}^G|$  in je  $\partial_\Gamma((a, h_1), (b, h_2)) = 2$ . Sledi, da je tudi  $|W_{ab}^G \cup E_{ab}^G| > |W_{ba}^G \cup E_{ab}^G|$ , zato iz enakosti 5.8, 5.9 in 5.10 sledi, da je  $|W_{h_2 h_1}^H| > |W_{h_1 h_2}^H|$ . Poleg tega v kartezičnem produktu  $\Gamma$  velja še, da je  $\partial_\Gamma((a, h_2), (b, h_1)) = 2$ .

Z ustrezno zamenjavo točk v enakostih 5.8, 5.9 in 5.10 dobimo, da je v tem primeru  $|W_{h_2h_1}^H| < |W_{h_1h_2}^H|$ , kar nas pripelje do protislovja, zato je graf  $G$  1-razdaljno uravnorežen. Zaradi komutativnosti kartezičnega produkta lahko na podoben način pokažemo, da je tudi graf  $H$  1-razdaljno uravnorežen. ■

### 5.3 2-razdaljno uravnoreženi leksikografski produkti grafov $G$ in $H$

V tem razdelku naj bosta  $G$  in  $H$  grafa ter  $\Gamma = G[H]$  njun leksikografski produkt. Narejena je karakterizacija povezanih 2-razdaljno uravnoreženih leksikografskih produktov grafov  $G$  in  $H$  (glej izrek 5.3.1). Iz definicije leksikografskega produkta sledi, da je produkt  $\Gamma$  povezan natanko tedaj, ko je povezan graf  $G$ . V izogib trivialnostim predpostavimo, da je  $|V(G)| \geq 2$  in  $|V(H)| \geq 2$ .

Opazimo lahko, da v leksikografskem produktu  $\Gamma$  obstajata največ dva bistveno različna tipa točk na razdalji 2, ki jih bomo sedaj navedli in se v dokazu izreka 5.3.1 sklicevali na njih. Naj bosta  $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in V(\Gamma)$  točki, ki sta v produktu  $\Gamma$  na razdalji 2. Potem rečemo, da sta ti dve točki na razdalji 2

- tipa  $G2$ , če je  $\partial_G(g_1, g_2) = 2$ ,
- tipa  $H2$ , če je  $g_1 = g_2$  in je  $\partial_H(h_1, h_2) \geq 2$ .

Iz definicije sledi, da v povezanem leksikografskem produktu  $\Gamma$  obstajata točki na razdalji 2, ki sta tipa  $G2$ , natanko tedaj, ko povezan graf  $G$  ni polni graf. Točki na razdalji 2, ki sta tipa  $H2$ , pa v povezanem leksikografskem produktu  $\Gamma$  obstajata natanko tedaj, ko graf  $H$  ni polni graf. Namreč, če v grafu  $H$  točki na razdalji 2 ne obstajata, potem je graf  $H$  v tem primeru polni graf, prazen graf ali disjunktna unija polnih grafov. V zadnjih dveh primerih sta točki  $(g, h_1), (g, h_2)$  zaradi povezanosti grafa  $G$  v povezanem leksikografskem produktu  $\Gamma$  še vedno točki na razdalji 2 tipa  $H2$ .

**Izrek 5.3.1** *Leksikografski produkt  $\Gamma = G[H]$  je povezan 2-razdaljno uravnorežen graf natanko tedaj, ko velja ena od naslednjih treh trditev:*

- (i) *Graf  $G$  je povezan 2-razdaljno uravnorežen graf, graf  $H$  pa je regularen graf.*
- (ii) *Graf  $G$  je polni graf, graf  $H$  pa je regularen graf, ki ni polni graf.*
- (iii) *Graf  $G$  je polni graf, graf  $H$  pa je povezan polni dvodelni graf.*

**DOKAZ.** Najprej pokažimo, da je v primeru predpostavk pod točko (i), (ii) ali (iii) leksikografski produkt  $\Gamma$  povezan 2-razdaljno uravnorežen graf. Povezanost produkta  $\Gamma$  sledi iz povezanosti grafa  $G$ .

Naj veljajo predpostavke pod točko (i). Potem v grafu  $\Gamma$  obstajata oba tipa točk na razdalji 2, ki smo ju navedli pred izrekom. Vzemimo poljubni točki  $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in V(\Gamma)$ , ki sta na razdalji 2 tipa  $G2$ , kar pomeni, da je  $\partial_G(g_1, g_2) = 2$ .

Poiščimo točke, ki so v grafu  $\Gamma$  bližje točki  $(g_1, h_1)$  kot točki  $(g_2, h_2)$  in obratno. Opazimo, da je

$$W_{(g_1, h_1)(g_2, h_2)}^\Gamma = \{(g_1, h_1)\} \cup (\{g_1\} \times N_H(h_1)) \cup ((W_{g_1 g_2}^G \setminus \{g_1\}) \times V(H))$$

in

$$W_{(g_2, h_2)(g_1, h_1)}^\Gamma = \{(g_2, h_2)\} \cup (\{g_2\} \times N_H(h_2)) \cup ((W_{g_2 g_1}^G \setminus \{g_2\}) \times V(H)).$$

Od tod sledi, da je

$$|W_{(g_1, h_1)(g_2, h_2)}^\Gamma| = 1 + |N_H(h_1)| + (|W_{g_1 g_2}^G| - 1)|V(H)| \quad (5.11)$$

in

$$|W_{(g_2, h_2)(g_1, h_1)}^\Gamma| = 1 + |N_H(h_2)| + (|W_{g_2 g_1}^G| - 1)|V(H)|. \quad (5.12)$$

Ker je po predpostavki graf  $G$  2-razdaljno uravnotežen graf, graf  $H$  pa regularen graf, velja, da je  $|W_{g_1 g_2}^G| = |W_{g_2 g_1}^G|$  in  $|N_H(h_1)| = |N_H(h_2)|$ . Iz enakosti 5.11 in 5.12 sedaj sledi, da je  $|W_{(g_1, h_1)(g_2, h_2)}^\Gamma| = |W_{(g_2, h_2)(g_1, h_1)}^\Gamma|$  za poljubni točki, ki sta v grafu  $\Gamma$  na razdalji 2 tipa  $G2$ .

Vzemimo še poljubni točki  $(g, h_1), (g, h_2) \in V(\Gamma)$ , ki sta na razdalji 2 tipa  $H2$ . Poiščimo točke, ki so v grafu  $\Gamma$  bližje točki  $(g, h_1)$  kot točki  $(g, h_2)$  in obratno. Opazimo, da je

$$W_{(g, h_1)(g, h_2)}^\Gamma = \{(g, h_1)\} \cup (\{g\} \times (N_H(h_1) \setminus (N_H(h_1) \cap N_H(h_2))))$$

in

$$W_{(g, h_2)(g, h_1)}^\Gamma = \{(g, h_2)\} \cup (\{g\} \times (N_H(h_2) \setminus (N_H(h_1) \cap N_H(h_2)))).$$

Od tod sledi, da je

$$|W_{(g, h_1)(g, h_2)}^\Gamma| = 1 + |N_H(h_1)| - |N_H(h_1) \cap N_H(h_2)| \quad (5.13)$$

in

$$|W_{(g, h_2)(g, h_1)}^\Gamma| = 1 + |N_H(h_2)| - |N_H(h_1) \cap N_H(h_2)|. \quad (5.14)$$

Ker je po predpostavki  $H$  regularen graf, velja, da je  $|N_H(h_1)| = |N_H(h_2)|$ . Iz enakosti 5.13 in 5.14 sedaj sledi, da je  $|W_{(g, h_1)(g, h_2)}^\Gamma| = |W_{(g, h_2)(g, h_1)}^\Gamma|$  tudi za poljubni točki, ki sta v grafu  $\Gamma$  na razdalji 2 tipa  $H2$ . Sledi, da je v primeru predpostavk pod točko (i) leksikografski produkt  $\Gamma$  povezan 2-razdaljno uravnotežen graf.

V primeru predpostavk pod točko (ii) imamo v grafu  $\Gamma$  samo točke na razdalji 2 tipa  $H2$ , saj je graf  $G$  polni graf, graf  $H$  pa ni polni graf. Da je leksikografski produkt  $\Gamma$  v tem primeru povezan 2-razdaljno uravnotežen graf, dokažemo podobno kot pri točki (i).

Naj veljajo še predpostavke pod točko (iii). Ker je graf  $G$  polni graf, graf  $H$  pa ni polni graf, v grafu  $\Gamma$  spet obstajajo le točke na razdalji 2 tipa  $H2$ . Naj bosta  $(g, h_1), (g, h_2) \in V(\Gamma)$  poljubni taki točki. Ker je graf  $H$  polni dvodelni graf  $K_{m,n}$ , velja, da je bodisi  $N(h_1) = N(h_2) = m$  ali  $N(h_1) = N(h_2) = n$ , saj sta sicer točki  $h_1$  in  $h_2$  v grafu  $H$  sosednji in sta zato sosednji tudi točki  $(g, h_1)$  in  $(g, h_2)$  v grafu  $\Gamma$ . Spet lahko uporabimo del dokaza pod točko (i), ki se nanaša na točke, ki so v grafu  $\Gamma$  na

razdalji 2 tipa  $H2$ . Iz enakosti 5.13 in 5.14 sledi, da je  $|W_{(g,h_1)(g,h_2)}^\Gamma| = |W_{(g,h_2)(g,h_1)}^\Gamma|$  za poljubni točki, ki sta v grafu  $\Gamma$  na razdalji 2 tipa  $H2$ . Torej je tudi v tem primeru leksikografski produkt  $\Gamma$  povezan 2-razdaljno uravnorežen graf.

Naj bo sedaj leksikografski produkt  $\Gamma$  povezan 2-razdaljno uravnorežen graf. Povezanost grafa  $G$  sledi iz povezanosti grafa  $\Gamma$ .

Najprej naj velja, da graf  $G$  ni polni graf. Naj bosta  $g_1$  in  $g_2$  poljubni točki, ki sta v grafu  $G$  na razdalji 2. Za poljubno točko  $h \in H$  sta točki  $(g_1, h), (g_2, h) \in V(\Gamma)$  točki na razdalji 2 tipa  $G2$ . Ker je graf  $\Gamma$  po predpostavki 2-razdaljno uravnorežen graf, iz enakosti 5.11 in 5.12 sledi, da je  $|W_{g_1g_2}^G| = |W_{g_2g_1}^G|$ . Zato je graf  $G$  povezan 2-razdaljno uravnorežen graf. Za poljubni točki  $h_1, h_2 \in H$  ter poljubni točki  $g_1$  in  $g_2$ , ki sta v grafu  $G$  na razdalji 2, sedaj obravnavajmo točki  $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in V(\Gamma)$ . Ti dve točki sta v grafu  $\Gamma$  točki na razdalji 2 tipa  $G2$ . Ker je graf  $\Gamma$  po predpostavki 2-razdaljno uravnorežen graf, za graf  $G$  pa smo pokazali, da je tudi 2-razdaljno uravnorežen graf, iz enakosti 5.11 in 5.12 sledi, da je  $|N_H(h_1)| = |N_H(h_2)|$  za poljubni točki grafa  $H$ . Torej je v tem primeru graf  $H$  regularen in dobimo trditev pod točko (i).

Od sedaj dalje lahko privzamemo, da je graf  $G$  polni graf. Ker graf  $\Gamma$  ni polni graf, sledi, da tudi graf  $H$  ni polni graf. To pa pomeni, da so v grafu  $\Gamma$  vse točke na razdalji 2 tipa  $H2$ . Radi bi pokazali, da je v tem primeru graf  $H$  regularen graf ali pa je graf  $H$  povezan polni dvodelni graf.

V primeru, da graf  $H$  ni povezan, potem vzemimo poljubni točki  $h_1$  in  $h_2$ , ki ležita v poljubnih različnih povezanih komponentah grafa  $H$ . Za poljubno točko  $g \in G$  sta točki  $(g, h_1), (g, h_2) \in V(\Gamma)$  točki na razdalji 2 tipa  $H2$ . Ker je graf  $\Gamma$  po predpostavki 2-razdaljno uravnorežen graf, iz enakosti 5.13 in 5.14 dobimo, da je  $|N_H(h_1)| = |N_H(h_2)|$  za poljubni točki grafa  $H$ . Sledi, da je v primeru, ko je graf  $G$  polni graf, nepovezan graf  $H$  vedno regularen.

Naj sedaj velja, da je graf  $H$  povezan graf. Naj bosta  $h_1$  in  $h_2$  poljubni točki, ki sta v grafu  $H$  na razdalji 2. To pomeni, da sta za poljubno točko  $g \in G$  točki  $(g, h_1), (g, h_2) \in V(\Gamma)$  točki na razdalji 2 tipa  $H2$ . Zato iz enakosti 5.13 in 5.14 spet dobimo, da je  $|N_H(h_1)| = |N_H(h_2)|$  za poljubni točki, ki sta v grafu  $H$  na razdalji 2. Če graf  $H$  ni dvodelni graf, potem iz povezanosti grafa  $H$  sledi, da je graf  $H$  regularen. Privzemimo sedaj, da je graf  $H$  dvodelni graf, katerega množica točk  $V(H)$  razpade na disjunktno unijo množic  $U_1$  in  $U_2$ , tako da ima vsaka povezava grafa  $H$  eno krajišče v množici  $U_1$ , drugo krajišče pa v množici  $U_2$ . Potem je graf  $H$  biregularen, kar pomeni, da ima poljubna točka iz množice  $U_1$  stopnjo  $k_{U_1}$ , poljubna točka iz množice  $U_2$  pa stopnjo  $k_{U_2}$ . Predpostavimo, da graf  $H$  ni polni dvodelni graf. Potem obstajata taki točki  $u_1 \in U_1$  in  $u_2 \in U_2$ , da sta točki  $(g, u_1)$  in  $(g, u_2) \in V(\Gamma)$  točki na razdalji 2 tipa  $H2$ . Iz enakosti 5.13 in 5.14 sedaj dobimo, da je  $k_{U_1} = k_{U_2}$ . To pa pomeni, da je graf  $H$  regularen in dobimo trditev pod točko (ii). Primer, ko je graf  $H$  polni dvodelni graf, pa nam da trditev pod točko (iii). ■

## Poglavje 6

# Sklep

Rezultati, ki so podani in dokazani v doktorski disertaciji, predstavljajo nadaljevanje oziroma posplošitev raziskovanja družin grafov, ki zadoščajo določenemu tipu povezavne regularnosti. Klasifikacija povezanih kubičnih simetričnih tetracirkulantov in pentacirkulantov je naravno nadaljevanje klasifikacije povezanih kubičnih simetričnih cirkulantov, bicirkulantov in tricirkulantov. Gre za poddružine grafov, ki so zaradi svoje simetričnosti in majhne stopnje predmet pogostega raziskovanja na področju teorije grafov in igrajo pomembno vlogo v mnogih že rešenih, ali pa še odprtih problemih, v kar pričajo tudi številni objavljeni znanstveni članki na to temo. Karakterizacija povezavno regularnih, skoraj krepko regularnih ter 2-razdaljno uravnoveženih različnih produktov dveh grafov pa predstavlja nadaljevanje podobne karakterizacije razdaljno-regularnih ter razdaljno uravnoveženih produktov grafov.

Osnovna orodja pri dokazovanju rezultatov so metode iz algebraične in kombinatorične teorije grafov. Za klasifikacijo povezanih kubičnih simetričnih tetracirkulantov in pentacirkulantov je uporabljena in ustrezno prirejena metodologija, ki je bila predstavljena v [24], v kateri imajo pomembno vlogo rezultati s področja teorije grup in krovnih tehnik iz teorije grafov. Poleg teh teoretičnih izhodišč je za samo klasifikacijo, predvsem za računski del raziskovanja, potrebna še uporaba računalniške algebre s pomočjo računalniškega programa MAGMA [4]. Pri karakterizaciji povezavno regularnih, skoraj krepko regularnih in 2-razdaljno uravnoveženih produktov dveh grafov je v največji meri uporabljena metoda preštevanja določenih konfiguracij na več različnih načinov in natančna analiza dobljenih rezultatov, ki se je že večkrat izkazala za močno orodje pri reševanju in dokazovanju podobnih problemov.

Rezultati doktorske disertacije imajo poleg svoje teoretične vrednosti tudi možnost potencialne uporabe za reševanje odprtih problemov ne samo na področju matematike, ampak tudi na področju računalništva, kemije ter za načrtovanje določenih socialnih in drugih omrežij. Večina rezultatov je bila že objavljena v priznanih znanstvenih revijah s faktorjem vpliva (glej [12, 13]). Med drugim je bil članek [12] v obdobju zadnjih treh mesecev v letu 2012 med petindvajsetimi največkrat prenešenimi matematičnimi članki s spletne strani [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com), kar pomeni še eno potrditve, da je javnost zainteresirana za tovrstne rezultate in s tem dajejo pomemben prispevek k znanosti.





# Literatura

- [1] S. Aggarwal, P. K. Jha, M. Vikram, *Distance Regularity in Direct-Product Graphs*, Appl. Math. Letters **13** (2000), Issue 1, 51–55.
- [2] B. Alspach, C. C. Chen and M. Dean, *Hamilton paths in Cayley graphs on generalized dihedral groups*, Ars Math. Contemp. **3** (2010), 29–47.
- [3] N. Biggs, *Algebraic graph theory*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [4] W. Bosma, J. Cannon, and C. Playoust, *The MAGMA Algebra System I: The User Language*, J. Symbolic Comput. **24** (1997) 235–265.
- [5] I. Z. Bouwer (ed.): *The Foster Census*, Winnipeg, 1988.
- [6] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, New York (1998).
- [7] M. D. E. Conder, <http://www.math.auckland.ac.nz/~conder/symmcubic2048list.txt>.
- [8] M. D. E. Conder, P. Dobcsányi, *Trivalent symmetric graphs on up to 768 vertices*, J. Combin. Math. & Combin. Comp. **40** (2002), 41–63.
- [9] S. F. Du, J. H. Kwak, M. Y. Xu, *On 2-arc-transitive covers of complete graphs with covering transformation group  $\mathbb{Z}_p^3$* , J. Combin. Theory Ser. B **93** (2005), 73–93.
- [10] Y. Q. Feng, K. Wang, *s-Regular cyclic coverings of the three-dimensional hypercube  $Q_3$* , European J. Combin. **24** (2003), 719–731.
- [11] Y. Q. Feng, J. H. Kwak, *Cubic symmetric graphs of order a small number times a prime or a prime square*, J. Combin. Theory Ser. B **97** (2007), 627–646.
- [12] B. Frelih, K. Kutnar, *Classification of cubic symmetric tetracirculants and pentacirculants*, European J. Combin. **34** (2013), 169–194.
- [13] B. Frelih, Š. Miklavič, *Edge regular graph products*, Electron. J. Combin. **20** (2013), 62–78.
- [14] R. Frucht, *How to describe a graph*, Ann. N. Y. Acad. Sci. **175** (1970), 159–167.
- [15] R. Frucht, J. E. Graver, M. E. Watkins, *The groups of the generalized Petersen graphs*, Proc. Camb. Phil. Soc. **70** (1971), 211–218.
- [16] H. H. Glover, D. Marušič, *Hamiltonicity of cubic Cayley graph*, J. Eur. Math. Soc. **9** (2007), 775–787.
- [17] J. L. Gross, T. W. Tucker, *Generating all graph coverings by permutation voltage assignment*, Discrete Math. **18** (1977), 273–283.
- [18] J. L. Gross, T. W. Tucker, *Topological Graph Theory*, Wiley - Interscience, New York, 1987.

- [19] K. Handa, *Bipartite graphs with balanced  $(a, b)$ -partitions*, *Ars Combin.* **51** (1999), 113–119.
- [20] M. Herzog, G. Kaplan, *Large cyclic subgroups contain non-trivial normal subgroups*, *J. Group Theory* **4** (2001), 247–253.
- [21] S. Hong, J. H. Kwak, J. Lee, *Regular graph coverings whose covering transformation groups have the isomorphism extension property*, *Discrete Math.* **168** (1996), 85–105.
- [22] W. Imrich, S. Klavžar, *Product graphs*, Wiley-Interscience, New York (2000).
- [23] J. Jerebic, S. Klavžar, D. F. Rall, *Distance-balanced graphs*, *Ann. comb.* **12** (2008), 71–79.
- [24] I. Kovács, K. Kutnar, D. Marušič, S. Wilson, *Classification of cubic symmetric tricirculants*, *Electron. J. Comb.* **19** (2012), 24–37.
- [25] K. Kutnar, A. Malnič, D. Marušič, Š. Miklavič, *Distance-balanced graphs: symmetry conditions*, *Discrete Math.* **306** (2006), 1881–1894.
- [26] K. Kutnar, A. Malnič, D. Marušič, Š. Miklavič, *The strongly distance-balanced property of the generalized Petersen graphs*, *Ars Math. Contemp.* [Tiskana izd.] **2** (2009), 41–47.
- [27] P. Lorimer, *Vertex-transitive graphs: symmetric graphs of prime valency*, *J. Graph Theory* **8** (1984), 55–68.
- [28] L. Lovász, *Combinatorial structures and their applications*, (Proc. Calgary Internat. Conf., Calgary, Alberta, 1969), pp. 243–246, Problem 11, Gordon and Breach, New York, 1970.
- [29] A. Malnič, *Group actions, coverings and lifts of automorphisms*, *Discrete Math.* **182** (1998), 203–218.
- [30] A. Malnič, R. Nedela, M. Škoviera, *Lifting graph automorphisms by voltage assignments*, *European J. Combin.* **21** (2000), 927–947.
- [31] D. Marušič, T. Pisanski, *Symmetries of hexagonal molecular graphs on the torus*, *Croat. Chem. Acta* **73** (2000), 969–981.
- [32] D. Passman, *Permutation groups*, W. A. Benjamin Inc., New York, 1968.
- [33] M. Petkovšek, H. Zakrajšek, *Enumeration of  $I$ -graphs: Burnside does it again*, *Ars Math. Contemp.* **2** (2009), 241–262.
- [34] T. Pisanski, *A classification of cubic bicirculants*, *Discrete Math.* **307** (2007), 567–578.
- [35] W. R. Scott, *Group theory*, Dover Publications, New York, 1987.
- [36] S. Y. Song, *Products of distance-regular graphs*, *Util. Math.* **29** (1986), 173–175.
- [37] D. Stevanović, *Distance regularity of compositions of graphs*, *Appl. Math. Letters* **17** (2004), 337–343.
- [38] W. T. Tutte, *A family of cubical graphs*, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **43** (1947), 459–474.
- [39] H. Wielandt, *Finite Permutation Groups*, Academic Press, New York, 1964.

# Slike

2.1	Graf kocke $Q_3 = F008A$ . . . . .	8
2.2	Kartezični produkt grafov . . . . .	9
2.3	Tenzorski produkt grafov . . . . .	9
2.4	Krepki produkt grafov . . . . .	9
2.5	Leksikografski produkt grafov . . . . .	10
2.6	Produkt grafov z oznako $G(H) - nG$ . . . . .	10
2.7	Konormalni produkt grafov . . . . .	11
3.1	Kubični simetrični tetracirkulanti v Fruchtovi notaciji . . . . .	18
3.2	Kvocientni multigrafi kubičnih simetričnih tetracirkulantov . . . . .	20
3.3	Dodelitev napetosti $\zeta$ grafu F020A . . . . .	22
3.4	Dodelitev napetosti $\zeta$ grafu F020B . . . . .	25
3.5	Dodelitev napetosti $\zeta$ grafu F024A . . . . .	28
3.6	Dodelitev napetosti $\zeta$ grafu F028A . . . . .	30
3.7	Dodelitev napetosti $\zeta$ grafu F032A . . . . .	33
3.8	Dodelitev napetosti $\zeta$ grafu F040A . . . . .	37
3.9	Pentacirkulanta F050A in F150A v Fruchtovi notaciji . . . . .	40
3.10	Dodelitev napetosti $\zeta$ grafu F050A . . . . .	42
5.1	Razdaljna particija . . . . .	85



# Tabele

3.1	Tetracirkulanti brez jedra in njihove lastnosti . . . . .	19
3.2	Tetracirkulanti z jedrom in njihove lastnosti . . . . .	22
3.3	Fundamentalni cikli in njihove slike z napetostmi v grafu F020A . . . . .	24
3.4	Fundamentalni cikli in njihove slike z napetostmi v grafu F020B . . . . .	26
3.5	Fundamentalni cikli in njihove slike z napetostmi v grafu F024A . . . . .	29
3.6	Fundamentalni cikli in njihove slike z napetostmi v grafu F028A . . . . .	31
3.7	Fundamentalni cikli in njihove slike z napetostmi v grafu F032A glede na avtomorfizma $\alpha$ in $\beta$ . . . . .	34
3.8	Fundamentalni cikli in njihove slike z napetostmi v grafu F032A glede na avtomorfizem $\gamma$ . . . . .	35
3.9	Fundamentalni cikli in njihove slike z napetostmi v grafu F040A glede na avtomorfizem $\alpha_1$ . . . . .	38
3.10	Fundamentalni cikli in njihove slike z napetostmi v grafu F040A glede na avtomorfizem $\beta_1$ . . . . .	39
3.11	Fundamentalni cikli in njihove slike z napetostmi v grafu F050A glede na avtomorfizem $\alpha$ . . . . .	43
3.12	Fundamentalni cikli in njihove slike z napetostmi v grafu F050A glede na avtomorfizem $\beta$ . . . . .	44



# Stvarno kazalo

- avtomorfizem grafa, 11
  - polregularen, 12
- cikel, 7
- delovanje, 5
  - desno, 5
  - levo, 5
  - permutacijska reprezentacija, 6
  - polregularno, 6
  - regularno, 6
  - tranzitivno, 6
  - zvesto, 6
- digraf, 7
- dodelitev napetosti, 13
  - $T$ -reducirana, 13
- dvig avtomorfizma, 13
- Fruchtova notacija, 12
- fundamentalen cikel, 13
- fundamentalen zaprt sprehod, 13
- graf, 6
  - $CQ(k, m)$ , 7
  - $K_{t \times n}$ , 7
  - $\mathcal{C}(m, n)$ , 16
  - $\Gamma(G, c)$ , 81
  - $k$ -povezan, 7
  - $m$ -Cayleyjev, 15
  - $n$ -razdaljno uravnotežen, 81
  - $t \times K_n$ , 7
  - bazni, 12
  - bicirkulant, 15
  - cirkulant, 15
  - dvodelen, 7
  - enostavni, 7
  - komplement, 6
  - krovni, 12
  - kubični, 7
  - kvocientni, 12
  - ločno tranzitiven, 11
  - napetostni, 13
  - nepovezan, 7
  - neprazen, 7
  - pentacirkulant, 15
  - polni, 7
  - polni dvodelni, 7
  - povezan, 7
  - povezavno regularen, 47
  - povezavno tranzitiven, 11
  - prazen, 7
  - regularen, 7
  - simetričen, 11
  - skoraj krepko regularen, 47
  - temeljni, 12
  - tetracirkulant, 15
  - točkovno tranzitiven, 11
  - tricirkulant, 15
  - usmerjeni, 7
- grupa
  - krovnih transformacij, 12
  - napetostna, 13
  - polregularna, 6
  - regularna, 6
- inducirani podgraf, 7
- izolirana točka, 6
- izomorfizem grafov, 6
- jedro homomorfizma, 6
- jedro podgrupe, 16
- krajišči povezave, 6
- krov, 12
- krovnna projekcija, 12
- kvocientni multigraf, 12
- lok, 7

- množica
  - lokov grafa, 7
  - povezav grafa, 6
  - točk grafa, 6
- napetost, 13
- ožina grafa, 7
- orbita, 6
- pentacirkulant
  - brez jedra, 16
  - z jedrom, 16
- podgraf, 6
- pot, 7
  - dolžina, 7
- povezana komponenta grafa, 7
- premer grafa, 7
- presečna točka, 7
- produkt grafov, 8
  - $G[H] - nG$ , 10
  - kartezični, 8
  - konormalni, 11
  - krepki, 9
  - leksikografski, 10
  - tenzorski, 8
- puščica, 7
- red grafa, 6
- soseдни točki, 6
- sprehod, 7
  - enostavni, 7
  - zaprti, 7
- stabilizator, 6
- stopnja grafa, 7
- stopnja točke, 7
- tetracirkulant
  - brez jedra, 16
  - z jedrom, 16
- valenca grafa, 7
- valenca točke, 7
- vlakno, 12
- vzporedne povezave, 7
- zanka, 7



# Zahvala

Najlepše bi se zahvalil svojemu mentorju dr. Štefku Miklaviču in somentorici dr. Klavdiji Kutnar za njuno strokovno in ostalo pomoč v času doktorskega študija in pri pripravi doktorske disertacije.

Zahvala gre tudi mojim najbližjim in vsem ostalim, ki ste mi v vsem tem času stali ob strani in na različne načine prispevali svoj kamenček v mozaik mojega matematičnega izobraževanja in raziskovanja.





